GA 8/AGO/2014

HÁ ALGUNS SEMESTRES ATRÁS A GENTE PÔS UM CARTAZ NA RAMPA DIZENDO:

> NÃO PERCA SEU TEMPO SENDO REPROVADO EM CÁLCULO 1 E GA! FAÇA FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA!!! SALA TAL! GRÁTIS!!!

LIVRO: BOULOS (COR DE LARANJA) - MEU PREFERIDO, MAS TEM O MESMO PROBLEMA QUE OS OUTROS... ELE JÁ COMEÇA POR CASOS MUITO GERAIS E POR DEMONSTRAÇÕES DESSES CASOS GERAIS - SEM ORIENTAR AS PESSOAS SOBRE COMO ESCREVER DEMONSTRAÇÕES.

PÁGINA DO CURSO: http://angg.twu.net/ CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

- VOU DIGITAR AOS POUCOS AS FOTOS DOS QUADROS QUE ESTÃO LÁ...
- OS PROBLEMAS DAS PROVAS DOS OUTROS SEMESTRES VIRAM EXERCÍCIOS NESTE SEMESTRE (OBS: QUASE TODOS OS PROBLEMAS QUE CAÍRAM EM PROVAS ERAM MUITO IMPORTANTES.)
- EU TENTO FAZER TODO O POSSÍVEL PRA QUE AS PESSOAS ESTUDEM EM GRUPO.
- AS HABILIDADES QUE VOCÊ DESENVOLVE QUANDO APRENDE A ESTUDAR EM GRUPO E NÃO SER VISTO COMO MALA SEM ALÇA PELOS SEUS COLEGAS SÃO PRATICAMENTE AS MESMAS NECESSÁRIAS PRA ESCREVER BEM AS RESPOSTAS DA PROVA.
- GA É UM CURSO DE ESCRITA MATEMÁTICA.

VOCÊS VÃO TER QUE APRENDER A FAZER CONTAS CERTAS E CLARAS - E ARGUMENTOS CERTOS E CLAROS TAMBÉM.

TIPOS DE OBJETOS

2 : NÚMERO ($2 \in \mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$: CONJUNTO

$\{2,3\}$: CONJUNTO

$(2,3)$: PONTO ($(2,3) \in \mathbb{R}^2$)

$(2,3)$: PONTO DE $\mathbb{R}^3$

$(4,5,6)$: PONTO DE $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$: VETOR (DE TAMANHO 2; OU UMA MATRIZ 2×1)

$\overrightarrow{(7,8)}$: VETOR (EM $\mathbb{R}^2$) ("VETOR" É AMBÍGUO!)

$\begin{pmatrix}10 & 20\\30 & 40\end{pmatrix}$: MATRIZ 2×2

$\{(0,1),(2,3)\}$: CONJUNTO (FINITO!) DE PONTOS DE $\mathbb{R}^2$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+3\}$ É UM CONJUNTO (INFINITO!) DE PONTOS DE $\mathbb{R}^2$ (UMA RETA!)

AGORA VAI PIORAR... !!

$y=2x+3$ É UMA EQUAÇÃO

$2=3+5$ É UMA PROPOSIÇÃO (FALSA)

$$\begin{aligned}2^{100}-2^{99} &= 2^{1+99}-2^{99}\\ &= 2^1\cdot 2^{99}-2^{99}\\ &= 2\cdot 2^{99}-1\cdot 2^{99}\\ &= (2-1)\cdot 2^{99}\\ &= 1\cdot 2^{99}\\ &= 2^{99}\end{aligned}$$

ISTO É UMA SÉRIE DE IGUALDADES - E, CADA UMA DELAS É UMA AFIRMAÇÃO FÁCIL DE VERIFICAR, OU DE JUSTIFICAR...

ISTO - SÉRIES DE IGUALDADES - É UM DOS TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO QUE A GENTE VAI USAR... O TIPO MAIS BÁSICO.

HOJE:
FUNÇÕES.
EQUAÇÃO DA RETA,
{PARÁBOLA, (SEMI-CÍRCULO), HIPÉRBOLE} - COMO FUNÇÕES - OU SEJA, COMO EM CÁLCULO 1 - E AÍ A GENTE VAI VER EM QUE SENTIDO GA LIDA COM FIGURAS MAIS GERAIS QUE CÁLCULO 1.

COMO É QUE A GENTE DEFINE UMA FUNÇÃO?

DOIS JEITOS:

NOME, DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO

$$\boxed{\begin{aligned}f:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto 2x+3\end{aligned}}$$

ISTO DEFINE A FUNÇÃO POR UMA OPERAÇÃO - POR SUBSTITUIÇÃO.

SEGUNDO JEITO:

$$\boxed{g(x)=2x+3}$$

AQUI O DOMÍNIO E O CONTRADOMÍNIO FICAM IMPLÍCITOS - A GENTE SÓ DIZ O NOME DA FUNÇÃO E A SUBSTITUIÇÃO.

COMO USAR FUNÇÕES DEFINIDAS DESTES JEITOS?

$f(30+4)=?$

"$x\mapsto 2x+3$" QUER DIZER "x VAI EM $2x+3$";

OU: QUANDO $x=30+4$, $f(x)=2(30+4)+3$

OBS: ( )

$f(x^2-x)=2(x^2-x)+3$ (!!!)

EXERCÍCIO: TRACE O GRÁFICO DESTAS FUNÇÕES:

a) $f(x)=2x+3$

b) $g(x)=3-2x$

c) $g(a)=2-\frac{a}{2}$

d) $h(b)=b^2$

e) $j(b)=b^2+1$

f) $k:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+1$

g) $c:\{-5,-4,-3,0,3,4,5\}\to\mathbb{R}$, $x\longmapsto\sqrt{25-x^2}$

GA 8/AGO/2014

HÁ ALGUNS SEMESTRES ATRÁS A GENTE PÔS UM CARTAZ NA RAMPA DIZENDO:

NÃO PERCA SEU TEMPO SENDO REPROVADO EM CÁLCULO 1 E GA! FAÇA FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA!!! SALA TAL! GRÁTIS!!!

LIVRO: BOULOS (COR DE LARANJA) - MEU PREFERIDO, MAS TEM O MESMO PROBLEMA QUE OS OUTROS... ELE JÁ COMEÇA POR CASOS MUITO GERAIS E POR DEMONSTRAÇÕES DESSES CASOS GERAIS - SEM ORIENTAR AS PESSOAS SOBRE COMO ESCREVER DEMONSTRAÇÕES.

PÁGINA DO CURSO: http://angg.twu.net/ CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

- VOU DIGITAR AOS POUCOS AS FOTOS DOS QUADROS QUE ESTÃO LÁ...
- OS PROBLEMAS DAS PROVAS DOS OUTROS SEMESTRES VIRAM EXERCÍCIOS DESTE SEMESTRE (OBS: QUASE TODOS OS PROBLEMAS QUE CAÍRAM ERAM PEQUENOS ERAM MUITO IMPORTANTES.)
- EU TENTO FAZER TODO O POSSÍVEL PRA QUE AS PESSOAS ESTUDEM EM GRUPO.
- AS HABILIDADES QUE VOCÊ DESENVOLVE QUANDO APRENDE A ESTUDAR EM GRUPO E NÃO SER VISTO COMO MALA SEM ALÇA PELOS SEUS COLEGAS SÃO PRATICAMENTE AS MESMAS NECESSÁRIAS PRA ESCREVER BEM AS RESPOSTAS DA PROVA.
- GA É UM CURSO DE ESCRITA MATEMÁTICA.

VOCÊS VÃO TER QUE APRENDER A FAZER CONTAS CERTAS E CLARAS - E ARGUMENTOS CERTOS E CLAROS TAMBÉM.

TIPOS DE OBJETOS

2 : NÚMERO $(2 \in \mathbb{R})$

$\mathbb{R}$: CONJUNTO

$\{2,3\}$: CONJUNTO

$(2,3)$: PONTO $((2,3) \in \mathbb{R}^2)$

$(4,5,6)$: PONTO DE $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$: VETOR (DE TAMANHO 2; OU UMA MATRIZ 2×1)

$\overrightarrow{(7,8)}$: VETOR (EM $\mathbb{R}^2$) ("VETOR" É AMBÍGUO!)

$\begin{pmatrix}10 & 20\\30 & 40\end{pmatrix}$: MATRIZ 2×2

$\{(0,1),(2,3)\}$: CONJUNTO (FINITO!) DE PONTOS DE $\mathbb{R}^2$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+3\}$ É UM CONJUNTO (INFINITO!) DE PONTOS DE $\mathbb{R}^2$ (UMA RETA!)

AGORA VAI PIORAR...!!

$y=2x+3$ É UMA EQUAÇÃO

$2=3+5$ É UMA PROPOSIÇÃO (FALSA)

$$\begin{aligned}2^{100}-2^{99} &= 2^{1+99}-2^{99}\\ &= 2^1\cdot2^{99}-2^{99}\\ &= 2\cdot2^{99}-1\cdot2^{99}\\ &= (2-1)\cdot2^{99}\\ &= 1\cdot2^{99}\\ &= 2^{99}\end{aligned}$$

ISTO É UMA SÉRIE DE IGUALDADES - E, CADA UMA DELAS É UMA AFIRMAÇÃO FÁCIL DE VERIFICAR, OU DE JUSTIFICAR...

ISTO - SÉRIES DE IGUALDADES - É UM DOS TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO QUE A GENTE VAI USAR... O TIPO MAIS BÁSICO.

HOJE:
FUNÇÕES.
EQUAÇÃO DA RETA,
{PARÁBOLA, (SEMI-CÍRCULO), HIPÉRBOLE - COMO FUNÇÕES - OU SEJA, COMO EM CÁLCULO 1 - E AÍ A GENTE VAI VER EM QUE SENTIDO GA LIDA COM FIGURAS MAIS GERAIS QUE CÁLCULO 1.

COMO É QUE A GENTE DEFINE UMA FUNÇÃO?

DOIS JEITOS:

NOME, DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO

$$\boxed{\begin{aligned}f:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto 2x+3\end{aligned}}$$

ISTO DEFINE A FUNÇÃO POR UMA OPERAÇÃO - POR SUBSTITUIÇÃO.

SEGUNDO JEITO:

$\boxed{g(x)=2x+3}$

AQUI O DOMÍNIO E O CONTRADOMÍNIO FICAM IMPLÍCITOS - A GENTE SÓ DIZ O NOME DA FUNÇÃO E A SUBSTITUIÇÃO.

COMO USAR FUNÇÕES DEFINIDAS DESTES JEITOS?

$f(30+4)=\,?$

"$x\mapsto 2x+3$" QUER DIZER "X VAI EM $2x+3$",

OU: QUANDO $x=30+4$, $f(x)=2(30+4)+3$

OBS:

$f(x^2-x)=2(x^2-x)+3$ (!!!)

EXERCÍCIO: TRACE O GRÁFICO DESTAS FUNÇÕES:

a) $f(x)=2x+3$

b) $g(x)=3-2x$

c) $g(a)=2-\frac{a}{2}$

d) $h(b)=b^2$

e) $j(b)=b^2+1$

f) $k:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+1$

g) $c:\{-5,-4,-3,0,3,4,5\}\to\mathbb{R}$, $x\longmapsto\sqrt{25-x^2}$

$\boxed{\text{GA 13/AGO/2014}}$

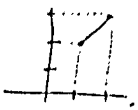
NA AULA PASSADA NÓS VIMOS DOIS JEITOS DE DEFINIR CONJUNTOS INFINITOS...

SEJAM

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ y = x+1\}$,

$B = \{(t+1, t+2) \mid t \in [0,1]\}$

ENTÃO:

$A =$ 

$B =$ 

(JÁ SABEMOS DEFINIR SEGMENTOS DE RETA EM $\mathbb{R}^2$!)

...MAS O FOCO DA AULA DE HOJE VAI SER MATRIZES, PONTOS E VETORES.

EXEMPLO:

SEJAM

$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$,

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$C = (1,2)$

$\vec{V} = \overrightarrow{(3,4)}$.

TODO MUNDO LEMBRA $\left(\because\right)$ COMO MULTIPLICAR MATRIZES E $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ É UMA MATRIZ 2×1...

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ 2\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ 2\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ 2\times 1}}$$

IGUAIS

EXERCÍCIO: LEMBRE COMO MULTIPLICAR MATRIZES E CALCULE O "$\left(:\right)$".

VAMOS USAR DUAS NOTAÇÕES DIFERENTES NO CURSO.

$C = (1,2)$ É UM PONTO EM $\mathbb{R}^2$,

$\vec{V} = \overrightarrow{(3,4)}$ É UM VETOR EM $\mathbb{R}^2$,

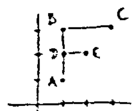
E QUANDO A GENTE PRECISAR DE OUTRA NOTAÇÃO REPRESENTAMOS O $(1,2)$ COMO $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ E O $\overrightarrow{(3,4)}$ COMO $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

A DISTINÇÃO ENTRE ELES — A SETA EM CIMA — DESAPARECE.

A NOTAÇÃO $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)$ É BOA PARA "ÁLGEBRA", E A NOTAÇÃO $(\cdot,\cdot)$, $\overrightarrow{(\cdot,\cdot)}$ É BOA PRA "GEOMETRIA".

FIGURAS E MUDANÇAS DE COORDENADAS

CONSIDERE A SEGUINTE FIGURA.



ELA É OBTIDA A PARTIR DOS PONTOS A, B, C, D, E TRAÇANDO CERTOS SEGMENTOS ENTRE ELES.

TEMOS

$A = (1,1)$

$B = (1,3)$

$C = (3,3)$

$D = (1,2)$.

$E = (2,2)$.

EXERCÍCIO:

a) PARA CADA PONTO $P = (x,y)$ SEJA $P' = (2x, 2y)$. CALCULEM AS COORDENADAS DOS PONTOS A', B', C', D', E' E "TRACEM O F" SOBRE ESTES PONTOS.

b) IDEM, MAS AGORA A REGRA PARA DEFINIR CADA P' A PARTIR DO P CORRESPONDENTE É: $P' = (x+1, y)$.

c) IDEM, MAS AGORA PARA CADA PONTO $P = (x,y)$ TEMOS $P' = (x, y+1)$.

(10 MINS, EM GRUPO)

A IDÉIA GERAL POR TRÁS DISTO É A SEGUINTE. SABEMOS SOMAR E MULTIPLICAR MATRIZES (2×2, 2×1, ETC). SE AO INVÉS DE ESCREVERMOS $P = (x,y)$ USAMOS A OUTRA NOTAÇÃO, $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ENTÃO NO EXERCÍCIO A TEMOS $P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P$, NO EXERCÍCIO B TEMOS $P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P$, E NO EXERCÍCIO C TEMOS $P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + P$.

O OBJETIVO PRINCIPAL DA AULA DE HOJE É TODO MUNDO SAIR ENTENDENDO "GRAFICAMENTE" O QUE QUER DIZER CADA TRANSFORMAÇÃO

$$P' = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P.$$

EXERCÍCIOS:

(MESMA COISA QUE OS EXERCÍCIOS ANTERIORES, SÓ QUE COM REGRAS NOVAS PRA DEFINIR P' A PARTIR DE P):

d) $P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P$

e) $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$

f) $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$

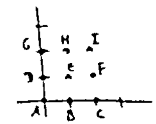
g) $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$

h) $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P$

i) $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} P$

j) $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P$

AGORA FAÇA A MESMA COISA QUE NOS EXERCÍCIOS A ATÉ J, MAS COM ESTES 9 PONTOS:



FAÇAM ISTO EM GRUPO, PORQUE O OBJETIVO É VOCÊS DESCOBRIREM OS TRUQUES PRA RESOLVER ESTE EXERCÍCIO RÁPIDO.

GA 13/AGO/2014

PRA CASA, MUITO IMPORTANTE:

① ENTENDA COMO FUNCIONAM TODAS AS TRANSFORMAÇÕES DA FORMA

$$P' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P$$

"ENTENDER" QUER DIZER O SEGUINTE: QUANDO VOCÊ TIVER ENTENDIDO VOCÊ VAI SABER COMO ESTA TRANSFORMAÇÃO FUNCIONA GRAFICAMENTE PARA QUAISQUER VALORES DE a, b, c, d QUE TE DEREM.

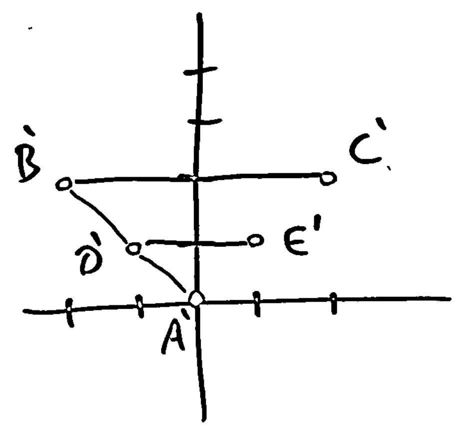
② FAÇA O MESMO PARA

$$P' = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P.$$

③ ENCONTRE A TRANSFORMAÇÃO

$$P' = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P$$

TAL QUE O "F RESULTANTE" DELA SEJA:



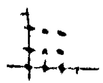
$\boxed{\text{GA 15/AGO/2014}}$

Um dos exercícios do final da aula passada era entender as transformações do tipo

$$P' = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P,$$

para quaisquer valores de a, b, c, d, e, f...

Um outro, mais básico, era ver como esta figura aqui era transformada:



O modo mais fácil de entender como estas transformações funcionam é começar transformando os pontos que estão nos eixos — ou começar transformando só os pontos $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

O livro usa a notação $(a, b)_\Sigma$ para o ponto que tem coordenadas a e b no "sistema de coordenadas" Σ...

Vamos começar por algo mais fácil de formalizar. Seja

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercício. Para cada uma das transformações da aula passada represente graficamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma$.

(Truque: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} e+a \\ f+c \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} e+b \\ f+d \end{pmatrix}$)

No exercício J da aula passada tínhamos

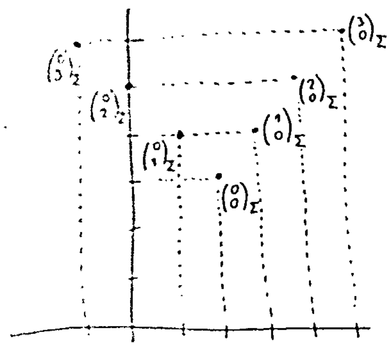
$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P.$$

Neste caso quem são a, b, c, d, e, f? E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_\Sigma$?

Um exemplo um pouco mais complicado: Digamos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

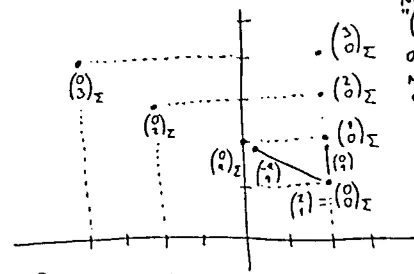
Então temos



Exercício: Faça um diagrama correspondente para

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

depois acrescente nele os pontos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_\Sigma$.



Repare que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma$,
$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma$,
$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_\Sigma$, etc.

O livro começa falando de pontos e vetores de forma puramente geométrica, sem coordenadas... A ideia por trás disto é que dá para atribuir coordenadas <u>de várias formas</u> para os <u>mesmos</u> pontos e vetores!

No exemplo anterior, "$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_\Sigma$" quer dizer que o ponto cujas coordenadas no sistema de coordenadas canônicas é $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ é o mesmo ponto que tem coordenadas 0 e 2 no sistema de coordenadas Σ...

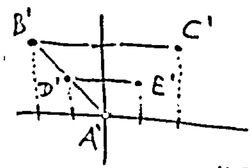
GA 15/AGO/2014

O exercício 3 pra casa da aula passada era o seguinte:

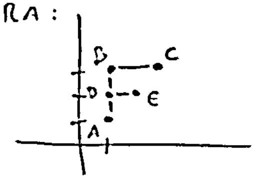
Encontre a transformação

$$P' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} P$$

tal que o "F transformado" dela seja:

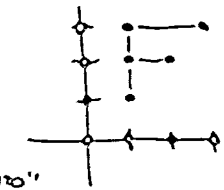


Lembre que o "F original" era:

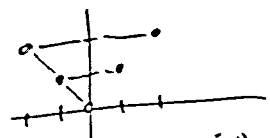


Dica: este problema fica muito mais fácil de resolver se acrescentamos alguns pontos à figura original.

Considere esta figura (o "F aumentado"):



(a) Se o F transformado é isto,



Então o que é o "F aumentado transformado"?

(b) Quem são o e e o f do $P' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} P$?

(c) Quem são a, b, c, d?

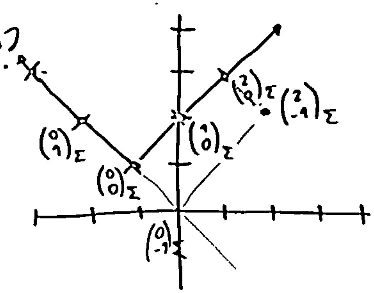
(d) Agora que você tem a, b, c, d, e, f, faça algumas contas pra conferir seus resultados.

Geometricamente

Se a gente tem os dois eixos de um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ (com as marcas), a gente consegue descobrir as coordenadas — neste sistema — de cada ponto do $\mathbb{R}^2$...

E se a gente tem os pontos $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\Sigma$ a gente consegue construir os eixos.

Exemplo:



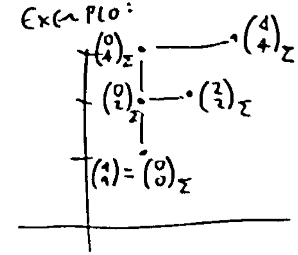
No exercício que vocês acabaram de fazer — o do F torto — vocês encontraram os eixos e a transformação

$$P' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} P$$

que gerava um certo "F transformado"...

Na aula que vem vamos começar a trabalhar com coordenadas em vários sistemas de coordenadas para os mesmos pontos, e isto vai nos ajudar a entender a abordagem do livro.

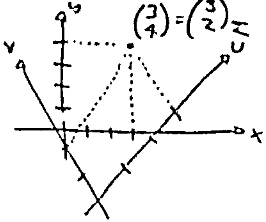
Exemplo:



GA 20/AGO/2014

NA AULA PASSADA A GENTE COMEÇOU A VER SISTEMAS DE COORDENADAS... FICOU FALTANDO VER COMO REPRESENTAR OS EIXOS DE DOIS SISTEMAS DE COORDENADAS NO MESMO PLANO.

EXEMPLO:



NA AULA PASSADA ESTÁVAMOS USANDO ESTA DEFINIÇÃO:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

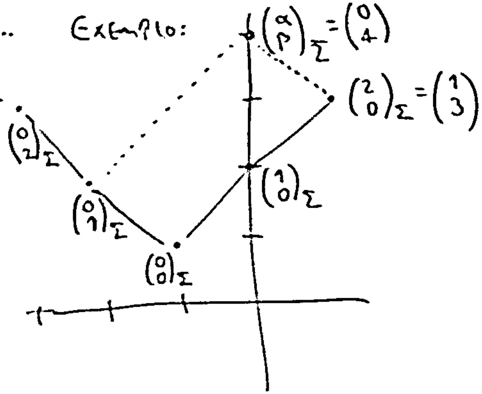
E A MINHA SUGESTÃO ERA QUE VOCÊS COMEÇASSEM REPRESENTANDO GRAFICAMENTE

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}_\Sigma, \ldots$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}_\Sigma, \ldots$

PRA ENTENDER OS EIXOS DESTE SISTEMA NOVO DE COORDENADAS.

EXEMPLO:



NESTE CASO,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

EXEMPLO:

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

QUAIS DEVEM SER OS VALORES DE α E β PARA QUE TENHAMOS:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \quad ?$$

HIPÓTESE:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

QUANDO $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

TEMOS

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

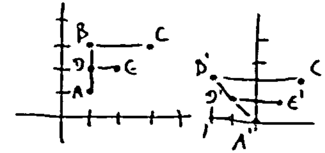
COMO CONSEGUIR α E β ALGEBRICAMENTE? VAMOS PRECISAR INVERTER UMA MATRIZ...

UM PROBLEMA DA AULA PASSADA:

SABEMOS QUE

$$P' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}P,$$

E AS FIGURAS SÃO



QUEM SÃO a, b, c, d, e, f?

SABEMOS QUE:

$A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\quad B' = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $\quad C' = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad D' = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\quad E' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$

E QUE:

$$A' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}A,$$

$$B' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}B, \; e$$

HIPÓTESE:

$$\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

A

P

$0)$ $4)$

$2)_\Sigma \; 0) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $1)$

$1)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $1)$

QUAIS DEVEM SER OS VALORES DE α E β PARA QUE TENHAMOS:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \quad ?$$

HIPÓTESE:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

QUANDO $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

TEMOS $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

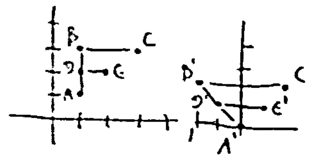
COMO CONSEGUIR α E β ALGEBRICAMENTE? VAMOS PRECISAR INVERTER UMA MATRIZ...

UM PROBLEMA DA AULA PASSADA:

SABEMOS QUE

$$P' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}P,$$

E AS FIGURAS SÃO



QUEM SÃO a,b,c,d,e,f?

SABEMOS QUE:

$A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $D' = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $E' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

E QUE:

$$A' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}A,$$

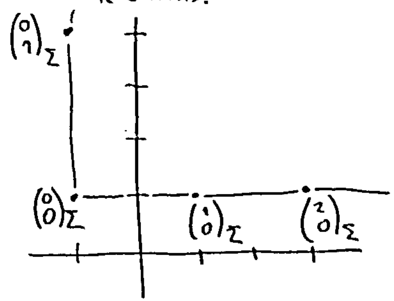
$$B' = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}B, \text{ ETC.}$$

HIPÓTESE:

$$\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

AGORA VAMOS OLHAR PRA UMA OUTRA MUDANÇA DE COORDENADAS.



NESTE CASO TEMOS:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

DIGAMOS QUE $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

QUEM SÃO α E β?

HIPÓTESE: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. NÃO. :(

HIPÓTESE: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. SIM! :)

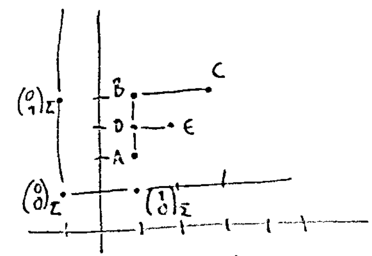
AGORA DIGAMOS QUE: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

QUEM SÃO α E β?

HIPÓTESE: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ SIM.

