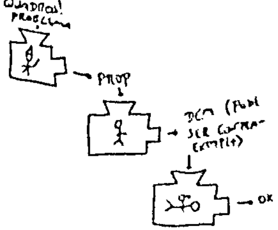
GA 19/FEV/2014

HOJE: INTRODUÇÃO AO CURSO!

MATERIAL DO CURSO:
EM http://angg.twu.net/
CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.
(DÁ PRA CHEGAR AQUI E PROCURAR POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE)

UMA DAS COISAS MAIS IMPORTANTE LÁ É O PDF COM AS FOTOS DOS QUADROS!



TIPOS

NO CURSO VOCÊS VÃO TER QUE LIDAR COM
NÚMEROS,
PONTOS,
VETORES,
CONJUNTOS,
IGUALDADES,
$\leq, \geq, <, >, \subset, \subseteq, \ldots$,
PROPOSIÇÕES,
TABELAS,
DEMONSTRAÇÕES,
REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS, ...

PROP: PARA TODOS $a,b,c \in \mathbb{R}$ VALE $(a \cdot b)+c = a \cdot (b+c)$

ISTO É FALSO.
QUANDO $a=2$, $b=3$, $c=4$

TEMOS:
$$\begin{aligned}(a \cdot b)+c &= (2 \cdot 3)+4 \\ &= 6+4 \\ &= 10 \\ &\neq 14 \\ &= 2 \cdot (3+4) \\ &= a \cdot (b+c)\end{aligned}$$

VETORES E PONTOS

NESTE CURSO NÓS VAMOS DISTINGUIR SEMPRE (EXCETO NUM TRECHO CURTO LÁ NO FINAL) PONTOS DE VETORES.

NOTAÇÃO:
$(2,3)$ É UM PONTO DE $\mathbb{R}^2$
$\overrightarrow{(4,5)}$ VETOR EM $\mathbb{R}^2$
$(2,5,0)$ PONTO DE $\mathbb{R}^3$
$\overrightarrow{(2,5,0)}$ VETOR EM $\mathbb{R}^3$

GRAFICAMENTE, PONTOS SÃO "•"S, VETORES SÃO "→"S
(VETORES SÃO DESLOCAMENTOS)

$$\underbrace{(2,3)}_{\text{PONTO}} + \underbrace{\overrightarrow{(4,5)}}_{\text{VETOR}}$$

O "+" VAI NOS DAR UM MODO DE FORMALIZAR A IDÉIA DE DESLOCAMENTO!

OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES

DEFINIÇÕES: ⇐

1. $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$
2. $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$
3. $k \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$
4. $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

EXERCÍCIO:

(a) COMPLETE E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$\vec{v}$	A	$A+\vec{v}$	$A+2\vec{v}$	$A-\vec{v}$
$\overrightarrow{(1,1)}$	$(-2,0)$			
$\overrightarrow{(1,0)}$	$(0,2)$			
$\overrightarrow{(2,-1)}$	$(0,2)$			

DICA:
QUANDO $A=(2,3)$ E $\vec{v}=(4,5)$
TEMOS
$$\begin{aligned}A+10\vec{v} &= (2,3)+10\overrightarrow{(4,5)} \\ &= (2,3)+\overrightarrow{(40,50)} \\ &= (42,53)\end{aligned}$$

(b) COMPLETE E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$\vec{v}$	$\vec{u}$	$O+\vec{v}$	$O+2\vec{v}$	$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$	$O+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$
$\overrightarrow{(1,0)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$				
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$				
$\overrightarrow{(0,2)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$				
$\overrightarrow{(1,2)}$	$\overrightarrow{(3,1)}$				
$\overrightarrow{(1,2)}$	$\overrightarrow{(3,0)}$				

OBS: $O=(0,0)$

$\boxed{\text{GA 21/FEV/2014}}$

... UMA COISA QUE OS LIVROS NÃO FAZEM COM DETALHE SUFICIENTE, E QUE VAI SER MUITO IMPORTANTE PRA ESTE CURSO (E PRA OUTROS!) É NOTAÇÃO DE CONJUNTOS.

VAMOS USAR DUAS NOTAÇÕES DIFERENTES (MAS QUE SÃO VISUALMENTE BEM PARECIDAS!) PRA CONSTRUIR CONJUNTOS INFINITOS:

$$\{\underbrace{(x,y)\in\mathbb{R}^2}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{y=2x+1}_{\text{FILTRO}}\}$$

$$\{\underbrace{(x,2x+1)}_{\text{EXPRESSÃO}} \mid \underbrace{x\in\mathbb{R}}_{\text{GERADOR}}\}$$

EXEMPLO:

① $(3,4)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+1\}$
É EQUIVALENTE A ESTA OUTRA PROPOSIÇÃO:

② QUANDO $(x,y)=(3,4)$ TEMOS $y=2x+1$.
E A ESTAS:

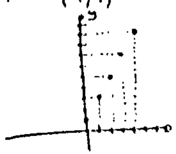
③ $\begin{cases}\text{QUANDO } x=3 \text{ E } y=4 \\ \text{TEMOS } y=2x+1,\end{cases}$

④ É: $4=2\cdot3+1$.

EM GERAL É MAIS FÁCIL CALCULAR OS PONTOS DE CONJUNTOS ESCRITOS NA FORMA EXPRESSÃO/GERADOR...

TABELA PRA $\{(x,2x+1) \mid x\in\mathbb{R}\}$,

x	$(x,2x+1)$
0	$(0,2\cdot0+1)=(0,1)$
1	$(1,2\cdot1+1)=(1,3)$
2	$(2,5)$
3	$(3,7)$
4	$(4,9)$

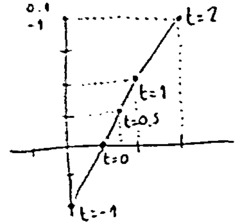


ÀS VEZES É ÚTIL, QUANDO A GENTE TENTA ENTENDER SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}^2$ DEFINIDOS POR EXPRESSÃO E GERADOR, ANOTAR NO GRÁFICO QUAL É O VALOR DO GERADOR CORRESPONDENTE A CADA PONTO...

EXEMPLO:

$\{(t+1,2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

t	$(t+1,2t)$
0	$(1,0)$
1	$(2,2)$
2	
3	
0.5	
0.1	
-1	



PRA PROVAR QUE UM PONTO PERTENCE A ESTA RETA PRECISAMOS ENCONTRAR O VALOR DE t ASSOCIADO A ELE...

OBS. PODEMOS ENCARAR $\{(t+1,2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ COMO SENDO UMA TRAJETÓRIA.

OBS: ÀS VEZES A GENTE PENSA EM TRAJETÓRIAS COMO SENDO FUNÇÕES...

$$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$
$$t\mapsto(t+1,2t)$$

AÍ $P(0)=(1,0)$,
$P(1)=(2,2)$, ETC,
E O CONJUNTO $\{(t+1,2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ VAI SER A "IMAGEM" DA FUNÇÃO P.

REPARE: A NOTAÇÃO EXPRESSÃO/GERADOR É BEM PODEROSA...

EXERCÍCIO: REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$

ⓐ $\{(t,4-t^2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

ⓑ $\{(4-t^2,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

ⓒ SEJA $f(x)=x^2$, REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$ $\{(x,f(x)) \mid x\in\mathbb{R}\}$

VETORES ÀS VEZES SÃO USADOS PRA REPRESENTAR VELOCIDADE.
PORQUE?

EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE

ⓓ $\{(0,1)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

> LEMBRE QUE:
> $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$
> $K\overrightarrow{(a,b)}=\overrightarrow{(Ka,Kb)}$

ⓔ $\{(-1,0)+t\overrightarrow{(1,-1)}+t^2\overrightarrow{(1,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

COMO A GENTE PODE FAZER A ⓔ SEM SE PERDER?

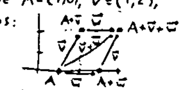
REGRA DO PARALELOGRAMO

PROP: PARA QUALQUER $A=(A_1,A_2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(v_1,v_2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(w_1,w_2)}$

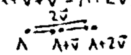
TEMOS $(A+\vec{v})+\vec{w}=A+(\vec{v}+\vec{w})=(A+\vec{w})+\vec{v}$
$=(A_1+v_1+w_1,A_2+v_2+w_2)$.

ALGEBRICAMENTE ISTO É FÁCIL DE ENTENDER, MAS E GEOMETRICAMENTE?

NO CASO EM QUE $A=(1,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(2,0)}$, TEMOS:



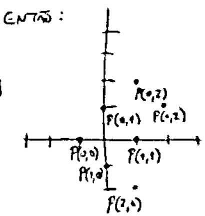
... E TAMBÉM:
$A+\vec{v}+\vec{v}=A+2\vec{v}$.



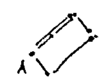
VAMOS DEFINIR (TEMPORARIAMENTE!):

$$P(a,b)=(-1,0)+a\overrightarrow{(1,-1)}+b\overrightarrow{(1,1)}$$

ENTÃO:



EXERCÍCIO: REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$ OS PONTOS $P(a,b)$ PARA $a\in\{0,1,2,3,4\}$ E $b\in\{0,1,2,3,4\}$ (COMO NO GRÁFICO ACIMA).



GA 26/fev/2014

Nas aulas anteriores nós vimos pontos e vetores e operações sobre pontos e vetores...

Hoje vamos ver propriedades destas operações - e provar nossos primeiros teoremas.

Prop (da aula passada): Se $A\in\mathbb{R}^2$ e $\vec v, \vec w$ são vetores em $\mathbb{R}^2$, então $(A+\vec v)+\vec w = A+(\vec v+\vec w) = (A+\vec w)+\vec v$

Obs: Geometricamente isto é a regra do paralelogramo.

Pra provar algumas das igualdades acima algebricamente a gente faz:

Sejam $A=(A_1,A_2)$, $\vec v = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$, $\vec w = \overrightarrow{(w_1,w_2)}$,

E aí a gente expande todas as definições em $(A+\vec v)+\vec w$, $A+(\vec v+\vec w)$, e $(A+\vec w)+\vec v$

Idéia: expandir definições e reduzir a complexidade (num certo sentido)...

Lembrem que:

(1) $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$

(2) $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$,

e que $(a,b)+(c,d) = $ erro.

Então:

$$\left.\begin{aligned}(A+\vec v)+\vec w &\overset{I}{=} ((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\\ &\overset{II}{=} (A_1+v_1, A_2+v_2)+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\\ &\overset{III}{=} (A_1+v_1+w_1, A_2+v_2+w_2)\end{aligned}\right\}(A)$$

onde (I) é verdade pelas defs de $A, \vec v, \vec w$,

(II) é verdade por (1),

(III) é verdade por (1).

E:

$$\left.\begin{aligned}A+(\vec v+\vec w) &\overset{IV}{=} \dots\\ &\overset{V}{=} \dots\\ &\overset{VI}{=} (A_1+v_1+w_1, A_2+v_2+w_2)\end{aligned}\right\}(B)$$

E agora podemos juntar essas duas sequências de igualdades numa só:

$$\begin{aligned}(A+\vec v)+\vec w &\overset{I}{=}\ \overset{II}{=}\ \overset{III}{=} (A_1+v_1+w_1, A_2+v_2+w_2) && (A)\\ &\overset{VI}{=}\ \overset{V}{=}\ \overset{IV}{=} A+(\vec v+\vec w) && (B) \text{ ao contrário.}\end{aligned}$$

Exercício:

Tentem usar esta mesma técnica para provar que:

(a) $a\cdot(b\cdot\vec v) = (a\cdot b)\cdot\vec v$

(b) $a\cdot(\vec v+\vec w) = a\cdot\vec v + a\cdot\vec w$

(c) $\vec v+\vec w = \vec w+\vec v$

(d) $\vec u+(\vec v+\vec w) = (\vec u+\vec v)+\vec w$

(e) $(a\cdot\vec v)\cdot\vec w = a\cdot(\vec v\cdot\vec w)$

(f) $\vec v\cdot\vec w = \vec w\cdot\vec v$

Exercício:
Expanda $(\vec u\cdot\vec v)\cdot\vec w$ e $(\vec u\cdot\vec w)\cdot\vec v$ e mostre - por contra-exemplo - que nem sempre vale $(\vec u\cdot\vec v)\cdot\vec w = (\vec u\cdot\vec w)\cdot\vec v$.

IMPORTANTE!

Dica importante: escrevam "proposição" e "demonstração" nos lugares certos. Exemplo:

Prop: $a\cdot(b\cdot\vec v) = (a\cdot b)\cdot\vec v$

Dem: $a\cdot(b\cdot\vec v) = a\cdot(b\cdot\overrightarrow{(v_1,v_2)})$
$= a\cdot\overrightarrow{(bv_1, bv_2)}$
$= \overrightarrow{(abv_1, abv_2)}$
$= (a\cdot b)\cdot\overrightarrow{(v_1,v_2)}$
$= (a\cdot b)\cdot\vec v$

Lembrem que multiplicação de matrizes (e vetores) não é comutativa... Por exemplo, às vezes temos

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

e além disto

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

e $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = $ ERRO.

Os "·"s que aparecem em $(\vec u\cdot\vec v)\cdot\vec w \overset{?}{=} (\vec u\cdot\vec w)\cdot\vec v$ também são operações que podem não ser comutativas ou associativas...

E além disto, por convenção,
$a\cdot\overrightarrow{(b,c)} = \overrightarrow{(ab,ac)}$
$\overrightarrow{(b,c)}\cdot a$ = ERRO.

Pra casa!
Façam com cuidado!!!

GA 12/mar/2014

Hoje: 1ª lista do Reginaldo! Vamos usá-la pra muitas coisas.

Os exercícios principais dela são exercícios de "V/F/justifique".

Exemplos:

ⓐ (F) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}$

ⓑ (F) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} \neq (\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}$

ⓒ (V) $a\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v}+a\vec{w}$

① Cada problema desses corresponde a uma tabela infinita. !!

② Que tabela é esta? Quais são as colunas dela?

③ Como encontrar um contra-exemplo?

④ Como visualizar o que cada problema destes quer dizer?

⑤ Como resolver algebricamente...?

⓪ Tradicionalmente

em matemática a gente faz estas proposições numa forma incompleta...

A gente omite os "∀"s, e deixamos eles implícitos...

A versão "completa" do ⓐ seria:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para todo } \vec{u} \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ \text{para todo } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ \text{para todo } \vec{w} \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v} \\ \text{é verdade.}\end{array}\right\}$$

Isto é falso! Contra-exemplo: $\vec{u}=\overrightarrow{(0,1)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,3)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(4,5)}$.

Tabela:

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$	$(\vec{u}\cdot\vec{v})$	$(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}\cdot\vec{w})$	$(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}$	$(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}$
$\overrightarrow{(0,0)}$	$\overrightarrow{(4,0)}$	$\overrightarrow{(0,0)}$	0	$(0,0)$	0	$(0,0)$	V
$\overrightarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$	$\overrightarrow{(4,5)}$	3	$\overrightarrow{(12,15)}$	5	$\overrightarrow{(10,15)}$	F ⇦

A lista precisa de algumas definições que ainda não vimos!

