Universidade Federal Fluminense
Departamento de Física e Matemática - Fundamentos de Matemática
Maio de 2013

$x = -\frac{b}{2a}$ é o valor para o qual o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ tem um extremo (máximo ou mínimo)

O valor máximo ou mínimo do trinômio $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ é $-\frac{\Delta}{4a}$

As coordenadas cartesianas do extremo do trinômio $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Se o trinômio $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ tiver $\Delta \geq 0$ e x_1 e x_2 forem suas raízes reais, então pode ser fatorado como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se $\Delta < 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ tem sempre o sinal de a.

Se $\Delta = 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ tem o mesmo sinal de a para valores diferentes da raiz.

Se $\Delta > 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ tem sinal contrário ao de a para valores de x entre as raízes, valor nulo nas raízes, e mesmo sinal de a para os demais valores de x.

Exemplos:

Caso 1: Inequações Inteiras Para resolver a inequação $3x^2 - 4x + 1 > 0$, primeiro encontramos as raízes do trinômio:

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ \Delta = 4 \\ x = \frac{4 \pm 2}{6} \\ x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \end{array}$$

O trinômio terá sinal contrário ao de a para valores de x entre as raízes, valor nulo nas raízes, e mesmo sinal de a para os demais valores de x. Podemos resumir estas informações numa tabela, assim:

	$\frac{1}{3}$	1	
Sinal de $3x^2 - 4x + 1$	$+$	$-$	$+$

Logo, o conjunto-solução da inequação será:

$S = \{x \in \mathbb{R}/x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 1\}$.

Caso 2: Inequações Fracionárias .

Para resolver a inequação: $\frac{x^2+x+1}{3x^2-4x+1} < 0$, primeiro encontramos as raízes dos dois trinômios. Para o numerador (N):

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$
$$\text{Não há raízes reais}$$

Como $\Delta < 0$ então o trinômio $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ tem sempre o sinal de a, neste caso, é sempre positivo.

Para o denominador (D) já encontramos as raízes no exemplo 1, são $\frac{1}{3}$ e 1 e sabemos que o trinômio terá sinal contrário ao de a para valores de x entre as raízes, valor nulo nas raízes, e mesmo sinal de a para os demais valores de x.

Reunindo todas as informações numa tabela conseguimos analisar o sinal do quociente $Q = \frac{N}{D}$:

	$\frac{1}{3}$	1	
Sinal de N	$+$	$+$	$+$
Sinal de D	$+$	$-$	$+$
Sinal de Q	$+$	$-$	$+$

Logo, o conjunto-solução da inequação será $S = \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{3} < x < 1\}$.

Exercícios:

1. Resolva a inequação $x^2 - 5x - 6 < 0$
2. Resolva a inequação $-x^2 + 4x - 3 < 0$
3. Resolva a inequação $x^2 + 4x + 4 > 0$
4. Determinar os valores de $k \neq -1$ para que o trinômio $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + 3k - 3$ seja sempre negativo.
5. Resolva a inequação $\sqrt{x-1} < 3 - x$
6. Determine as soluções inteiras da inequação $x^2 - 6x - 7 < 0$

7. Determine as soluções inteiras e positivas de $x^2 - x - 56 < 0$

8. Determine as soluções inteiras da inequação $x^2 - x - 6 < 0$

9. Dar os valores de x que satisfazem simultaneamente as duas inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \end{cases}$$

10. Estudar a variação do sinal de:

    (a) $x^2 - 3x - 10$

    (b) $x^2 - 10x + 21$

11. Resolva as inequações:

    (a) $x^2 - 2 > -x^2 + 4x + 4$

    (b) $(2x^2 - 10x + 12)(x - 1) > 0$

    (c) $\frac{3x^2-4x+1}{x^2+1} > 0$

    (d) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 4x - 5) > 0$

    (e) $\frac{x^2-4x+3}{-x^2-3x+4} \geq 0$

    (f) $\frac{x^2-x-6}{-x^2+5x-4} > 0$

    (g) $\frac{x^2-x-2}{-x^2-x-6} < 0$

    (h) $\frac{16x^2+16x+4}{9x^2+9x-54} > 1$

    (i) $\frac{2x^2-4x+7}{x^2-5x+6} > -1$

12. Qual o máximo do trinômio $y = -2x^2 + 6x - 5$?

13. Achar o valor de m de modo que o trinômio $(2m-1)x^2+2(1-m)x+2m$ seja positivo para qualquer valor de x.

14. Achar os valores de n para os quais o número -2 fica compreendido entre as raízes do trinômio $2x^2 - (n - 4)x - (n - 1)$.

Algumas respostas:
4) $k < -2$
9) Entre 3 e 7
13) $m > \frac{\sqrt{3}}{3}$
14) $n < -1$