EXERCÍCIO:

OBTENHA AS COORDENADAS, NOS DOIS SISTEMAS DE COORDENADAS, DOS PONTOS A, B, C, D, E DA FIGURA:



$A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/3\end{pmatrix}_\Sigma$

$B = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_\Sigma$

$C = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_\Sigma$

$D = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2/3\end{pmatrix}_\Sigma$

$E = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\2/3\end{pmatrix}_\Sigma$

GA 20/AGO/2014

Porque quando a gente usa a notação (x,y), $\overrightarrow{(x,y)}$ a gente distingue pontos de vetores?

Na figura anterior temos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ — Geometricamente $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DB}$ são setas iguais, mas deslocadas... Mais formalmente, (A,D) e (D,B) são segmentos orientados equipolentes.

Repare,

$\overrightarrow{AD} = D - A = \binom{1}{3} - \binom{1}{2} = \binom{0}{1}$

$\overrightarrow{DB} = B - D = \binom{1}{4} - \binom{1}{3} = \binom{0}{1}$

E no outro sistema de coordenadas?

$\binom{1}{2/3}_\Sigma - \binom{1}{1/3}_\Sigma = \binom{0}{1/3}_\Sigma$

$\binom{1}{1}_\Sigma - \binom{1}{2/3}_\Sigma = \binom{0}{1/3}_\Sigma$

Só que a gente ainda não definiu precisamente o que é $\binom{\cdot}{\cdot}_\Sigma - \binom{\cdot}{\cdot}_\Sigma$...

Fato: quando a gente "transforma pontos" a gente tem $\binom{\alpha}{\beta}_\Sigma = \binom{-1}{1} + \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\binom{\alpha}{\beta}$

mas quando a gente "transforma vetores" a gente tem outra fórmula — sem o "$\binom{-1}{1}+$"!!!

Pra casa: pense nisto, e tente formalizar — a gente vai ver a formalização correta, e uma demonstração, com detalhes.

Em outra notação:

$(\alpha,\beta)_\Sigma = (-1,1) + \alpha\overrightarrow{(2,0)} + \beta\overrightarrow{(0,3)}$

$\overrightarrow{(\alpha,\beta)}_\Sigma = \alpha\overrightarrow{(2,0)} + \beta\overrightarrow{(0,3)}$.

(isto é algébrico...)

Vamos voltar pra geometria...

Operações com pontos e vetores:

Formalmente:

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$,

$\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$,

$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$.

Coisas como $(a,b) + (c,d)$ dão erro.

No cap 1 do Boulos, logo na def. 1.2, ele já usa vários conceitos geométricos... comprimento de segmento orientado, retas paralelas, interseção de retas, etc.

Como a gente define precisamente estas coisas?

Vamos precisar definir distância entre pontos e comprimento de segmento orientado/vetor...

$d((a,b),(c,d)) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$

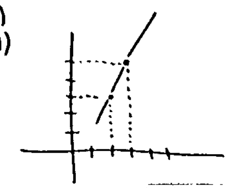
$\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vamos definir retas usando pontos e vetores.

Exemplo: seja $r = \{(2,3) + t\overrightarrow{(1,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Sabemos calcular pontos desta reta...

t	$(2,3) + t\overrightarrow{(1,2)}$
0	$(2,3) + 0\overrightarrow{(1,2)} = (2,3) + \overrightarrow{(0,0)} = (2,3)$
1	$(2,3) + 1\overrightarrow{(1,2)} = (2,3) + \overrightarrow{(1,2)} = (3,5)$
2	$(4,7)$
3	$(5,9)$

$r =$ 

Def: duas retas, r e r', são paralelas quando $r \cap r' = \emptyset$...

Dadas duas retas r e r', não paralelas, é fácil exibir uma prova de que elas não são paralelas... basta encontrar um ponto em $r \cap r'$. Mostrar que duas retas são paralelas é mais difícil.

Exercício, pra casa:

A definição 1.2 do livro tem vários casos — exiba um exemplo de cada caso dando coordenadas para os pontos A, B, C, D (e E e F onde precisar).

$\boxed{\text{GA 20/AGO/2014}}$ $\boxed{B}$

AVISOS:
AS PROVAS DEVEM SER UNIFICADAS — CADA PROFESSOR VAI DAR O MESMO CONTEÚDO, DO SEU JEITO, ATÉ A PROVA, E A PROVA VAI SER A MESMA PRA TODAS AS TURMAS.

HOJE: MATRIZES E CONJUNTOS (E GRÁFICOS, RETAS, ETC).

DUAS NOTAÇÕES PRA PONTOS E VETORES:

	NOTAÇÃO "GEOMÉTRICA"	NOTAÇÃO "ALGÉBRICA"
PONTO	$(2,3)$	$\binom{2}{3}$
VETOR	$\overrightarrow{(2,3)}$	$\binom{2}{3}$

SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}}$$

IGUAIS

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am+bo+cq+ds & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}} = \text{NÃO DÁ!!!}$$

$\neq$! ERRO!

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{pmatrix}$$

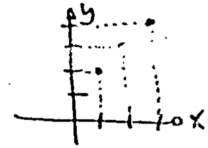
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{ERRO.}$$

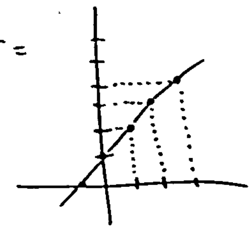
CONJUNTOS

$A = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

A =



r =



$(1,3) \in r$? NÃO
$(2,2) \in r$? NÃO
$(1,2) \in r$? SIM
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \in r$? SIM
$= (0.5, 1.5)$
$(1.25, 2.25) \in r$

DUAS NOTAÇÕES PRA CONJUNTOS (INFINITOS)

$$B = \{\underbrace{(x,y)\in\mathbb{R}^2}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{y=x+1}_{\text{FILTRO}}\}$$

$$C = \{\underbrace{(t+1,t+2)}_{\text{EXPRESSÃO}} \mid \underbrace{t\in\mathbb{R}}_{\text{GERADOR}}\}$$

t	$(t+1, t+2)$
-2	(-1, 0)
-1	(0, 1)
0	(1, 2)
1	(2, 3)
2	(3, 4)
3	(4, 5)
27.412	

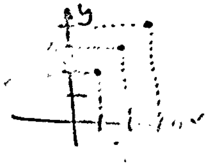
$$\left.\begin{matrix} \text{...ecq+ds} & \dots \\ \dots & \dots \\ & \dots \end{matrix}\right)$$

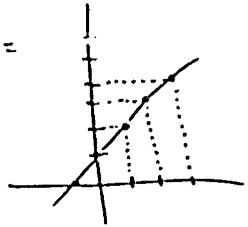
...n'!!!

$$\left.\begin{matrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{matrix}\right)$$

Conjuntos

$A = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

A = 

r = 

$(1,3) \in r$? NÃO

$(2,2) \in r$? NÃO

$(1,2) \in r$? SIM

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \in r$? SIM

$\shortparallel$

$(0.5, 1.5)$

$(1.25, 2.25) \in r$

DUAS NOTAÇÕES P/A CONJUNTOS (INFINITOS)

$$B = \{\underbrace{(x,y) \in \mathbb{R}^2}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{y = x+1}_{\text{FILTRO}}\}$$

$$C = \{\underbrace{(t+1, t+2)}_{\text{EXPRESSÃO}} \mid \underbrace{t \in \mathbb{R}}_{\text{GERADOR}}\}$$

t	$(t+1, t+2)$
-2	(-1, 0)
-1	(0, 1)
0	(1, 2)
1	(2, 3)
2	(3, 4)
3	(4, 5)
27.412	

EXERCÍCIO:

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $\{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(t,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(3,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

d) $\{(-3t,-6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

e) $\{(2,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$

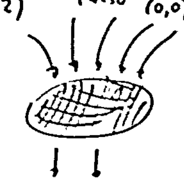
h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3\}$

i) $\{(t, t/2) \mid 2 \leq t \leq 6\}$

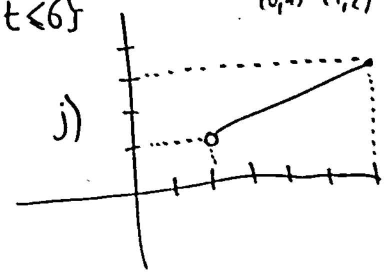
j) $\{(t, t/2) \mid 2 < t \leq 6\}$

(x,y)	$y = x+1$
(0,0)	FALSO
(0,1)	VERDADEIRO
(0,2)	FALSO
(1,0)	FALSO
(1,1)	FALSO
(1,2)	VERDADEIRO
(2,0)	FALSO
(2,1)	FALSO
(2,2)	FALSO

(0,0) (0,1)



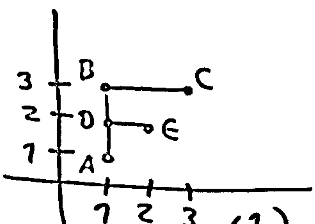
(0,1) (1,2)

j) 

$\boxed{\text{GA 20/AGO/2014}}\ \boxed{\text{B}}$

TRANSFORMAÇÕES (INTRODUÇÃO)

SEJA "F" ESTA FIGURA DAQUI, FORMADA POR TRÊS SEGMENTOS APOIADOS NOS PONTOS A, B, C, D, E...



$A=(1,1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$B=(1,3) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$C=(3,3) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$D=(1,2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$E=(2,2) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

NOTAÇÃO:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$$

NOTAÇÃO:

PARA CADA PONTO $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$P' = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

EXEMPLO:

$D = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$

$$D' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

OU SEJA, $D' = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

$A' =$

$B' =$

$C' =$

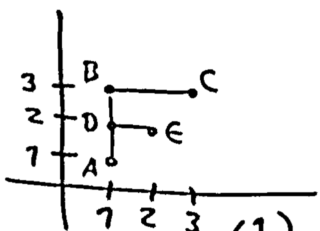
$D' = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$E' =$

$\boxed{\text{GA 20/AGO/2014}}$ $\boxed{\text{B}}$

TRANSFORMAÇÕES (INTRODUÇÃO)

SEJA "F" ESTA FIGURA DAQUI, FORMADA POR TRÊS SEGMENTOS APOIADOS NOS PONTOS A, B, C, D, E...



$A=(1,1)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$B=(1,3)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$C=(3,3)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$D=(1,2)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$E=(2,2)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

NOTAÇÃO:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$$

NOTAÇÃO:

PARA CADA PONTO $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$P'=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

EXEMPLO:

$$D=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

$$D'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

OU SEJA, $D'=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

$A'=$

$B'=$

$C'=$

$D'=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$E'=$

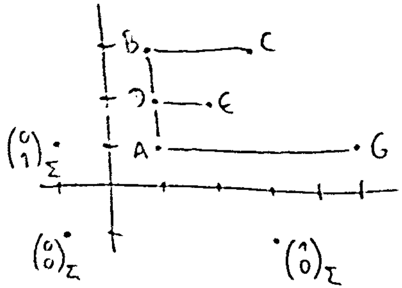
GA 22/AGO/2014 | A

... O LIVRO COMEÇA EXPONDO COISAS DE UMA FORMA ESQUISITA PORQUE ELE SUPÕE QUE OS LEITORES JÁ SAIBAM "GEOMETRIA AXIOMÁTICA" (EUCLIDES, ~500 A.C.)

NA QUAL A GENTE COMEÇA COM ALGUMAS OPERAÇÕES QUE CONSTROEM PONTOS, RETAS, ETC, OUTRAS OPERAÇÕES ("PERTENCE A?", "É PARALELA A?"...) QUE RESPONDEM "SIM" OU "NÃO" — E A PARTIR DISTO ELE (ELE = EUCLIDES!) CONSTRÓI VÁRIOS OUTROS OBJETOS, E PROVA QUE ALGUNS DESTES OBJETOS CONSTRUÍDOS SÃO IGUAIS...

E LÁ NÚMEROS SÓ APARECEM BEM ADIANTE (LIVRO X?), E COMO PROPORÇÕES ENTRE COMPRIMENTOS (OU ÁREAS).

EM GEOMETRIA ANALÍTICA A GENTE COMEÇA COM NÚMEROS



DUAS DEFINIÇÕES DE DISTÂNCIA:

SE $A=(A_1,A_2)$, $B=(B_1,B_2)$

ENTÃO $d(A,B)=\sqrt{(B_1-A_1)^2+(B_2-A_2)^2}$;

SE $A=(A_1',A_2')_\Sigma$, $B=(B_1',B_2')_\Sigma$

ENTÃO $d_\Sigma(A,B)=\sqrt{(B_1'-A_1')^2+(B_2'-A_2')^2}$.

EXERCÍCIO (IMPORTANTE E URGENTE): VERIFIQUE QUE:

$d(A,B)=2$ $\quad d_\Sigma(A,B)=1$

$d(A,G)=4$ $\quad d_\Sigma(A,G)=1$.

PRÓXIMO PASSO: ORTOGONALIDADE, ÂNGULOS, ETC...

DEFINIÇÕES:

(LEMBRE QUE $(a,b)\neq\overrightarrow{(a,b)}$!)

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$

$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)}=\overrightarrow{(a+c,b+d)}$

$(a,b)-(c,d)=\overrightarrow{(a-c,b-d)}$

$k\overrightarrow{(a,b)}=\overrightarrow{(ka,kb)}$

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)}=ac+bd$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\overrightarrow{AB}=B-A$

$d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|$

OBS. A OPERAÇÃO "$d(\_,\_)$" NOS PERMITE COMPARAR DISTÂNCIAS, $\frac{d(A,B)}{d(C,D)}$ NOS PERMITE CALCULAR PROPORÇÕES ENTRE DISTÂNCIAS, ETC...

E MAIS UMA DEFINIÇÃO:

$\vec{v}\perp\vec{w} \iff \vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

A PARTIR DESTAS DEFINIÇÕES PODEMOS DEFINIR VÁRIAS OUTRAS CONSTRUÇÕES... POR EXEMPLO:

$\{A+t\overrightarrow{AB}\mid t\in\mathbb{R}\}$

É A RETA QUE PASSA POR A E B,

E SE $r=\{A+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$

E $B\in\mathbb{R}^2$, ENTÃO

$s=\{B+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$

É UMA RETA PARALELA A r PASSANDO POR B,

E $s'=\{C\in\mathbb{R}^2\mid\overrightarrow{BC}\perp\vec{v}\}$

É UMA RETA ORTOGONAL A r PASSANDO POR B.

(1) EXERCÍCIO: USANDO OS PONTOS DO INÍCIO DA AULA E AS DEFINIÇÕES ACIMA, REPRESENTE FORMALMENTE (COMO CONJUNTO) E GRAFICAMENTE

(a) A RETA, r, QUE PASSA POR A E C,

(b) A...

(c) ...

D...

(2) ...

$(\overrightarrow{a,b})!)$

$c, b+d)$

$\overrightarrow{c, b+d)}$

$\overrightarrow{c, b-d)}$

bd

RAÇÃO
OS
MPARAR

PERMITE

ROPORÇÕES
CIAR, ETC...
DEFINIÇÃO:
$\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

<u>A PARTIR</u> DESTAS DEFINIÇÕES PODEMOS DEFINIR VÁRIAS OUTRAS CONSTRUÇÕES...
POR EXEMPLO:

$\{A+t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$

É A RETA QUE PASSA POR A E B,

E SE

$r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

E $B\in\mathbb{R}^2$, ENTÃO

$s=\{B+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

É UMA RETA PARALELA A r PASSANDO POR B,

E

$s'=\{C\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{BC}\perp\vec{v}\}$

É UMA RETA ORTOGONAL A r PASSANDO POR B.

① EXERCÍCIO:
USANDO OS PONTOS DO INÍCIO DA AULA E AS DEFINIÇÕES ACIMA, REPRESENTE <u>FORMALMENTE (COMO CONJUNTO)</u> E <u>GRAFICAMENTE</u>

ⓐ A RETA, r, QUE PASSA POR A E C,

ⓑ A RETA r', PARALELA A r E QUE PASSA POR D,

ⓒ A RETA r'', PERPENDICULAR A r E QUE PASSA POR D.

DICA: FAÇA CADA EXERCÍCIO PASSO A PASSO DEFININDO (OU CALCULANDO) EXPLICITAMENTE CADA OBJETO INTERMEDIÁRIO.

ⓐ $r=\{A+t\overrightarrow{AC} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$A=(1,1)$

$C=(3,3)$

$\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{2,2})$

$r=\{(1,1)+t(\overrightarrow{2,2}) \mid t\in\mathbb{R}\}$

OBS: SEGUINDO LITERALMENTE AS DEFINIÇÕES,
A "RETA QUE PASSA POR A E C" É

$\{A+t\overrightarrow{AC} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

E A "RETA QUE PASSA POR C E A" É

$\{C+t\overrightarrow{CA} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

ESSAS DUAS RETAS VÃO TER OS MESMOS PONTOS, MAS NÃO É <u>ÓBVIO</u> PARA <u>TODOS</u> OS LEITORES QUE ELAS VÃO SER IGUAIS...
ALIÁS, ISTO MERECE UM <u>TEOREMA</u>:
PARA QUALQUER $A, C\in\mathbb{R}^2$,

$\{A+t\overrightarrow{AC} \mid t\in\mathbb{R}\}=\{C+t\overrightarrow{CA} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

ⓓ SEJAM $\vec{v}=(\overrightarrow{2,2})$,
$A=(1,1)$.
ENCONTRE 5 PONTOS DIFERENTES, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, TAIS QUE

$\overrightarrow{AC_1}\perp\vec{v}$,

$\overrightarrow{AC_2}\perp\vec{v}$,

ETC.

<u>OPERAÇÕES EM OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS</u>

DEFS:

$(a,b)_\Sigma +_\Sigma (\overrightarrow{c,d})_\Sigma = (\overrightarrow{a+c, b+d})_\Sigma$

$(\overrightarrow{a,b})_\Sigma +_\Sigma (\overrightarrow{c,d})_\Sigma = (\overrightarrow{a+c, b+d})_\Sigma$

$(a,b)_\Sigma -_\Sigma (c,d)_\Sigma = (\overrightarrow{a-c, b-d})_\Sigma$

$k(\overrightarrow{a,b})_\Sigma = (ka, kb)_\Sigma$

$(\overrightarrow{a,b})_\Sigma \cdot_\Sigma (\overrightarrow{c,d})_\Sigma = ac+bd$

$\|\vec{v}\|_\Sigma = \sqrt{\vec{v}\cdot_\Sigma\vec{v}}$

$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} = B_\Sigma -_\Sigma A_\Sigma$

$d_\Sigma(A_\Sigma, B_\Sigma) = \|\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\|_\Sigma$

GA 22/AGO/2014 | A

NOTE QUE

$d_\Sigma(A_\Sigma, B_\Sigma) = \|\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\|_\Sigma$

É UMA REDEFINIÇÃO!

ESTA DEFINIÇÃO NOVA VAI DAR O MESMO RESULTADO QUE A DO INÍCIO DA AULA, MAS ISTO NÃO É ÓBVIO...

NA FIGURA DO INÍCIO DA AULA TEMOS

$A = (1,1) = A_\Sigma = (0.5, 1)_\Sigma$,

$B = (1,3) = B_\Sigma = (0.5, 2)_\Sigma$,

ETC.

EXERCÍCIO. USANDO AS DEFINIÇÕES NOVAS, CALCULE

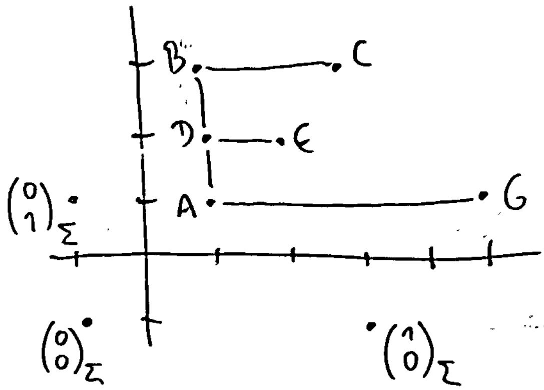
$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma G_\Sigma}$

E $\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{B_\Sigma E_\Sigma}$.

EXERCÍCIO MUITO IMPORTANTE (☠):

REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\{P_\Sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{A_\Sigma P_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} = 0\}$



DUAS DEFINIÇÕES DE DISTÂNCIA:

SE $A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$

ENTÃO $d(A,B) = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2}$;

SE $A = (A_1', A_2')_\Sigma$, $B = (B_1', B_2')_\Sigma$

ENTÃO $d_\Sigma(A,B) = \sqrt{(B_1' - A_1')^2 + (B_2' - A_2')^2}$

EXERCÍCIO (IMPORTANTE E URGENTE): VERIFIQUE QUE:

$d(A,B) = 2$ $\quad$ $d_\Sigma(A,B) = 1$

$d(A,G) = 4$ $\quad$ $d_\Sigma(A,G) = 1$.

PRÓXIMO PASSO: ORTOGONALIDADE, ÂNGULOS, ETC...

DEFINI...
(LEMB...
(a, b...
$(\overline{a}, ...$
(a, ...
K(...
$(\overline{a}, ...$

GA 22/AGO/2014 | B

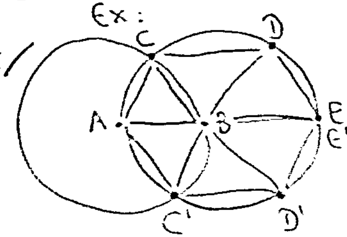
PÁGINA DO CURSO:
http://angg.tuu.net/
(OU GOOGLEM POR "EDUARDO OCHS")
E CLIQUEM EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

AVISOS: OS LIVROS - TANTO O BOULOS QUANTO OS OUTROS - SUPÕEM QUE VOCÊS JÁ APRENDERAM "GEOMETRIA AXIOMÁTICA" NO ENSINO MÉDIO...

G. AX.: EUCLIDES, "ELEMENTOS" - ~300 A.C.

NOS "ELEMENTOS" A GENTE COM ALGUMAS DEFINIÇÕES - PONTO, RETA, ETC -, UMAS OPERAÇÕES - UMAS PRODUZEM OUTROS PONTOS, RETAS, CÍRCULOS, ETC, OUTRAS RETORNAM "SIM" OU "NÃO" - E UMAS PROPRIEDADES (AXIOMAS)... E A PARTIR ELE FAZ UM MONTE DE CONSTRUÇÕES E DE TEOREMAS MOSTRAM QUE CERTAS CONSTRUÇÕES SÃO EQUIVALENTES.

EX:



TEOREMAS:
$d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = \ldots$
$E = E'$.

TUDO NOS "ELEMENTOS" É FEITO NA ORDEM - MAS NÚMEROS SÓ APARECEM NO LIVRO 5 - E APARECEM COMO PROPORÇÕES!

QUANDO A GENTE ESTUDA G.A. A GENTE JÁ COMEÇA SABENDO BASTANTE SOBRE NÚMEROS, E A GENTE USA ELES PRAS COORDENADAS.

O LIVRO (O DO BOULOS) MENCIONA RETAS E PARALELISMO LOGO NO INÍCIO, MAS SÓ DEFINE ISSO PRECISAMENTE BEM DEPOIS.

A GENTE VAI USAR MUITOS TIPOS DE OBJETOS...

2 : UM NÚMERO (INTEIRO, RACIONAL, REAL)

$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$: UMA MATRIZ 2×1

$\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}$: UMA MATRIZ 2×2

$(9,10)$: UM PONTO DE $\mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{(11,12)}$: UM VETOR EM $\mathbb{R}^2$

PONTOS E VETORES SÃO DIFERENTES!

OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$

$\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$

$(a,b) - (c,d) = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$

$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

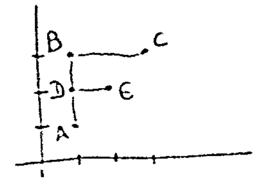
$\overrightarrow{AB} = B - A$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

EXERCÍCIO:

SEJAM A, B, C, D, E ESTES PONTOS:



CALCULEM (PASSO A PASSO):

$\overrightarrow{AB}$,
$E + \overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$,
$\|\overrightarrow{AB}\|$,
$d(A,B)$,
$d(A,E)$,
$A + 2\overrightarrow{DE}$,
$A - 2\overrightarrow{DE}$,
$A + 2\overrightarrow{ED}$,
$A - 2\overrightarrow{ED}$,
$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DE}$,
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DE}$,
$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$.

AVISO

GA E
ESCR

A P
DIF
A
T
N
C

...AR
... DE

... NÚMERO
...EIRO, RACIONAL,
...L)
... MATRIZ 2×1
... MATRIZ 2×2
... PONTO DE $\mathbb{R}^2$
... VETOR EM $\mathbb{R}^2$
... VETORES SÃO
...S!

...ES COM PONTOS
...S

$(\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c,b+d})$

$(\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c,b+d})$

$(c,d) = (\overrightarrow{a-c,b-d})$

$) = (\overrightarrow{ka,kb})$

$(\overrightarrow{c,d}) = ac+bd$

$= \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

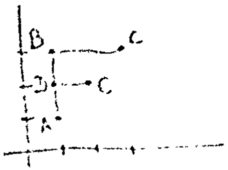
$B-A$

$B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{w} \iff \vec{v}\cdot\vec{w}=0$

EXERCÍCIO:

SEJAM A, B, C, D, E ESTES PONTOS:



CALCULE (PASSO A PASSO):

$\overrightarrow{AB}$,

$E+\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,

$\|\overrightarrow{AB}\|$,

$d(A,B)$,

$d(A,E)$,

$A+2\overrightarrow{DE}$,

$A-2\overrightarrow{DE}$,

$A+2\overrightarrow{ED}$,

$A-2\overrightarrow{ED}$,

$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DE}$,

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$,

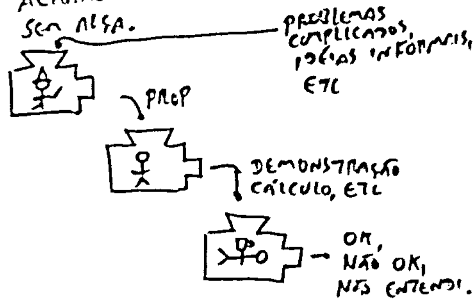
$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$.

AVISO:

GA É UM CURSO DE ESCRITA MATEMÁTICA.

A PARTE REALMENTE DIFÍCIL É APRENDER A ESCREVER BEM.

TRUQUE: AS HABILIDADES NECESSÁRIAS PRA VOCÊ CONSEGUIR ESCREVER AS RESPOSTAS DA PROVA BEM SÃO PRATICAMENTE AS MESMAS QUE VOCÊ PRECISA PRA PODER PERGUNTAR SUAS DÚVIDAS PRA OUTRAS PESSOAS DE FORMA QUE SEJA FÁCIL ELAS ENTENDEREM O QUE VOCÊ FEZ, O QUE VOCÊ SABE E O QUE NÃO SABE, E PODEREM CONFERIR CADA PASSO SEM ESFORÇO, E ELAS ACHAREM INTERESSANTE TE AJUDAR AO INVÉS DE ACHAREM VOCÊ UM MALA SEM ALÇA.