- O ponto médio de (A_1,A_2) e (B_1,B_2) é $\left(\frac{A_1+B_1}{2}, \frac{A_2+B_2}{2}\right)$
- $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais – notação: $\vec{v}\perp\vec{w}$ – se e só se $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$
- Combinação linear
- Triângulo retângulo
- $Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

etc.

... e algumas questões dela envolvem "e", "ou" e "implica / quando / então".

Exemplo:

ⓓ Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo comprimento, então $\vec{u}-\vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$ são ortogonais.

Como fazer a tabela pra este item?

- $\|\vec{v}\|$ é o comprimento de $\vec{v}$
- "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo comprimento" vai virar "$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$"
- "$\vec{u}-\vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$ são ortogonais" vai virar "$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$"
- E o "então"?

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$	$\vec{u}-\vec{v}$	$\vec{u}+\vec{v}$	$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$	$(\vec{u}-\vec{v})\perp(\vec{u}+\vec{v})$	$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \to (\vec{u}-\vec{v})\perp(\vec{u}+\vec{v})$
$\overrightarrow{(0,0)}$	$\overrightarrow{(0,0)}$	0	0	V					
$\overrightarrow{(0,0)}$	$\overrightarrow{(0,1)}$	0	1	F					V?
$\overrightarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(1,0)}$	1	1	V					V?
$\overrightarrow{(0,5)}$	$\overrightarrow{(3,4)}$								V?

DEF: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

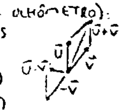
DEF:

P	Q	P e Q	P ou Q	P → Q
F	F	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

Exercício (de representação gráfica e olhômetro):

Nos casos

$\vec{u}$	$\vec{v}$
$\overrightarrow{(0,5)}$	$\overrightarrow{(3,4)}$
$\overrightarrow{(0,2)}$	$\overrightarrow{(3,0)}$



Tentem representar tudo graficamente e descobrir se $(\vec{u}-\vec{v})\perp(\vec{u}+\vec{v})$ sem fazer contas.

GA 14/MAR/2014

ESTÁVAMOS TRABALHANDO NESTE PROBLEMA:

( ) SE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ ENTÃO $(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$

LEMBREM QUE AS OPERAÇÕES LÓGICAS BINÁRIAS SÃO <u>DEFINIDAS</u> POR ESTA TABELA:

P	Q	P e Q	P ou Q	$P \to Q$
F	F	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

O NOSSO PROBLEMA PODE SER REESCRITO COMO:

( ) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \to (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$

SE FIZERMOS UMA TABELA E TENTARMOS PREENCHÊ-LA, VAMOS VER QUE NEM SEMPRE PRECISAMOS PREENCHER AMBAS AS COLUNAS "$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$" ⇐ α E "$(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$" ⟸ β

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$	$(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$	$\alpha \to \beta$
$\overrightarrow{(0,2)}$	$\overrightarrow{(3,0)}$	F	[NÃO IMPORTA]	V
...	...	[NÃO IMPORTA]	V	V

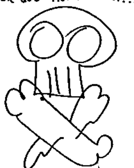
VAMOS USAR ESTA IDÉIA <u>DEPOIS</u> (BEM DEPOIS?) QUANDO FORMOS VER COMO <u>PROVAR</u> PROPOSIÇÕES COM "$\to$"...

<u>PROPOSIÇÕES</u>

REPAREM QUE NOS PROBLEMAS DE "V/F/JUSTIFIQUE" DA LISTA DO REGINALDO NENHUMA DAS PROPOSIÇÕES TÊM "PORQUÊ"...

ELAS ESTÃO ESCRITAS "COMO PROPOSIÇÕES", OU SEJA, COMO AFIRMAÇÕES QUE PODEM SER TESTADAS POR TABELAS (TALVEZ INFINITAS)...

A GENTE VAI TER QUE PRESTAR MUITA ATENÇÃO EM COMO <u>PROPOSIÇÕES</u> E <u>DEMONSTRAÇÕES</u> SÃO ESCRITAS - EXISTEM REGRAS PRECISAS PARA ISTO, MAS NÃO DÁ PRA DAR TODAS ELAS EXPLICITAMENTE NESTE CURSO, ENTÃO VOCÊS VÃO TER QUE PRATICAR !!!!!



<u>GENERALIZAÇÃO E ESPECIALIZAÇÃO</u>

PRA VER QUE NEM SEMPRE VALE

$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$

NÓS OLHAMOS PARA UM <u>CASO PARTICULAR</u>:

$$(\overrightarrow{(0,1)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}) \cdot \overrightarrow{(4,5)} \neq (\overrightarrow{(0,1)} \cdot \overrightarrow{(4,5)}) \cdot \overrightarrow{(2,3)}$$

GERAR CASOS PARTICULARES DE UMA AFIRMAÇÃO GERAL É FÁCIL - E QUANDO A GENTE VAI ESCREVER EM PORTUGUÊS O QUE A GENTE FEZ BASTA DIZER ALGO COMO: <u>QUANDO</u> $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(2,3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(4,5)}$ TEMOS ...

<u>GENERALIZAÇÕES</u> SÃO MAIS DIFÍCEIS - VOCÊS VÃO TER QUE TREINAR MUITO!

<u>EXEMPLO:</u>

$2^3 + 2^3 = 2^4$ (OK)

$2^{99} + 2^{99} = 2^{100}$ (???)

COMO <u>DEMONSTRAR</u> QUE $2^{99} + 2^{99} = 2^{100}$ DE UM MODO QUE QUALQUER UM (ATÉ A SUA AVÓ E O LEITOR DE RESSACA) ENTENDA(M)?

$$\begin{aligned} 2^{99} + 2^{99} &= 2 \cdot 2^{99} \\ &= 2^1 \cdot 2^{99} \\ &= 2^{1+99} \\ &= 2^{100} \end{aligned}$$

ESTA FORMA É CLARA O SUFICIENTE (ACHO!), E ELA É EXATAMENTE O QUE A GENTE PRECISA PRA GENERALIZAR O $2^{99} + 2^{99} = 2^{100}$... SE SUBSTITUÍMOS "99" POR "K" E "100" POR "K+1", TEMOS:

$$\begin{aligned} 2^k + 2^k &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^1 \cdot 2^k \\ &= 2^{1+k} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO - PRA AGORA:

1. DETERMINEM QUAIS DOS EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE DA LISTA DO REGINALDO SÃO "V", QUAIS SÃO "F", E QUAIS SÃO DIFÍCEIS E VOCÊS QUEREM DEIXÁ-LOS PRA DEPOIS;
2. ESCOLHAM ALGUNS DOS "V"'S E TENTEM PROVÁ-LOS (EM GRUPO)!

DICAS PRA QUEM NÃO ESTIVER CONSEGUINDO FAZER GRANDE COISA:

a) PREPARE A TABELA PARA CADA UM DOS PROBLEMAS (+ DIFÍCIL)

b) PREENCHA A TABELA COM ALGUNS CASOS PARTICULARES (+ FÁCIL)

TENTEM FAZER EM CASA TODOS ESSES EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE DA LISTA!

NA AULA QUE VEM NÓS VAMOS TIRAR <u>PRATICAMENTE</u> TODAS AS DÚVIDAS SOBRE ELES - VÃO FICAR FALTANDO, P.EX., UM TRUQUE PRO ITEM C, COISAS SOBRE PROJEÇÃO, ETC...

$\boxed{\text{GA 21/mar/2014}}$

Um problema da lista do Reginaldo:

( ) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores então $\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\|\vec{w}\|\vec{v}\|$

Vamos fazer um teste:

Se $\vec{v} = \overrightarrow{(2,0)}$

e $\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$

Então $\|\vec{v}\| = 2$,

$\|\vec{w}\| = 5$,

$\|\vec{v}\|\vec{w} = 2\cdot\overrightarrow{(3,4)} = \overrightarrow{(6,8)}$

$\|\vec{w}\|\vec{v} = 5\cdot\overrightarrow{(2,0)} = \overrightarrow{(10,0)}$

$\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\overrightarrow{(6,8)}\| = 10$

$\|\|\vec{w}\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{(10,0)}\| = 10$.

E no caso geral?

Digamos que $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(w_1,w_2)}$...

Então $\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,\overrightarrow{(w_1,w_2)}\|$

e as contas ficam enormes

(Tente provar em casa que $\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\|\vec{w}\|\vec{v}\|$ com uma sequência de igualdades só!)

Como fazer as contas ficarem menores!

Em praticamente qualquer problema de GA com contas grandes dá pra descobrir truques pra reduzir as contas bastante...

Os truques principais são:

- Definir símbolos para expressões compridas que se repetem - p.ex.,
  $\alpha = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$
  $\beta = \|\vec{w}\| = \sqrt{w_1^2+w_2^2}$
- Definir funções (não vamos usar aqui)
- Provar lemas.

⇧

MUITO IMPORTANTE!

E isto já trabalho pra aprender!

Treinem muito!

Obs: Em geral vocês vão ter que criar os lemas que vocês querem provar - como hipóteses!

Hipótese:

$\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ ①

$= \|\vec{w}\|\|\vec{v}\|$ ②

$= \|\|\vec{w}\|\vec{v}\|$ ③

Repare que esta hipótese tem três igualdades...

② é trivial, então, pra provar que ela é verdade basta provar ① e ③... elas são parecidas, então podemos tentar prová-las em separado.

Hipótese:

$\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ ④

Hipótese:

$\|\alpha\vec{w}\| = \alpha\|\vec{w}\|$ ⑤

(Dica: teste a ⑤ com $\alpha = -2$)

Proposição:

$\|\alpha\vec{w}\| = \alpha\|\vec{w}\|$.

Sejam $\alpha = -2$ e $\vec{w} = (5,0)$

Então:

$\|-2\overrightarrow{(5;0)}\| =$

$\|\overrightarrow{(-10;0)}\| =$

$\sqrt{100+0} = 10$

$\alpha\|\vec{w}\| =$

$-2\cdot\|\overrightarrow{(5,0)}\| =$

$-2\cdot\sqrt{25+0} =$

$-2\cdot(5) = -10$

Portanto neste caso $\|\alpha\vec{w}\| \neq \alpha\|\vec{w}\|$,

e a proposição "$\|\alpha\vec{w}\| = \alpha\|\vec{w}\|$" nem sempre é verdadeira.

Obs. (importante!)

Se numa demonstração alguém escreve algo como "$\sqrt{2+3} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$"

você não precisa calcular $\sqrt{2+3}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ pra dizer que este passo não vale!

Dá pra dizer:

"Que regra você está usando aqui?

É $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$?

$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$,

esta regra não vale..."

Repare que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ em alguns casos - p.ex. quando $a=0$ ou $b=0$ - mas você não pode usar a "regra" "$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$" no caso geral!

Proposição:

$\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$

Demonstração:

Sejam: $\alpha = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$

$\beta = \sqrt{w_1^2+w_2^2}$

Então: $\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| =$

$\|\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,.\,\vec{w}\| =$

$\|\alpha\cdot(w_1,w_2)\| =$

$\|(\alpha\cdot w_1, \alpha\cdot w_2)\| =$

$\sqrt{\alpha^2 w_1^2+\alpha^2 w_2^2} =$

$\sqrt{\alpha^2(w_1^2+w_2^2)} =$

$\alpha\sqrt{w_1^2+w_2^2} =$

$\alpha.\beta =$

$\sqrt{v_1^2+v_2^2}\sqrt{w_1^2+w_2^2} =$

$\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$

Como generalizar a proposição ④?

$\|\alpha\vec{w}\| = \alpha\|\vec{w}\|$ ⑤

é a generalização errada (porque ⑤ é falso...)

Como "consertar" o ⑤?

Dica: Vamos usar módulo.

Def: $|a| = \sqrt{a^2}$

e podemos usar estas regras para a "$\sqrt{\ }$":

Se $a,b \geq 0$ então

$\sqrt{a}^2 = a$,

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$,

$\sqrt{a} \geq 0$.

Hipótese:

$\|\alpha\vec{w}\| = |\alpha|\|\vec{w}\|$ ⑥

Demonstração:

$\|\alpha.\vec{w}\| =$

$\|(\alpha w_1, \alpha w_2)\| = \sqrt{\alpha^2 w_1^2+\alpha^2 w_2^2} =$

$\sqrt{\alpha^2(w_1^2+w_2^2)} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{(w_1^2+w_2^2)} =$

$|\alpha|\|\vec{w}\|$

GA 21/MAR/2014

AVISOS: NA 6ª 28/MARÇO NÃO VOU PODER DAR AULA! VAMOS MARCAR UMA REPOSIÇÃO DEPOIS.

PROPOSIÇÃO:
PARA $\vec{v}, \vec{w}$ VETORES EM $\mathbb{R}^2$,

$$\| \|\vec{v}\| \vec{w} \| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \quad (1)$$
$$= \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \quad (2)$$
$$= \| \|\vec{w}\| \vec{v} \| \quad (3)$$

DEMONSTRAÇÃO:
VAMOS COMEÇAR COM UM LEMA: PARA $\alpha \in \mathbb{R}$ E $\vec{u}$ VETOR EM $\mathbb{R}^2$,

$$\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|. \quad (4)$$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA:
SE $\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$,

$$\|\alpha \vec{u}\| = \sqrt{\alpha \overrightarrow{(u_1,u_2)} \cdot \alpha \overrightarrow{(u_1,u_2)}}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 u_1^2 + \alpha^2 u_2^2}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 (u_1^2 + u_2^2)}$$
$$= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$
$$= |\alpha| \|\vec{u}\|$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO:
(1) É VERDADE PORQUE É UMA APLICAÇÃO DO LEMA COM $\alpha = \|\vec{v}\|$ E $\vec{u} = \vec{w}$;
(2) É TRIVIAL;
(3) É APLICAÇÃO DO LEMA COM $\alpha = \|\vec{w}\|$ E $\vec{u} = \vec{v}$.

GA 26/MAR/2014

NA AULA PASSADA VIMOS COMO PROVAR TEOREMAS USANDO <u>LEMAS</u>. O IDEAL É SÓ USAR COISAS QUE JÁ DEMONSTRAMOS, MAS É ACEITÁVEL ESCREVER COISAS ASSIM:

TEOREMA:

$\| \|\vec{v}\| \vec{u} \| = \| \|\vec{u}\| \vec{v} \|$

DEMONSTRAÇÃO:

$\| \|\vec{v}\| \vec{u} \| = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\|$ (1)

$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

$= \| \|\vec{u}\| \vec{v} \|$ (2)

ONDE (1) E (2) SÃO CONSEQUÊNCIAS DO LEMA ABAIXO

LEMA: $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

DEMONSTRAÇÃO ...

COMO ESTUDAR PRA GA?