DEF:

A RETA QUE PASSA POR A E B É

$\{A+t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$

EXERCÍCIO:

USANDO A DEFINIÇÃO, REPRESENTE FORMALMENTE COMO CONJUNTO, E DEPOIS REPRESENTE GRAFICAMENTE,

- A RETA QUE PASSA POR D E E,
- A RETA QUE PASSA POR D E C.

EXERCÍCIOS:

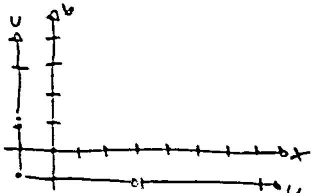
- ENCONTRE 5 VETORES DIFERENTES, $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_4}, \vec{V_5}$, TAIS QUE $\vec{V_1}\perp(\overrightarrow{1,0})$, $\vec{V_2}\perp(\overrightarrow{1,0})$, ETC.
- IDEM, MAS $\vec{V_1}\perp(\overrightarrow{1,1})$, $\vec{V_2}\perp(\overrightarrow{1,1})$, ETC.
- IDEM, MAS $\vec{V_1}\perp(\overrightarrow{2,3})$, $\vec{V_2}\perp(\overrightarrow{2,3})$, ETC.

GA 27/AGO/2014 [A]

Estávamos usando este sistema de coordenadas em vários exemplos:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Vamos introduzir mais uma notação pra falar das coordenadas novas:



Com esta nova notação, e com os "eixos novos" u e v, agora a gente pode falar das "coordenadas u e v" de cada ponto...

E aí, para cada ponto P,

$$P = (P_x, P_y) = (P_u, P_v)_\Sigma,$$

$$\begin{pmatrix}P_u\\P_v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_u\\P_v\end{pmatrix}$$

E às vezes vamos escrever simplesmente

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$= O_\Sigma + M_\Sigma\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = O_\Sigma + M_\Sigma\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

Repare que com esta conta é fácil começar com $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ e obter $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; a direção oposta é mais difícil. Mas:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = O_\Sigma + M_\Sigma\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - O_\Sigma = M_\Sigma\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$M_\Sigma^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - O_\Sigma\right) = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = M_\Sigma^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - O_\Sigma\right)$$

Exercício: use esta fórmula - e a anterior - pra completar a tabela abaixo.

u	v	x	y
0	0		
1	1		
2	1		
		0	0
		1	1
		2	1

10 mins

Dicas:

Lembrem que

$$O_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \quad M_\Sigma = \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Quem deve ser M_Σ^{-1}?

Se você não tiver certeza chute e verifique se $M_\Sigma M_\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

e $M_\Sigma^{-1} M_\Sigma = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Como deixar a fórmula

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = M_\Sigma^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - O_\Sigma\right)$$

mais fácil de usar?

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

E a anterior era:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

Repare que com isto temos:

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+1)/4\\(y+1)/2\end{pmatrix},$$

ou seja,

$u = (x+1)/4$,

$v = (y+1)/2$.

Todo mundo já viu no programa do curso que na P1, em 27/set, vai cair cônicas...

Com o que a gente já viu de mudanças de coordenadas já dá pra definir elipses, parábolas e hipérboles "gerais", modificando um pouco a definição das canônicas!

$$E_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$$P_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$H_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

$$E_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\tfrac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{y+1}{2}\right)^2 = 1\},$$

$$P_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v = u^2\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \tfrac{y+1}{2} = \left(\tfrac{x+1}{4}\right)^2\}$$

$$H_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv = 1\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x+1}{4}\,\tfrac{y+1}{2} = 1\}$$

Como de

Def:

Então:

Mesma

Podem

Pra

Em

...QUE

...) $M_\Sigma = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

...VE SER M_Σ^{-1}?

...E NÃO TIVER

... CHUTE E

...QUE SE $M_\Sigma M_\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

E $M_\Sigma^{-1} M_\Sigma = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

...XAR A FÓRMULA

...$_\Sigma^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - O_\Sigma\right)$

...IL DE USAR?

...$\begin{pmatrix} \ldots & 0\\ \ldots & 1/2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}\right)$

...ERIOR ERA:

...$) + \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

...E COM ISTO TEMOS:

...$\begin{pmatrix}\ldots/4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y+1\end{pmatrix}$

...$\begin{pmatrix}(x+1)/4\\ (y+1)/2\end{pmatrix}$,

...$1)/4$,

...$1)/2$.

TODO MUNDO JÁ VIU NO PROGRAMA DO CURSO QUE NA P1, EM 27/SET, VAI CAIR CÔNICAS...

COM O QUE A GENTE JÁ VIU DE MUDANÇAS DE COORDENADAS JÁ DÁ PRA DEFINIR ELIPSES, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES "GERAIS", MODIFICANDO UM POUCO A DEFINIÇÃO DAS CANÔNICAS!

$E_C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$P_C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$

$H_C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$

$E_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$
$\quad = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x+1}{4}\right)^2+\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=1\}$,

$P_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v=u^2\}$
$\quad = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{y+1}{2} = \left(\frac{x+1}{4}\right)^2\}$

$H_\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$
$\quad = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x+1}{4}\,\frac{y+1}{2} = 1\}$

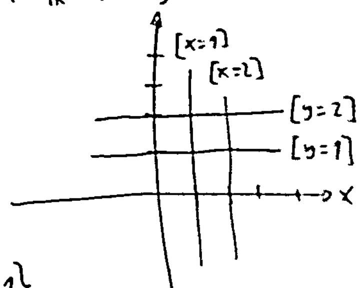
COMO DESENHAR $E_\Sigma, P_\Sigma, H_\Sigma$?

DEF: $[\text{COND}] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{COND}\}$

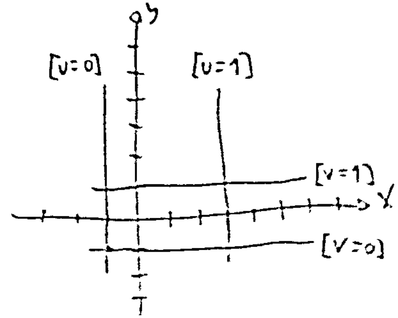
ENTÃO: $[x=1] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1\}$

MESMA COISA PARA $[x=0]$, $[x=2]$, $[y=0]$, $[y=1]$, $[y=2]$, ...

PODEMOS USAR ESTES CONJUNTOS PRA DESENHAR UM QUADRICULADO EM $\mathbb{R}^2$...



MAIS INTERESSANTE:



DESENHANDO LINHAS SUFICIENTES DESSE QUADRICULADO É FÁCIL ENCONTRAR, POR EXEMPLO, OS 5 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE P_Σ...

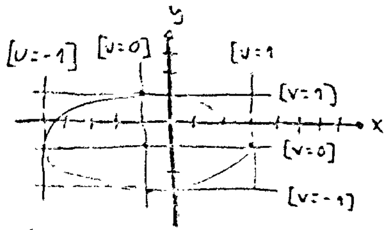
EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE:
a) OS 4 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE E_Σ,
b) OS 5 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE P_Σ,
c) OS 6 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE H_Σ.

PRÓXIMA COISA: PORQUE NO ÚLTIMO EXERCÍCIO DA AULA PASSADA AS RETAS Σ-ORTOGONAIS NÃO ERAM ORTOGONAIS NO SENTIDO USUAL?

GA 27/AGO/2014 $\boxed{A}$

Uma dica pra estudar GA: toda vez que vocês virem uma operação nova, se perguntem: esta operação é invariante por mudança de sistema de coordenadas?

Na verdade esta pergunta é <u>difícil</u>. É melhor vocês terem alguns sistemas de coordenadas preferidos, que vocês usam pra testes, e aí se perguntem: em quais destes sistemas de coordenadas esta operação dá o mesmo resultado? (E depois generalizem).



(Desenho do Kelvin passado a limpo)

u	v	x	y
1	0	3	-1
0	1	-1	1
-1	0	-3	-1
0	1	-1	-3

Problemas do final da aula passada:

Tínhamos

$A=(1,1)=A_\Sigma=(0.5,1)_\Sigma$,

$B=(1,3)=B_\Sigma=(0.5,2)_\Sigma$,

$C=(3,3)=C_\Sigma=(1,2)_\Sigma$

Represente graficamente

$\{P_\Sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{A_\Sigma P_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}=0\}$

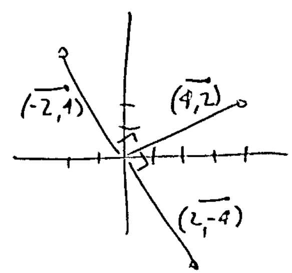
$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}=0\}$

Como adaptar as perguntas dali da esquerda pra este problema?

- Calcule $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}$ e compare o resultado.
- Calcule $A+\overrightarrow{BC}$ e $A_\Sigma+\overrightarrow{B_\Sigma C_\Sigma}$ e compare o resultado.
- Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$ e $\|\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\|_\Sigma$ e compare o resultado.
- Calcule $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\perp_\Sigma\overrightarrow{B_\Sigma C_\Sigma}$ e compare o resultado (ambos são sim? ambos são não?)
- Calcule $\{B+t\overrightarrow{AC} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e $\{B_\Sigma +_\Sigma t\,\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e compare o resultado.

Dica: da mesma forma que E_c, P_c e H_c têm pontos mais óbvios, cada vetor $\vec{v}=\overrightarrow{(a,b)}$ tem dois vetores ortogonais a ele mais óbvios: $\overrightarrow{(b,-a)}$ e $\overrightarrow{(-b,a)}$.

Exemplo:



Quais são os vetores Σ-ortogonais a $\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}=\overrightarrow{(0.5,1)}_\Sigma$ mais óbvios?

Dica: desenhe $\overrightarrow{(-1,0.5)}_\Sigma$ e $\overrightarrow{(1,-0.5)}_\Sigma$ no quadriculado com $[u=0]$, $[u=1]$, $[v=0]$, $[v=1]$, ...

GA 27/AGO/2014 $\boxed{B}$

SISTEMAS DE COORDENADAS (GEOMETRICAMENTE E ALGEBRICAMENTE)

VOU USAR O MESMO EXEMPLO QUE EU ESTOU USANDO NA OUTRA TURMA! CONSULTEM OS QUADROS DA OUTRA TURMA E OS EXERCÍCIOS DELES - A GENTE VAI TENTAR CHEGAR ATÉ O PONTO ONDE ELES ESTÃO!

DEFS:

$(a,b)_\Sigma = (-1,-1) + a\overrightarrow{(4,0)} + b\overrightarrow{(0,2)}$

ENTÃO:

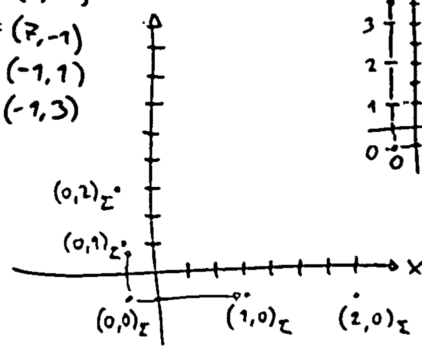
$(0,0)_\Sigma = (-1,-1)$

$(1,0)_\Sigma = (3,-1)$

$(2,0)_\Sigma = (7,-1)$

$(0,1)_\Sigma = (-1,1)$

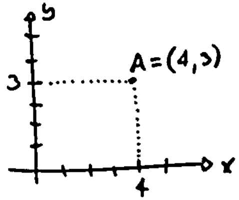
$(0,2)_\Sigma = (-1,3)$



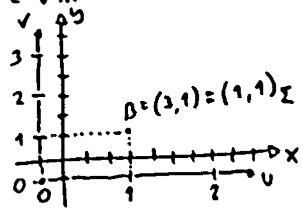
DÁ PRA GENTE ENTENDER SISTEMAS DE COORDENADAS GEOMETRICAMENTE.

SE TEMOS UM PONTO A, "PROJETAMOS" ELE NOS EIXOS x E y E "MEDE" AS "COORDENADAS" DELE, A_x E A_y... E AÍ TEMOS $A=(A_x,A_y)$.

EXEMPLO:



OUTRAS COORDENADAS - u E v...



	X	y	U	V
B	3	1	1	1
C	3	3		
D	3	5		
E	7	5		
F	5	5		

O LIVRO FAZ AS COISAS DE UMA DETERMINADA FORMA - ESTRANHA! - PORQUE ELE QUER COISAS "INDEPENDENTES DE COORDENADAS"... O MODO MAIS RÁPIDO PRA GENTE ENTENDER ISTO É TER VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS E TESTAR O QUE ACONTECE EM CADA UM DELES.

POR ENQUANTO TEMOS COORDENADAS (x,y) E $(u,v)_\Sigma$...

DEF:

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$

$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$

$(a,b)-(c,d) = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{v}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0$

DEF: A RETA QUE PASSA POR A E B É $\{A+t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$

DEF: A RETA PARALELA A $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO C É $\{C+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

DEF: A RETA ORTOGONAL A $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO A É $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\cdot\vec{v}=0\}$

$(a,b)_\Sigma +_\Sigma \overrightarrow{(c,d)}_\Sigma = (a+c,b+d)_\Sigma$

$\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma +_\Sigma \overrightarrow{(c,d)}_\Sigma = \overrightarrow{(a+c,b+d)}_\Sigma$

$(a,b)_\Sigma -_\Sigma (c,d)_\Sigma = \overrightarrow{(a-c,b-d)}_\Sigma$

$k\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma = \overrightarrow{(ka,kb)}_\Sigma$

$\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma \cdot_\Sigma \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

$\|\vec{v}_\Sigma\|_\Sigma = \sqrt{\vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{v}_\Sigma}$

$\overline{A_\Sigma B_\Sigma} = B_\Sigma -_\Sigma A_\Sigma$

$d_\Sigma(A_\Sigma,B_\Sigma) = \|\overline{A_\Sigma B_\Sigma}\|_\Sigma$

$\vec{v}_\Sigma \perp_\Sigma \vec{w}_\Sigma \Leftrightarrow \vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{w}_\Sigma = 0$

USANDO
À ESQ
FORMA
REPR
a) A
P
b) A
c)
A

LIVRO FAZ AS COISAS
DE UMA DETERMINADA
FORMA - ESTRANHA! -
PORQUE ELE QUER COISAS
"INDEPENDENTES DE
COORDENADAS"... O
MODO MAIS RÁPIDO
PRA GENTE ENTENDER
ISTO É TER VÁRIOS
SISTEMAS DE COORDENADAS
E TESTAR O QUE
ACONTECE EM CADA
UM DELES.

POR ENQUANTO TEMOS COORDENADAS (x,y) E $(u,v)_\Sigma$...

DEF: A RETA QUE PASSA POR A E B É $\{A+t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$

DEF: A RETA PARALELA A $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO C É $\{C+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

DEF: A RETA ORTOGONAL A $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO A É $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\cdot\vec{v}=0\}$

DEF:

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$

$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$

$(a,b)-(c,d) = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{v}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0$

$(a,b)_\Sigma +_\Sigma \overrightarrow{(c,d)}_\Sigma = (a+c,b+d)_\Sigma$

$\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma +_\Sigma \overrightarrow{(c,d)}_\Sigma = \overrightarrow{(a+c,b+d)}_\Sigma$

$(a,b)_\Sigma -_\Sigma (c,d)_\Sigma = \overrightarrow{(a-c,b-d)}_\Sigma$

$k\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma = \overrightarrow{(ka,kb)}_\Sigma$

$\overrightarrow{(a,b)}_\Sigma \cdot_\Sigma \overrightarrow{(c,d)}_\Sigma = ac+bd$

$\|\vec{v}_\Sigma\|_\Sigma = \sqrt{\vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{v}_\Sigma}$

$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} = B_\Sigma -_\Sigma A_\Sigma$

$d_\Sigma(A_\Sigma,B_\Sigma) = \|\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\|_\Sigma$

$\vec{v}_\Sigma \perp_\Sigma \vec{w}_\Sigma \Leftrightarrow \vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{w}_\Sigma = 0$

USANDO AS DEFINIÇÕES À ESQUERDA, EXPRESSE FORMALMENTE E REPRESENTE GRAFICAMENTE

a) A RETA QUE PASSA PELOS PONTOS $(1,2)$ E $(3,3)$

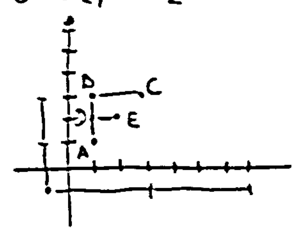
b) A RETA PARALELA A $\{(1,2)+t\overrightarrow{(3,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO $(0,4)$

c) A RETA PARALELA A $\{(1,2)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO $(0,4)$

d) A RETA PERPENDICULAR A $\{(1,2)+t\overrightarrow{(3,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO $(1,2)$

e) A RETA PERPENDICULAR A $\{(1,2)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ QUE PASSA PELO PONTO $(1,2)$

AGORA SEJAM $A=A_\Sigma$, $B=B_\Sigma$, $C=C_\Sigma$, $D=D_\Sigma$, $E=E_\Sigma$ ESTES PONTOS:



a) $\{(1,2)+t\overrightarrow{(1,2)(3,3)} \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1,2)+t((3,3)-(1,2)) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1,2)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

REPRESENTE GRAFICAMENTE (FAÇA AS CONTAS BEM PASSO A PASSO E COM CUIDADO - ELAS SÃO DIFÍCEIS!):

f) $\{B_\Sigma +_\Sigma t\,\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} \mid t\in\mathbb{R}\}$

g) $\{P_\Sigma\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{A_\Sigma P_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}=0\}$

h) $\{P_\Sigma\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{A_\Sigma P_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}=0\}$

GA 29/AGO/2014 A

... ESPERO QUE TODO MUNDO JÁ ESTEJA TENTANDO LER O LIVRO (BOULOS/CAMARGO), PORQUE A MATÉRIA DA P1 É GIGANTE E AS AULAS VÃO COMPLEMENTAR O LIVRO E AJUDAR VOCÊS A ENTENDÊ-LO!

COMO É QUE OS RESULTADOS DE VÁRIAS OPERAÇÕES MUDAM QUANDO A GENTE MUDA O SISTEMA DE COORDENADAS? QUAIS OPERAÇÕES SÃO INVARIANTES POR QUAIS MUDANÇAS DE COORDENADAS?

FATO: SE $A,B,C \in \mathbb{R}^2$ E $k \in \mathbb{R}$, ENTÃO $A+k\overrightarrow{BC} = A_\Sigma +_\Sigma k\overrightarrow{B_\Sigma C_\Sigma}$.

(CONFIRA ISTO GRAFICAMENTE - LEMBRE QUE ESTAMOS USANDO $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$.

DICA: VAMOS CALCULAR O RESULTADO DE CERTAS OPERAÇÕES NOS DOIS SISTEMAS DE COORDENADAS E DEPOIS DISSO COMPARAR OS RESULTADOS... E DEPOIS GENERALIZAR PRA QUALQUER SISTEMA DE COORDENADAS.

COMO FAZER AS CONTAS FICAREM MENORES?

$A = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$A_\Sigma = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma$

$O_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$M_\Sigma = \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$

$A_\Sigma = O_\Sigma + M_\Sigma A$ ← OOPS? VOU CONSERTAR E EXPLICAR ISTO DEPOIS! !!

$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

ALGUNS "Σ"s AGORA VÃO PODER SER VISTOS COMO UMA OPERAÇÃO...

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$(a,b)_\Sigma = (-1,-1) + a\overrightarrow{(4,0)} + b\overrightarrow{(0,2)}$

$\begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}$

VAMOS COMPARAR $A+k\overrightarrow{BC}$ E $A_\Sigma +_\Sigma \overrightarrow{B_\Sigma C_\Sigma}$...

VAMOS PENSAR EM $A, B, C, A_\Sigma, \ldots$ COMO MATRIZES 2×1.

$A_\Sigma +_\Sigma k\overrightarrow{B_\Sigma C_\Sigma} =$

$(O_\Sigma + M_\Sigma A) + k\,\overrightarrow{(C_\Sigma - B_\Sigma)} =$

$(O_\Sigma + M_\Sigma A) + k((\cancel{O_\Sigma} + M_\Sigma C) - (\cancel{O_\Sigma} + M_\Sigma B)) =$

$(O_\Sigma + M_\Sigma A) + k(M_\Sigma C - M_\Sigma B) =$

$(O_\Sigma + M_\Sigma A) + kM_\Sigma (C - B) =$

$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_u - B_u\\C_v - B_v\end{pmatrix}\ldots$

(TERMINEM EM CASA! TEM UM TRUQUE NO FINAL! !!)

VOCÊS VÃO TER QUE FAZER COISAS PARECIDAS COM ISSO CENTENAS DE VEZES... CONTAS QUE PRA FICAREM MENORES VOCÊS VÃO PRECISAR DE CERTAS PROPRIEDADES DE MATRIZES, VETORES, OPERAÇÕES, ETC.

COMO ASSIM?

EXEMPLO:

SE M, M', M'' SÃO MATRIZES,

$(MM')M'' = M(M'M'')$ - MAS ÀS VEZES

$MM' \neq M'M$!

OU SEJA, A MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES É ASSOCIATIVA MAS NÃO COMUTATIVA!

EXEMPLO: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

A GENTE VIU UM MONTE DE OPERAÇÕES "NOVAS"...

UM TRUQUE: EXPA[...]

QUANDO FIZERMOS [...]

DEFS:

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = ($[...]

$\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = ($[...]

$k\overrightarrow{(a,b)} = (ka, k$[...]

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac$[...]

⋮

NESTAS [...] DEFIN[...] GENTE [...] ESQUEC[...] CADA "[...] É NOV[...] DIREIT[...]

COMO [...] O LA[...] MAIO[...]

$c) =$

$M_Z C) - (\emptyset_Z + M_Z B)) =$

$M_Z B) =$

$- B) =$

$A_u \\ A_v) + k \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u - B_u \\ C_v - D_v \end{pmatrix} \ldots$

CASA!

UE NO

VOCÊS VÃO TER QUE FAZER COISAS PARECIDAS COM ISSO CENTENAS DE VEZES... CONTAS QUE PRA FICAREM MENORES VOCÊS VÃO PRECISAR DE CERTAS PROPRIEDADES DE MATRIZES, VETORES, OPERAÇÕES, ETC.

<u>COMO ASSIM?</u>

EXEMPLO:
SE M, M', M'' SÃO MATRIZES,

$$(MM')M'' = M(M'M'') -$$

MAS ÀS VEZES

$$MM' \neq M'M\,!$$

OU SEJA, A MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES É <u>ASSOCIATIVA</u> MAS <u>NÃO COMUTATIVA</u>!

EXEMPLO: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A GENTE VIU UM MONTE DE OPERAÇÕES "NOVAS"...

UM TRUQUE: <u>EXPANSÃO</u>.
QUANDO FIZEMOS ISTO,
DEFS:

$$\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$$
$$\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$$
$$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$$
$$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$$
$$\vdots$$

NESTAS LISTAS DE DEFINIÇÕES À GENTE PÕE À ESQUERDA DE CADA "=" O QUE É <u>NOVO</u>, E À DIREITA ALGO <u>VELHO</u>.
COMO EM GERAL (!?) O LADO DIREITO É MAIOR (PORQUE ESTAMOS QUERENDO DEFS QUE NOS PERMITAM CONTAS MAIS CURTAS) A GENTE VAI CHAMAR "TROCAR UMA EXPRESSÃO À ESQUERDA POR UMA À DIREITA" DE "EXPANSÃO".

EXEMPLO:
SERÁ QUE $k(\vec{v}+\vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$?
TRUQUE: VAMOS FAZER TODAS AS EXPANSÕES POSSÍVEIS E COMPARAR OS RESULTADOS!
TRUQUE EXTRA <u>1</u>:
"SEJAM $\vec{v} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(c,d)}$"
TRUQUE EXTRA 2:
INVERTER E COLAR.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_5$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \beta_4 = \beta_3 = \beta_2 = \beta_1$$

SEQS DE EXPANSÕES

EXERCÍCIO: PROVE QUE $k(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}) = k\overrightarrow{(a,b)} + k\overrightarrow{(c,d)}$.

$$\begin{aligned} k(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}) &= k\overrightarrow{(a+c,b+d)} \\ &= \overrightarrow{(k(a+c),k(b+d))} \\ &= \overrightarrow{(ka+kc,kb+kd)} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

$$\begin{aligned} k\overrightarrow{(a,b)} + k\overrightarrow{(c,d)} &= \overrightarrow{(ka,kb)} + \overrightarrow{(kc,kd)} \\ &= \overrightarrow{(ka+kc,kb+kd)} \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_4$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_2 = \beta_1$$

$\boxed{\text{GA 29/AGO/2014} \mid \text{A}}$

EM ALGUMAS SITUAÇÕES A GENTE PRECISA DE ALGUNS PASSOS EXTRAS ALÉM DE EXPANDIR DEFINIÇÕES... POR EXEMPLO, AGORA HÁ POUCO USAMOS $k(a+c) = ka + kc$.

EM ALGUMAS POUCAS SITUAÇÕES VAMOS PRECISAR DE TRUQUES MAIS COMPLICADOS - POR EXEMPLO, PRA PROVAR $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

MUITOS DOS EXERCÍCIOS DAS PAGS 79 A 87 DO LIVRO PODEM SER RESOLVIDOS SÓ COM EXPANSÃO DE DEFINIÇÕES E POUCOS TRUQUES A MAIS.

PRA CASA!

EXEMPLO:

9.38 a) $4\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

EXERCÍCIO:

SEJAM $O_\Sigma = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $M_\Sigma = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,

E PRA TODAS AS OUTRAS LETRAS O "Σ" EMBAIXO É DEFINIDO POR ESTA EXPRESSÃO:

$$P_\Sigma = O_\Sigma + M_\Sigma P.$$

PROVE QUE:

a) $(B-A)_\Sigma = M_\Sigma (B-A)$

PRA AGORA - 5 MINS.

SEJAM $A = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$.

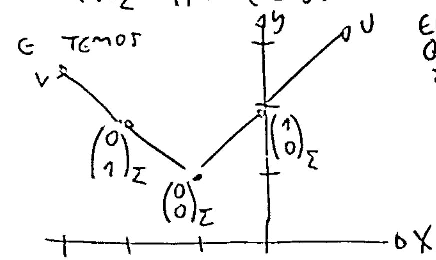
ENTÃO
$$\begin{aligned}(B-A)_\Sigma &= \left(\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\right)_\Sigma \\ &= \begin{pmatrix}B_1-A_1\\ B_2-A_2\end{pmatrix}_\Sigma \\ &= O_\Sigma + M_\Sigma \begin{pmatrix}B_1-A_1\\ B_2-A_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1-A_1\\ B_2-A_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a(B_1-A_1)+b(B_2-A_2)\\ c(B_1-A_1)+d(B_2-A_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ETC (TERMINEM EM CASA).

OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

SE $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

E TEMOS



ENTÃO QUEM SÃO a, b, c, d, e, f?

TRANSLAÇÕES SÃO MUDANÇAS DE COORDENADAS DA FORMA $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$;

MUDANÇAS DE ESCALA SÃO MUDANÇAS DE COORDENADAS DA FORMA $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$,

PARA $\alpha \neq 0$;

ROTAÇÕES SÃO MUDANÇAS DE COORDENADAS DA FORMA
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},$$
ONDE $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

COMO ENTENDER COMO O PRODUTO INTERNO MUDA QUANDO MUDAMOS O SISTEMA DE COORDENADAS?

REPARE QUE $(a,b)\cdot(c,d) = ac+bd$,
$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \underbrace{(a\ b)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}}_{2\times 1} = ac+bd$$

ONDE O "T" INDICA "MATRIZ TRANSPOSTA".

LEMBRE QUE MUDANÇAS DE COORDENADAS AGEM DE UM JEITO SOBRE PONTOS E DE OUTRO SOBRE VETORES:
$$A_\Sigma = O_\Sigma + M_\Sigma A \qquad \vec{V}_\Sigma = M_\Sigma \vec{V}$$

LEMBRE QUE

$\vec{V}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{W}_\Sigma = ($

(VERIFIQUE

E SE A GEN

ESTAS EXPR

MUITO CU

DESCOBRE

$\vec{V}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{W}$

E SE

ENTÃO

M_Σ

E

E

$\vec{V}$

$(B-A)$

...s.

$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

$= \left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right)_\Sigma$

$= \begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \end{pmatrix}_\Sigma$

$= O_\Sigma + M_\Sigma \begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \end{pmatrix}$

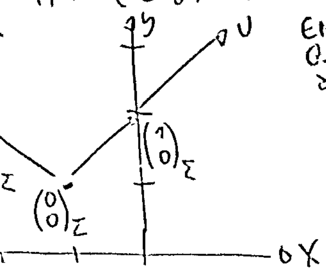
$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(B_1 - A_1) + b(B_2 - A_2) \\ c(B_1 - A_1) + d(B_2 - A_2) \end{pmatrix}$

...te (termine em casa).

...temas de coordenadas

$= \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$



Então quem são a, b, c, d, e, f?

Translações são mudanças de coordenadas da forma $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$;

Mudanças de escala são mudanças de coordenadas da forma $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, para $\alpha \neq 0$;

Rotações são mudanças de coordenadas da forma
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$
onde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Como entender como o produto interno muda quando mudamos o sistema de coordenadas?

Repare que $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$,
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{2\times 1} = ac + bd$$
onde o "T" indica "matriz transposta".

Lembre que mudanças de coordenadas agem de um jeito sobre pontos e de outro sobre vetores:
$$A_\Sigma = O_\Sigma + M_\Sigma A \qquad \vec{v}_\Sigma = M_\Sigma \vec{v}$$

Lembre que
$$\vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{w}_\Sigma = (M_\Sigma \vec{v}) \cdot (M_\Sigma \vec{w})$$
(verifique os detalhes!)

E se a gente expandir estas expressões com muito cuidado a gente descobre que:
$$\vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{w}_\Sigma = (M_\Sigma \vec{v}) \cdot (M_\Sigma \vec{w}) = (M_\Sigma \vec{v})^T (M_\Sigma \vec{w}) = \vec{v}^T M_\Sigma^T M_\Sigma \vec{w}$$

e se $M_\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

então $M_\Sigma^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

$$M_\Sigma^T M_\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix},$$

e se $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ então $M_\Sigma^T M_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

então
$$\vec{v}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{w}_\Sigma = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

(porque $\vec{v}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$)

Compare com as págs 87 e 88 do livro.

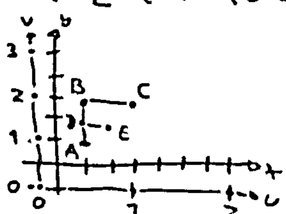
GA 29/AGO/2014 B

A gente já viu que dá pra mudar de sistema de coordenadas fazendo:

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$



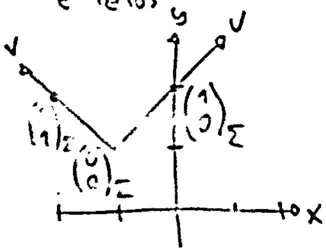
$$A = \begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.5\\1\end{pmatrix}_\Sigma$$

Outros sistemas de coordenadas

Se $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

E temos



Quem são a,b,c,d,e,f?

Pelo gráfico,

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

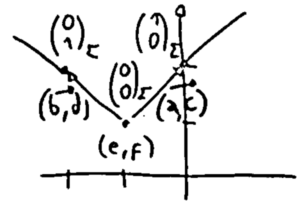
$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Truque (geométrico):



Uma translação é uma mudansa de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

Uma mudança de escala é uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

onde $\alpha \neq 0$,

E uma rotação é uma mudansa de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

onde $\alpha^2+\beta^2=1$.

Pra casa: entenda estas mudanças de coordenadas:

a) $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.8&0.6\\-0.6&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

GA 3/set/2014 A

...Ei, como são os horários de vocês nas 5as? Precisamos marcar horários de atendimento!!!

Voltando à matéria: a gente viu um monte de definições de operações com "Σ" nos seus nomes. Geometricamente, a interpretação destas operações é a seguinte: a gente usa os eixos u e v para atribuir coordenadas u e v para cada ponto, e a gente faz as contas usando u e v ao invés de x e y.

Em alguns casos depois da gente passar do "geométrico" para o "algébrico" - por exemplo, de ponto para coordenadas - a gente volta para algo "geométrico" (por exemplo, vetor ...)

Em outros casos, como o produto interno, o resultado é um número que a gente ainda não sabe interpretar bem geometricamente.

O que a gente vai fazer hoje:

- Entender mudanças de coordenadas que preservam a noção de perpendicularidade,
- Decompor $\vec{w}$ em $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, onde $\vec{u}\perp\vec{v}$,
- Entender projeção - geometricamente e algebricamente.

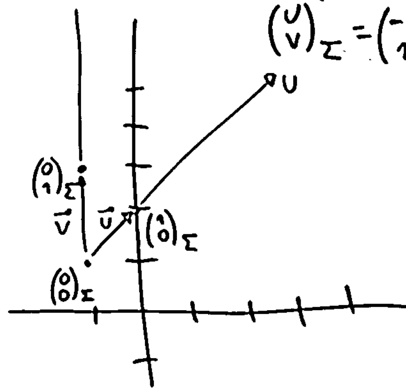
<u>Obter coordenadas</u> de um ponto P sistema de coordenadas novo envolve olhar pro vetor $\overrightarrow{OP}$ e decompô-lo em $\overrightarrow{OP}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

Antes de ver isto no caso geral vamos considerar o caso em que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Digamos que

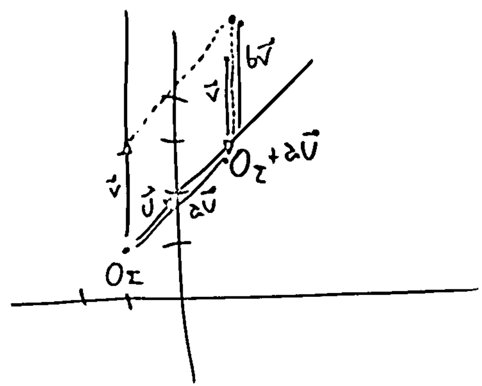
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ldots$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots\\\vec{u}&\vec{v}\\\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\Sigma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{(a,b)}=(-1,1)+a\vec{u}+b\vec{v}$$



Idéi...
por ...
Pr...
de ...
($\vec{v}$ ...
S ...
$\vec{u}$ ...

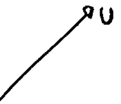
Digamos que

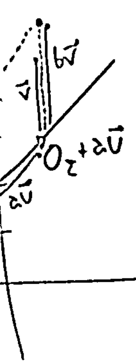
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{u} & \vec{v} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{(a,b)} = (-1,1) + a\vec{u} + b\vec{v}$$





Idéia geométrica por trás da projeção:

$Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ é um múltiplo de $\vec{u}$ tal que

$$(\vec{w} - Pr_{\vec{u}}\vec{w}) \perp \vec{u}$$

Se $\vec{v} \perp \vec{u}$, então $\vec{w} - Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ é um múltiplo de $\vec{v}$, e se

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

então $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = a\vec{u}$ ...

ou seja, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ nos dá uma parte da decomposição

$$\vec{w} = \underbrace{a\vec{u}}_{= Pr_{\vec{u}}\vec{w}} + b\vec{v} \ldots$$

A outra parte, o $b\vec{v}$, a gente obtém por subtração.

Exercícios:

a) Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3)}$.

Para cada um dos vetores $\vec{w}$ abaixo, descubra no olhômetro quanto devem valer $a\vec{u}$, $b\vec{v}$, a, b.

- $\vec{w} = \overrightarrow{(4,0)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(0,-3)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(4,-3)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(1,2)}$

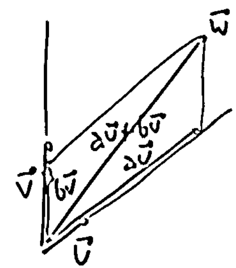
b) Idem, mas agora com $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,2)}$.

- $\vec{w} = \overrightarrow{(2,2)}$
- $\vec{w} = \overrightarrow{(1,-1)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(0,4)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$,
- $\vec{w} = \overrightarrow{(1,0)}$.

Atendimento, dúvidas, exercícios, etc:

Amanhã 10:00–12:00.

Ou no LLARC (4P) ou numa outra sala indicada num papel na porta do LLARC



GA 3/set/2014 | A

Digamos que a gente conhece $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e a gente sabe que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

e que $\vec{u} \perp \vec{v}$,

mas a gente ainda não sabe a e b.

Como calcular a?

Repare:

$w = a\vec{u} + b\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = (a\vec{u} + b\vec{v})\cdot\vec{u}$

$= (a\vec{u}\cdot\vec{u}) + (b\vec{v}\cdot\vec{u})$

$= a(\vec{u}\cdot\vec{u}) + b(\vec{v}\cdot\vec{u})$

$= a(\vec{u}\cdot\vec{u})$

$\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = a(\vec{u}\cdot\vec{u})$

$\Rightarrow a = \dfrac{v\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot u}$

Ou seja,

$$\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + b\vec{v}$$

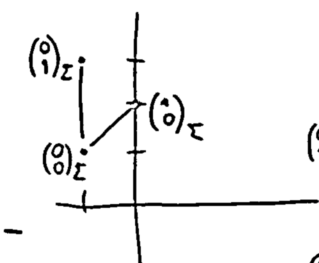
E vamos definir

$$Pr_{\vec{u}}\,\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}.$$

(Repare que isso não faz sentido quando $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$ — ou seja, quando $\vec{u} = \overrightarrow{(0,0)}$.

A partir desta definição a gente consegue provar várias propriedades da operação "Pr", da mesma forma que a gente provou propriedades do produto interno e de outras operações.

Como é que o "Pr" se comporta em outros sistemas de coordenadas? O que seria Pr_Σ e como ele vai se comportar? Por exemplo, aqui:



Neste caso, a definição seria

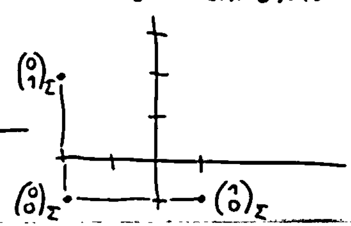
$$Pr_{\Sigma\,\vec{u}_\Sigma}\vec{w}_\Sigma = \frac{\vec{w}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{u}_\Sigma}{\vec{u}_\Sigma \cdot_\Sigma \vec{u}_\Sigma}\vec{u}_\Sigma$$

O que vai acontecer é que

$$(\vec{w}_\Sigma -_\Sigma Pr_{\Sigma\,\vec{u}_\Sigma}\vec{w}_\Sigma) \perp_\Sigma \vec{u}_\Sigma \ldots$$

O Pr_Σ vai servir pra decompor $\vec{w}$ em um múltiplo de $\vec{u}$ e um vetor Σ-ortogonal a $\vec{u}$...

Tentem fazer em casa isto aqui. Seja Σ este sistema de coordenadas, que tem a mesma noção de ortogonalidade do sistema canônico:



Prove que para quaisquer pontos A, B, C temos

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}$$

para alguma constante k. Qual? Dica: não é nem 99, nem 200.

GA 3/SET/2014 B

COMO DEMONSTRAR PROPRIEDADES DE OPERAÇÕES?
POR EXEMPLO, QUE
$(k\vec{v})\cdot\vec{w} = k(\vec{v}\cdot\vec{w})$?

LEMBRE QUE QUANDO DEFINIMOS AS OPERAÇÕES EM PONTOS E VETORES NÓS SEMPRE PUSEMOS O "NOVO" FICAVA À ESQUERDA E O QUE ERA "VELHO" FICAVA À DIREITA.

DEFS:

$(a,b)+(\overrightarrow{c,d}) = (a+c,b+d)$,

$(\overrightarrow{a,b})+(\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c,b+d})$,

$k(\overrightarrow{a,b}) = (\overrightarrow{ka,kb})$

$(a,b)-(c,d) = (\overrightarrow{a-c,b-d})$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d}) = ac+bd$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

"EXPANDIR AS DEFINIÇÕES" NUMA EXPRESSÃO QUER DIZER SUBSTITUIR CADA OCORRÊNCIA DE ALGO À ESQUERDA ACIMA PELO CORRESPONDENTE

DIGAMOS QUE
$\vec{v} = (\overrightarrow{v_1,v_2})$
$\vec{w} = (\overrightarrow{w_1,w_2})$.

ENTÃO:

$$\begin{aligned}(k\vec{v})\cdot\vec{w} &= (k(\overrightarrow{v_1,v_2}))\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2})\\ &= (\overrightarrow{kv_1,kv_2})\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2})\\ &= kv_1w_1+kv_2w_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(\vec{v}\cdot\vec{w}) &= k((\overrightarrow{v_1,v_2})\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2}))\\ &= k(v_1w_1+v_2w_2)\\ &= kv_1w_1+kv_2w_2\end{aligned}$$

... E ÀS VEZES, POR CLAREZA, A GENTE VAI INVERTER UMA DESTAS SEQUÊNCIAS DE IGUALDADES E COLAR AS DUAS.

$$\begin{aligned}(k\vec{v})\cdot\vec{w} &= (k(\overrightarrow{v_1,v_2}))\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2})\\ &= (\overrightarrow{kv_1,kv_2})\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2})\\ &= kv_1w_1+kv_2w_2\\ &= k(v_1w_1+v_2w_2)\\ &= k((\overrightarrow{v_1,v_2})\cdot(\overrightarrow{w_1,w_2}))\\ &= k(\vec{v}\cdot\vec{w})\end{aligned}$$

ISTO É UMA PROVA GERAL - E A PARTIR DELA A GENTE PODE PROVAR CASOS PARTICULARES!

EXEMPLO:

$(2(\overrightarrow{3,4}))\cdot(\overrightarrow{5,6}) = 2((\overrightarrow{3,4})\cdot(\overrightarrow{5,6}))$

$$\begin{aligned}(2(\overrightarrow{3,4}))\cdot(\overrightarrow{5,6}) &= (\overrightarrow{2\cdot3,2\cdot4})\cdot(\overrightarrow{5,6})\\ &= 2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6\\ &= 2(3\cdot5+4\cdot6)\\ &= 2((\overrightarrow{3,4})\cdot(\overrightarrow{5,6}))\end{aligned}$$

TAMBÉM DARIA PRA K SER UMA EXPRESSÃO (NUMÉRICA)... P. EX., A MESMA IDÉIA VALERIA PARA $k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(a+\sqrt{b})$.

PRA CASA: DÊEM UMA OLHADA NA 1ª LISTA DO REGINALDO (NO PROBLEMA COM MUITOS ITENS DE V/F/JUSTIFIQUE) E NO LIVRO, PAGS 79-81.
VÁRIOS DOS PROBLEMAS - MAS NÃO TODOS - VÃO PODER SER RESOLVIDOS SÓ POR EXPANSÃO DE DEFINIÇÕES E CONTAS SIMP...

EXERCÍCIO
SEJAM

$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}_\Sigma =$

CALCU

TEOR

$\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix}$

TENTE

$\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix}$

(TE
REP
$\begin{pmatrix}Bu\\Bv\end{pmatrix}$
É IS
REGR
PONT
COOR
DA

GA 3/SET/2014 $\boxed{B}$

COMO DEMONSTRAR PROPRIEDADES DE OPERAÇÕES?

POR EXEMPLO, QUE

$(k\vec{v})\cdot\vec{w} = k(\vec{v}\cdot\vec{w})$?

LEMBRE QUE QUANDO DEFINIMOS AS OPERAÇÕES EM PONTOS E VETORES NÓS SEMPRE PUSEMOS O "NOVO" FICAVA À ESQUERDA E O QUE ERA "VELHO" FICAVA À DIREITA.

DEFS:

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$,

$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$,

$k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

$(a,b)-(c,d) = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

"EXPANDIR AS DEFINIÇÕES" NUMA EXPRESSÃO QUER DIZER SUBSTITUIR CADA OCORRÊNCIA DE ALGO À ESQUERDA ACIMA PELO CORRESPONDENTE À DIREITA.

DIGAMOS QUE

$\vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(w_1,w_2)}$.

ENTÃO:

$$(k\vec{v})\cdot\vec{w} = (k\overrightarrow{(v_1,v_2)})\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)}$$
$$= \overrightarrow{(kv_1,kv_2)}\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)}$$
$$= kv_1w_1 + kv_2w_2$$

$$k(\vec{v}\cdot\vec{w}) = k(\overrightarrow{(v_1,v_2)}\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)})$$
$$= k(v_1w_1+v_2w_2)$$
$$= kv_1w_1+kv_2w_2$$

...E ÀS VEZES, POR CLAREZA, A GENTE VAI INVERTER UMA DESTAS SEQUÊNCIAS DE IGUALDADES E COLAR AS DUAS.

$$(k\vec{v})\cdot\vec{w} = (k\overrightarrow{(v_1,v_2)})\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)}$$
$$= \overrightarrow{(kv_1,kv_2)}\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)}$$
$$= kv_1w_1+kv_2w_2$$
$$= k(v_1w_1+v_2w_2)$$
$$= k(\overrightarrow{(v_1,v_2)}\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2)})$$
$$= k(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

ISTO É UMA PROVA GERAL - E A PARTIR DELA A GENTE PODE PROVAR CASOS PARTICULARES!

EXEMPLO:

$$(2\overrightarrow{(3,4)})\cdot\overrightarrow{(5,6)} = 2(\overrightarrow{(3,4)}\cdot\overrightarrow{(5,6)})$$

$$(2\overrightarrow{(3,4)})\cdot\overrightarrow{(5,6)} = \overrightarrow{(2\cdot3,2\cdot4)}\cdot\overrightarrow{(5,6)}$$
$$= 2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6$$
$$= 2(3\cdot5+4\cdot6)$$
$$= 2(\overrightarrow{(3,4)}\cdot\overrightarrow{(5,6)})$$

TAMBÉM DARIA PRA K SER UMA EXPRESSÃO (NUMÉRICA)..., P. EX., A MESMA IDÉIA VALERIA PARA $k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(a+\sqrt{b})$.

PRA CASA: DÊEM UMA OLHADA NA 1ª LISTA DO REGINALDO (NO PROBLEMA COM MUITOS ITENS DE V/F/JUSTIFIQUE) E NO LIVRO, PAGS 79-81. VÁRIOS DOS PROBLEMAS - MAS NÃO TODOS - VÃO PODER SER RESOLVIDOS SÓ POR EXPANSÃO DE DEFINIÇÕES E CONTAS SIMPLES.

EXERCÍCIOS:

SEJAM P=

M=

$\binom{u}{v}_\Sigma =$

CALCULE

TEORE

$\binom{B_u}{B_v}$

TENTE

$\binom{B_u}{B_v}$

(TERM

REPA

$\binom{B_u}{B_v}_\Sigma$

É ISTO

REGRA

PONTO

COORD

DA RE

$).(\overrightarrow{(5,6)})$

$.4)\cdot(5,6)$

$+2\cdot4\cdot6$

$+4\cdot6)$

$) \cdot (\overrightarrow{5,6}))$

A K

ÃO

EX.,

ALERIA

$+\sqrt{b})$.

OLHADA

REGINALDO

MUITOS

STIFIQUE)

S 79-81.

AS – MAS

PODER SER

EXPANSÃO

CONTAS

EXERCÍCIOS:

SEJAM $P=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$,

$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = P + M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

CALCULE $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\Sigma$, $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma$.

TEOREMA:

$$\begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix}_\Sigma - \begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma = M\begin{pmatrix}B_u-A_u\\B_v-A_v\end{pmatrix}.$$

TENTE DEMONSTRÁ-LO.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix}_\Sigma - \begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma &= \left(P+M\begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix}\right) - \left(P+M\begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}\right)\\ &= \ldots\end{aligned}$$

(TERMINE EM CASA).

REPARE QUE NÃO TEMOS

$$\begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix}_\Sigma - \begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}B_u-A_u\\B_v-A_v\end{pmatrix}_\Sigma \,!$$

É ISTO QUE FAZ COM QUE A REGRA DE TRANSFORMAÇÃO DE PONTOS POR UMA MUDANÇA DE COORDENADAS SEJA DIFERENTE DA REGRA PARA VETORES.

SERÁ QUE $MM'=M'M$?

NÃO: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

ENTÃO NÃO PODEMOS USAR "$MM'=M'M$" COMO UMA REGRA GERAL.

SERÁ QUE $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$?

NÃO: $\sqrt{9}+\sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$.

ENTÃO NÃO PODEMOS USAR "$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$" COMO UMA REGRA GERAL.

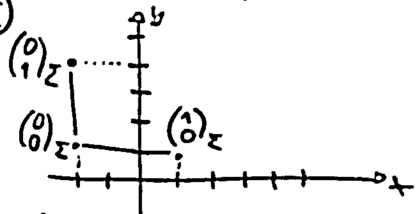
GA 3/set/2014 B

EXERCÍCIO (IMPORTANTÍSSIMO, MEIO AGORA MEIO PRA CASA): PRA CADA UM DOS SISTEMAS DE COORDENADAS ABAIXO DEMONSTRE QUE

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = k\left(\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma}\right)$$

PARA ALGUMA CONSTANTE k.

(I)



(LEMBRE QUE

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix};$$

NESTE CASO,

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.)$$

Se $A=(-2,1)$,
$B=(1,1)$,
$C=(1,4)$,
QUAL DEVE SER O VALOR DE k?

$$A_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma$$

$$B_\Sigma = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma$$

$$C_\Sigma = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_\Sigma$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9$$

$$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} = \overrightarrow{(1,0)}_\Sigma$$

$$\overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} = \overrightarrow{(1,1)}_\Sigma$$

$$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma}\cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} = 1$$

$$k = 9$$

Pro caso geral use

$$A = \begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_u\\A_v\end{pmatrix}_\Sigma,$$

$$B = \begin{pmatrix}B_x\\B_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_u\\B_v\end{pmatrix}_\Sigma, \text{ etc.}$$

(II) AGORA USE ESTA MUDANÇA DE COORDENADAS:

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

(III) AGORA USE ESTA MUDANÇA DE COORDENADAS:

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\-\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

GA 5/SET/2014 A

HOJE: ÂNGULOS!
VAMOS SEGUIR A CAP. 9 DO BOULOS...
ELE FAZ QUASE TUDO DIRETO EM $\mathbb{R}^3$, AO CONTRÁRIO DA GENTE...
MAS QUASE TUDO QUE A GENTE ESTÁ FAZENDO EM $\mathbb{R}^2$ PODE SER GENERALIZADO FACILMENTE PARA $\mathbb{R}^3$. POR EXEMPLO, UM PROBLEMA IMPORTANTE DA ÚLTIMA AULA ERA PROVAR QUE SE

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

ENTÃO $\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} = k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$

VAMOS VER COMO ISTO FICA EM $\mathbb{R}^3$. DIGAMOS QUE

$$\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_\Sigma, \quad \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_\Sigma$$

E $$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\\g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}| & | & |\\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\\ | & | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

ENTÃO $\overrightarrow{A_\Sigma B_\Sigma} \cdot_\Sigma \overrightarrow{A_\Sigma C_\Sigma} =$

$$\left(\begin{pmatrix}| & | & |\\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\\ | & | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)^T \left(\begin{pmatrix}| & | & |\\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\\ | & | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \ldots$$

E SE A MATRIZ NO MEIO DA EXPRESSÃO ANTERIOR É IGUAL A

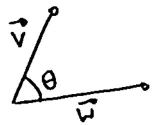
$$\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix},$$ O RESTO É FÁCIL.

UMA DICA PRA COMO ESTUDAR:

PRESTEM ATENÇÃO EM QUANTA ENERGIA VOCÊS GASTAM PRA FAZER CONTAS VS. QUANTA VOCÊS GASTAM PRA ESCREVER DIRETO.

TENTEM GASTAR 75% DA ENERGIA DE VOCÊS PRA ESCREVEREM DIREITO!

ÂNGULOS
(BOULOS, CAP 9)

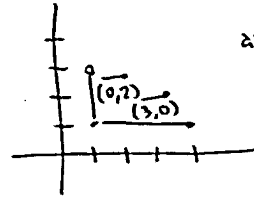


$\mathrm{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \theta$
COM A RESTRIÇÃO DE QUE O RESULTADO FICA ENTRE $0°$ E $180°$ (OU SEJA, ENTRE 0 E π).

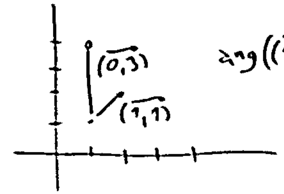
REPARE:
$0° = 0$ (RADIANOS)
$90° = \pi/2$
$180° = \pi$
$k° = k(\frac{\pi}{180})$

TEM MUITOS ÂNGULOS QUE A GENTE SABE CALCULAR NO OLHÔMETRO - A FÓRMULA CERTA PRA ang TEM QUE DAR O MESMO RESULTADO QUE O OLHÔMETRO NESTES CASOS.