O GRANDE TRUQUE É VOCÊS TENTAREM ORGANIZAR <u>TODOS</u> OS TEOREMAS QUE VOCÊS DEMONSTRAREM NUMA ORDEM EM QUE A DEMONSTRAÇÃO DE CADA UM SÓ DEPENDA DE OUTRAS DEMONSTRAÇÕES ANTERIORES... NUMERE CADA UM DOS SEUS TEOREMAS - CADA PESSOA VAI TER UMA NUMERAÇÃO DIFERENTE.

PROJEÇÕES

$$Pr_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

MNEMÔNICA: ISTO É A "PROJEÇÃO <u>SOBRE $\vec{v}$</u> DE $\vec{w}$".

PROVAR COISAS COM PROJEÇÕES SÓ FAZENDO CONTAS DIRETO, SEM TEOREMAS E LEMAS, É HORRÍVEL - AS CONTAS FICAM MUITO GRANDES!

FATOS

(OBS: QUANDO A GENTE DIZ "FATO" AO INVÉS DE "TEOREMA", "LEMA", "PROPOSIÇÃO", ETC, FICA IMPLÍCITO QUE O "FATO" É VERDADE - E EM GERAL FICA IMPLÍCITO QUE NÃO VAMOS DEMONSTRÁ-LO! EU POSSO USAR "FATOS" :), VOCÊS NÃO. :( ).

(1) SEJAM $r = \{O + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B \in \mathbb{R}^2$. ENTÃO $C = O + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{OB}$ É O PONTO DA RETA r MAIS PRÓXIMO DE B. } PARA TODOS $\vec{v}$ EM $\mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ (COM $\vec{v} \neq \vec{0}$)

(2) $(\vec{w} - Pr_{\vec{v}} \vec{w}) \perp \vec{v}$. } PARA TODOS $\vec{v}, \vec{w}$ EM $\mathbb{R}^2$ COM $\vec{v} \neq \vec{0}$.

EXERCÍCIO:
ESCOLHA ALGUNS CASOS PARTICULARES E REPRESENTE OS FATOS (1) E (2) GRAFICAMENTE NESTES CASOS PARTICULARES PRO LEITOR PODER VERIFICAR OLHOMETRICAMENTE (OU ALGEBRICAMENTE).

OUTRO EXERCÍCIO:
AGORA QUE VOCÊS JÁ FIZERAM ALGUNS CASOS DO (1) E DO (2) VOCÊS JÁ TÊM ALGUMA "INTUIÇÃO GEOMÉTRICA" SOBRE ESTAS AFIRMAÇÕES... USE-A PRA FORMULAR VÁRIAS HIPÓTESES - ESCREVA-AS COMO SE FOSSEM QUESTÕES DE V/F/JUSTIFIQUE.

POR EXEMPLO:

( ) SE $\vec{v} = \overrightarrow{(4,2)}$, $B = (0,5)$, $C = O + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{OB}$, ENTÃO $C = (4,2)$.

PRA CASA:

(a) DEMONSTREM QUE $(\vec{w} - Pr_{\vec{v}} \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$ NO CASO GERAL.

(b) CONSIDERE ESTA AFIRMAÇÃO, QUE É UMA ESPÉCIE DE GENERALIZAÇÃO DA (1):

( ) SEJAM $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B \in \mathbb{R}^2$. ENTÃO $C = A + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$ É O PONTO DA RETA r MAIS PRÓXIMO DE B.

TESTE ISTO EM VÁRIOS CASOS PARTICULARES

(c) APRENDA A CALCULAR (EXATAMENTE QUANTO POSSÍVEL, APROXIMADAMENTE QUANDO NÃO DER) COISAS COMO

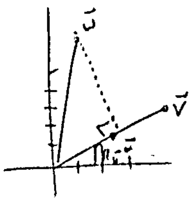
$Pr_{\vec{v}} \vec{w}$,

$\vec{w} - Pr_{\vec{v}} \vec{w}$,

ETC,

"NO OLHÔMETRO".

NA 6ª NÃO TEM AULA! VAMOS REPOR DEPOIS!



GA 2/ABRIL/2014

VAMOS COMEÇAR A USAR AS PRIMEIRAS 36 PÁGINAS DO CAMARGO/BOULOS...

A P1 VAI SER SOBRE DEMONSTRAÇÕES - SOBRE O MATERIAL DESSA PARTE DO BOULOS, MAIS PROJEÇÕES, MAIS UM POUCO DE MATRIZES.

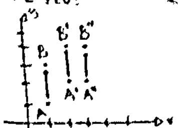
VAMOS TRABALHAR SÓ EM $\mathbb{R}^2$ POR ENQUANTO.

P.18, PROP 3-2:
REPARE QUE O LIVRO DIZ QUE M_1, M_2 E M_4 ESTÃO "FORA DOS OBJETIVOS DESTE LIVRO"...
ESTAMOS COMPLEMENTANDO O LIVRO APRENDENDO A FAZER DEMONSTRAÇÕES DIREITO!

CAPÍTULO 1: VETORES

(COM DETALHES QUE AINDA NÃO VIMOS!)

EXEMPLO:



O LIVRO DE "SEGMENTOS EQUIPOLENTES"...

$(A,B) \sim (A',B') \sim (A'',B'')$

SÃO SEGMENTOS ORIENTADOS EQUIPOLENTES.

DEF DO "$\sim$": DEF 1-3 DO LIVRO

"$\sim$" É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: PROP 1-4.

AS DEFS 1-6 E 1-7 DEFINEM VETORES, MAS USANDO CONJUNTOS INFINITOS...

UMA DEFINIÇÃO AUXILIAR:
UM CONJUNTO DE SEGMENTOS ORIENTADOS É UMA CLASSE DE SEGMENTOS EQUIPOLENTES ("CSE") QUANDO TODOS OS SEUS ELEMENTOS SÃO SEGMENTOS ORIENTADOS EQUIPOLENTES ENTRE SI.

EXEMPLOS.
(A, A', A'', B, B', B'' SÃO OS DA FIGURA À ESQUERDA):

ⓐ $\{(A,B),(A',B'),(A'',B'')\}$ É UMA CSE

ⓑ $\{(A,B),(B',A')\}$ NÃO É UMA CSE

DEFINIÇÃO FORMAL:
UM CONJUNTO C É UMA CSE SE E SÓ SE:
① TODOS OS ELEMENTOS DE C SÃO SEGMENTOS ORIENTADOS (EM $\mathbb{R}^2$)
Ⓘ $\forall (P,Q) \in C.$
$\forall (P',Q') \in C.$
$(P,Q) \sim (P',Q')$

COMO ENTENDER O Ⓘ?
VAMOS VER OS CASOS
$C = \{(A,B),(B',A')\}$ E
$C = \{(A,B),(A',B')\}$.

(P,Q)	(P',Q')	$(P,Q)\sim(P',Q')$
(A,B)	(A,B)	?
(A,B)	(A',B')	?
(A',B')	(A,B)	?
(A',B')	(A',B')	?

OBS:
$A = (1,1)$
$B = (1,3)$
$A' = (2,2)$
$B' = (2,4)$
$C = \{((1,1),(1,3)), ((2,2),(2,4))\}$

OBS: TEM VÁRIAS COISAS NO LIVRO QUE NÃO VIMOS - P.EX.: "COMPRIMENTO", "DIREÇÃO", "SENTIDO"...

PROP: $\{(A,B),(B',A')\}$ NÃO É UMA CSE.
[PRA CASA: PROCUREM O MELHOR MODO POSSÍVEL PRA DEMONSTRAR ISTO DE UM MODO QUE O ~~?~~ ENTENDA.]

TRÊS FATOS (A DEMONSTRAÇÃO COMPLETA DELES É TRABALHOSA):

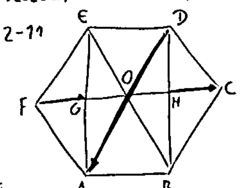
① PARA TODA CSE $C \neq \emptyset$ EXISTE EXATAMENTE UM VETOR $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ TAL QUE $C \in \vec{v}$

② UMA CSE C É UM VETOR SE E SÓ SE NÃO EXISTE UMA CSE C' COM $C \subsetneq C'$

③ $\overrightarrow{(a,b)} = \{((x,y),(x+a,y+b)) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

NO FINAL DO CAPÍTULO 2 DO LIVRO TEM VÁRIOS PROBLEMAS SOBRE SOMAS DE VETORES QUE SÃO RESOLVIDOS GEOMETRICAMENTE "DESLOCANDO VETORES".

2-11



DETERMINE $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HC}$.
DICA: $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EA}$, MAS COMO DEMONSTRAR ISSO COM UMA SÉRIE DE IGUALDADES USANDO SÓ AS PROPRIEDADES CONHECIDAS?

EXEMPLO: $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FG}$...

PROJEÇÕES

DEF. $Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

A OPERAÇÃO "Pr" TEM UMA SÉRIE DE PROPRIEDADES PARECIDAS COM AS DA P.18.
TENTEM DESCOBRIR QUAIS E DEMONSTRÁ-LAS!

PRÓXIMAS AULAS

2/ABRIL: (HOJE)
4/ABRIL, 6ª: AULA NORMAL
9/ABRIL: } CONGRESSO !!
11/ABRIL: }
16/ABRIL: AULA NORMAL
18/ABRIL: 6ª FEIRA SANTA
23/ABRIL:
25/ABRIL:
30/ABRIL: $\boxed{P1}$

GA 2/ABRIL/2014

... O LIVRO USA ALGUMA TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO QUE A GENTE AINDA NÃO VIU DIRETO COMO SE FOSSEM ÓBVIAS!

- PROCURE TODAS AS DEMONSTRAÇÕES DE FATOS COM "⇒" NO LIVRO, ESCOLHA ALGUMAS (COMECE PELAS MAIS FÁCEIS) E TENTE FAZÊ-LAS.
- NOTE QUE O LIVRO FAZ MUITAS DEFINIÇÕES QUE NÃO VIMOS EM SALA... TREINE FAZER SUAS PRÓPRIAS DEFINIÇÕES.

DEF: $((a,b),(c,d)) \approx ((a',b'),(c',d'))$ SE E SÓ SE $c-a=c'-a'$ E $d-b=d'-b'$.

EXERCÍCIO (VARIAÇÃO DA PROP 1-5 DO LIVRO): DEMONSTRE QUE

$$(A,B)\approx(C,D) \Rightarrow (A,C)\approx(B,D).$$

SEJAM $A=(a_1,a_2)$,

$B=(b_1,b_2)$,

$C=(c_1,c_2)$,

$D=(d_1,d_2)$.

SUPONHA QUE

$(A,B)\approx(C,D)$, ①

OU SEJA, QUE

$((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \approx ((c_1,c_2),(d_1,d_2))$, ②

OU SEJA,

$b_1-a_1=d_1-c_1$ ③

E $b_2-a_2=d_2-c_2$. ④

QUEREMOS PROVAR QUE

$(A,C)\approx(B,D)$, ⑤

OU SEJA, QUE

$((a_1,a_2),(c_1,c_2)) \approx ((b_1,b_2),(d_1,d_2))$, ⑥

OU SEJA, QUE

$c_1-a_1=d_1-b_1$ ⑦

E $c_2-a_2=d_2-b_2$. ⑧

DEMONSTRAÇÃO:

⋮

GA 4/ABRIL/2014 | 8

..ESTAMOS TENTANDO VER O QUE JÁ FOI DADO PRA OUTRA TURMA, MAS MAIS RÁPIDO..

TIPOS (OK)

PONTOS - EX: $(1,2)$

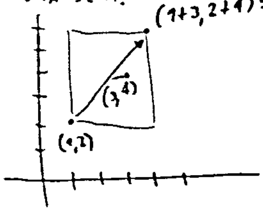
VETORES - EX: $\overrightarrow{(3,4)}$

MATRIZES 2x2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

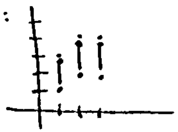
OPERAÇÕES: $+$, $-$, $\cdot$

$+$	c	(c,d)	$\overrightarrow{(c,d)}$
a	$a+c$	ERRO	ERRO
(a,b)	ERRO	ERRO	$(a+c,b+d)$
$\overrightarrow{(a,b)}$	ERRO	ERRO	$\overrightarrow{(a+c,b+d)}$

GRAFICAMENTE, (a,b) É UM PONTO E $\overrightarrow{(c,d)}$ É UM DESLOCAMENTO - UMA SETA.

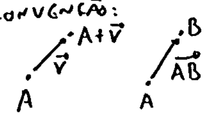


OBS:

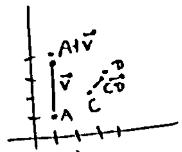


TODAS ESTAS SETAS SÃO O MESMO VETOR $\overrightarrow{(0,2)}$ REPRESENTADO EM POSIÇÕES DIFERENTES!

CONVENÇÃO:



EXERCÍCIO:



$A = (1,1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{(0,3)}$

$A+\vec{v} = (1,4)$

$C = (3,2)$

$D = (4,3)$

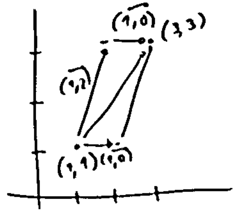
$\overrightarrow{CD} =$

EXERCÍCIO:
CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$((1,1)+\overrightarrow{(1,2)})+\overrightarrow{(1,0)}$

$((1,1)+\overrightarrow{(1,0)})+\overrightarrow{(1,2)}$

$(1,1)+(\overrightarrow{(1,2)}+\overrightarrow{(1,0)}) =$
$(1,1)+\overrightarrow{(2,2)}$



EXERCÍCIO:
SEJA $\vec{v} = \overrightarrow{(2,3)}$.
CALCULE:

a) $\vec{v}+\vec{v} = \overrightarrow{(4,6)} = 2\cdot\overrightarrow{(2,3)}$

b) $\vec{v}+\vec{v}+\vec{v} = \overrightarrow{(6,9)} = 3\cdot\overrightarrow{(2,3)}$

c) $\vec{v}+\vec{v}+\vec{v}+\vec{v} = \overrightarrow{(8,12)} = 4\cdot\overrightarrow{(2,3)}$

DEF: $k\cdot\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

CALCULE:

e) $0\cdot\vec{v} = \overrightarrow{(0,0)}$

f) $(-1)\cdot\vec{v} = \overrightarrow{(-2,-3)}$

g) $(-2)\cdot\vec{v} = \overrightarrow{(-4,-6)}$

h) $\frac{1}{2}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{(1,\frac{3}{2})}$

DEF: $\vec{v}-\vec{w} = \vec{v}+(-1)\cdot\vec{w}$

EXEMPLO: $\overrightarrow{(2,3)}-\overrightarrow{(4,5)} =$
$\overrightarrow{(2,3)}+(-1)\cdot\overrightarrow{(4,5)} =$
$\overrightarrow{(2,3)}+\overrightarrow{(-4,-5)} =$
$\overrightarrow{(2-4,3-5)} =$
$\overrightarrow{(-2,-2)}$.