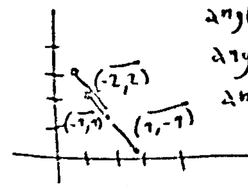
EXEMPLOS:



$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(0,2)}, \overrightarrow{(3,0)}) = 90° = \frac{\pi}{2}$

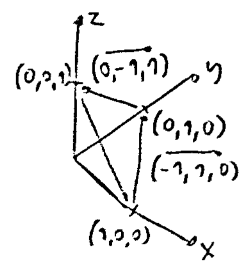


$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(1,1)}, \overrightarrow{(0,3)}) = 45° = \frac{\pi}{4}$



$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-2,2)}, \overrightarrow{(1,-1)}) = 180° = \pi$
$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-1,1)}, \overrightarrow{(1,-1)}) = 180° = \pi$
$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-2,2)}, \overrightarrow{(-1,1)}) = 0° = 0$

EM $\mathbb{R}^3$,



$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-1,1,0)}, \overrightarrow{(0,-1,1)}) = 120° = \frac{2\pi}{3}$
$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(1,-1,0)}, \overrightarrow{(0,-1,1)}) = 60° = \frac{\pi}{3}.$

COMO
O QU
É O
FÓRM
VIR
$\vec{v}$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(0,2)},\overrightarrow{(3,0)}) = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(1,1)},\overrightarrow{(0,3)}) = 45° = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-2,2)},\overrightarrow{(1,-1)}) = 180° = \pi$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-1,1)},\overrightarrow{(1,-1)}) = 180° = \pi$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-2,2)},\overrightarrow{(-1,1)}) = 0° = 0$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(-1,1,0)},\overrightarrow{(0,-1,1)}) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

$\mathrm{ang}(\overrightarrow{(1,-1,0)},\overrightarrow{(0,-1,1)}) = 60° = \frac{\pi}{3}$.

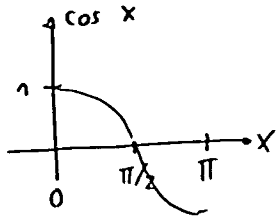
COMO CALCULAR ESSE "ang"?

O QUE É FÁCIL DE CALCULAR É O COSSENO DELE!

FÓRMULA (A EXPLICAÇÃO VAI VIR DEPOIS):

$$\vec{V}\cdot\vec{w} = \|\vec{V}\|\|\vec{w}\|\cos(\mathrm{ang}(\vec{v},\vec{w}))$$

ÂNGULO	COSSENO
0°	1
90°	0
180°	-1
60°	1/2
120°	-1/2



JÁ QUE

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\mathrm{ang}(\vec{v},\vec{w}))$

ENTÃO

$\cos(\mathrm{ang}(\vec{v},\vec{w})) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$

$\mathrm{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \arccos\left(\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right)$ 

VOLTANDO PRO "ESCREVER DIREITO"...

O MELHOR MODO DE APRENDER A ESCREVER DIREITO É DEMONSTRANDO COISAS. UM MONTE DE EXERCÍCIOS DO LIVRO E DAS LISTAS SÃO DA FORMA "MOSTRE QUE BLÁ". OUTROS SÃO DA FORMA "V/F/JUSTIFIQUE", QUE SÃO QUASE A MESMA COISA...

E AGORA VOCÊS APRENDERAM UM MONTE DE OPERAÇÕES NOVAS, E PRECISAM SABER AS PROPRIEDADES DELAS!

TRUQUE: PRA CADA PROPRIEDADE, EXPRESSE ELE COMO UMA PROPOSIÇÃO - I.E., COMO UM PROBLEMA DE V/F/JUSTIFIQUE - E OU DEMONSTRE-A OU DÊ UM CONTRA-EXEMPLO!

EXERCÍCIO (V, F, JUSTIFIQUE):

a) $(k\vec{v})\cdot\vec{w} = k(\vec{v}\cdot\vec{w})$
b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$
d) $\mathrm{Pr}_{k\vec{u}}\vec{v} = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$
e) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}k\vec{v} = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$
f) $\mathrm{ang}(k\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v})$

GA 5/set/2014 $\boxed{A}$

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(3,0)}=6\}$

h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,1)}=10\}$

i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid Pr_{\overrightarrow{(3,0)}}\overrightarrow{(x,y)}=\overrightarrow{(2,0)}\}$

j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid Pr_{\overrightarrow{(2,1)}}\overrightarrow{(x,y)}=\overrightarrow{(4,2)}\}$

k) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{ang}(\overrightarrow{(x,y)},\overrightarrow{(3,0)})=45°\}$

ℓ) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{ang}(\overrightarrow{(x,y)},\overrightarrow{(3,3)})=135°\}$

QUANDO VOCÊ FOR ESTUDAR EM CASA TENTANDO RESOLVER OS PROBLEMAS DO LIVRO, VOCÊ VAI VER QUE MUITOS PROBLEMAS EXIGEM (IMPLICITAMENTE!) QUE VOCÊ CONSTRUA (MENTALMENTE) CONJUNTOS COMO OS ACIMA...

QUANDO VOCÊ FOR TENTAR RESOLVER ESTES PROBLEMAS TENTE USAR ESTA NOTAÇÃO DE CONJUNTOS NA SUA SOLUÇÃO - VOCÊ VAI VER

QUE AÍ FICA BEM MAIS FÁCIL FALAR PRECISAMENTE DA INTERSEÇÃO DESTES CONJUNTOS DO QUE SE VOCÊ SÓ PUDESSE USAR PORTUGUÊS.

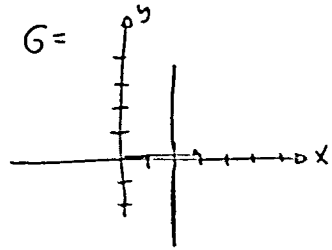
OBS: MEUS DOIS EXEMPLOS PREFERIDOS DE AFIRMAÇÕES VERDADEIRAS COM DEMONSTRAÇÕES NÃO-ÓBVIAS SÃO:

- $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$
- $\|\,\|\vec{v}\|\,\vec{w}\,\| = \|\,\|\vec{w}\|\,\vec{v}\,\|$

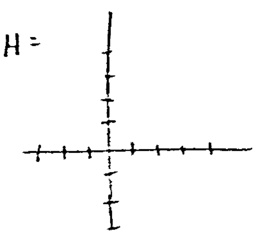
SEJAM $G, H, \ldots, L$ OS CONJUNTOS QUE SÃO AS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS g ATÉ ℓ.

PODEMOS COMEÇAR A TENTAR CONSTRUIR $G, H, \ldots, L$ OLHOMETRICAMENTE ENCONTRANDO ALGUNS PONTOS DE $G, \ldots, L$ E AÍ SUPONDO COMO DEVE SER O RESTO DE CADA CONJUNTO.

$G =$



$H =$



$(0,0)\in K$?

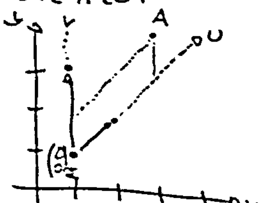
$(0,0)\in L$?

GA 5/set/2014 B

PROJEÇÃO ORTOGONAL E ÂNGULOS

LEMBREM QUE QUANDO A GENTE ESTAVA ENCONTRANDO NO OLHÔMETRO AS COORDENADAS U E V DE PONTOS NUM OUTRO SISTEMA DE COORDENADAS, NÓS DECOMPÚNHAMOS UM VETOR NUMA SOMA DE MÚLTIPLOS (UMA "COMBINAÇÃO LINEAR") DE DOIS OUTROS...

EXEMPLO:



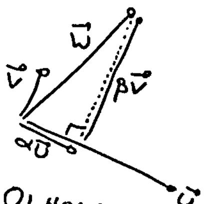
$A = (0,0)_\Sigma + 2\overrightarrow{(1,0)}_\Sigma + \frac{1}{2}\overrightarrow{(0,1)}_\Sigma$
$= (1,1) + 2\overrightarrow{(1,1)} + \frac{1}{2}(0,2)$

VAMOS SUPOR QUE $\vec{u} \perp \vec{v}$, E QUEREMOS DECOMPOR $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

REPAREM QUE $\alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$, $\beta\vec{v} \parallel \vec{v}$,

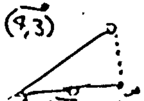
E COMO $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\beta\vec{v} \perp \vec{u}$.

GEOMETRICAMENTE:



OLHOMETRICAMENTE, A GENTE SABE CALCULAR ESSE $\alpha\vec{u}$ EM ALGUNS CASOS...

$\vec{w} = \overrightarrow{(4,3)}$



DEFINIÇÃO

SE $\vec{u} \perp \vec{v}$ E $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, ENTÃO $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \alpha\vec{u}$.

COMO CALCULAR ESSE α E O $\alpha\vec{u}$?

COMO $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

ENTÃO $\vec{w}\cdot\vec{u} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\cdot\vec{u}$

$= (\alpha\vec{u})\cdot\vec{u} + (\beta\vec{v})\cdot\vec{u}$

$= \alpha(\vec{u}\cdot\vec{u}) + \beta(\cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}})$

$= \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u}$

E JÁ QUE $\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u}$, ENTÃO $\alpha = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

DIGAMOS QUE

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(-3,6)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(0,4)}$.

ENTÃO $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \alpha\vec{u}$

$= \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

$= \frac{\overrightarrow{(0,4)}\cdot\overrightarrow{(2,1)}}{\overrightarrow{(2,1)}\cdot\overrightarrow{(2,1)}}\overrightarrow{(2,1)}$

$= \frac{4}{5}\overrightarrow{(2,1)}$

$= \overrightarrow{(1.6,\ 0.8)}$

DEF (MAIS FÁCIL DE USAR, MAS MEIO MISTERIOSA GEOMETRICAMENTE):

$$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

IMPORTANTE:

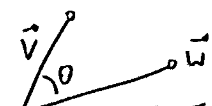
NÃO FAÇAM ISTO!:

$\frac{\vec{w}\cdot\cancel{\vec{u}}}{\vec{u}\cdot\cancel{\vec{u}}}\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\vec{u}}\vec{u}$

NÃO DÁ PRA DIVIDIR UM VETOR POR OUTRO! QUANTO SERIA $\frac{\overrightarrow{(2,3)}}{\overrightarrow{(4,5)}}$?

ÂNGULO

GEOMETRICAMENTE, $ang(\vec{v},\vec{w})$ É O ÂNGULO θ ENTRE OS VETORES $\vec{v}$ E $\vec{w}$,



COM A RESTRIÇÃO DE QUE O RESULTADO TEM QUE ESTAR NO INTERVALO $[0°, 180°]$, OU SEJA, EM $[0, \pi]$.

OBS: $k° = \frac{\pi}{180}k$ (RADIANOS).

EXE...
CAL...
OS ...

• a...
• a...
• a...
• a...
• a...
• a...

UMA...
CALC...

ESS...
COM...
VER...
DE...
$\vec{v}\cdot$...
C...
$\vec{v}$...
$\|\vec{v}$...
arcc...

α

$\vec V$

$\beta\vec V)\cdot\vec U$

$\vec U + (\beta\vec V)\cdot\vec U$

$\vec U) + \beta(\cancel{\vec V\cdot\vec U})$

$\cdot\vec U$

$\vec w\cdot\vec U,$

$\frac{\overrightarrow{2,1)}}{(2,1)}(\overrightarrow{2,1})$

$\overrightarrow{1)}$

$\overrightarrow{0.8)}$

DE USAR,
RIOSA GEOMETRICAMENTE):
$\vec U$

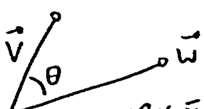
IMPORTANTE:
NÃO FAÇAM ISTO!:

$$\frac{\vec W\cdot\cancel{\vec V}}{\vec U\cdot\cancel{\vec V}}\vec U = \frac{\vec W}{\vec U}\vec U$$

NÃO DÁ PRA DIVIDIR UM VETOR POR OUTRO! QUANTO SERIA $\dfrac{\overrightarrow{(2,3)}}{\overrightarrow{(4,5)}}$?

ÂNGULO

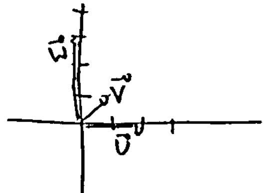
GEOMETRICAMENTE, $ang(\vec V,\vec W)$ É O ÂNGULO θ ENTRE OS VETORES $\vec V$ E $\vec W$,



COM A RESTRIÇÃO DE QUE O RESULTADO TEM QUE ESTAR NO INTERVALO $[0°, 180°]$, OU SEJA, EM $[0, \pi]$.

OBS: $k° = \frac{\pi}{180}k$ (RADIANOS).

EXERCÍCIO:
CALCULE NO OLHÔMETRO OS ÂNGULOS ABAIXO:



- $ang(\vec U,\vec W)$
- $ang(\vec U,\vec V)$,
- $ang(\vec U,3\vec V)$,
- $ang(\vec U,-\vec V)$
- $ang(\vec V,\vec V)$
- $ang(\vec V,-2\vec V)$

UMA FÓRMULA PRA CALCULAR O ÂNGULO

ESSA FÓRMULA É CONHECIDA (MAS VAMOS VER A EXPLICAÇÃO DELA DEPOIS):

$$\vec V\cdot\vec W = \|\vec V\|\|\vec W\|\cos(ang(\vec V,\vec W))$$

ENTÃO:

$$\frac{\vec V\cdot\vec W}{\|\vec V\|\|\vec W\|} = \cos(ang(\vec V,\vec W))$$

$$\arccos\left(\frac{\vec V\cdot\vec W}{\|\vec V\|\|\vec W\|}\right) = ang(\vec V,\vec W)$$

A GENTE SABE (DE CABEÇA, ATÉ) O COSSENO DE ALGUNS ÂNGULOS...

$\cos(0°) = \cos(0) = 1$

$\cos(60°) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\cos(90°) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\cos(120°) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$\cos(180°) = \cos(\pi) = -1$

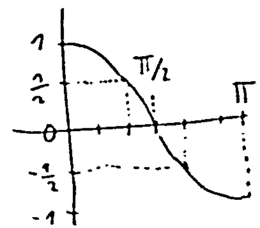
$\arccos(1) = 0° = 0$

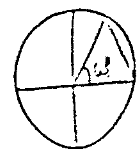
$\arccos(\frac{1}{2}) = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\arccos(0) = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180° = \pi$





AGORA SABEMOS VÁRIAS OPERAÇÕES - ".", "PR", "ang" - QUE AINDA NÃO SÃO MUITO FAMILIARES...

DICAS:

1. GASTE 75% DA SUA ENERGIA APRENDENDO A ESCREVER CLARAMENTE E 25% APRENDENDO A FAZER AS CONTAS.
2. MUITOS EXERCÍCIOS DA LISTA 1 DO REINALDO, DAS PÁGS 79 A 81 DO BOULOS, DAS PÁGS 83 A 85, ETC, SÃO EXERCÍCIOS NOS QUAIS VOCÊS PRATICAMENTE SÓ PRECISAM TRADUZIR ALGO PARA UMA PROPOSIÇÃO ALGÉBRICA E DEMONSTRÁ-LA (OU DEMONSTRAR QUE ELA É FALSA).
3. ESCREVA AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES NOVAS COMO PROPOSIÇÕES, E TRATE-AS COMO PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE.

GA 5/set/2014 B

V, F, justifique:

a) $(k\vec{v})\cdot\vec{w} = k(\vec{v}\cdot\vec{w})$

b) "$(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{w})$",
mas como sempre escrevemos $k\vec{v}$ ao invés de $\vec{v}k$ precisamos "consertar" a proposição acima para:
$(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} = (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

c) $Pr_{k\vec{u}}\vec{w} = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

d) $Pr_{\vec{u}}\,k\vec{w} = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

e) $Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{u}$

f) $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

g) $\mathrm{ang}(k\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v})$

Vários exercícios das listas e do livro vão depender, <u>implicitamente</u>, da gente saber construir conjuntos como estes e depois fazer interseções entre eles...

Representem graficamente:

h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(3,0)} = 6\}$

i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(4,2)} = 10\}$

j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid Pr_{\overrightarrow{(3,0)}}\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(2,0)}\}$

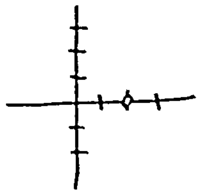
k) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid Pr_{\overrightarrow{(4,2)}}\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(2,1)}\}$

l) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \mathrm{ang}(\overrightarrow{(3,0)},\overrightarrow{(x,y)}) = 45°\}$

m) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \mathrm{ang}(\overrightarrow{(3,0)},\overrightarrow{(x,y)}) = 135°\}$

Dica: sejam H, I, J, K, L, M os conjuntos-resposta dos exercícios acima.
Encontrem alguns pontos de cada um e <u>suponha</u> como deve ser o resto do conjunto.
Problemas:
$(0,0)\in L$?
$(0,0)\in M$?

Prop:

$H =$ 

Isto implica que $(2,1)\notin H$.
Mas $(2,1)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(3,0)} = 6\}$
porque $\overrightarrow{(2,1)}\cdot\overrightarrow{(3,0)} = 6$. !!

GA 10/SET/2014 A

(A AULA COMEÇOU ATRASADA.)
OS PROBLEMAS QUE EU TENTEI PASSAR PRA VOCÊS POR INTERNET ERAM ESTES:
VAMOS USAR A ABREVIAÇÃO
$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$.
REPRESENTEM GRAFICAMENTE:

a) $[x^2 + 9y^2 = 1]$

b) $[(x-2)^2 + (3(y-4))^2 = 1]$

c) $[(x-2)^2 + (3(y-4))^2 = 4]$

d) $[(x^2-6x+9) + (y^2+8y+16) = 1]$

e) $[x^2 - 6x + y^2 + 8y + k = 0]$, PARA TRÊS VALORES DE k DIFERENTES (VOCÊ ESCOLHE).

TRUQUE:
É FÁCIL ENCONTRAR O CENTRO E OS QUATRO PONTOS MAIS ÓBVIOS DA ELIPSE QUANDO ELA É DADA NESTA FORMA:

$$[(\underbrace{ax+b})^2 + (\underbrace{cy+d})^2 = 1]$$

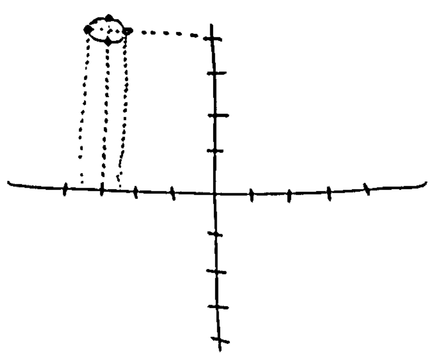
$ax+b$	$cy+d$	
1	0	PONTOS DA ELIPSE
-1	0	
0	1	
0	-1	
0	0	← CENTRO DA ELIPSE

EXEMPLO:

$$E = [\underbrace{(2x+6)^2 + (3y-12)^2}_{f(x,y)} = 1]$$

TABELA:

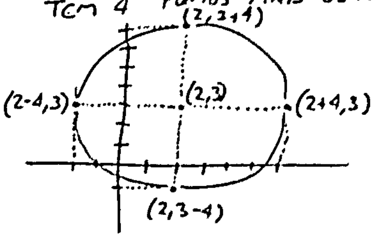
$2x+6$	x	$3y-12$	y	$f(x,y)$	
-1	-3.5	-12	0	145	:(
-1	-3.5	0	4	1	:)
6	0	5	17/3	61	:(
1	-5/2	0	4	1	:)
0	-3	0	4	0	(CENTRO)
0	-3	1	$\frac{13}{3}$	1	:)
0	-3	-1	$\frac{11}{3}$		



GA 10/set/2014 B

Cada círculo — por exemplo, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+(y-3)^2=4^2\}$

tem 4 "pontos mais óbvios":



Vamos ver como fazer algo parecido com elipses que têm um eixo horizontal e outro vertical.

Vamos usar uma abreviação: [equação] quer dizer $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{equação}\}$.

Exercício:
Representem graficamente

a) $[x^2+y^2=2^2]$

b) $[x^2+y^2=16]$

c) $[(x-1)^2+(y+3)^2=9]$

d) $[(3x)^2+(3y-6)^2=9]$

e) $[x^2+9y^2=1]$

f) $[(x-2)^2+(3(y-4))^2=1]$

g) $[(x-2)^2+(3(y-4))^2=4]$

h) $[(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=1]$

i) $[x^2-6x+y^2+8y+k=0]$, para três valores de k diferentes (você escolhe).

Truque:
dá pra gente encontrar pontos de $\Big[\underbrace{\underbrace{(ax+b)}_{f(x)}{}^2+\underbrace{(cy+d)}_{g(y)}{}^2}_{h(x,y)}=e^2\Big]$

Resolvendo:

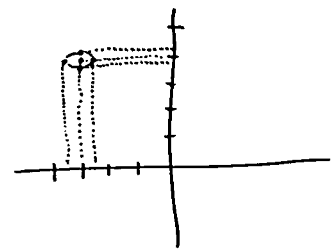
- $f(x)=e,\ g(y)=0$
- $f(x)=-e,\ g(y)=0$
- $f(x)=0,\ g(y)=e$
- $f(x)=0,\ g(y)=-e$

e o ponto com $f(x)=g(y)=0$ vai ser o centro da elipse.

Exemplo:

$$E = \Big[\underbrace{\underbrace{(2x+6)}_{f(x)}{}^2+\underbrace{(3y-12)}_{g(y)}{}^2}_{h(x,y)}=1\Big]$$

x	$2x+6$	y	$3y-12$	$h(x,y)$	
0	6	0	-12	36+144=180	:(
-3	0	4	0	0	(centro)
-2.5	1	4	0	1	:)
-3.5	-1	4	0	1	:)
-3	0	11/3	-1	1	:)
-3	0	13/3	1	1	:)



$y^2 = 1]$

$+ (3(y-4))^2 = 1]$

$+ (3(y-4))^2 = 4]$

$x+9) + (y^2 + 8y + 16) = 1]$

$x + y^2 + 8y + k = 0]$,

TRÊS VALORES DE k

RENTES (VOCÊ ESCOLHE).

ENTE ENCONTRAR

E $[\underbrace{\underbrace{(ax+b)}_{f(x)}^2 + \underbrace{(cy+d)}_{g(y)}^2}_{h(x,y)} = e^2]$

:

$g(y)=0$

$g(y)=0$

$g(y)=e$

$g(y)=-e$

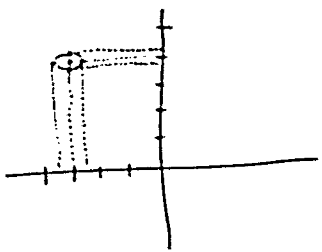
com $f(x)=g(y)=0$

CENTRO DA ELIPSE.

EXEMPLO:

$$E = [\underbrace{\underbrace{(2x+6)}_{f(x)}^2 + \underbrace{(3y-12)}_{g(y)}^2}_{h(x,y)} = 1]$$

x	$2x+6$	y	$3y-12$	$h(x,y)$	
0	6	0	-12	36+144=180 !!	
-3	0	4	0	0	(CENTRO)
-2.5	1	4	0	1	:)
-3.5	-1	4	0	1	:)
-3	0	11/3	-1	1	:)
-3	0	13/3	1	1	:)



PROP: $[(3x)^2 + (3y-6)^2 = 9] = \ldots$

DEF: $f(x)=3x$, $g(y)=3y-6$, $h(x,y)=f(x)^2+g(y)^2$

QUEREMOS

$(3x)^2 + (3y-6)^2 = 9$

VAMOS TENTAR FAZER

$(3x)^2 = 0$.

ENTÃO $x=0$ E

$(3y-6)^2 = 9$

VAMOS TENTAR FAZER

$3y-6=3$

ENTÃO $3y=9$

$y=3$

GA 12/set/2014 [1]

O livro usa várias equações diferentes para elipses, hipérboles e parábolas...
Vocês vão ter que saber todas elas e saber converter entre equação e gráfico muito rápido.

Vamos usar esta abreviação:

$[\text{equação}] = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \text{equação}\}$.

Na aula passada vimos como encontrar os pontos mais óbvios de elipses dadas nesta forma,

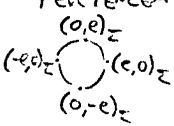
$E = [(ax+b)^2 + (cy+d)^2 = e^2]$

e como representar graficamente esta elipse.

O grande truque - que eu não mostrei na aula passada - é criar novas coordenadas.

Se $u = ax+b$,
$v = cy+d$,
$(u,v)_\Sigma = (ax+b, cy+d)$,

então estes pontos pertencem a E:



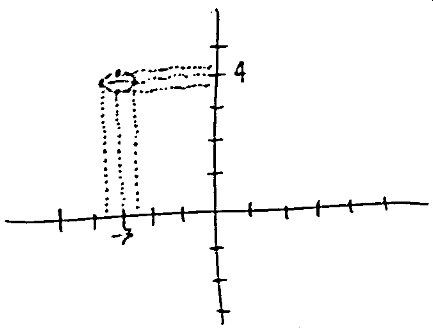
e o centro da elipse é o ponto $(0,0)_\Sigma$.

Exemplo da aula passada: se

$E = [(2x+6)^2 + (3y-12)^2 = 1]$

então tínhamos

x	$\overset{u}{\overset{\shortparallel}{2x+6}}$	y	$\overset{v}{\overset{\shortparallel}{3y-12}}$	u^2+v^2
-3.5	-1	4	0	1
-2.5	1	4	0	1
-3	0	13/3	1	1
-3	0	11/3	-1	1
-3	0	4	0	0 ⇦ centro



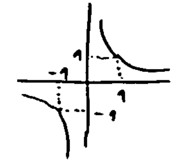
Teste:
se $x = -3.5$
e $y = 4$
então
$(2x+6)^2 + (3y-12)^2 =$
$(-7+6)^2 + (12-12)^2 =$
$(-1)^2 + 0^2 = 1$ ☺

OBS: As elipses fáceis de desenhar - as que são da forma acima - têm um eixo vertical e um horizontal.

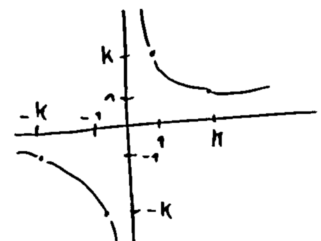
Dá pra fazer algo bem parecido com hipérboles.

Hipérbole canônica:

$H_C = [xy = 1]$



e $[xy = k]$ também é fácil de desenhar:



Exercício:
Represente graficamente

$H = [(2x+1)(y-3) = 1]$

$H' = [(2x+1)(y-3) = 2]$.

Truque: as assíntotas de $[uv = 1]$ são em $[u=0]$ e $[v=0]$, e o "centro" dela é em $(u,v) = 0$.

Exercício
(de escrita!

O livro c
isto aqui
"equação p
da elipse

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$

Mostre q
elipse da

$\left[\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \right.$

da forma

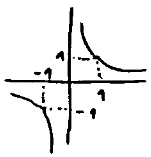
$[(ax+b)^2$

Exerc
repre
gráf
repre
mente
óbvio
(a di
faze
caso

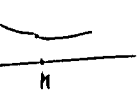
ALGO
m

ÔNICA:

]



IL DE



XERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE
$[(2x+1)(y-3)=1]$
$[(2x+1)(y-3)=2]$.