DEF: $A-\vec{v} = A+(-1)\cdot\vec{v}$

E LEMBRE QUE $B-A=\overrightarrow{AB}$...

$-$	c	(c,d)	$\overrightarrow{(c,d)}$
a	$a-c$	ERRO	ERRO
(a,b)	ERRO	$\overrightarrow{(a-c,b-d)}$	$(a-c,b-d)$
$\overrightarrow{(a,b)}$	ERRO	ERRO	$\overrightarrow{(a-c,b-d)}$

$\cdot$	c	(c,d)	$\overrightarrow{(c,d)}$
a	ac	ERRO	$\overrightarrow{(ac,ad)}$
(a,b)	ERRO	ERRO	ERRO
$\overrightarrow{(a,b)}$	ERRO	ERRO	$\boxed{ac+bd}$

UMA NOTAÇÃO PRA CONSTRUIR CONJUNTOS

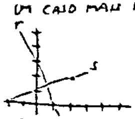
SEJA $C=\{-2,-1,0,1,2\}$.
SEJAM $A=(1,2)$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$A+(-2)\vec{v}$,
$A+(-1)\vec{v}$,
$A+0\vec{v}$,
$A+1\vec{v}$,
$A+2\vec{v}$.

GA 4/ABRIL/2014 $\boxed{A}$

ESTÁVAMOS VENDO DEMONSTRAÇÕES DE PROPOSIÇÕES COM "⇒"...
COMO TEMOS MAIS TEMPO HOJE VAMOS PASSAR PRA UM CASO MAIS INTERESSANTE. !!



Sejam $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3-3x\}$ (1)
$s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1+\frac{1}{2}x\}$ (2)
Seja $P = (x,y) \in r \cap s$. (3)

REPARE QUE NÃO DÁ PRA ENCONTRAR x E y PELO OLHÔMETRO...
E A GENTE AINDA NÃO TEM FÓRMULAS PRA CALCULAR O PONTO DE INTERSECÇÃO DE DUAS RETAS... VAMOS DEDUZI-LAS!

ENTÃO:

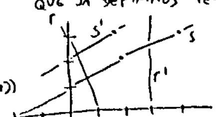
$(x,y) \in r$ (4) (POR (3) E (1))
$y = 3-3x$ (5) (POR (4))
$(x,y) \in s$ (6) (POR (3) E (2))
$y = 1+\frac{1}{2}x$ (7) (POR (6))
$3-3x = 1+\frac{1}{2}x$ (8) (POR (5) E (7))
$3-1 = \frac{1}{2}x+3x$ (9) (POR (8))

$2 = \frac{7}{2}x$ (10) (POR (9))
$x = 2\cdot\frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ (11) (POR (10))

$y = 3-3x$ (12) (POR (5))
$= 3-3\cdot\frac{4}{7}$ (13) (POR (11))
$= \frac{3\cdot 7}{7} - \frac{12}{7}$ (14)
$= \frac{9}{7}$ (15)

$P = (x,y) = (\frac{4}{7}, \frac{9}{7})$ (16) (POR (11) E (12-15)).

AGORA LEMBRE QUE TEMOS VÁRIOS MODOS DE ESPECIFICAR RETAS... VAMOS CONSIDERAR QUE ALÉM DA r E DA s QUE JÁ DEFINIMOS TEMOS:



$s' = \{(0,2) + t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (3')
$r' = \{(3,0) + t\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (4')

COMO ENCONTRAR $r \cap s'$?
$r' \cap s'$?
$s \cap s'$?
(PRA CASA: GENERALIZEM!)

VAMOS SUPOR QUE
$Q = (x,y) \in s \cap s'$ (5').
ENTÃO:

$(x,y) \in s$ (6') (POR (5'))
$y = 1+\frac{1}{2}x$ (7') (POR (6') E (2))
$(x,y) \in s'$ (8') (POR (5'))

SEJA t TAL QUE
$(x,y) = (0,2) + t\overrightarrow{(2,1)}$ (9')
$= (0+2t, 2+t)$ (10')
(11')
$x = 2t$ (12')
$y = 2+t$ (12')
$2+t = 1+\frac{1}{2}2t$ (13')
$= 1+t$ (14')
$2 = 1$ (15')

MORAL: TODA VEZ QUE TIVERMOS $x, y, t \in \mathbb{R}$ OBEDECENDO (5') E (9') VAMOS TER $2=1$

VAMOS SUPOR AGORA QUE
$A = (x,y) \in r \cap s'$.
EXERCÍCIO (PRA AGORA): ENCONTREM x E y, JUSTIFICANDO TODOS OS PASSOS. (10 MINS).

ATÉ AGORA ESTAMOS USANDO SÓ "="...
ALGUNS FATOS IMPORTANTES SOBRE PROJEÇÕES VÃO USAR TAMBÉM $<, \leq, \geq, >$,
E PRA PODER DEMONSTRÁ-LOS A GENTE VAI USAR UM TRUQUE IMPORTANTE:

CONTAS COM VETORES E PRODUTOS INTERNOS FICAM MAIS CURTAS QUANDO OS VETORES SÃO ORTOGONAIS.

PROP. SEJAM $A \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v}, \vec{w} \in V^2$, $B = A+\vec{w}$, $(\vec{v} \perp \vec{w})$,
$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.
ENTÃO A É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B.

COMO FORMALIZAR ISTO?
"PARA QUALQUER $t \in \mathbb{R}$ TEMOS $d(A,B) \leq d(A+t\vec{v}, B)$".
OU SEJA:
$$\|B-A\| \leq \|B-A+t\vec{v}\|$$
OU SEJA:
$$\|(A+\vec{w})-A\| \leq \|(A+\vec{w})-A+t\vec{v}\|$$
$$\|\vec{w}\| \leq \|\vec{w}-t\vec{v}\|$$
$$\sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}} \leq \sqrt{(\vec{w}-t\vec{v})\cdot(\vec{w}-t\vec{v})}$$
$$= \sqrt{(\vec{w}-t\vec{v})\cdot\vec{w} + (\vec{w}-t\vec{v})\cdot(-t\vec{v})}$$
$$= \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w} + \cancel{(-t\vec{v})\cdot\vec{w}} + \cancel{\vec{w}\cdot(-t\vec{v})} + (-t\vec{v})\cdot(-t\vec{v})}$$
$$= \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w} + (-t\vec{v})\cdot(-t\vec{v})}$$
$$= \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w} + t^2(\vec{v}\cdot\vec{v})}$$
OU SEJA:
$$\vec{w}\cdot\vec{w} \leq \vec{w}\cdot\vec{w} + t^2(\vec{v}\cdot\vec{v})$$
OU SEJA:
$$0 \leq t^2(\vec{v}\cdot\vec{v})$$
(PENSEM NISTO EM CASA!!!)

$\boxed{\text{GA 4/ABRIL/2014}}$ $\boxed{B}$

EXERCÍCIOS DE 4/OUT/2013:

CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

(a) $\{(x,1) \mid x \in \{2,3,4\}\}$

(b) $\{(x,x+1) \mid x \in \{2,3,4\}\}$

(c) $\{(t,t^2) \mid t \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$

(d) $\{(x,1) \mid x \in \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}\}$

(e) $\{(x,1) \mid x \in [2,4]\}$

(f) $\{(0,1)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

(g) $\{\underbrace{(1,2)}_{A}+t\underbrace{\overrightarrow{(1,-1)}}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$

EXERCÍCIOS DE V/F/ JUSTIFIQUE DA LISTA DO REGINALDO:

( ) PARA QUAISQUER $\vec{v},\vec{u} \in \mathbb{V}^2$ TEMOS $\|\|\vec{v}\|\vec{w}\| = \|\|\vec{w}\|\vec{v}\|$.

DEF: $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

DEF: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

EXERCÍCIO: PARA CADA PONTO (x,y) ABAIXO CALCULE $\|\overrightarrow{(x,y)}\|$ E REPRESENTE ESTES VALORES EM $\mathbb{R}^2$.

(x,y)	$\overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$	$\|\overrightarrow{(x,y)}\|$
$(0,0)$		0
$(1,0)$		1
$(2,0)$		2
$(0,1)$		1
$(0,2)$		2
$(-3,0)$		3
$(3,4)$		5
$(4,3)$		5
$(-3,4)$		5

$\vec{v}$	$\vec{w}$	$\|\vec{v}\|\vec{w}$	$\|\vec{w}\|\vec{v}$	$\|\|\vec{v}\|\vec{w}\|$	$\|\|\vec{w}\|\vec{v}\|$
$\overrightarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(2,0)}$				
$\overrightarrow{(3,4)}$	$\overrightarrow{(10,0)}$				

PRA CASA:

- LISTA DO REGINALDO
- QUADROS DA TURMA A

GA 16/ABR/2014 A

— No final da aula de hoje vocês vão saber bastante sobre o significado geométrico do produto interno (e outras operações), e vão saber calcular muitos produtos internos no olhômetro.

Aviso: Hoje das 16:00 às 18:00 — e em praticamente todas as outras 4as e 6as a partir de agora — vamos ter um horário pra atendimento, exercícios, dúvidas, atividades em grupo, etc!

O que querem dizer, geometricamente,

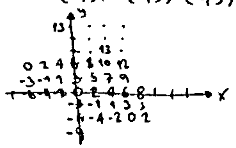
a) $\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0$,
b) $\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=5$,
c) $\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(1,1)}$,
d) $\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=a$,
e) $\overrightarrow{(v_1,v_2)}\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)}=a$?

Def: $F_{\vec v}(x,y) = \overrightarrow{(v_1,v_2)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$

$F_{\vec v}^{-1}(a) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F_{\vec v}(x,y)=a\}$ ⇐ def. de função inversa
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(v_1,v_2)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=a\}$ ⇐ pela def de F
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v_1x+v_2y=a\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v_2y=-v_1x+a\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{v_1}{v_2}x+\frac{a}{v_2}\}$ ⇐ só vale quando $v_2\neq0$.

Exercícios:
Represente graficamente:

0) $F(x,y)=\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$

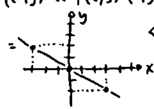


1) Represente graficamente a curva de nível do 0 no item anterior — ou seja:
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$

2) ...e agora a curva de nível do 5:
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=5\}$.
(Dica: faça um gráfico parecido com o acima e represente a reta nele)

3) E agora $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=10\}$. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=10\}=$

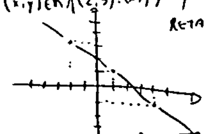
Dica: escrevam as respostas de vocês de forma completa, comparando uma representação algébrica e uma gráfica.
Por exemplo:
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0\}$

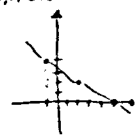


⇐ Vetor diretor: $\overrightarrow{(3,-2)}$
Reta (parametrizada):
$\{(0,0)+t\overrightarrow{(3,-2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=5\}=$

Reta:





Proposições.
(V/F/justifique):

$\boxed{a}$ ( ) $\vec v\perp\vec w \Rightarrow \vec v\cdot(\alpha\vec v+\beta\vec w)=\vec v\cdot\alpha\vec v$

$\boxed{b}$ ( ) Se $\vec v\perp\vec w$, $a\in\mathbb{R}$,
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec v\cdot\overrightarrow{(x,y)}=a\}$
e $P\in r$ então $P+\vec w\in r$.

$\boxed{c}$ ( ) Se $\vec v=\overrightarrow{(2,3)}$,
$\vec w=\overrightarrow{(-3,2)}$,
$a=5$,
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec v\cdot\overrightarrow{(x,y)}=a\}$,
$P\in r$,
então $P+\vec w\in r$.

$\boxed{d}$ ( ) Se $\vec v\perp\vec w$ e $\alpha\in\mathbb{R}$
então $\vec v\perp\alpha\vec w$.

$\boxed{a}$ $\vec v\cdot(\alpha\vec v+\beta\vec w)=(\vec v\,\alpha\vec v)+(\vec v\,\beta\vec w)$ (por distributividade)
$=(\vec v\,\alpha\vec v)+\beta(\vec v\cdot\vec w)$ (por $\vec v(\beta\vec w)=\beta(\vec v\cdot\vec w)$)
$=(\vec v\cdot\alpha\vec v)$ (por $\vec v\perp\vec w$)

Para casa: para qualquer $\vec v=\overrightarrow{(v_1,v_2)}$, seja $\vec u=\overrightarrow{(u_1,u_2)}=\overrightarrow{(-v_2,v_1)}$
Então $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec v\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0\}=\{0+t\vec u \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec v\cdot\overrightarrow{(x,y)}=v_1^2+v_2^2\}=\{0+\vec v+t\vec u \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P\in r \Leftrightarrow (P_1,P_2)\in r \Leftrightarrow \vec v\cdot\overrightarrow{(P_1,P_2)}=a$
$P+\vec w\in r \Leftrightarrow (P_1+w_1,P_2+w_2)\in r \Leftrightarrow \vec v\cdot\overrightarrow{(P_1+w_1,P_2+w_2)}=a$
Queremos mostrar que $P\in r \Rightarrow P+\vec w\in r$.
Vamos supor que $P\in r$.
Queremos ver que $P+\vec w\in r$,
ou seja, que $\vec v\cdot\overrightarrow{(P_1+w_1,P_2+w_2)}=a$.
Mas $\vec v\cdot\overrightarrow{(P_1+w_1,P_2+w_2)}=\vec v\cdot\overrightarrow{(P_1,P_2)}+\vec v\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)}$
$=a+\vec v\cdot\vec w$
$=a$.

Aplicação
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\overrightarrow{(2,3)}}_{\vec v}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=\underbrace{13}_{a}\}$

$\vec v=\overrightarrow{(2,3)}$, $a=13$
$\vec w=\overrightarrow{(-3,2)}$, $\vec v\perp\vec w$,
$P=(2,3)\in r$.
então $P+\vec w=(2,3)+\overrightarrow{(-3,2)}$
$=(-1,5)$
$\in r$.
E se $\vec w=t\overrightarrow{(-3,2)}$
então $\vec v\perp\vec w$, $P+\vec w=P+t\vec w\in r$.

VETOR:

PARAMETRIZADA):

$t\overrightarrow{(3,-2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

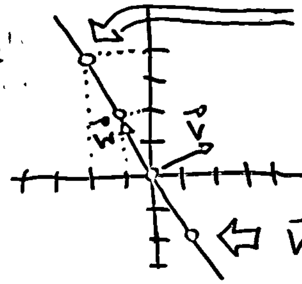
:

$\overrightarrow{1)}\cdot 10\} =$

APLICAÇÃO:

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$.

Então $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{v}\cdot\overrightarrow{(x,y)} = 0\}$

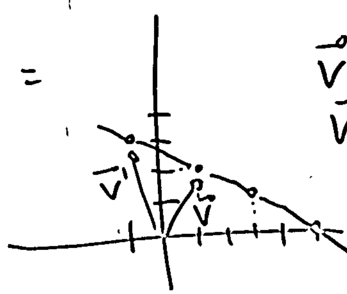
$=$ 

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{(-2,4)} = 0$

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{(1,-2)} = 0$

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$.