QUE: AS ASSÍNTOTAS
$= [UV=1]$ SÃO EM
$U=0]$ E $[V=0]$, E O
CENTRO" DELA É EM
$U,V)=0$.

EXERCÍCIO
(DE ESCRITA!):

O LIVRO CHAMA
ISTO AQUI DE
"EQUAÇÃO REDUZIDA
DA ELIPSE":

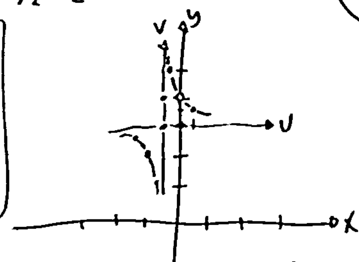
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

MOSTRE QUE TODA
ELIPSE DA FORMA
$\left[\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right]$ É
DA FORMA
$[(ax+b)^2+(cy+d)^2=e^2]$.

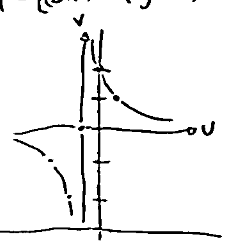
EXERCÍCIO (DE
REPRESENTAÇÃO
GRÁFICA):
REPRESENTE GRAFICAMENTE OS PONTOS MAIS
ÓBVIOS DESTAS ELIPSES.
(A DIFICULDADE É
FAZER ISTO NO
CASO GERAL).

$$H=[(\underbrace{2x+1}_{u})(\underbrace{y-3}_{v})=1]$$

x	$\overset{u}{2x+1}$	y	$\overset{v}{y-3}$	uv
$-1/2$	0	3	0	0
0	1	3	0	0
$-1/2$	0	4	1	0
	-2		$-1/2$	1
	-1		-1	1
	$-1/2$		-2	1
$-1/4$	$1/2$	5	2	1
0	1	4	1	1
$1/2$	2	3.5	$1/2$	1



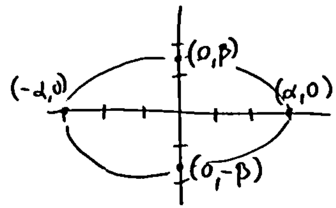
E $H'=[(2x+1)(y-3)=1]$



PONTOS ÓBVIOS
DE $E=\left[\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right]$:

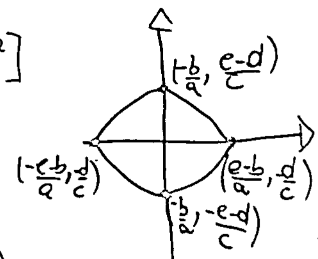
- $(x,y)=(\alpha,0)$
- $(x,y)=(-\alpha,0)$
- $(x,y)=(0,\beta)$
- $(x,y)=(0,-\beta)$

GRAFICAMENTE:



Pontos óbvios de
$E=[(ax+b)^2+(cy+d)^2=e^2]$

$$(x,y)=\left(\frac{e-b}{a},-\frac{d}{c}\right)$$
$$=\left(\frac{-e-b}{a},-\frac{d}{c}\right)$$
$$=\left(-\frac{b}{a},\frac{e-d}{c}\right)$$
$$=\left(-\frac{b}{a},\frac{-e-d}{c}\right)$$



GA 12/set/2014 [1]

OBS: DIZER QUE
UM CONJUNTO E É
"DA FORMA
$[(ax+b)^2+(cx+d)^2=e^2]$"
É DIZER:
"EXISTEM $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$
TAIS QUE $E = [\ldots]$".
E EM GERAL PRA
MOSTRAR QUE ISTO É
VERDADE A GENTE VAI
QUERER "EXIBIR"
"EXPLICITAMENTE" ESTES
[illegible]
[illegible]

[illegible]

$$\left[\frac{[illegible]}{[illegible]} - \frac{y^2}{[illegible]} = 1\right] =$$

$$[(ax+b)^2+(cy-[illegible])^2=e^2]$$

GA 12/set/2014 | 8

Abreviação:

$[\text{equação}] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \text{equação}\}$.

Na aula passada vimos como encontrar os pontos mais óbvios e o centro de

$E = [(2x+6)^2 + (3y-12)^2 = 1]$.

Vamos generalizar isto - um truque é usar coordenadas novas!

Se $u = 2x+6$,
$v = 3y-12$,
então $E = [u^2 + v^2 = 1]$

e se definimos

$(u,v)_\Sigma = (2x+6, 3y-12)$

então os pontos óbvios da elipse E são estes:

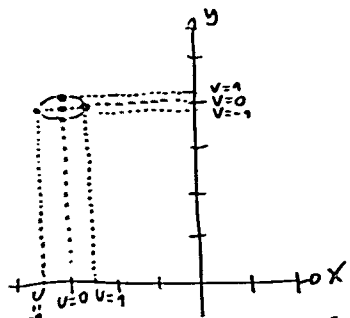
- $u=1$, $v=0$,
- $u=-1$, $v=0$,
- $u=0$, $v=1$,
- $u=0$, $v=-1$,

e o centro é em $u=0$, $v=0$.

Vamos representar os dois sistemas de coordenadas no mesmo $\mathbb{R}^2$...

$$\underbrace{(2x+6)}_{u}{}^2 + \underbrace{(3y-12)}_{v}{}^2 = 1$$

x	$\overset{u}{2x+6}$	y	$\overset{v}{3y-12}$	u^2+v^2
-2.5	1	4	0	1
-3.5	-1	4	0	1
-3	0	13/3	1	1
-3	0	11/3	-1	1
-3	0	4	0	0



Repare que agora a gente sabe representar graficamente qualquer elipse da forma

$E = [(ax+b)^2 + (cy+d)^2 = e^2]$... com $a \neq 0$, $c \neq 0$.

OBS: digamos que $e=3$, $e^2=9$.
Digamos que $(ax+b)^2 = 9$,
$(cy+d)^2 = 0$.

Então $ax+b=3$
ou $ax+b=-3$.

Pra hipérboles temos algo parecido.

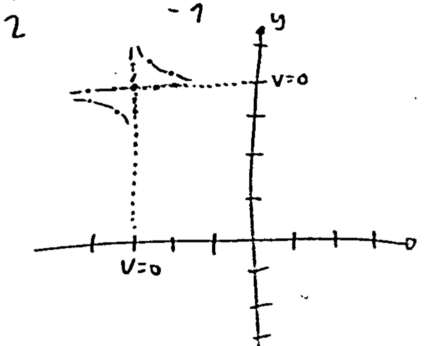
Por exemplo, sabemos representar graficamente

$H = [(2x+6)(3y-12) = 1]$

e

$H' = [(2x+6)(3y-12) = 2]$...

x	$\overset{u}{2x+6}$	y	$\overset{v}{3y-12}$	uv
1		2		2
2		1		2
-1		-2		2
-2		-1		2



OBS: as assíntotas são em $[u=0]$ e $[v=0]$.

... Na verda
representa
mente hi
desta fo

$H = [(a$

Exercí
Represe

$H'' = [$

O l
elip
out
"equ

x
a

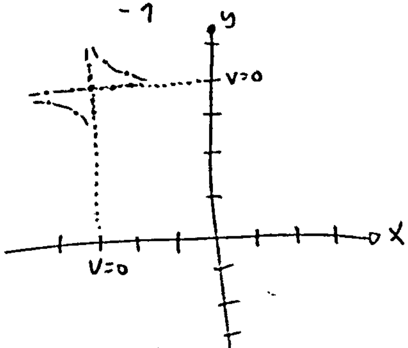
Repr
de

...HIPÉRBOLES
...OS ALGO PARECIDO.
...EXEMPLO, SABEMOS
...RESENTAR GRAFICA-
...TE

$$\ldots 2x+6)(3y-12)=1]$$

$$[(2x+6)(3y-12)=2] \ldots$$

$\overset{u}{2x\overset{\shortparallel}{+}6}$	y	$\overset{v}{3y\overset{\shortparallel}{-}12}$	uv
	2		2
	1		2
	-2		2
	-1		2



OBS: AS ASSÍNTOTAS SÃO EM $[u=0]$ E $[v=0]$.

... NA VERDADE SABEMOS REPRESENTAR GRAFICAMENTE HIPÉRBOLES DESTA FORMA:

$$H=[(ax+b)(cx+d)=k].$$

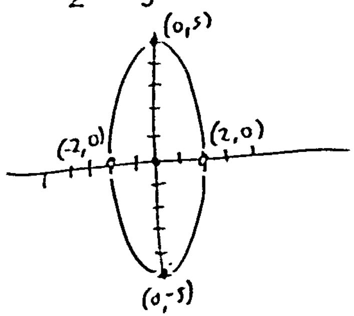
EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE

$$H''=[(2x+0)(y-3)=4].$$

O LIVRO COMEÇA COM ELIPSES COM UMA OUTRA EQUAÇÃO - A "EQUAÇÃO REDUZIDA" (p.288):

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

REPARE QUE OS PONTOS ÓBVIOS DE $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ SÃO:



EXERCÍCIO (DE ESCRITA!):

(1) MOSTRE QUE TODA ELIPSE DA FORMA

$$\left[\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right]$$

É DA FORMA

$$[(ax+b)^2+(cy+d)^2=e^2].$$

(IDÉIA: O USUÁRIO TE DÁ UMA ELIPSE

$$E=\left[\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right]; \text{ OU}$$

SEJA, ELE TE DÁ α E β. E VOCÊ ENCONTRA $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ E DÁ PRO USUÁRIO A ELIPSE

$$E'=[(ax+b)^2+(cy+d)^2=e^2]$$

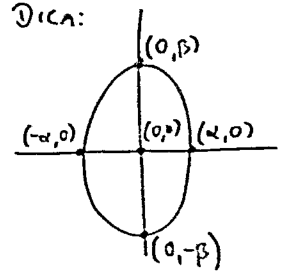
E MOSTRA QUE $E'=E$... ALIÁS É MELHOR TERMOS FÓRMULAS PARA OBTER $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ A PARTIR DE α E β...)

DICA: COMECE COM CASOS PARTICULARES, DEPOIS GENERALIZE.

(2) REPRESENTE GRAFICAMENTE OS PONTOS ÓBVIOS DE

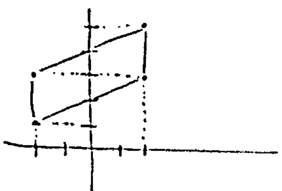
$$\left[\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right] \text{ E } [(ax+b)^2+(cy+d)^2=e^2].$$

DICA:

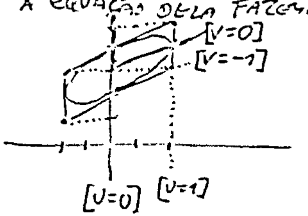


GA 17/set/2014 A

AGORA VOCÊS JÁ SABEM ENCONTRAR DESCRIÇÕES "ALGÉBRICAS" (COMO CONJUNTOS DE PONTOS OBEDECENDO CERTAS EQUAÇÕES) DE ELIPSES E HIPÉRBOLES; POR EXEMPLO, SE A GENTE TEM ESTE PARALELOGRAMO AQUI,



EXISTE UMA ELIPSE QUE TEM OS QUATRO PONTOS MÉDIOS DOS LADOS DELE COMO SEUS PONTOS MAIS ÓBVIOS. PARA OBTERMOS A EQUAÇÃO DELA FAZEMOS



EXERCÍCIO:

A ELIPSE DESTE EXEMPLO É $[U^2+V^2=1]$, OU SEJA,

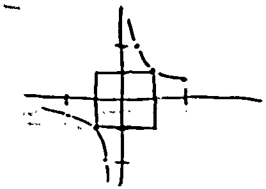
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U^2+V^2=1\},$$

ONDE $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

ENCONTRE a,b,c,d,e,f, EXPANDA U E V EM $U^2+V^2-1=0$ PARA OBTER UM POLINÔMIO EM x E y, E COMPARE O SEU POLINÔMIO COM O DOS SEUS COLEGAS.

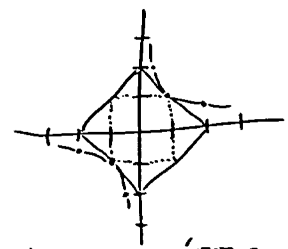
DÁ PRA FAZER ALGO PARECIDO PRA HIPÉRBOLES, DE DOIS JEITOS.

JEITO 1:



PODEMOS USAR ESTE PARALELOGRAMO PRA NOS AJUDAR A TRAÇAR A HIPÉRBOLE. AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE SÃO RETAS PARALELAS AOS SEUS LADOS QUE PASSAM PELO CENTRO DELE.

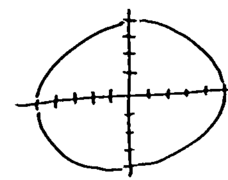
JEITO 2 (O LIVRO USA ESTE):



AGORA AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE SÃO AS DIAGONAIS DO PARALELOGRAMO E ELA TANGENCIA DOIS LADOS DO PARALELOGRAMO, TOCANDO-OS NOS PONTOS MÉDIOS DELES.

AINDA NÃO PREPAREI UMA LISTA DE EXERC[...] IMPRESSA, MAS JÁ D[...] PRA PASSAR PRA VOC[...] ALGUNS DOS PROBLEM[...] MAIS IMPORTANTES DELA. OBS: ACHO Q[...] AS COISAS QUE VOCÊ[...] MAIS TÊM QUE TREI[...] AGORA É "ÁLGEB[...] ("CONTAS COM LETR[...] E ESCRITA - COMO ESCREVER COISAS EM MATEMATIQUÊS PORTUGUÊS DE FO[...] MUITO CLARA.

① SEJA E ESTA ELIPSE:



OS FOCOS DELA SÃO $F_1=(-\alpha,0)$ E $F_2=(\alpha,0)$

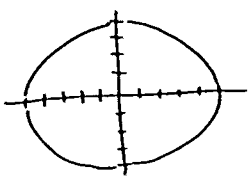
TAIS QUE PARA TO[...] $P\in E$ TEMOS $d(F$[...]

ⓐ USANDO $P=(5,$[...]

ⓑ USANDO $P=(0,$[...]

AINDA NÃO PREPAREI UMA LISTA DE EXERCÍCIOS IMPRESSA, MAS JÁ DÁ PRA PASSAR PRA VOCÊS ALGUNS DOS PROBLEMAS MAIS IMPORTANTES DELA. OBS: ACHO QUE AS COISAS QUE VOCÊS MAIS TÊM QUE TREINAR AGORA É "ÁLGEBRA" ("CONTAS COM LETRAS") E ESCRITA - COMO ESCREVER COISAS EM MATEMATIQUÊS E PORTUGUÊS DE FORMA MUITO CLARA.

1) SEJA E ESTA ELIPSE:



OS FOCOS DELA SÃO $F_1=(-\alpha,0)$ E $F_2=(\alpha,0)$ TAIS QUE PARA TODO $P\in E$ TEMOS $d(F_1,P)+d(F_2,P)=k$.

a) USANDO $P=(5,0)$, CALCULE K.

b) USANDO $P=(0,4)$, CALCULE α.

c) FAÇA A MESMA COISA PARA $E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$, $F_1=(-\alpha,0)$, $F_2=(\alpha,0)$.

2) SEJAM:

$H_1=[xy=1]$

$H_2=[xy=2]$

$H_{-1}=[xy=-1]$

$H_3=[\frac{x}{2}\frac{y}{3}=1]$

$H_{ab}=[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1]$

$H'_{ab}=[-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1]$

a) MOSTRE QUE $H'=[(x+y)(x-y)=1]$ É DA FORMA H_{ab}.

b) REPRESENTE GRAFICAMENTE O H' DO ITEM ANTERIOR.

c) REPRESENTE GRAFICAMENTE $H''=[(2x+y)(2x-y)=1]$ E MOSTRE QUE H'' É DA FORMA H_{ab}.

d) FAÇA O MESMO PARA $H'''=[(x+y)(x-y)=4]$.

e) FAÇA O MESMO PARA $H_{\alpha\beta\gamma}=[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma=0]$ (com $\alpha>0$, $\beta<0$, $\gamma>0$)

QUEM SABE COMEÇAR A FAZER O 2a?

$H_{23}=$

$H_{45}=$

$H'=[(x+y)\cdot(x-y)=1]$ (OK, PELO ENUNCIADO DO 2a.)

ASSUMINDO $x+y=1$ E $(x+y)(x-y)=1$ TEMOS $x-y=1$, E DAÍ $x=1$, $y=0$, OU SEJA, $(1,0)\in H'$.

QUANDO $a=1$ E $b=1$ TEMOS $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

QUANDO $a=1$ E $b=1$ TEMOS

$H_{ab}=[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1]=[\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{1^2}=1]$ PARA $a=b=1$

PELO 2

$=[x^2-y^2=1]$

SIM

$=[(x+y)(x-y)=1]$

SIM

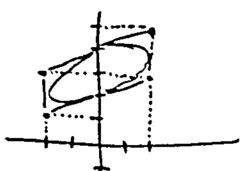
$=H'.$

POR 2

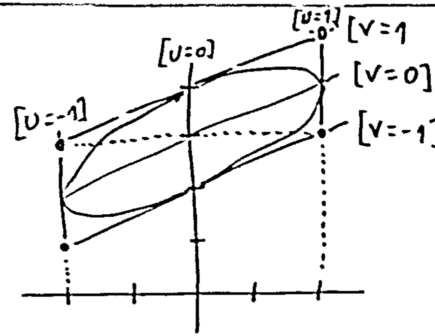
$\boxed{\text{GA 17/set/2014}}\boxed{\text{B}}$

...UMA COISA QUE VAI SER BEM IMPORTANTE NA PROVA VAI SER A GENTE TRADUZIR ENTRE REPRESENTAÇÕES "FORMAIS" ("ALGÉBRICAS": CONJUNTOS DE PONTOS OBEDECENDO CERTAS EQUAÇÕES) E REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE ELIPSES E HIPÉRBOLES (E PARÁBOLAS, QUE VAMOS VER DEPOIS).

A GENTE SABE ENCONTRAR A EQUAÇÃO DA ELIPSE "NATURAL" QUE FICA DENTRO DESTE PARALELOGRAMO:



OS QUATRO PONTOS "MAIS ÓBVIOS" DELA SÃO OS PONTOS MÉDIOS DOS LADOS DO PARALELOGRAMO, E ELA TANGENCIA O PARALELOGRAMO NESTES PONTOS.



ESTA ELIPSE VAI TER ESTA EQUAÇÃO:

$u^2+v^2=1$

ONDE u E v SÃO AS COORDENADAS NOVAS...

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$(u,v)_\Sigma = (x,y)$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e'\\f'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$u = e'+a'x+b'y$

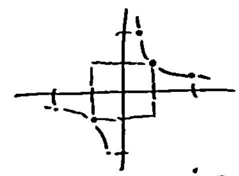
$v = f'+c'x+d'y$

⓪ EXERCÍCIO: ENCONTRE $a,b,c,d,e,f,$ $a',b',c',d',e',f',$ USANDO QUE SABEMOS QUE

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}.$$

① DÁ PRA FAZER ALGO PARECIDO COM ESSE TRUQUE DO RETÂNGULO PRA HIPÉRBOLES DE DOIS JEITOS.

(1) $[xy=1]$ =

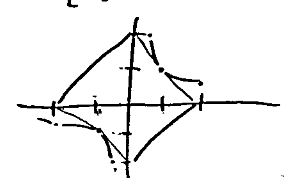


AQUI AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE SÃO AS RETAS QUE PASSAM PELO CENTRO DO QUADRADO E SÃO PARALELAS AOS LADOS E A HIPÉRBOLE TOCA DOIS VÉRTICES DO QUADRADO.

NA GENERALIZAÇÃO O QUADRADO VIRA UM PARALELOGRAMO.

(2) (O LIVRO USA ESTE JEITO - "RETÂNGULO FUNDAMENTAL" DA HIPÉRBOLE)

$[xy=1]$ =



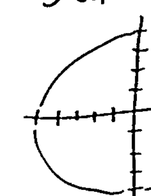
A HIPÉRBOLE
TEM COMO ASSÍN
AS DIAGONAIS
QUADRADO E
TANGENCIA DO
DO QUADRA
PONTOS MÉDIOS

(GENERALIZAÇ
"PARALELOG
FUNDAMENT

ELIPSES E
TÊM CERT
GEOMÉTRIC
VER O QU
EXCENTRIC

① A ELI
DEFINI
$E=\{P\in[$

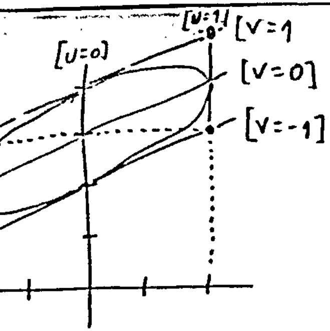
DIGAMOS



SABENDO

ⓐ USE (5,0) E

ⓑ USE (0,4) E



...LIPSE VAI TER
...EQUAÇÃO:
$\ldots + v^2 = 1$
... U E V SÃO AS
...ENADAS NOVAS...

$\ldots_{\Sigma} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\ldots_{\Sigma} = (x,y)$

$\ldots)_{\Sigma} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\ldots) = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

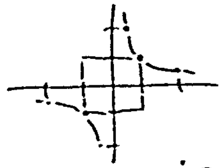
$\ldots) = \begin{pmatrix} e' \\ f' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$u = e' + a'x + b'y$
$v = f' + c'x + d'y$

...XERCÍCIO: ENCONTRE
$a, b, c, d, e, f,$
$a', b', c', d', e', f',$
...SANDO QUE SABEMOS QUE
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

(D) DÁ PRA FAZER ALGO PARECIDO COM ESSE TRUQUE DO RETÂNGULO PRA HIPÉRBOLES DE DOIS JEITOS.

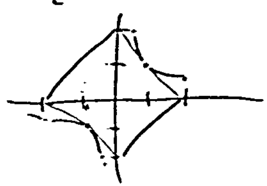
(1) $[xy=1] =$



AQUI AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE SÃO AS RETAS QUE PASSAM PELO CENTRO DO QUADRADO E SÃO PARALELAS AOS LADOS, E A HIPÉRBOLE TOCA DOIS VÉRTICES DO QUADRADO.

NA GENERALIZAÇÃO O QUADRADO VIRA UM PARALELOGRAMO.

(2) (O LIVRO USA ESTE JEITO - "RETÂNGULO FUNDAMENTAL" DA HIPÉRBOLE)
$[xy=1] =$

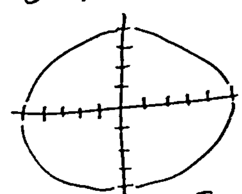


A HIPÉRBOLE TEM COMO ASSÍNTOTAS AS DIAGONAIS DO QUADRADO E ELA TANGENCIA DOIS LADOS DO QUADRADO PELOS PONTOS MÉDIOS DELES.

(GENERALIZAÇÃO: "PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL")

ELIPSES E HIPÉRBOLES TÊM CERTAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS... VAMOS VER O QUE SÃO FOCOS, EXCENTRICIDADE, ETC...

(1) A ELIPSE E É DEFINIDA POR
$$E = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = k \}.$$
DIGAMOS QUE E É ESTA ELIPSE:



SABENDO QUE $F_1 = (-\alpha, 0)$
E $F_2 = (\alpha, 0)$,
(a) USE $(5,0) \in E$ PARA CALCULAR k,
(b) USE $(0,4) \in E$ PARA CALCULAR α.

(C) FAÇA A MESMA COISA PARA
$$E' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$
$F_1 = (-\alpha, 0)$, $F_2 = (\alpha, 0)$.
$(0 < b \leq a,\ 0 \leq \alpha \leq a)$

(E OS EXERCÍCIOS QUE EU PASSEI PRA TURMA A)

GA 19/set/2014 B

JÁ QUE AMANHÃ VOCÊS VÃO TER PROVA DE C1 HOJE NÓS VAMOS FAZER UMA AULA COM POUCAS CONTAS PRA FAZER AGORA E MUITAS PRA FAZER DEPOIS! !!

TEMAS PRINCIPAIS:
- PROJEÇÃO, REFLEXÃO
- INTERSEÇÕES
- ÂNGULOS
- ÁREA

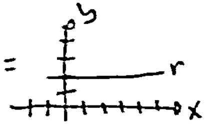
VAI SER MUITO IMPORTANTE VOCÊS TREINAR ESCREVER BEM E TRADUZIR ENTRE AS VÁRIAS NOTAÇÕES E LINGUAGENS...

SE $A=(x,y)$ E r É UMA RETA (QUE VAI SER DIFERENTE EM CADA EXEMPLO), SEJAM $P(x,y)$ O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE A, E $S(x,y)$ O SIMÉTRICO DE A COM RELAÇÃO A r.

DÁ PRA ESCREVER AS FÓRMULAS PRA $P(x,y)$ E $S(x,y)$ NESTE FORMATO:

$$P(x,y)=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad S(x,y)=\begin{pmatrix}e'\\f'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

NO CASO DE $r=$



CALCULE (USANDO O OLHÔMETRO PRA AJUSTAR) $P(0,0)$, $P(1,0)$, $P(0,1)$, $S(0,0)$, $S(1,0)$, $S(0,1)$,

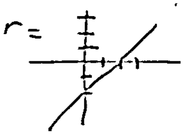
a,b,c,d,e,f,
a',b',c',d',e',f'.

$$P(x,y)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

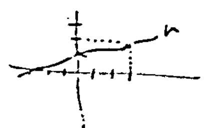
PRA CASA:
FAÇAM A MESMA COISA PRA 4 CASOS

a) CASO DO EXEMPLO (CALCULE a',b',c',d',e',f')

b) $r=$



c)

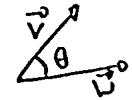


d) CASO GERAL.

DEPOIS TENTEM FORMALIZAR UM MÉTODO DE CALCULAR $P(x,y)$ E $S(x,y)$ USANDO VETORES E "Pr", E COMPARE AS FÓRMULAS QUE VOCÊ OBTEVE AGORA COM AS ANTERIORES.

ÂNGULOS

LEMBRE QUE EM



$\theta=\text{ang}(\vec{v},\vec{w})$,
E $\theta\in[0°,180°]$,
$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$,

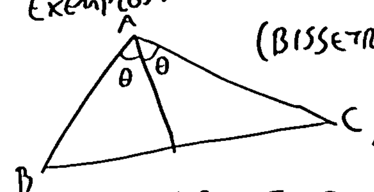
$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right)$$

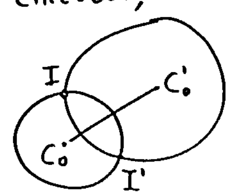
NA MAIOR PARTE DOS CASOS A GENTE VAI QUERER QUE DOIS ÂNGULOS SEJAM IGUAIS...

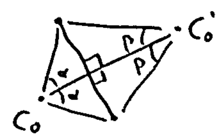
EXEMPLOS:

(BISSETRIZ)



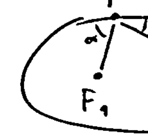
E EM INTERSEÇÕES DE DOIS CÍRCULOS,





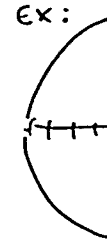
EM ROTAÇÕES (NÃO VOU FAZER FIGURA AGORA)

E NA PROPRI[EDADE] DE REFLEXÃO [DA] ELIPSE:



INTERS[EÇÃO] CÍRCUL[O]

EX:



$C=\{($

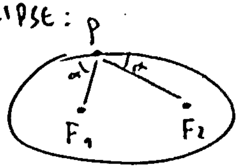
SEJA

CALCU[LE]
RESP

MORA[L]
E RE[...]
RAÍZ[...]

EM ROTAÇÕES (NÃO VOU FAZER A FIGURA AGORA),

E NA PROPRIEDADE DE REFLEXÃO DA ELIPSE:

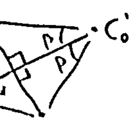


$\underset{\sim}{!!}$!

...ÇOS
...QUE
...AIS...

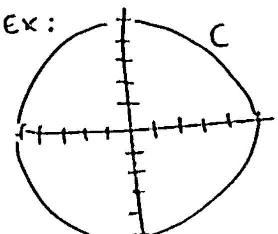
...R2)

...DOIS



INTERSEÇÃO DE CÍRCULO E RETA

EX:



$C_0=(0,0)$,
$R=5$,

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=\underbrace{5^2}_{R^2}\}$

SEJA $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2\}$.

CALCULEM $C\cap r$ (OS DOIS PONTOS).

RESP: $C\cap r=\{(-\sqrt{21},2),(\sqrt{21},2)\}$

MORAL: INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS PODEM FAZER APARECER RAÍZES QUADRADAS.

IDÉIA GERAL PRA CALCULAR AS INTERSEÇÕES DE

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\alpha x+\beta\}$

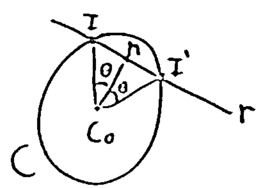
E

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2=0\}$:

SUBSTITUA y NA EQUAÇÃO DO S POR $\alpha x+\beta$, RESOLVA A EQUAÇÃO DE 2º GRAU POR BHASKARA PRA OBTER DOIS VALORES DE x, DEPOIS OBTENHA OS VALORES DE y CORRESPONDENTES.

ISTO FUNCIONA (SEMPRE), MAS DÁ TRABALHO E ÀS VEZES A GENTE ERRA NAS CONTAS...

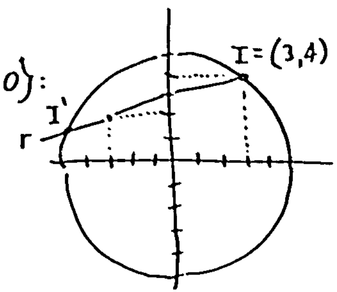
DÁ PRA USAR UMAS IDÉIAS GEOMÉTRICAS PRA AJUDAR...



AS INTERSEÇÕES I E I' SÃO SIMÉTRICAS COM RELAÇÃO À RETA C_0M, $\overleftrightarrow{C_0M}\perp r$.

ISTO NOS AJUDA A CALCULAR UMA INTERSEÇÃO A PARTIR DA OUTRA...

EXEMPLO:



NESTE CASO r TEM COEF. ANG. $1/3$ E PASSA PELOS PONTOS $I=(3,4)$, $(0,3)$, $(-3,2)$, $(-6,1)$.

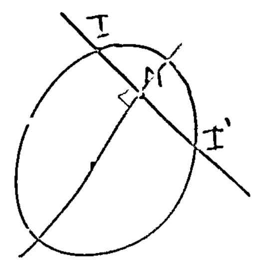
CALCULE A OUTRA INTERSEÇÃO DE r COM C POR SIMETRIA (DICAS: CALCULEM M PRIMEIRO... VOCÊ SABE CALCULAR M USANDO "PR"?)

RASCUNHO:

$C_0=(0,0)$

$M\approx(-0.9,2.7)$

$I'=I-\ldots$



$\boxed{\text{GA } 24/\text{SET}/2014}$ $\boxed{A}$

HOJE: EXCENTRICIDADE, DISTÂNCIA FOCAL, ETC...

FIGURA:

ELIPSE E

A DISTÂNCIA ENTRE OS DOIS FOCOS É $2c$;

O "DIÂMETRO MAIOR" É $2a$, E O "DIÂMETRO MENOR" É $2b$.

LEMBRE-SE QUE

$E = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(F_1,P) + d(F_2,P) = k \}$.

QUAIS SÃO AS RELAÇÕES ENTRE a, b, c, k?

(1) EXERCÍCIO:

SE $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (\frac{5}{4}y)^2 = 1 \}$,

QUEM SÃO

- OS 4 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE E?
- a E b?
- k?
- F_1 E F_2?
- c?

DEF: A EXCENTRICIDADE DE E É c/a.

CALCULE A EXCENTRICIDADE DESTA ELIPSE.

$a = 1$

$b = 4/5$

$c = 3/5$

$d(F_1,(-1,0)) + d(F_2,(-1,0)) = 2 = 2a = k$

$F_1 = (-\frac{3}{5}, 0)$

$F_2 = (\frac{3}{5}, 0)$

$c = \frac{3}{5}$

EXCENTRICIDADE: $\frac{c}{a} = \frac{3/5}{1} = \frac{3}{5}$.

(2) DIGAMOS QUE $0 < \alpha < \beta$, $\gamma > 0$

E QUE

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \gamma^2 \}$

QUEM SÃO:

- OS 4 PONTOS MAIS ÓBVIOS DE E?
- a E b?
- k?
- F_1 E F_2?
- c?
- $e = \frac{c}{a}$? ($\Leftarrow$ EXCENTRICIDADE)

$\boxed{\text{ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA } e \text{ A PARTIR DE } a \text{ E } b.}$

DICA:

HIPÓTESE: SE

$P_1 = (\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$,

$P_2 = (-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$,

$P_3 = (0, \frac{\gamma}{\beta})$,

$P_4 = (0, -\frac{\gamma}{\beta})$

ENTÃO

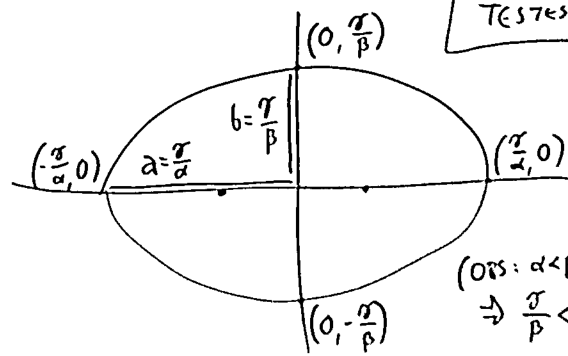
$P_1, P_2, P_3, P_4 \in E$.

SERÁ QUE $P_1 \in E$? SIM.

$P_2 \in E$? SIM.

$P_3 \in E$? SIM.

$P_4 \in E$? SIM.



$a = \frac{\gamma}{\alpha}$

$b = \frac{\gamma}{\beta}$

$k = 2\frac{\gamma}{\alpha}$

HIPÓTESE (LUAN):

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$= \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}}$

$= \sqrt{\gamma^2 (\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2})}$

$= \sqrt{\gamma^2 (\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 \beta^2})} = \frac{\gamma}{\alpha\beta}$

TESTES:

Se

Te

d

S

(OBS: $\alpha < \beta$ E $\gamma <$

$\Rightarrow \frac{\gamma}{\beta} < \frac{\gamma}{\alpha}$)

DICA:

HIPÓTESE: SE

$P_1=(\frac{\gamma}{\alpha},0)$,

$P_2=(-\frac{\gamma}{\alpha},0)$,

$P_3=(0,\frac{\gamma}{\beta})$,

$P_4=(0,-\frac{\gamma}{\beta})$

ENTÃO

$P_1,P_2,P_3,P_4 \in E$.

SERÁ QUE $P_1 \in E$? SIM.

$P_2 \in E$? SIM.

$P_3 \in E$? SIM.

$P_4 \in E$? SIM.

$$a=\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$b=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$k=2\frac{\gamma}{\alpha}$$

HIPÓTESE (LUAN):

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2-b^2} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma^2}{\beta^2}} \\ &= \sqrt{\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)} \\ &= \sqrt{\gamma^2\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\right)} = \frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}, \end{aligned}$$

$F_1=(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

TESTES:

Se $P=(\frac{\gamma}{\alpha},0)$,

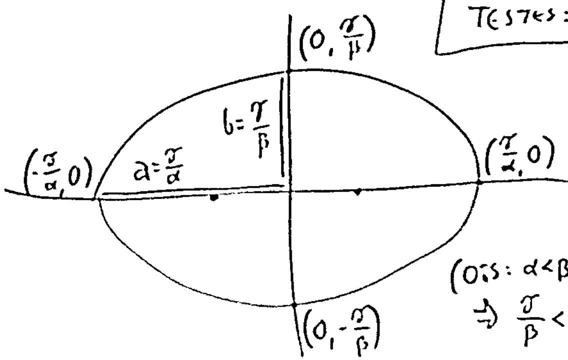
Temos

$d(F_1,P)+d(F_2,P)=k$? SIM!

Se $P=(0,\frac{\gamma}{\beta})$,

Temos

$d(F_1,P)+d(F_2,P)=k$?



(OBS: $\alpha<\beta$ e $\gamma<0$ $\Rightarrow \frac{\gamma}{\beta}<\frac{\gamma}{\alpha}$)

AVISO:

4^{as} e 6^{as} 14-16 GA (A)

16-18 FM

18-20 GA (B)

$$\begin{aligned} d(F_1,P) &= d\left((-c,0),(0,\frac{\gamma}{\beta})\right) \\ &= \left\|\left(c,\frac{\gamma}{\beta}\right)\right\| \\ &= \left\|\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2},\ \frac{\gamma}{\beta}\right)\right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}\alpha\right)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)+\alpha^2} \\ &= \frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2} \\ &= \frac{\gamma}{\alpha\beta}\beta \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \end{aligned}$$

GA 24/SET/2014 A

E $d(F_2,P) = \frac{\gamma}{\alpha},$

PORTANTO

$d(F_1,P)+d(F_2,P) = \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha},$

OK...

OU SEJA, A NOSSA HIPÓTESE

$c = \frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2},$

$F_1=(-c,0),\ F_2=(c,0)$

ESTÁ CORRETA.

CONTINUANDO:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\gamma/\alpha}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$$

HIPÓTESE:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

SE e FOR ISTO, ENTÃO

$$e = \frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}}{\gamma/\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma\beta}{\alpha\beta}\right)^2-\left(\frac{\gamma\alpha}{\alpha\beta}\right)^2}}{\gamma/\alpha}$$

$$= \frac{\frac{\gamma}{\alpha\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\gamma/\alpha}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$$

QUE COINCIDE COM A DEFINIÇÃO ANTERIOR DO e.

MAIS UM EXERCÍCIO: ENCONTRE FÓRMULAS PARA b E c A PARTIR DE a E e.

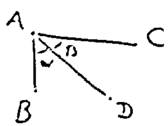
DEF (LIVRO): CONSIDEREMOS NUM PLANO π DOIS PONTOS F_1 E F_2 DISTANTES $2c>0$ ENTRE SI. SEJA $a>c$. AO CONJUNTO DOS PONTOS $P\in\pi$ TAIS QUE $d(P_1,F)+d(P,F_2)=2a$ DÁ-SE O NOME DE <u>ELIPSE</u>.

GA 26/SET/2014 A

HOJE: VÁRIAS DEFINIÇÕES QUE FALTAM PRA P1, ALGUNS TRUQUES, E DÚVIDAS ETC ATÉ ÀS 20:00 (EXCETO POR UNS INTERVALOS).

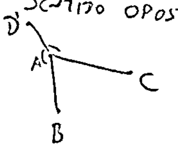
BISSETRIZ

EXEMPLO:



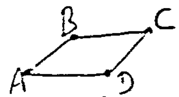
O SEGMENTO AD BISSECTA O ÂNGULO $B\hat{A}C$ SE E SÓ SE OS DOIS ÂNGULOS α E β DA FIGURA SÃO IGUAIS – I.E., $B\hat{A}D = D\hat{A}C$; MAIS PRECISAMENTE, SE $\text{ANG}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \text{ANG}(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$

OBS: TAMBÉM DAVA PRA TER ESCOLHIDO UM $\overrightarrow{AD'}$ COM O SENTIDO OPOSTO DE $\overrightarrow{AD}$...



ÁREA DE PARALELOGRAMO

SE ABCD É UM PARALELOGRAMO,

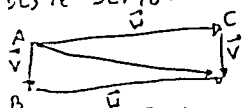


ENTÃO ÁREA(ABCD) = ÁREA($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$), E

DEF

$\boxed{\begin{array}{l} \text{SE } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(v_1,v_2)} = \vec{v} \\ \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{(w_1,w_2)} = \vec{w} \\ \text{ENTÃO ÁREA}(\vec{v},\vec{w}) = \\ \quad \left|\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\right| = |v_1w_2 - v_2w_1| \end{array}}$

CUIDADO: NÃO TENTEM CALCULAR A BISSETRIZ DESTE JEITO:



O VETOR $\vec{v}+\vec{w}$ EM GERAL NÃO BISSECTA O ÂNGULO $B\hat{A}C$...

MAS $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ SIM,

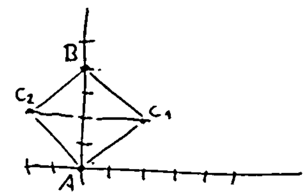
E $\|\vec{w}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{w}$ TAMBÉM.

TRUQUES

MUITO IMPORTANTE

MUITOS EXERCÍCIOS DO LIVRO E DAS LISTAS PODEM SER RESOLVIDOS POR CONJUNTOS E INTERSEÇÕES.

EXEMPLO:



QUAIS SÃO OS PONTOS $C \in \mathbb{R}^2$ TAIS QUE C É EQUIDISTANTE DE A E B E ALÉM DISSO A ÁREA DO TRIÂNGULO ABC É 4?

QUAIS SÃO OS PONTOS EQUIDISTANTES DE A E B?

SEJA E O CONJUNTO DOS PONTOS EQUIDISTANTES DE A E B. ENTÃO:

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,B)\}$$

$$= \ldots$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$$

QUAIS SÃO OS PONTOS C DE $\mathbb{R}$ TAIS QUE A ÁREA DO TRIÂNGULO ABC É 4?

SEJA D O CONJUNTO DESTES PONTOS.

ⓐ REPRESENTE D GRAFICAMENTE,

ⓑ REPRESENTE D FORMALMENTE,

OUTRO...

IMPOR...

EXERC...

① MO...

② M...

③ M...

...uais são os pontos de $\mathbb{R}$ tais que a área do triângulo ABC é 4?
Seja D o conjunto destes pontos.

a) Represente D graficamente,

b) Represente D formalmente,

$(P,B)\}$

]

Outro truque bem importante

Exercícios-exemplo:

(1) Mostre que todo conjunto da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$$
é equivalente a um conjunto da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\},$$
e a um da forma:
$$\{(a_1,a_2)+t(v_1,v_2) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

(2) Mostre que todo conjunto da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\tfrac{x}{a})^2+(\tfrac{y}{b})^2=1\}$$
é equivalente a um da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+by^2+c=0\}$$
e a um da forma
$$\{(a\cos t,\, b \operatorname{sen} t) \mid t\in\mathbb{R}\},$$

Exercício.

(3) Mostre que todo conjunto da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (ax+by)(ax-by)=1\}$$
é equivalente a um da forma
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+by^2+c=0\}$$
e a um da forma
$$\{0+t\vec{u}+\tfrac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R},\, t\neq 0\}.$$

Note que o truque do "mostre que todo _ é da forma _" não aparece explicitamente nas listas da Ana Isabel, e quase não aparece nos problemas do livro. O truque do "todo _ é da forma _" é uma ferramenta pra resolver problemas.

Exemplo:

Represente graficamente
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2-9y^2+1=0\}.$$

Últimos truques muito importantes... Se
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2=0\},$$
Seja $\Delta=c^2-4af$.

Se C é uma elipse (ou círculo), então Δ é negativo.

Se C é uma hipérbole, então Δ é positivo.

Se C é uma parábola então Δ é zero.

A gente viu focos, segmento focal, excentricidade, etc para elipses.

Pode ser que vocês precisem das idéias correspondentes para hipérboles!

(Boulos, pp. 297-307).

GA 1º/OUT/2014 | A

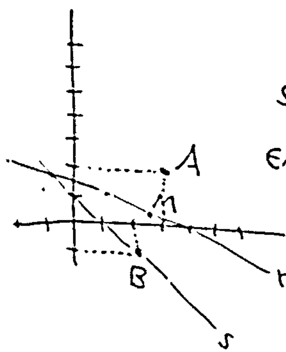
HOJE: DISCUSSÃO DO GABARITO DA P1, E TALVEZ A GENTE COMECE COM $\mathbb{R}^3$...

1a) SE $\vec{u}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,3)}$,
ENTÃO $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}=0$,
MAS $\vec{v}\neq\vec{w}$.
FALSO.

1b) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
IMPLICA QUE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO PARALELOS.
ISTO É VERDADEIRO.
TRÊS CASOS:
(I) $\vec{u}=\vec{0}$: AÍ $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO PARALELOS.
(II) $\vec{v}=0$: IDEM.
(III) $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$.
SEJA $\theta=\text{ANG}(\vec{u},\vec{v})$.
ENTÃO
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$,
$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta|$
$=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|$,
E $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ SE E SÓ SE $|\cos\theta|=1$
OU SEJA, SE $\theta=0°$ OU $\theta=180°$.

2) DETERMINE A EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA QUE PASSA PELOS PONTOS $A=(3,2)$ E $B=(2,-1)$ E CUJO CENTRO PERTENCE À RETA $x+y-1=0$.

SEJAM
$r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,A)=d(P,B)\}$,
$s=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y-1=0\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1-x\}$



TEMOS:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(-1,-3)}$
SEJA: $\vec{v}=\overrightarrow{(3,-1)}\perp\overrightarrow{AB}$
ENTÃO: $\{M+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}=r$
$=\{(2.5,0.5)+t\overrightarrow{(3,-1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(2.5,0.5)+t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(2.5,0.5)-2.5\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})}+t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(0,\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\frac{1}{3})+t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(0,\frac{3}{6}+\frac{5}{6})+t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(0,\frac{4}{3})+t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$=\{(t,\frac{4-t}{3}) \mid t\in\mathbb{R}\}=\{(x,\frac{4-x}{3}) \mid x\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\frac{4}{3}-\frac{x}{3}\}$

SE $y=1-x$
E $y=\frac{4}{3}-\frac{x}{3}$
ENTÃO $1-x=\frac{4}{3}-\frac{x}{3}$
$-x+\frac{x}{3}=\frac{4}{3}-1$
$-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$
$x=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$
$y=1-x=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$
O CENTRO DO CÍRCULO É
$C_0=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$
E O RAIO DO CÍRCULO É
$R=d(C_0,A)=\|\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)-(3,2$
$=\|\overrightarrow{\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)}\|$
$=\frac{1}{2}\sqrt{50}$
E A EQUAÇÃO DO CÍRCULO É:
$\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right.$

3) DETERMINE A[S] EQUAÇÕES DA[S]
RETAS QUE
PELO PONTO
E FORMAM
DE $\pi/4$
$2x-3y$

SEJAM
$r=$
$\vec{v}=$
$\vec{w}=$
AS

$P,A)=d(P,B)\}$,

$x+y-1=0\}$

$y=1-x\}$

Se $y = 1 - x$

e $y = \frac{4}{3} - \frac{x}{3}$

Então $1 - x = \frac{4}{3} - \frac{x}{3}$

$-x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3} - 1$

$-\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$y = 1 - x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

O centro do círculo é

$C_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

e o raio do círculo é $R = d(C_0, A) = \left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - (3,2)\right\|$

$= \left\|\overrightarrow{\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)}\right\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{50}$

e a equação do círculo é:

$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{50}\right)^2$

Temos:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,-3)}$

Seja: $\vec{v} = \overrightarrow{(3,-1)} \perp \overrightarrow{AB}$

Então: $\{M + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} = r$

$= \{(2.5, 0.5) + t\overrightarrow{(3,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2.5, 0.5) + t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2.5, 0.5) - 2.5\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} + t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0, \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\frac{1}{3}) + t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0, \frac{3}{6} + \frac{5}{6}) + t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0, \frac{4}{3}) + t\overrightarrow{(1,-\frac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(t, \frac{4-t}{3}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, \frac{4-x}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{4}{3} - \frac{x}{3}\}$

3) Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P = (2,-1)$ e formam um ângulo de $\pi/4$ com a reta $2x - 3y + 7 = 0$.

Sejam:

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 7 = 0\}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(2,-3)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(3,2)}$

As retas que formam 45° com esta reta têm vetor diretor $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{(5,-1)}$

ou $\vec{v} - \vec{w} = \overrightarrow{(-1,-5)}$

Sejam:

$s = \{P + t(\vec{v} + \vec{w}) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$s' = \{P + t(\vec{v} - \vec{w}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Então s e s' são duas retas que passam por P e formam 45° com a reta r.

(Falta obter as equações delas...)

GA 1º/OUT/2014 | A

HOJE: DISCUSSÃO DO GABARITO DA P1, E <u>TALVEZ</u> A GENTE COMECE COM $\mathbb{R}^3$...

4) Sejam

$A=(0,0)$,

$B=(1,0)$,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x-y+2=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+2\}$

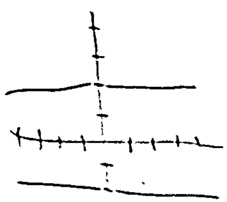
Encontre os pontos de r que formam com A e B um triângulo de área 1.

Seja $f(x,y)$ a área do triângulo formado por A, B e (x,y).

Então $f(x,y)=|y|/2$.

Seja $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \text{Área}(\Delta AB(x,y))=1\}$.

Então:



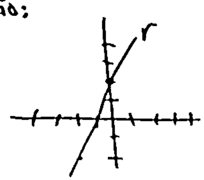
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2 \text{ ou } y=-2\}$

$C\in r$ e $\text{Área}(\Delta ABC)=1$ é equivalente a:

$C\in(r\cap D)$

Então:

$r=$

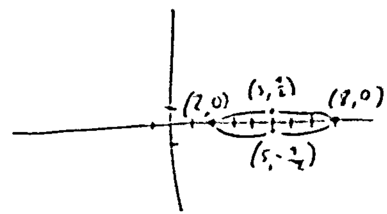


E $r\cap D=\{(0,2),(-2,-2)\}$

5) Seja

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-10x+36y^2+16=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2-10x+25)+(36y^2)+(16-25)=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2+(6y)^2=3^2\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\tfrac{x-5}{3}\right)^2+(2y)^2=1\}$$

Isto é uma elipse, com centro $x=5$ e $y=0$, e pontos mais óbvios:



(...)

GA 3/out/2014 A

Hoje:

Bem-vindos a $\mathbb{R}^3$! !!

Quase todas as proposições que vimos até agora podem ser "adaptadas" para $\mathbb{R}^3$... Algumas vão continuar verdadeiras, outras não.

As nossas definições também podem ser "adaptadas" para $\mathbb{R}^3$... Mais tarde vocês vão fazer isto pra $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \ldots$) - mas em outros cursos.

(x,y,z) é um ponto de $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{(x,y,z)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$

$(a,b,c)+\overrightarrow{(d,e,f)}=(a+d,b+e,c+f)$

$\overrightarrow{(a,b,c)}+\overrightarrow{(d,e,f)}=\overrightarrow{(a+d,b+e,c+f)}$

$(a,b,c)-(d,e,f)=\overrightarrow{(a-d,b-e,c-f)}$

$k\overrightarrow{(a,b,c)}=\overrightarrow{(ka,kb,kc)}$

$\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(d,e,f)}=ad+be+cf$

$\overrightarrow{AB}=B-A$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|$

Digamos que $A=(a,b,c)$, $A'=(a',b',c')$.

Porque é que esta definição para $d(A,A')$ coincide com a noção geométrica de distância?

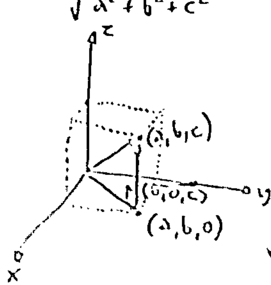
$d(A,A')=$

$\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}$

Vamos ver só o caso em que $A'=(0,0,0)$, e aí $d(A,A')=d(A,O)$

$O = (0,0,0)$,

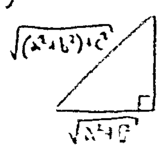
$d(A,O)=\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



$d(O,(a,b,0))=\sqrt{a^2+b^2}$

(por Pitágoras!)

E isto é um triângulo retângulo:



!!

(Obs: isto é uma "mostração", não uma "demonstração"... 🙂)

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

Se $A\in\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ vetor em $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}\neq\overrightarrow{(0,0,0)}$, então

$\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}^3\}$

é uma reta em $\mathbb{R}^3$ (parametrizada)...

O que é a equação de uma reta em $\mathbb{R}^3$?

Vamos voltar pra $\mathbb{R}^2$ um pouco.

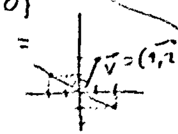
Sejam $\vec{v}=\overrightarrow{(1,2)}$,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\perp\overrightarrow{(1,2)}\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{x}{2}\}$ =

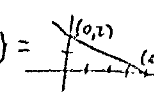


O vetor $\vec{v}$ é normal à reta r... ele também é normal às retas s_k,

$s_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=k\}$.

Ex:

$s_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=1\}$ =



Idéia: cada vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ não-nulo gera uma reta em $\mathbb{R}^2$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=0\}$,

ortogonal a $\vec{v}$ e passando pela origem; e um vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ e um $k\in\mathbb{R}$, podemos formar a reta

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$ ...

Vamos usar isto pra definir planos em $\mathbb{R}^3$ - só que antes da gente voltar pra $\mathbb{R}^2$, exercícios:

(a) Encontre o $\vec{v}$ e o k que geram a reta que passa pelos pontos $(3,0)$, $(0,1)$

(b) Idem, mas para $(\alpha,0)$, $(0,\beta)$

(c) O seu método serve para retas verticais? E horizontais?

(d) Resolva o (b) de novo, agora com $k=1$.

Hipó... $\vec{v}$ ... r ... o ... V ... e ...

IDÉIA: CADA VETOR $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ NÃO-NULO GERA UMA RETA EM $\mathbb{R}^2$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=0\}$,

ORTOGONAL A $\vec{v}$ E PASSANDO PELA ORIGEM;

E UM VETOR $\vec{v}$ EM $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ E UM $k\in\mathbb{R}$, PODEMOS FORMAR A RETA

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$ ...