Então $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{v}\cdot\overrightarrow{(x,y)} = 5\}$

$=$ 

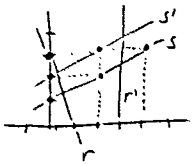
$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{w}$

$\vec{v}'\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{v} = 5$

PARA CASA: PARA QUALQUER $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$, SEJA $\vec{w} = \overrightarrow{(w_1,w_2)} = \overrightarrow{(-v_2,v_1)}$.

ENTÃO $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{v}\cdot\overrightarrow{(x,y)} = 0\} = \{O + t\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{v}\cdot\overrightarrow{(x,y)} = v_1^2+v_2^2\} = \{O + \vec{v} + t\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$



Sejam

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3 - 3x\}$ ①

$s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \frac{1}{2}x\}$ ②

$s' = \{(0,2) + t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ③

$r' = \{(3,0) + t\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ④

Calcule $r \cap s'$.

$\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

$\|\|\vec{u}\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
$= \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|$
$= \|\|\vec{v}\|\vec{u}\|$

Suponha que

$(x,y) \in r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3 - 3x\}$

$(x,y) = (0,2) + t\overrightarrow{(2,1)} \in s'$.

Então:

① $(x,y) = (0,2) + t\overrightarrow{(2,1)}$ ②

$(x,y) = (0,2) + \overrightarrow{(2t,t)}$

$(x,y) = (0+2t, 2+t)$

$(x,y) = (2t, 2+t)$

② Logo

$x = 2t$ e $y = 2+t$ ③

Como $(x,y) \in r$,

$y = 3 - 3x$

$2 + t = 3 - 3(2$

$t + 6t = 3 - 2$

$t = \frac{1}{7}$

Prop:

$\vec{v}(\alpha\vec{w}) = \alpha \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$

Dem: Fazendo

$\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\vec{w} = (w_1, w_2)$,

Temos:

$\vec{v} \cdot (\alpha \cdot \vec{w}) = \overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot (\alpha \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2)})$

$= \overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot \overrightarrow{(\alpha w_1, \alpha w_2)}$

$= (v_1 \cdot \alpha w_1) + (v_2 \cdot \alpha w_2)$

$= \alpha(v_1 \cdot w_1) + \alpha(v_2 \cdot w_2)$

$= \alpha(v_1 \cdot w_1 + v_2 w_2)$

$= \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$

$\alpha \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \alpha v_1 w_1 + \alpha v_2 w_2$

Def: $K\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(Ka, Kb)}$

Prop:

$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \vec{v} \cdot \alpha\vec{v}$

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(w_1,w_2)}$.

Se $\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2)} = 0$

$v_1 w_1 + v_2 w_2$

Queremos mostrar que:

$\vec{v} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \vec{v} \cdot \alpha\vec{v}$

$\overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot [\alpha\overrightarrow{(v_1,v_2)} + \beta\overrightarrow{(w_1,w_2)}] = \vec{v} \cdot \alpha\vec{v}$

$\overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot [\overrightarrow{(\alpha v_1, \alpha v_2)} + \overrightarrow{(\beta w_1, \beta w_2)}] =$

$\overrightarrow{(v_1,v_2)} \cdot [\overrightarrow{(\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2)}] =$

$[v_1 \cdot (\alpha v_1 + \beta w_1)] + [v_2 \cdot (\alpha v_2 + \beta w_2)] =$

$[(v_1 \cdot \alpha v_1) + (v_1 \cdot \beta w_1)] + [(v_2 \cdot \alpha v_2) + (v_2 \cdot \beta w_2)] =$

$[(v_1 \cdot \alpha v_1) + (v_2 \cdot \alpha v_2)] + [v_1 \beta w_1 + v_2 \cdot \beta w_2] =$

$\alpha(v_1 v_1 + v_2 v_2) + \beta(v_1 w_1 + v_2 w_2) =$

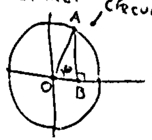
GA 23/ABR/2014

HOJE: COMO VISUALIZAR (E CALCULAR APROXIMAÇÕES NO OLHO PARA):

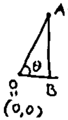
- PRODUTO INTERNO
- PROJEÇÃO
- $\vec{v} = \alpha\vec{u}$
- DETERMINANTE
- ETC

O TEOREMA COMPLICADO DO FIM DA AULA PASSADA NA VERDADE É UMA VARIAÇÃO DA REGRA DO COSSENO...

REPARE:

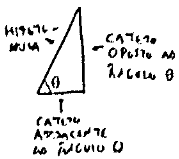


ESTE O DESENHO MAIS NATURAL PRA ENTENDER A REGRA DO COSSENO.



... E A DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO COSSENO DE θ É QUE $\cos\theta = \dfrac{d(O,B)}{d(O,A)}$ $\leftarrow = 1$

CASO GERAL:



$\cos\theta = \dfrac{\text{CAT. ADJ.}}{\text{HIPOTENUSA}}$,

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{CAT. OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$

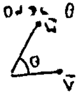
OU SEJA,

$(\text{CAT. ADJ.}) = (\cos\theta)(\text{HIPOTENUSA})$

A REGRA DO COSSENO PARA O PRODUTO INTERNO É:

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta$,

ONDE θ É ESTE ÂNGULO:



(MAS VAMOS VOLTAR A ISTO DEPOIS.)

COMO CALCULAR APROXIMAÇÕES PRO PRODUTO INTERNO NO OLHO (COM UMA RÉGUA)?

LEMBRE QUE

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$,

E QUE SE $\vec{u}\perp\vec{w}$ ENTÃO

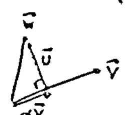
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$...

LEMBRE TAMBÉM QUE $\cos 0 = 1$.

MÉTODO:

COMECE COM VETORES $\vec{v}, \vec{w}$, E DESENHE-OS APOIADOS NA ORIGEM.

TRACE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO. $(\vec{w} = \alpha\vec{v} + \vec{u})$



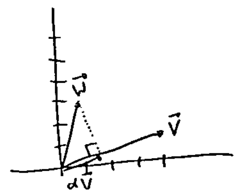
SE $\alpha\vec{v}$ E $\vec{v}$ TÊM O MESMO SENTIDO, ENTÃO $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\alpha\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|$;

SENÃO, $\vec{v}\cdot\vec{w} = -\|\alpha\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|$.

EXERCÍCIO:

CALCULE UMA APROXIMAÇÃO PARA $\vec{v}\cdot\vec{w}$ NOS SEGUINTES CASOS - E DEPOIS CONFIRA COM O VALOR REAL.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{(4,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,3)}$



b) $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,2)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(4,0)}$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{(0,4)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,0)}$.

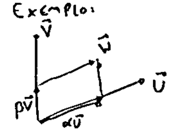
ALÉM DISTO CALCULE UMA APROXIMAÇÃO (NO OLHO) PARA α EM CADA UM DOS CASOS ACIMA.

...AGORA QUE VOCÊS APRENDERAM A ESTIMAR O α NO OLHO TENTEM ESTIMAR α E β...

DADOS $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ COM $\vec{u}, \vec{v}$ LINEARMENTE INDEPENDENTES (?!?!?!)

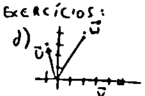
DÁ PRA EXPRESSAR $\vec{w}$ COMO $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$...

EXEMPLO:

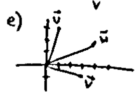


EXERCÍCIOS:

d)



e)



EM $\mathbb{R}^2$ DOIS VETORES SÃO L.I. QUANDO NENHUM DELES É NULO E ELES NÃO SÃO PARALELOS, E L.D. ("LINEARMENTE DEPENDENTES") QUANDO SÃO PARALELOS OU QUANDO PELO MENOS UM DELES É NULO.

MAIS FORMALMENTE:

$\vec{u}, \vec{v}$ SÃO L.D. QUANDO A, $A+\vec{u}$, $A+\vec{v}$ SÃO COLINEARES (I.E., ESTÃO NA MESMA LINHA).

UMA CONDIÇÃO EQUIVALENTE: $\vec{u}, \vec{v}$ SÃO L.D. QUANDO

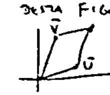
$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$, E SÃO L.I. QUANDO $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

EXEMPLOS: $\overrightarrow{(2,3)}, \overrightarrow{(4,5)}$ SÃO L.I.: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$.

$\overrightarrow{(2,3)}, \overrightarrow{(20,30)}$ SÃO L.D.

$\overrightarrow{(2,3)}, \overrightarrow{(0,0)}$ SÃO L.D.

OBS: $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \pm$ ÁREA DESTA FIGURA:



GA 23/ABR/2014

EXERCÍCIO:

SEJAM $A=(1,2)$,
$B=(0,4)$,
$C=(3,k)$.

ENCONTRE O VALOR DE k QUE FAÇA A, B, C SEREM COLINEARES.
USE VETORES E DETERMINANTE.

FAÇA O MESMO PARA ESTE CASO:

$A=(2,3)$
$B=(4,5)$
$C=(t,6)$

(10 MINS, EM GRUPO)

...E FAÇA O MESMO PARA ESTE CASO:

$A=(0,4)$
$B=(3,0)$
$C=(2t,1+t)$

PRA CASA: PROCURE UMA FÓRMULA PRO CASO GERAL, E ENUNCIE ELA COMO UMA PROPOSIÇÃO!

IMPORTANTE

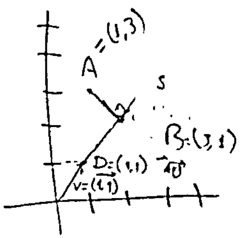
VOCÊS JÁ TÊM ALGUMA PRÁTICA COM DEMONSTRAR COISAS...

MAS BOA PARTE DOS PONTOS DA PROVA VÃO ESTAR NUMA QUESTÃO GRANDE, EM VÁRIAS PARTES, DA FORMA:

"ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA ..."/
"TESTE A SUA FÓRMULA APLICANDO-A AO CASO ..."/
"DEMONSTRE QUE ELA VALE NO CASO GERAL".

A AULA QUE VEM VAI SER SOBRE TODOS OS DETALHES QUE FALTAM PRA VOCÊS TEREM CERTEZA QUE SABEM RESOLVER ESTE TIPO DE PROBLEMA.

$\overline{AB}=\{(1,3)+K(1,-1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$



$S=\{(0,0)+t(1,1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$

Queremos encontrar $C\in AB\cap s$

$K=-\frac{1}{F}$

Como a gente generaliza isto?

Sejam

$A=(A_1,A_2)$,
$B=(3,1)$,
$C=(t,t)$

Queremos $C\in AB$ - ou seja, A,B,C são colineares - ou seja,

se $\vec{v}=B-A=(3-A_1,\ 1-A_2)$
$\vec{w}=B-C=(3-t,\ 1-t)$

$$\begin{vmatrix}3-A_1 & 3-t\\ 1-A_2 & 1-t\end{vmatrix}=0$$

$$(3-A_1)(1-t)-(3-t)(1-A_2)=$$
$$(\cancel{3}-3t-A_1+A_1t)+(-\cancel{3}+3A_2+t-A_2t)=\overbrace{(-A_1+3A_2)}^{\alpha}+t\overbrace{(-3+A_1+1-A_2)}^{\beta}\Rightarrow t=\frac{-(-A_1+3A_2)}{(-2+A_1-A_2)}$$

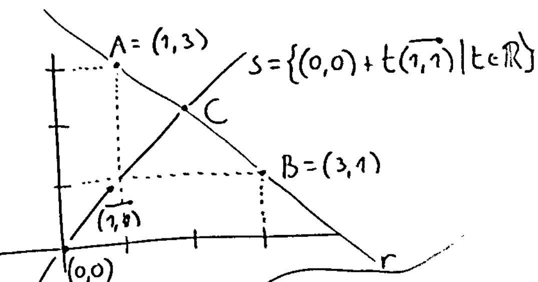
E se a gente não tem prática de generalizar? Aí a gente começa com vários casos particulares...

$A=(1,4)$, $B=(3,1)$, $C=(t,t)$	$A=(2,5)$, $B=(3,1)$, $C=(t,t)$	...

$0=\alpha+t\beta$
$-\alpha=t\beta$
$-\frac{\alpha}{\beta}=t$

$t=-\frac{\alpha}{\beta}$

Sejam
$A=(a_1,a_2)$,
$B=(b_1,b_2)$,
$C=(x_1+ty_1,\ x_2+ty_2)$



Queremos encontrar $C\in r\cap s$.
$C=(t,t)$

Um teste.
Se $A_1=1$,
$A_2=3$,

$$t=\frac{-(-1+3\cdot 3)}{(-2+1-3)}=\frac{-8}{-4}$$

GA 25/ABRIL/2014

ÚLTIMA AULA ANTES DA PROVA!!!

ME PEDIRAM POR E-MAIL DICAS DE EXERCÍCIOS DE GENERALIZAÇÃO... VOU DAR AGORA.

PRATICAMENTE QUALQUER EXERCÍCIO DE "CALCULE" PODE VIRAR UM EXERCÍCIO DE "ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA..." SE A GENTE GENERALIZAR ALGUM DOS SEUS DADOS INICIAIS...

EXEMPLO: SEJAM $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

ENCONTRE FÓRMULAS PARA $Pr_{\vec{u}}\vec{u}$, $Pr_{\vec{v}}\vec{u}$ E TESTE-AS; DEPOIS MOSTRE QUE PARA QUALQUER $\vec{w}$ TEMOS $Pr_{\vec{u}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{w}$.

IDÉIA: $\vec{w} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$

$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \ldots$

$Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \ldots$

DEPOIS QUE VOCÊS CONSEGUIREM UMA FÓRMULA (ALGÉBRICA) PARA $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ VOCÊS PODEM COMEÇAR A FAZER HIPÓTESES SOBRE O "SIGNIFICADO GEOMÉTRICO" DE $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ ...

LEMBREM QUE VOCÊS PODEM FAZER HIPÓTESES - E ESCREVÊ-LAS COMO PROPOSIÇÕES.

PROP:

$Pr_{\vec{u}}\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$

$Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$

TESTES:

QUANDO $\vec{u}$:

AS FÓRMULAS NOS DÃO:

GRAFICAMENTE, ISTO É:

OUTRO TIPO DE PROBLEMA:

SEJAM $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$ E $\vec{w} = \alpha\vec{v}$.

DIGAMOS QUE $\vec{v}\cdot\vec{w} = 10$.

QUEM É $\vec{w}$?

QUEM É α?

OBS: VOU MANDAR POR E-MAIL UMA LISTA DE EXERCÍCIOS BONS DO LIVRO! REPARE QUE QUASE TODOS OS EXERCÍCIOS DELE SÃO EM $\mathbb{R}^3$, E MUITOS USAM BASES (QUE AINDA NÃO VIMOS).

OBS: UM "VERSOR" É UM VETOR UNITÁRIO (I.E., DE NORMA 1).

O "VERSOR ASSOCIADO A $\vec{v}$" É $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

LEMBRE QUE $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$!

LEMBREM DE TREINAR "CÁLCULO VETORIAL" - OS TRUQUES PARA FAZER CONTAS COM VETORES SEM TER QUE ABRIR CADA $\vec{v}$ EM $\overrightarrow{(v_1,v_2)}$...

AGORA DIGAMOS QUE $\vec{u} \perp \vec{v}$,

QUE $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$,

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$,

E QUE $\vec{u}\cdot\vec{w} = 10$.

a) ENCONTRE α.

b) ENCONTRE TRÊS VALORES PARA $\vec{w}$ TAIS QUE $\vec{u}\cdot\vec{w} = 10$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= \vec{u}\cdot(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \\ &= (\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u}) + (\cancel{\beta\vec{u}\cdot\vec{v}}) \\ &= \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u} \\ &= \alpha\cdot 5\end{aligned}$$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 10 \Rightarrow \alpha = 2$

$\alpha = 2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 10$!!

INDEPENDENTE DO VALOR DE β!

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$

$\vec{w}' = 2\vec{u} + 10\vec{v}$

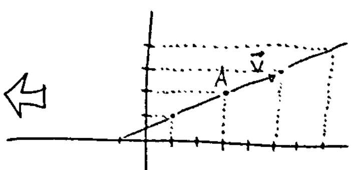
$\vec{w}'' = 2\vec{u} + 20\vec{v}$

DÁ PRA VARIAR O VALOR DO β!!!

PRIMEIROS EXERCÍCIOS MUITO IMPORTANTES DO CAP. 9 DO LIVRO:

9-56 a
9-57
9-58
9-59
9-60
9-62

OUTRO: ENCONTRE DOIS PONTOS P_1, P_2 DA RETA $r = \{(3,2) + t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ TAIS QUE $d(P_1,(3,2)) = d(P_2,(3,2)) = 4$.



PROBLEMA: ENCONTRE k TAL QUE $d(A + k\vec{v}, A) = 4$.

d) Um caso um pouco mais simples:

Sejam $A = (0,2)$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(4,3)}$.

Então $A+\vec{v}$ e $A-\vec{v}$ são dois pontos à distância 5 de A.

Encontre dois valores de t tais que $d(A, A+t\vec{v}) = 2$.

---

b) Sejam $A = (3,2)$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$.

Encontre dois valores para t para os quais $d((1,1), A+t\vec{v}) = 3$

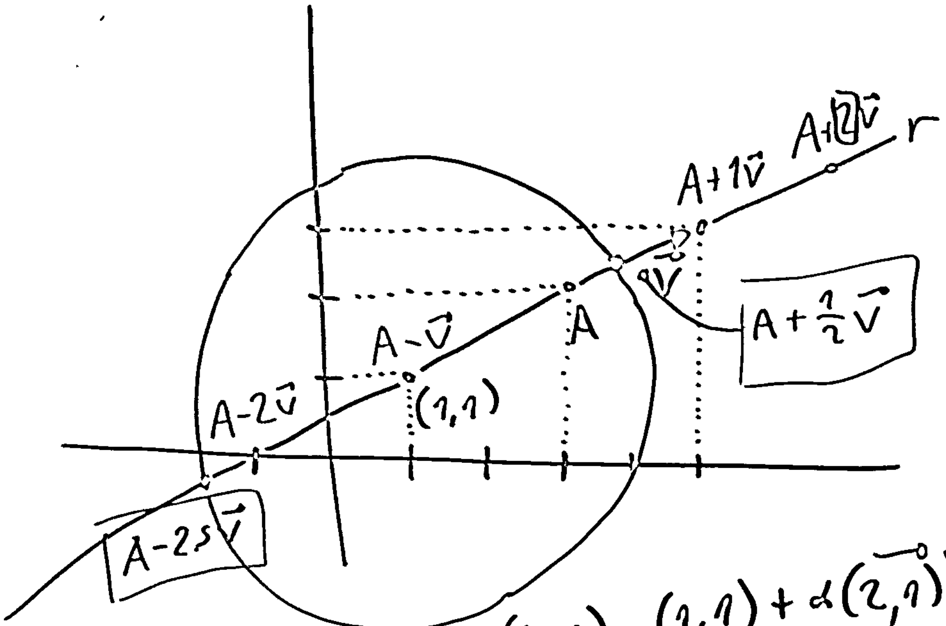
(Repare que o ponto $(1,1)$ pertence à reta do problema anterior).

Prop: $d\left((1,1), A+\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)\vec{v}\right) = 3$

e) Calculem

$$d\left((2,3), (2,3)+4\overrightarrow{(5,6)}\right) = \left\| 4\ \overrightarrow{(5,6)} \right\|$$
$$= 4\ \left\|\overrightarrow{(5,6)}\right\|$$
$$= 4\ \sqrt{5^2+6^2}$$
$$= 4\ \sqrt{25+36} = 4\sqrt{61}$$

61



$$d\big((1,1),\ (1,1)+\alpha(2,1)\big)=3 \Rightarrow \alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$d\big((1,1),\ A-\vec{v}+\alpha\vec{v}\big)=3 \qquad \alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$d\big((1,1),\ A+(\alpha-1)\,\vec{v}\big)=3$$

$$d\Big((1,1),\ A+\Big(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}-1\Big)\vec{v}\Big)=3$$

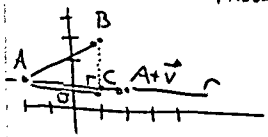
GA 7/maio/2014

A questão 2 da prova era sobre um método pra encontrar o ponto da reta r mais próximo de um ponto B dado...

<u>Muitas</u> pessoas não sabiam nem sequer aplicar um método dado a um caso específico!

Hoje: <u>métodos</u>.

Questão 2a da prova:



Como estudar métodos?

(1) Aplique um método dado a um caso particular no qual as contas sejam fáceis. Represente graficamente todos os objetos.

(2) Depois que você tiver uma hipótese sobre o que cada passo do método quer dizer geometricamente, crie um caso particular no qual tudo <u>deva</u> ser fácil de calcular e aplique o método a ele.

Peguem a lista sobre métodos de hoje e apliquem o método 4 aos seguintes casos particulares:

a) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $R=5$

b) $(x_0,y_0)=(2,3)$, $R=4$

Depois apliquem o método 5 aos seguintes casos particulares:

c) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $I=(-3,4)$, $R=5$, $\vec{v}=(5,0)$.

d) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $I=(0,5)$, $R=5$, $\vec{v}=(4,-2)$

e) $(x_0,y_0)=(3,3)$, $I=(0,3)$, $R=3$, $\vec{v}=(1,-1)$

Como estudar métodos - continuação...

(3) Cada método termina com afirmações sobre os objetos construídos - demonstre-as no caso geral.

(4) Entenda como métodos são escritos e treine escrever construções geométricas <u>formalmente</u> como métodos - e demonstrá-las.

Cosseno:

$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$ $\left(\frac{d(A,B)}{d(A,C)}\right)$

Obs: e quando θ é um ângulo obtuso - i.e., quando $90° < \theta < 180°$? Aí $\cos\theta$ vai ser negativo! Porquê?!!

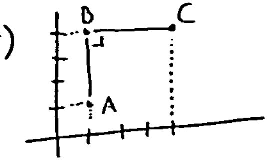
Aplique o método 6 nestes casos:

f) $A=(1,1)$, $B=(1,3)$, $C=(4,3)$

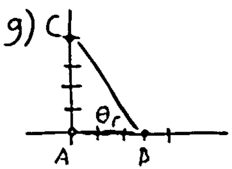
g) $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(0,4)$

Use-o pra calcular $\cos(A\hat{B}C)$ nos dois casos - pule a afirmações sobre a projeção.

f)



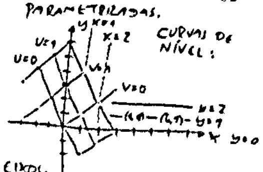
g)



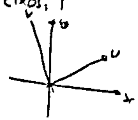
GA 9/maio/2014

Hoje: mudança de coordenadas, parábolas e hipérboles parametrizadas.

Curvas de nível:



Eixos:



Funções:

$X(x,y) = x$

$Y(x,y) = y$

$U(x,y) = \frac{2x+y}{3}$ (?)

$V(x,y) = \frac{-x+y}{3}$ (?)

$U(1,1) = 1$

$V(1,1) = 0$

A partir do gráfico com as curvas de nível de X, Y, U, V dá pra gente descobrir no olho as coordenadas x, y, u, v de vários pontos e completar esta tabela...

x	y	u	v
0	0		
0	3		
3	0		
3	3		

... e também dá pra gente completar uma outra tabela parecida, na qual a gente começa com as coordenadas u e v de cada ponto e descobre o x e o y de cada ponto...

x	y	u	v
		0	0
		0	1
		1	0
		1	1
		3	2

Como é que a gente consegue equações que relacionem as coordenadas x, y, u, v de cada ponto? Repare:

$U(x,y) = \frac{2x+y}{3} \Rightarrow u = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$

$V(x,y) = \frac{-x+y}{3} \Rightarrow v = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$

ou: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Um comentário sobre a P1: muitas pessoas aplicaram fórmulas e métodos mas não testaram seus resultados onde era pedido... Reparem que a gente quase sempre tem modos geométricos e modos algébricos de testar nossos resultados... Aprendam todos estes modos de testar, eles vão ser muito importantes!!!

Um truque com matrizes vai nos permitir calcular os "x"zes e "y"s rapidamente...

Complete: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

(Façam hipóteses e teste-as! Em grupo!)

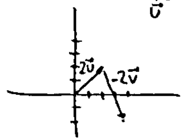
Resp: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Isto tem algum significado geométrico?

$P(u,v) = O + u\overrightarrow{(1,1)} + v\overrightarrow{(-1,2)}$

Geometricamente,

$P(2,-2) = O + 2\underbrace{\overrightarrow{(1,1)}}_{\vec{u}} + (-2)\underbrace{\overrightarrow{(1,-2)}}_{\vec{v}}$



Dica (pensem sobre isto em casa!): desenhe os eixos x, y, u, v, ou seja, as retas com y=0, x=0, v=0, u=0; aí, na reta "v=0" defina $\vec{u}$ como sendo o vetor que vai do ponto com u=0 pro ponto com u=1... Faça o mesmo pra definir $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$.

Mais um truque:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

é a mesma coisa que

$\overrightarrow{(x,y)} = u\overrightarrow{(a,c)} + v\overrightarrow{(b,d)}$

Parábolas

Estamos acostumados com:

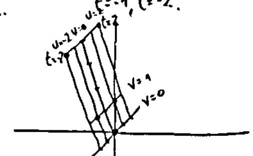
$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = x^2}_{\text{equação da parábola}}\}$

Sejam:

$P' = \{O + t\overrightarrow{(1,0)} + t^2\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P'' = \{O + t\overrightarrow{(1,1)} + t^2\overrightarrow{(-1,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Exercício: desenhe no gráfico com as curvas de nível de X, Y, U, V os pontos de P'' associados a $t=0, t=1, t=2, t=-1, t=-2$.



Fato: (☠ , ☺)

A parábola P'' "é" isto aqui:

$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = u^2\}$ ← informal

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x,y) = U(x,y)^2\} =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{-x+y}{3} = \left(\frac{2x+y}{3}\right)^2\}$.

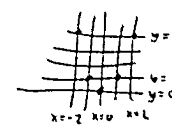
Hipérboles:

Estamos acostumados com:

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

mas dá pra parametrizar:

$H = \{O + t\overrightarrow{(1,0)} + \frac{1}{t}\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$



$xy = 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

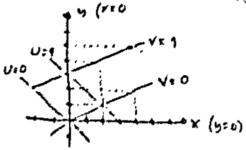
GA 14/MAIO/2014

HOJE: VAMOS APRENDER A DESENHAR PARÁBOLAS, HIPÉRBOLES E ELIPSES PARAMETRIZADAS E ENCONTRAR AS EQUAÇÕES DELAS... ALIÁS, VAMOS COMEÇAR COM OS DESENHOS E ENCONTRAR AS PARAMETRIZAÇÕES.

MÉTODO:

- COMEÇAMOS COM AS CURVAS DE NÍVEL DE U E V - DE
  $U(x,y)=0$,
  $U(x,y)=1$,
  $V(x,y)=0$,
  $V(x,y)=1$;
  AÍ EXPRESSAMOS $U(x,y)$ E $V(x,y)$ FORMALMENTE/ALGEBRICAMENTE; AÍ ENCONTRAMOS $\vec{U}$ E $\vec{V}$...

EXEMPLO:



DICA: QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $F(x,y)=\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$?

(ELAS SÃO ORTOGONAIS AO $\overrightarrow{(2,3)}$!)

PRA QUEM ESTIVER PERDIDO, COMECE REPRESENTANDO GRAFICAMENTE

$F_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0\}$ E

$F_{13}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=\overrightarrow{(2,3)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}\}$...

QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $G(x,y)=\overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$?

REPRESENTE GRAFICAMENTE

$G_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0\}$,

$G_{10}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=10\}$,

$G_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=1\}$.

DICA:

$U(x,y)=ax+by$

PARA $a,b\in\mathbb{R}$ CUJOS VALORES A GENTE QUER ENCONTRAR...

E $U(x,y)=ax+by$
$=\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$.

$\overrightarrow{(a,b)}$ É ALGUM VETOR ORTOGONAL A $\overrightarrow{(-1,1)}$, QUE É UM VETOR DIRETOR PARA A RETA U_0...

SABEMOS A DIREÇÃO DE $\overrightarrow{(a,b)}$, SÓ FALTA AJUSTAR SEU COMPRIMENTO!

$U(x,y)=\overrightarrow{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$.

AGORA QUEREMOS ENCONTRAR $\overrightarrow{(c,d)}$ TAL QUE

$V(x,y)=\overrightarrow{(c,d)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$.

DICA: $\overrightarrow{(c,d)}=k\overrightarrow{(-1,2)}$.

QUEM É k?

$V(0,3)=1$ (PELO GRÁFICO)

$V(0,3)=\overrightarrow{(c,d)}\cdot\overrightarrow{(0,3)}$
$=k\overrightarrow{(-1,2)}\cdot\overrightarrow{(0,3)}$
$=k\cdot 6$ $\Rightarrow 1=6k \Rightarrow k=\frac{1}{6}$

LEMBREM QUE VOCÊS JÁ TINHAM APRENDIDO A CONVERTER VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DE RETA UMA NA OUTRA BEM RÁPIDO... !

GRÁFICA, CARTESIANA, PARAMETRIZADA, ETC.

AGORA VOCÊS VÃO PRECISAR APRENDER A CONVERTER DEFINIÇÕES TIPO $H(x,y)=4x-5y$ NA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS SUAS CURVAS DE NÍVEL E VICE-VERSA - E DAQUI A POUCO VAMOS PASSAR PARA FUNÇÕES COMO $J(x,y)=6x+7y+\underbrace{8}_{\text{NOVIDADE.}}$

AS FUNÇÕES DO EXEMPLO SÃO

$U(x,y)=\overrightarrow{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$ E

$V(x,y)=\overrightarrow{(-\frac{1}{6},\frac{1}{3})}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$.

GRAFICAMENTE A PARTIR DAS CURVAS DE NÍVEL U_0,U_1,V_0,V_1 DÁ PRA CONSTRUIR TODAS AS OUTRAS FACILMENTE...

SEJAM:

$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$,

$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$,

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

A PARÁBOLA CANÔNICA, A HIPÉRBOLE CANÔNICA, E A ELIPSE CANÔNICA (O CÍRCULO DE RAIO 1).

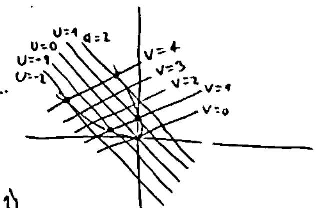
SEJAM

$P'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid V(x,y)=U(x,y)^2\}$,

$H'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U(x,y)V(x,y)=1\}$,

$E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U(x,y)^2+V(x,y)^2=1\}$.

SE NÓS CONHECEMOS AS CURVAS DE NÍVEL DE U E V É BEM FÁCIL DESENHAR P', H' E E'! :)



SEJA

$P''=\{A+t\vec{u}+t^2\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

E SEJAM $A=(0,0)$,

$\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,

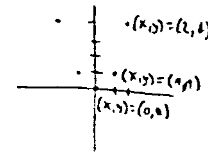
$\vec{v}=\overrightarrow{(-2,2)}$.

ENTÃO $P''=P'$ (!!!!!)

EXERCÍCIO: TESTE ISTO, FAZENDO O SEGUINTE:

a) CALCULE OS PONTOS DE P'' ASSOCIADOS A $t=0,1,2,-1,-2$.

b) VERIFIQUE QUE ELES OBEDECEM $V(x,y)=U(x,y)^2$.



OBS: ESTAMOS VENDO NA PRÁTICA, COM UM EXEMPLO CONCRETO (E EM $\mathbb{R}^2$) O QUE O LIVRO FAZ DE MODO BEM ABSTRATO NOS CAPS. 13 E 21 (SISTEMAS DE COORDENADAS E MUDANÇA DE SISTEMA DE COORDENADAS).

GA 16/maio/2014

O que nós estamos vendo agora – sistemas de coordenadas – corresponde ao que o livro faz nos capítulos 13 e 27, mas o livro prepara tudo pra poder trabalhar geometricamente sem um sistema de coordenadas preferido...

Vou passar uns exercícios pra casa, e vocês vão tentar fazê-los e decifrar a linguagem do livro.

Um modo de gerar muitos exercícios de mudança de coordenadas como os da aula passada:

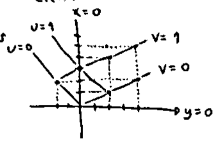
- Escolha uma "base", i.e., dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ não colineares,
- Escolha uma "origem" A.
- Podemos usar a notação $(x,y)_\Sigma$, $(u,v)_{\Sigma'}$ pra usarmos uma linguagem mais parecida com a do livro...

$(x,y)_\Sigma = O + x\vec{x} + y\vec{y}$,

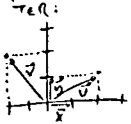
$(u,v)_{\Sigma'} = A + u\vec{u} + v\vec{v}$

Repare que na aula passada nós nos focamos em descobrir as funções $U(x,y)$ e $V(x,y)$...

Nosso exemplo principal era:



Neste caso vamos ter:



Obs: $u \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in V^2$ são coisas totalmente diferentes!

Ex: Neste sistema de coordenadas $A=O$, e

$(u,v)_{\Sigma'} = A + u\vec{u} + v\vec{v}$
$= O + u\overrightarrow{(2,1)} + v\overrightarrow{(-2,2)}$
$= (2u-2v, u+2v)$

Exercícios: desenhem em $\mathbb{R}^2$ os pontos

$(-2,4)_{\Sigma'}$,
$(-1,1)_{\Sigma'}$,
$(0,0)_{\Sigma'}$,
$(1,1)_{\Sigma'}$,
$(2,4)_{\Sigma'}$.

<u>Obs. muito importante:</u>

Praticamente tudo que a gente faz em GA pode ser feito de vários jeitos, e vocês têm que aprender vários jeitos e comparar os resultados! (Lembrem que eu sempre digo "testem"! Então...)

⇦ Se vocês entenderam isto então vocês sabem esboçar

$P' = \{(t,t^2)_{\Sigma'} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$H' = \{(t,\frac{1}{t})_{\Sigma'} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$,

$E' = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{\Sigma'} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

Exercício: Faça isto para outros sistemas de coordenadas também! Siga as instruções lá da 1ª coluna.

Pra algumas coisas a gente vai precisar também das funções $U(x,y)$ e $V(x,y)$ – então pra cada sistema de coordenadas que você inventar encontre $U(x,y)$ e $V(x,y)$, e teste-as.

Dica: no início use sempre $A=O$ (ou seja, $(0,0)_{\Sigma'} = (0,0)$)

...e depois tente mudar só o A.

E pra fazer as conversões algebricamente? Repare:

$(u,v)_{\Sigma'} = (2u-2v, u+2v)$
$(10,100)_{\Sigma'} = (20-200, 10+200)$
$= (-180, 210)$

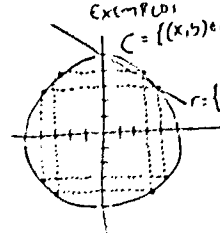
Isto nos permite passar das coordenadas (u,v) para as coords (x,y)... pra fazer o contrário vocês vão precisar resolver um sistema – ou, melhor ainda, aprender a fazer com matrizes – o equivalente a resolver o sistema...

Aí coisas ficam um pouco mais complicadas quando $A \neq O$ – Tente fazer tudo <u>isto em casa!!</u> É trabalhoso mas <u>muito</u> importante.

<u>Interseção de círculo e reta</u>

Vamos ver dois modos de encontrar interseções de círculos e retas – um totalmente algébrico, que usa Bhaskara, outro mais geométrico que <u>parece</u> mais trabalhoso mas que a gente precisa aprender porque ele é uma boa preparação pra vários métodos geométricos...

Exemplos



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - \frac{1}{2}x\}$

O método algébrico pra encontrar os pontos $(x,y) \in C \cap r$ – repare que são dois pontos – é combinar

$x^2+y^2=5^2$ e
$y = 5 - \frac{1}{2}x$ –

A gente vai obter

$x^2 + (5 - \frac{1}{2}x)^2 = 5^2$ –

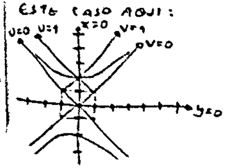
e aí encontrar os dois valores de x que satisfazem esta equação, e para cada um deles encontrar o y correspondente.

<u>Tentem fazer isto em casa.</u>

GA 21/maio/2017

Hoje: cônicas e um pouco de $\mathbb{R}^3$ (se der)

Vamos começar com este caso aqui:



A gente já viu como parametrizar esta hipérbole... $\vec{u}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,1)}$, $A=(0,0)$,

$H'=\{A+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

Qual é a equação dela?

Reparem que

$U(x,y)=\frac{x+y}{2}$

$V(x,y)=\frac{-x+y}{2}$...

Vamos definir umas abreviações (lembre que em matemática a gente pode definir coisas...)

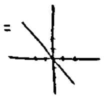
$[\text{equação}]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{equação}\}$

$u=U(x,y)$

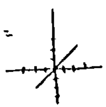
$v=V(x,y)$

Vamos tentar representar graficamente...

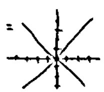
$[u=0]$ =



$[v=0]$ =



$[uv=0]$ =



$=[u=0]\cup[v=0]$

$[uv=1]$ =

$=[uv-1=0]$

$=[U(x,y)V(x,y)-1=0]$

$=[\frac{x+y}{2}\frac{-x+y}{2}-1=0]=[\frac{y^2-x^2}{4}-1=0]=[y^2-x^2-4=0]$

Quais são as curvas de nível de uv?

Casa! ‼

(Dica: comecem pensando nas curvas de nível de $F(x,y)=xy$)

Obs: $[uv=0]=$

$[\frac{y^2-x^2}{4}=0]=$

$[y^2-x^2=0]=$

$[y^2=x^2]$

O conjunto $[uv=0]$ nos dá as assíntotas da hipérbole – que também são os "eixos" – em que sentido?...

Quais são os pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $y^2=x^2$?

Dica: comece encontrando vários pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $y^2=x^2$.

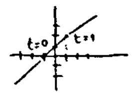
Outra dica: represente graficamente $F(x,y)=y^2-x^2$.

Reparametrizações

Seja

$r=\{(-1,0)+t\overrightarrow{(2,2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

A reta r é:

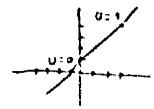


O que acontece se fizermos $t=2u$?

$r'=\{(-1,0)+(2u)\overrightarrow{(2,2)} \mid u\in\mathbb{R}\}$

$=\{(-1,0)+u\overrightarrow{(4,4)} \mid u\in\mathbb{R}\}$

que é:



– a mesma reta, mas parametrizada de outro jeito!

E se fizermos $t=\frac{v}{2}-1$?

Exercício pra agora: representem isto graficamente!

Agora vocês já entenderam (ou relembraram) reparametrizações em retas, vamos ver reparametrizações em hipérboles e parábolas!

Pra casa: reparametrize a hipérbole H' do início da aula fazendo $t=2t'$.

Reparametrizar parábolas é um pouco mais difícil.

Seja P a parábola canônica,

$P=\{O+t\vec{x}+t^2\vec{y} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

onde $\vec{x}=\overrightarrow{(1,0)}$,

$\vec{y}=\overrightarrow{(0,1)}$.

O que acontece quando fazemos $t=2u+3$?

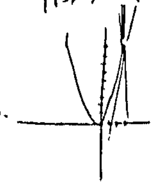
$P=\{O+(2u+3)\vec{x}+(2u+3)^2\vec{y} \mid u\in\mathbb{R}\}$

$=\{O+(u(2\vec{x})+3\vec{x})+(4u^2+12u+9)\vec{y} \mid u\in\mathbb{R}\}$

$=\{O+(3\vec{x}+u(2\vec{x}))+u^2(4\vec{y})+u(12\vec{y})+9\vec{y} \mid \ldots\}$

$=\{(O+3\vec{x}+9\vec{y})+u(2\vec{x}+12\vec{y})+u^2(4\vec{y}) \mid u\in\mathbb{R}\}$

$=\{(3,9)+u\overrightarrow{(2,12)}+u^2\overrightarrow{(0,4)} \mid u\in\mathbb{R}\}$



‼

... e quando obtivermos o polinômio desta parábola ele vai coincidir com o original, que era $y-x^2=0$!

(casa).

GA 21/MAIO/2014

AGORA:
MINI-INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$!
OBS: O LIVRO FAZ QUASE TUDO EM $\mathbb{R}^3$...

$(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ (PONTO DE $\mathbb{R}^3$)

$\overrightarrow{(4,5,6)} \in \mathbb{V}^3$ (VETOR EM $\mathbb{R}^3$)

$\overrightarrow{(0,1,2)} \cdot \overrightarrow{(3,4,5)} = 0\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 5$ (PRODUTO INTERNO EM $\mathbb{R}^3$)

E DÁ PRA GENTE DEFINIR RETAS PARAMETRIZADAS EM $\mathbb{R}^3$ DO JEITO ÓBVIO..
MAS ALGO COMO

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=12\}$

É UM PLANO!

COMO VISUALIZAR ISTO?
UM MODO: CURVAS DE NÍVEL (TREINEM!) -
NESTE CASO,

$2x+3y+4z=12$

$\Leftrightarrow 4z = 12-2x-3y$

$\Leftrightarrow z = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}y$

DICA: REPRESENTE GRAFICAMENTE

$F(x,y) = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}y$

QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DELA?
ONDE É QUE $F(x,y)=0$?
ONDE É QUE $F(x,y)=1$?

... COMO VOCÊS PODEM VISUALIZAR COISAS COMO INTERSEÇÕES DE PLANOS, E DE RETAS E PLANOS?

VAMOS USAR ALGUNS TRUQUES DE GEOMETRIA DESCRITIVA - O PRINCIPAL VAI SER ENCONTRARMOS AS INTERSEÇÕES DE PLANOS E RETAS COM OS PLANOS

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$,
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$,
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$.

DEFINIÇÃO (ADAPTAÇÃO DE UMA IDÉIA ANTERIOR PARA $\mathbb{R}^3$):

[EQUAÇÃO] $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ EQUAÇÃO$\}$.

PRA CASA: VISUALIZE

$[2x+3y+4z=12] \cap [x=0]$,
$[2x+3y+4z=12] \cap [y=0]$,
$[2x+3y+4z=12] \cap [z=0]$.

REPARE QUE O "$\ldots \cap [z=0]$" É FÁCIL - ISTO VAI DAR ALGO QUE VOCÊ SABE REPRESENTAR EM $\mathbb{R}^2$ NO PLANO (x,y).

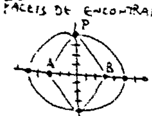
GA 23/maio/2014

ELIPSES

Vamos começar com este exemplo:

$A=(-3,0)$,
$B=(3,0)$,
$K=10$,
$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),A)+d((x,y),B)=K\}$

Alguns pontos de E são fáceis de encontrar:



$(0,4),(-5,0),(5,0),(0,-4)\in E$

Se $P=(x,y)$

A equação $d(P,A)+d(P,B)=K$, quando expandida, vira

$$\sqrt{(x-A_1)^2+(y-A_2)^2}+\sqrt{(x-B_1)^2+(y-B_2)^2}-K=0$$

$\shortparallel$

Como provar que este conjunto E é um "círculo amassado"?

Seja

$$E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(\tfrac{5}{4}y)^2=25\}$$

Pra casa: demonstre que todo ponto de E' é um ponto de E... ou seja, $E'\subseteq E$.

Obs: esta direção é fácil — a outra, que é provar que $E\subseteq E'$, é mais difícil.

POLINÔMIOS EM DUAS VARIÁVEIS

Uma quádrica em x e y é um polinômio desta forma,

$$F(x,y)=ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2,$$

onde a,b,c,d,e,f são números.

Todas as elipses, hipérboles, parábolas, retas, etc, que vimos até agora são quádricas.

Eu costumo usar uma notação (não-padrão) pra representar polinômios em duas variáveis...

$$\begin{array}{c|cccc} y^3 & 2 & 3 & & \\ y^2 & & 4 & & \\ y^1 & & 5 & & \\ y^0 & 6 & 7 & & 8 \\ \hline & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{array} = \begin{array}{l} 2x^0y^3+3x^1y^3+ \\ 4x^1y^2+ \\ 5x^1y^1+ \\ 6x^0y^0+7x^1y^0+8x^3y^0 \end{array}$$

Quádricas:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l} 2x^0y^2+ \\ 3x^0y^1+4x^1y^1+ \\ 5x^0y^0+6x^1y^0+7x^2y^0 \end{array}$$

(Obs: a gente poderia também ter usado

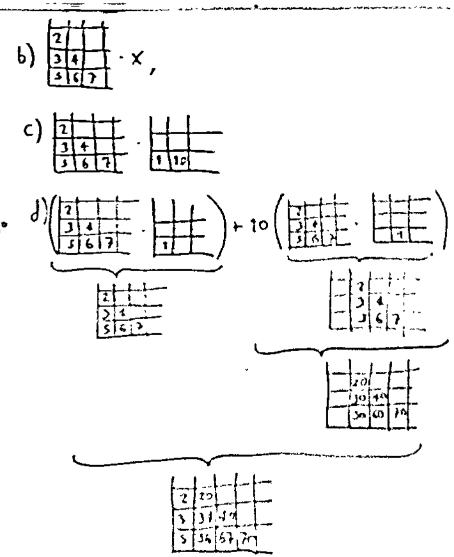
$$\begin{array}{c|cccc} x^3 & & & & \\ x^2 & & & & \\ x^1 & & & & \\ x^0 & & & & \\ \hline & y^0 & y^1 & y^2 & y^3 \end{array} \ \dots$$

Avisem que convenção vocês vão usar!)

Com esta notação somar e multiplicar polinômios é fácil.

Exercícios:
Represente nesta notação

a) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & & \\ \hline & & \\ \hline 20 & & 30 \\ \hline \end{array}$,



Voltando a quádricas e cônicas...

Como vimos na aula passada, hipérboles correspondem a quádricas da forma

$$\underbrace{(ax+by+c)}_{\text{isto corresponde a uma reta...}}\underbrace{(a'x+b'y+c')}_{\text{e isto a outra reta.}}+d=0$$

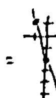
Exemplo:
Represente graficamente

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}(x,y)=0\}$

isto é:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y+2+3x=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-3x-2\}=$

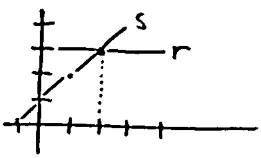


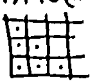
ou seja, $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ "é" uma reta.

Abuso de linguagem: a partir de agora nós vamos usar a notação $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$ também pra denotar o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais o polinômio é zero...

GA 23/maio/2014

EXERCÍCIO:
ENCONTRE EQUAÇÕES PARA AS RETAS r E s ABAIXO, E EXPRESSE CADA UMA DELAS NA FORMA  .



DEPOIS EXPRESSE O PRODUTO DOS DOIS POLINÔMIOS QUE VOCÊ OBTEVE TAMBÉM NA FORMA  .

OBS: EU USEI UM TERMO ERRADO NO QUADRO ANTERIOR... "QUÁDRICAS" SÃO SEMPRE EM $\mathbb{R}^3$!

FATO: SE

a		
b	c	
d	e	f

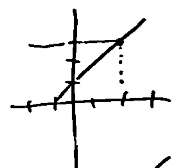
É UMA HIPÉRBOLE ENTÃO

a		
	c	
		f

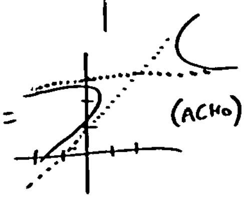
É A UNIÃO DE DUAS RETAS r E s PARALELAS ÀS ASSINTOTAS DA HIPÉRBOLE.

NO EXEMPLO:

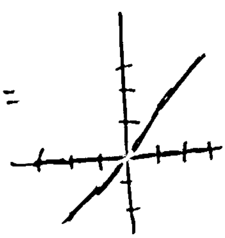
1		
-4	-1	
3	3	0

= 

1		
-4	-1	
4	3	0

=  (ACHO)

1		
	-1	
		0

= 

(VERIFIQUEM EM CASA).

O CAP. 23 DO LIVRO (LEIAM ELE E TENTEM ENTENDER DIREITO AS PARTES QUE PARECEREM MAIS IMPORTANTES) FALA DO CENTRO DE UMA CÔNICA E DO DISCRIMINANTE DE UMA CÔNICA...

PRA QUEM TIVER FEITO OS EXERCÍCIOS DE VISUALIZAÇÃO DA AULA PASSADA, O CENTRO DA CÔNICA

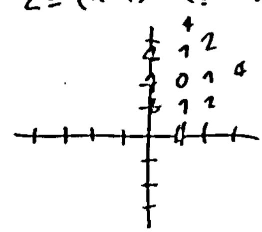
a		
b	c	
d	e	f

É O PONTO ONDE AS DERIVADAS DE z COM RELAÇÃO A x E y SÃO ZERO.

$z = F(x,y)$

EXEMPLO:

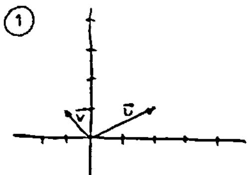
$z = (x-1)^2 + (y-2)^2$



GA 28/maio/2014

... Tínhamos combinado que como vários alunos iriam na reunião do CUV hoje nós faríamos uma aula sem matéria nova...

①



$\vec u = \overrightarrow{(2,1)}$,
$\vec v = \overrightarrow{(-1,1)}$,

$H' = \{O + t\vec u + \frac{1}{t}\vec v \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

Def: $(a,b)_{\Sigma'} = O + a\vec u + b\vec v$

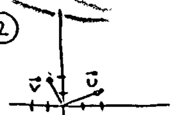
Digamos que $(U(x,y), V(x,y))_{\Sigma'} = (x,y)$.

Isto define U e V (!!!)...

Como? Use a definição de $(\_,\_)_{\Sigma'}$ e descubra que $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

Aí encontre uma outra matriz tal que $\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

②

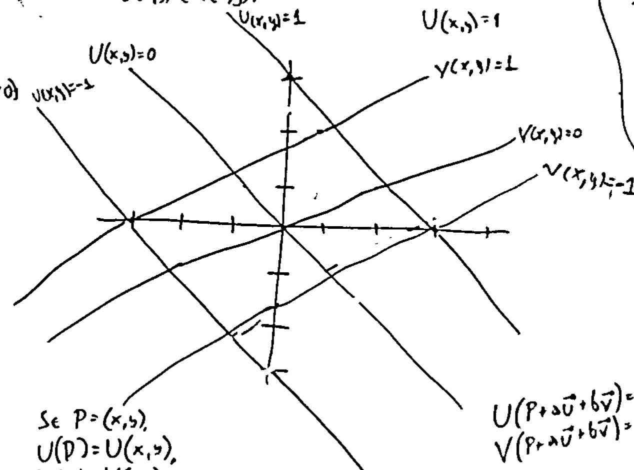


$\vec u = \overrightarrow{(2,1)}$,
$\vec v = \overrightarrow{(-1,2)}$

$H' = \{O + t\vec u + \frac{1}{t}\vec v \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

① (cont)

Represente graficamente algumas curvas de nível de $U(x,y)$ e $V(x,y)$.



Se $P = (x,y)$,
$U(P) = U(x,y)$,
$V(P) = V(x,y)$.

Fato: para qualquer $P \in \mathbb{R}^2$,
$U(P + \vec u) = U(P) + 1$,
$V(P + \vec u) = V(P)$,
$U(P + \vec v) = U(P)$, $V(P + \vec v) = V(P) + 1$.

Calcule:
$U(O + \vec u) = 1$
$V(O + \vec u) = 0$
$U(O + \vec v) = 0$
$V(O + \vec v) = 1$

$U(P + a\vec u + b\vec v) = U(P) + a$
$V(P + a\vec u + b\vec v) = V(P) + b$

1º Passo:

Pela definição: $(a,b)_{\Sigma'} = O + a\vec u + b\vec v$
$= O + a\overrightarrow{(2,1)} + b\overrightarrow{(-1,1)}$
$= O + \overrightarrow{(2a,a)} + \overrightarrow{(-b,b)}$
$= O + \overrightarrow{(2a-b, a+b)}$
$= (2a-b, a+b)$

Se $a = U(x,y)$ e $b = V(x,y)$, então:

$(U(x,y), V(x,y))_{\Sigma'} = (2U(x,y) - V(x,y), U(x,y$

Se $(U(x,y), V(x,y))_{\Sigma'} = (x,y)$, então:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Portanto

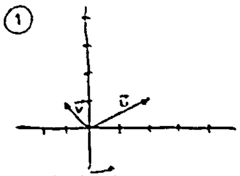
$\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

E $U(x,y) = \frac{x+y}{3}$,
$V(x,y) = \frac{-x+2y}{3}$.

GA 28/maio/2014

... Tínhamos combinado que como vários alunos iriam na reunião do CUV hoje nós faríamos uma aula sem matéria nova...

(1)



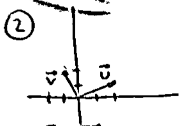
$\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(-1,1)}$,

$H'=\{O+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

Def: $(a,b)_{\Sigma'}=O+a\vec{u}+b\vec{v}$

Digamos que $(U(x,y),V(x,y))_{\Sigma'}=(x,y)$.
Isto define U e V (!!!)...
Como? Use a definição de $(-,-)_{\Sigma'}$ e descubra que $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
aí encontre uma outra matriz tal que $\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(2)

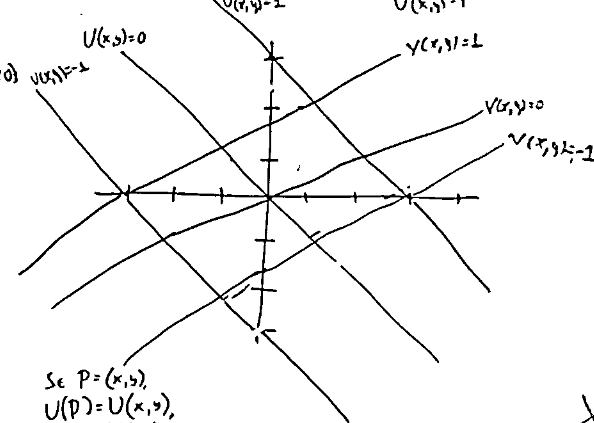


$\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(-1,2)}$

$H'=\{O+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

(1) (cont)

Represente graficamente algumas curvas de nível de $U(x,y)$ e $V(x,y)$.

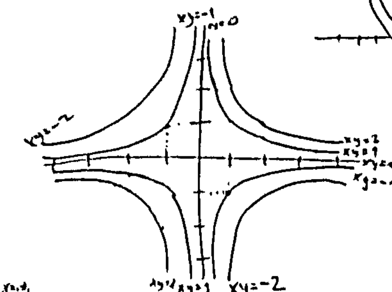


Se $P=(x,y)$,
$U(P)=U(x,y)$,
$V(P)=V(x,y)$.

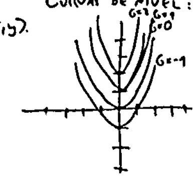
Fato: para qualquer $P\in\mathbb{R}^2$,
$U(P+\vec{u})=U(P)+1$,
$V(P+\vec{u})=V(P)$,
$U(P+\vec{v})=U(P)$, $V(P+\vec{v})=V(P)+1$.

Calcule:
$U(O+\vec{u})=1$
$V(O+\vec{u})=0$
$U(O+\vec{v})=0$
$V(O+\vec{v})=1$

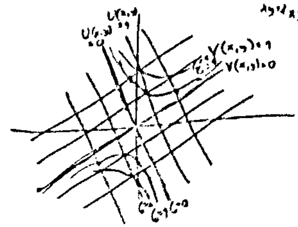
Seja $F(x,y)=xy$.
Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x,y)$.



Seja $G(x,y)=y-x^2$.
Curvas de nível:



Seja $E(x,y)=x^2+y^2$...



$G(x,y)=U(x,y)V(x,y)$

GA 30/maio/2014

Um exercício da aula de 4ª vai ser a BASE pra uma parte da prova — então vamos rever como fazê-lo, e o pessoal que veio na aula passada vai ajudar quem não veio.

(1) Sejam

$\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,

$\vec{v}=\overrightarrow{(-1,1)}$,

$H'=\{O+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$,

$(a,b)_{\Sigma'}=O+a\vec{u}+b\vec{v}$,

e digamos que

$$(U(x,y),V(x,y))_{\Sigma'}=(x,y) \quad (\star).$$

A equasão $(\star)$ define as funsões $U(x,y)$ e $V(x,y)$.

Descubra como, e encontre as matrizes tais que

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix}U(x,y)\\V(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix}U(x,y)\\V(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Depois disto represente graficamente $\vec{u}, \vec{v}$, algumas curvas de nível de $U(x,y)$ e $V(x,y)$, e H'.

Depois encontre uma equasão (um polinômio de 2º grau em x e y) para H', e teste-a.

Dicas pra estudar em casa:

(a) Mostre como obter as matrizes do problema anterior.

Note que quando a gente diz "mostre" você tem que explicar claramente, de algum jeito que até um leitor de ressaca consiga seguir cada passo.

(b) Generalize o problema anterior para o caso

$\vec{u}=\overrightarrow{(\alpha,\beta)}$,

$\vec{v}=\overrightarrow{(\gamma,\delta)}$.

Dica: lembre que $10\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&30\\40&50\end{pmatrix}$... Isto pode fazer as suas fórmulas ficarem menores.

(c) Releia a lista de exercícios sobre "métodos" e expresse a resposta do (b) como um "método".

(d) O final do problema 1 — encontrar uma equasão e testá-la — também envolve um "método", porque você vai ter que calcular alguns pontos de H'. Expresse todos os passos disto como um método também, e fasa-o para o caso geral: $t\in\mathbb{R}$ qualquer, só com a restrisão $t\neq 0$.

(e) Se $H''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U(x,y)V(x,y)-1=0\}$ então $H''=H'$. O item (d) demonstra que $H'\subseteq H''$. Não vamos ter tempo de ver o resto da demonstrasão.

(2) Mesma coisa que o (1), mas com:

$\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,

$\vec{v}=\overrightarrow{(-1,2)}$.

(3) Sejam

$C_0=(0,0)$, $R=5$,

$C_0'=(3,0)$, $R'=4$,

C o círculo de centro C_0 e raio R,

C' o círculo de centro C_0' e raio R'.

(a) Expresse as equasões de C e C' na forma .

(b) Subtraia estes dois polinômios — você vai obter uma reta. Represente C, C' e esta reta no mesmo gráfico.

(c) Generalize isto para $C_0=(a,b)$, $R\in\mathbb{R}$, $C_0'=(a',b')$, $R'\in\mathbb{R}$.