VAMOS USAR ISTO PRA DEFINIR PLANOS EM $\mathbb{R}^3$ - SÓ QUE ANTES DA GENTE VOLTAR PRA $\mathbb{R}^2$, EXERCÍCIOS:

ⓐ ENCONTRE O $\vec{v}$ E O k QUE GERAM A RETA QUE PASSA PELOS PONTOS $(3,0)$, $(0,4)$

ⓑ IDEM, MAS PARA $(\alpha,0)$, $(0,\beta)$

ⓒ O SEU MÉTODO SERVE PARA RETAS VERTICAIS? E HORIZONTAIS?

ⓓ RESOLVA O (b) DE NOVO, AGORA COM $k=1$.

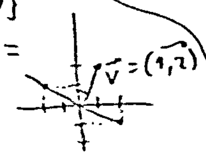
$\mathbb{R}^2$

$y) \perp \overrightarrow{(1,2)}\}$

$,y)\cdot\overrightarrow{(1,2)}=0\}$

$+2y=0\}$

$=-\frac{x}{2}\}$ =



VETOR $\vec{v}$ É NORMAL

RETA r... ELE TAMBÉM

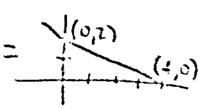
NORMAL ÀS RETAS s_k,

$s_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=k\}$

Ex:

UMA ...

$s_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=4\}$ =



HIPÓTESE:

$\vec{v}=\overrightarrow{(4,3)}$, $k=0$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(4,3)}=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x+3y=0\}$.

$(3,0)\in r$? NÃO.

OUTRA HIPÓTESE:

$\vec{v}=\overrightarrow{(-3,4)}$, $k=0$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -3x+4y=0\}$.

$(3,0)\in r$? NÃO.

VAMOS DIRETO PARA O EXERCÍCIO ⓑ!

HIPÓTESE:

$\vec{v}=(-\alpha,\beta)$, $k=-1$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\alpha x+\beta y=-1\}$

$(\alpha,0)\in r$? NÃO

$(0,\beta)\in r$? NÃO

OUTRA HIPÓTESE:

$\vec{v}=(\beta,\alpha)$, $k=\alpha\beta$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \beta x+\alpha y=\alpha\beta\}$

$(\alpha,0)\in r$? SIM

$(0,\beta)\in r$? SIM

O ⓒ FICOU PRA CASA.

ⓓ DICA:

REPARE QUE A RETA GERADA POR $\vec{v}=(10\beta,10\alpha)$

E $k=10\alpha\beta$

TAMBÉM PASSA PELOS PONTOS $(\alpha,0)$ E $(0,\beta)$...

$(\alpha,0)\in r$?

$(\alpha,0)\overset{?}{\in}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 10\beta x+10\alpha y=10\alpha\beta\}$

SIM!

$(0,\beta)\in r$? SIM

PRA RESOLVER O ⓓ QUEREMOS TROCAR O "10" POR ALGO, PRA $k=1$...

HIPÓTESE:

$\vec{v}=(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})$, $k=1$,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=1\}$

$(\alpha,0)\in r$? SIM

$(0,\beta)\in r$? SIM

GA 3/OUT/2014 $\boxed{A}$

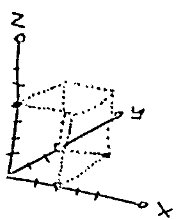
Os planos de $\mathbb{R}^3$ que são mais fáceis de desenhar são os que cortam o eixo x exatamente num ponto — digamos $(\alpha,0,0)$ —, o eixo y exatamente num ponto, $(0,\beta,0)$, e o eixo z exatamente num ponto, $(0,0,\gamma)$.

Sejam $\vec{v}=(a,b,c)$, $k\in\mathbb{R}$,

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\vec{v}=k\}.$$

(e) Encontre a,b,c,k para os quais tenhamos
$(\alpha,0,0)\in\Pi$,
$(0,\beta,0)\in\Pi$,
$(0,0,\gamma)\in\Pi$.

(f) Idem, mas para que tenhamos
$(2,0,0)\in\Pi$,
$(0,3,0)\in\Pi$,
$(0,0,4)\in\Pi$.



(d) Hip:

$\vec{V}=(\frac{\alpha}{x},0,0)$, $k=$

$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\vec{V}=k\}$

$a=\frac{\alpha}{x}$, $b=c=0$, $k=\alpha$

Será que podemos usar esta fórmula pra resolver o f?

$\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$, $k=2$

$\vec{V}=(\frac{2}{x},0,0)$

Repare que deveríamos ter

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\overrightarrow{(\tfrac{2}{x},0,0)}=2\}$$
$$\overset{?}{=}\{(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x',y',z')}\cdot(\tfrac{2}{x},0,0)=2\}$$

Não vale!!

Pra casa: pensem nisto e resolvam o d (direito).

Seja $\Pi'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y+3z=6\}$.

Então $\Pi'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x=6-2y-3z\}$,

$\Pi'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid 2y=6-x-3z\}$
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}z\}$

$\Pi'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid 3z=6-x-2y\}$
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y\}$

Ou seja, dá pra fazer com que
x seja função de y e z,
y seja função de x e z,
z seja função de x e y,
e dá pra parametrizar o plano Π de vários jeitos — por exemplo,

$$\Pi'=\{(x,y,2-\tfrac{x}{3}-\tfrac{2}{3}y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

Na próxima aula:
- mais sobre parametrizações,
- interseções,
- retas, etc.

$\boxed{3/\text{out}/2017 \ \text{GA}}\ \boxed{B}$

(Bem vindos a) $\mathbb{R}^3$

Quase todos os conceitos, operações, etc que vimos até agora podem ser adaptados pra $\mathbb{R}^3$...

Em outras matérias vocês vão adaptar as mesmas idéias pra $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5, \ldots, \mathbb{R}^n$...

(x,y,z) é um ponto de $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{(x,y,z)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$

$(a,b,c)+\overrightarrow{(a',b',c')} = (a+a',b+b',c+c')$

$\overrightarrow{(a,b,c)}+\overrightarrow{(a',b',c')} = \overrightarrow{(a+a',b+b',c+c')}$

$(a,b,c)-(a',b',c') = \overrightarrow{(a-a',b-b',c-c')}$

$k\overrightarrow{(a,b,c)} = \overrightarrow{(ka,kb,kc)}$

$\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(a',b',c')} = aa'+bb'+cc'$

$\overrightarrow{AB} = B-A$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{v}\perp\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=0$, etc.

Vamos voltar pra $\mathbb{R}^2$ um pouco.

Dado um vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ não-nulo qualquer,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=0\}$

é uma reta passando pela origem, e o $\vec{v}$ vai ser um vetor normal a ela...

E se além disso $k\in\mathbb{R}$, então $\vec{v}$ e k geram esta reta

$S_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$

e o $\vec{v}$ é um vetor normal a esta reta (para qualquer k).

Exercício:

Seja $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$.

Representa graficamente r, S_0, S_2, S_4.

Dica: onde S_2 corta o eixo x? e o eixo y?

E S_4 corta os eixos em que pontos?

$S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,1)}=2\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+y=2\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2-2x\}$

$(1,0)\in S_2$

$(0,2)\in S_2$

Agora vamos fazer o inverso.

(a) Sejam $A=(3,0)$ e $B=(0,4)$.

Encontre um $\vec{v}$ e um k tais que A e B pertençam a

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$

(b) Sejam $A=(\alpha,0)$, $B=(0,\beta)$.

Encontre um $\vec{v}$ e um k tais que A e B pertençam a

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v}=k\}$.

Hipótese:

$\vec{v}=\overrightarrow{(-\beta,-\alpha)}$, $k=-x\beta-y\alpha$

Vamos testar esta hipótese no caso $A=(3,0)$, $\alpha=3$, $B=(0,4)$, $\beta=4$.

Vamos ter

$\vec{v}=\overrightarrow{(-4,-3)}$, $k=-4x-3y$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-4,-3)}=-4x-3y\}=\mathbb{R}^2$

$r=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x',y')}\cdot\overrightarrow{(-4,-3)}=-4x-3y\}=$ erro

Cuidado!!!

Hipótese:

$\vec{v}=\overrightarrow{(-\beta,-\alpha)}$, $k=-\alpha\beta$,

e aí

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot(-$

e

$(\alpha,0)\in r$,

$(0,\beta)\in r$. OK!

Repare que

$\vec{v}=\overrightarrow{(10\beta,10\alpha)}$, $k=$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y$

também daria cert

$(\alpha,0)\in r$,

$(0,\beta)\in r$.

(c) Encontre um $\vec{v}$

tal que $A=(\alpha$

e $B=(0$

pertençam a

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ($

Hipó

$\vec{v}=$

$r=$

$(\alpha,$

$(0,$

Outr

$\vec{v}$

$r=$

AGORA VAMOS FAZER O INVERSO.

SEJAM $A=(3,0)$ E $B=(0,4)$.

ENCONTRE UM $\vec{V}$ E UM K TAIS QUE A E B PERTENÇAM A

$$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{V}=K\}$$

(b) SEJAM $A=(\alpha,0)$, $B=(0,\beta)$.

ENCONTRE UM $\vec{V}$ E UM K TAIS QUE A E B PERTENÇAM A

$$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{V}=K\}.$$

HIPÓTESE:

$\vec{V}=\overrightarrow{(-\beta,-\alpha)}$, $K=-x\beta-y\alpha$

VAMOS TESTAR ESTA HIPÓTESE NO CASO $A=(3,0)$, $\alpha=3$, $B=(0,4)$, $\beta=4$.

VAMOS TER

$\vec{V}=\overrightarrow{(-4,-3)}$, $K=-4x-3y$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-4,-3)}=-4x-3y\}=\mathbb{R}^2$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-4,-3)}=-4x-3y\}=$ ERRO

$r=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x',y')}\cdot\overrightarrow{(-4,-3)}=-4x-3y\}$

CUIDADO!!!

HIPÓTESE:

$\vec{V}=\overrightarrow{(-\beta,-\alpha)}$, $K=-\alpha\beta$,

E AÍ

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-\beta,-\alpha)}=-\alpha\beta\}$

E

$(\alpha,0)\in r$,

$(0,\beta)\in r$. OK!

REPARE QUE

$\vec{V}=\overrightarrow{(10\beta,10\alpha)}$, $K=10\alpha\beta$,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(10\beta,10\alpha)}=10\alpha\beta\}$

TAMBÉM DARIA CERTO:

$(\alpha,0)\in r$,

$(0,\beta)\in r$.

(c) ENCONTRE UM $\vec{V}$ EM $\mathbb{R}^2$ TAL QUE $A=(\alpha,0)$ E $B=(0,\beta)$ PERTENÇAM A

$$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{V}=1\}.$$

HIPÓTESE:

$\vec{V}=\overrightarrow{(-\beta,\frac{1}{\beta})}$,

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-\beta,\frac{1}{\beta})}=1\}$,

$(\alpha,0)\in r$? NÃO.

$(0,\beta)\in r$? SIM

OUTRA HIPÓTESE:

$\vec{V}=\overrightarrow{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})}$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})}=1\}$

PLANOS EM $\mathbb{R}^3$

VAMOS COMEÇAR COM OS PLANOS QUE CORTAM CADA UM DOS EIXOS EM EXATAMENTE UM PONTO, PORQUE ELES SÃO MAIS FÁCEIS DE DESENHAR E PORQUE É MAIS FÁCIL ENTENDER A EQUAÇÃO DELES.

EXERCÍCIO:

(d) ENCONTRE $a,b,c\in\mathbb{R}$ QUE FAÇAM COM QUE O PLANO

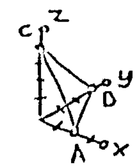
$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\overrightarrow{(a,b,c)}=1\}$$

CONTENHA OS PONTOS

$A=(2,0,0)$,

$B=(0,3,0)$,

$C=(0,0,4)$.



RESP: $\overrightarrow{(a,b,c)}=\overrightarrow{(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})}$.

REPARE QUE

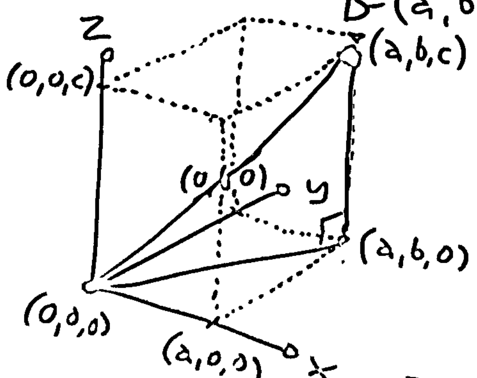
$$\begin{aligned}
\Pi&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\overrightarrow{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4})}=1\}\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x}{2}+\tfrac{y}{3}+\tfrac{z}{4}=1\}\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{2}z=1\}\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1-\tfrac{2}{3}y-\tfrac{1}{2}z\}\\
&=\{(1-\tfrac{2}{3}y-\tfrac{1}{2}z,\,y,\,z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \tfrac{z}{4}=1-\tfrac{x}{2}-\tfrac{y}{3}\}\\
&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=4-2x-\tfrac{4}{3}y\}\\
&=\{(x,y,4-2x-\tfrac{4}{3}y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}
\end{aligned}$$

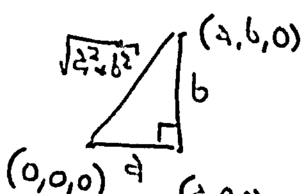
3/out/2014 GA | B

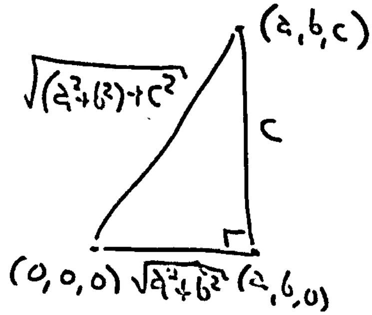
A gente viu uma def. <u>formal</u> de distância em $\mathbb{R}^3$: $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$$= \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \ldots$$

Em $\mathbb{R}^2$ sabemos que isto funciona por Pitágoras...
Em $\mathbb{R}^3$ a gente vai ter que usar "Pitágoras em $\mathbb{R}^2$" duas vezes.
Digamos que $A=(0,0,0)$,
$B=(a,b,c)$.





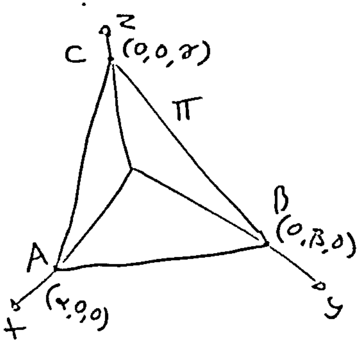


8/out/2014 GA | A

Hoje: planos e retas em $\mathbb{R}^3$; interseções

Na última aula a gente viu vários jeitos de definir planos (e retas) formalmente...

Aviso: vocês vão ter que treinar bastante converter entre estes vários jeitos!



- Dois pontos (diferentes) determinam uma reta,
- Três pontos determinam um plano
- Tem alguns jeitos de gerar retas e planos usando pontos e vetores.

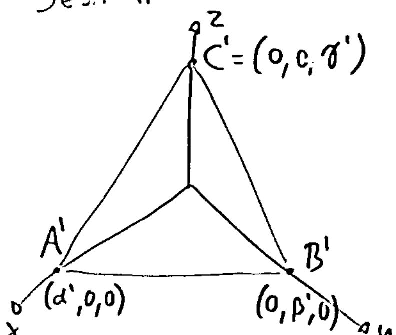
O plano π do desenho (com α, β, γ > 0) é fácil de representar usando só estes 3 quartos de plano:

$\{(x,y,0) \mid x \in [0,\infty), y \in [0,\infty)\}$,
$\{(x,0,z) \mid x \in [0,\infty), z \in [0,\infty)\}$,
$\{(0,y,z) \mid y \in [0,\infty), z \in [0,\infty)\}$

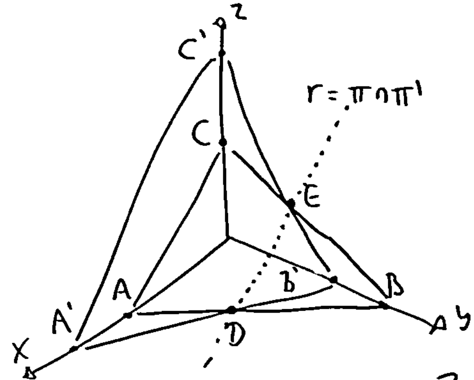
O plano π pode ser expresso formalmente como:

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y\}$$
$$= \{A + t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} \mid t,u \in \mathbb{R}\}$$

Seja π' este plano:



Como calcular $\pi \cap \pi'$?



Como encontrar D e E?

Se π e π' estão dados nesta forma, encontrar r é fácil...

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y\}$$
$$\pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y\}$$

Vamos fazer o seguinte:

$$r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = ax+b,\ z = cx+d\}$$

Se $(x,y,z) \in \pi \cap \pi'$, então

$$\cancel{1} - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y = \cancel{1} - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y$$
$$\frac{\gamma}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\beta}y = \frac{\gamma'}{\alpha'}x + \frac{\gamma'}{\beta'}y$$
$$\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\alpha'}\right)x = \left(\frac{\gamma'}{\beta'} - \frac{\gamma}{\beta}\right)y$$

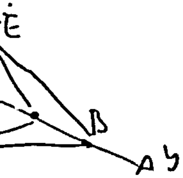
Exercício (pra agora e continuar

② Sejam A

E~C
96
⑥

π'?

$r = \pi \cap \pi'$



AR D e E?

ÃO DADOS

ENCONTRAR

$\mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y\}$

$\mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y\}$

SEGUINTE:

$\mathbb{R}^3 \mid y = ax + b,\ z = cx + d\}$

$\cap\pi'$, ENTÃO

$= \cancel{1} - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y$

$= \frac{\gamma'}{\alpha'}x + \frac{\gamma'}{\beta'}y$

$\frac{\gamma'}{\beta'} - \frac{\gamma}{\beta})y$

EXERCÍCIO (PRA AGORA E PRA CONTINUAR EM CASA):

(a) SEJAM $A=(4,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,4)$, $A'=(3,0,0)$, $B'=(0,3,0)$, $C'=(0,0,3)$.

ENCONTRE A INTERSEÇÃO DE π E π'.

(b) GENERALIZE ($A=(\alpha,0,0)$, $B=(0,\beta,0)$, ETC)

TRUQUE (EM $\mathbb{R}^2$, GENERALIZÁVEL PRA $\mathbb{R}^3$).

$$
\begin{aligned}
r &= \{(2,3) + t\overrightarrow{(4,5)} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(2,3) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(2,3) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} - 2\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(0,\tfrac{1}{2}) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(t, \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}x\}
\end{aligned}
$$

DÁ PRA FAZER ISTO BEM MAIS RÁPIDO!

$$
\begin{aligned}
r &= \{(2,3) + t\overrightarrow{(4,5)} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(2,3) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} - 2\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(t, \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}x\}
\end{aligned}
$$

DÁ PRA OMITIR ESTE PASSO TAMBÉM!

PROP:

$$2x^2 - x = 2x \quad \text{(FALSO)}$$

$$2x^2 - x = x^3 \quad \text{(FALSO)}$$

$$2x^2 - x = x(2x-1)$$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

$$(1+x+y)(2-x+y^2)$$

$$(1+\sqrt{x}+x+2x\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -x & y^2 \\ \hline 1 & 2 & -x & y^2 \\ x & 2x & -x^2 & xy^2 \\ y & 2y & -xy & y^3 \end{array}$$

y^3

$y^2 + xy^2$

$2y - xy$

$2 + x - x^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y^3	1	0	0
y^2	1	1	0
y^1	2	-1	0
y^0	2	1	-1
	x^0	x^1	x^2

GA 8/out/2014 B

Hoje: Planos, Retas e interseções em $\mathbb{R}^3$; conversões entre modos formais de expressar planos, retas, etc.

Em $\mathbb{R}^2$,

$$r = \{(2,3)+t\overrightarrow{(4,5)} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(2,3)+t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(2,3)+t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} - 2\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(0,\tfrac{1}{2})+t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(t,\tfrac{5}{4}t+\tfrac{1}{2}) \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,\tfrac{5}{4}x+\tfrac{1}{2}) \mid x\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\tfrac{5}{4}x+\tfrac{1}{2}\}$$

Mais rápido:

$$r = \{(2,3)+t\overrightarrow{(4,5)} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(2,3)+t\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} - 2\overrightarrow{(1,\tfrac{5}{4})} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(t,\tfrac{5}{4}t+\tfrac{1}{2}) \mid t\in\mathbb{R}\} \quad \Leftarrow \text{dá pra pular este passo também...}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\tfrac{5}{4}x+\tfrac{1}{2}\}$$

Voltando pra $\mathbb{R}^3$...

A gente gosta desta região dele,

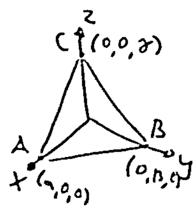
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\geq 0\}$$

e destes quartos de plano:

$$\{(x,y,0) \mid x\in[0,\infty),\ y\in[0,\infty)\}$$
$$\{(x,0,z) \mid x,z\in[0,\infty)\}$$
$$\{(0,y,z) \mid y,z\in[0,\infty)\}$$

Seja π o plano que passa pelos pontos

$A=(\alpha,0,0)$,
$B=(0,\beta,0)$,
$C=(0,0,\gamma)$
$(\alpha,\beta,\gamma>0)$.



Então:

$$\pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x}{\alpha}+\tfrac{y}{\beta}+\tfrac{z}{\gamma}=1\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \tfrac{z}{\gamma}=1-\tfrac{x}{\alpha}-\tfrac{y}{\beta}\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\gamma-\tfrac{\gamma}{\alpha}x-\tfrac{\gamma}{\beta}y\}$$

...e seja π' o plano que passa pelos pontos

$A'=(\alpha',0,0)$,
$B'=(0,\beta',0)$,
$C'=(0,0,\gamma')$,

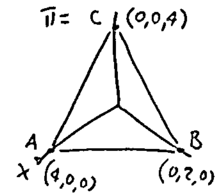
$$\pi' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\gamma'-\tfrac{\gamma'}{\alpha'}x-\tfrac{\gamma'}{\beta'}y\}$$

Exercício:

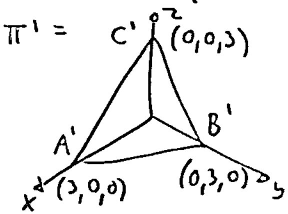
(a) Seja $r=\pi\cap\pi'$; encontre a,b,c,d.
$$r=\{(x,ax+b,cx+d) \mid x\in\mathbb{R}\}.$$

(b) Teste a sua fórmula com

$\pi =$



$\pi' =$



Dicas (pro (b)):
- Encontre dois pontos de $r=\pi\cap\pi'$
- Expresse essa reta na forma parametrizada
- Converta pra forma pedida no item a.

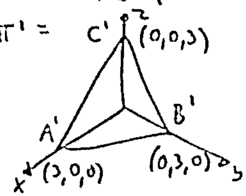
o PLANO
...os PONTOS
),
0),
$\gamma')$,
$) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \gamma' - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y\}$

:

$\pi \cap \pi'$.
a, b, c, d.
$b, cx+d) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

...A FÓRMULA COM

$\pi' =$



(PRO (b)):
...NE DOIS PONTOS DE $r = \pi \cap \pi'$
...E ESSA RETA NA FORMA
...TRIZADA
...A PRA FORMA PEDIDA NO ITEM a.

Se $z = z$, então:

$$\gamma' - \frac{\gamma'}{\alpha'}x - \frac{\gamma'}{\beta'}y = \gamma - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y$$

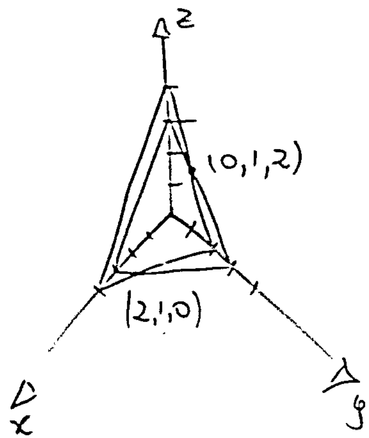
$$-\frac{\gamma'}{\beta'}y + \frac{\gamma}{\beta}y = \gamma - \gamma' - \frac{\gamma}{\alpha}x + \frac{\gamma'}{\alpha'}x$$

$$\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'}\right)y = (\gamma - \gamma') + \left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)x$$

Seja $\delta = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'}$

$$y = \underbrace{\frac{\gamma - \gamma'}{\delta}}_{a} + \underbrace{\frac{\frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\gamma}{\alpha}}{\delta}}_{b} x$$

SEJAM



Reta r parametrizada:

$r = \{(2,1,0) + t(\overrightarrow{-2,0,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(2,1,0) + t(\overrightarrow{1,0,-1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(0,1,+2) + t(\overrightarrow{1,0,-1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(t, 1, +2-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Daí, se
$r = \{(x, ax+b, cx+d) \mid x \in \mathbb{R}\}$
então
$a = 0$
$b = 1$
$c = -1$
$d = 2$

GA 10/out/2014 A

...Eu fiz um erro de conta na aula passada!

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1\}$$

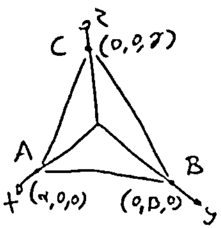
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{z}{\gamma} = 1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\}$$

$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = \gamma - \frac{\gamma}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\beta}y\}$$

Em alguns lugares eu escrevi "1" ao invés de "γ" aqui.

Hoje: Produto interno, ângulos e projeções em $\mathbb{R}^3$!

Sejam π o plano acima, $r = \{D + t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$, $P \in \mathbb{R}^3$, e A, B, C estes pontos:



ⓐ Qual é o ponto de r mais próximo de P?

ⓑ Qual é o ponto de π mais próximo de P?

ⓒ Qual é o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$?

ⓓ Qual é o ângulo entre r e π?

O produto interno em $\mathbb{R}^3$ é o "óbvio",

$$(a,b,c)\cdot(a',b',c') = aa'+bb'+cc',$$

A noção de ortogonalidade também, e a de ângulo também.

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \quad (\text{Em } \mathbb{R}^3 \text{ também!})$$

Se $\theta = \text{ang}(\vec{v},\vec{w})$ então

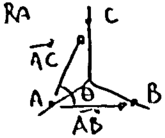
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \cos\theta \, ||\vec{v}||\,||\vec{w}||,$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||},$$

$$\cos \text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||},$$

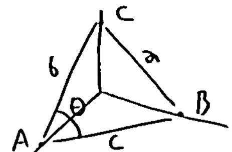
$$\text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}.$$

Reparem que a figura

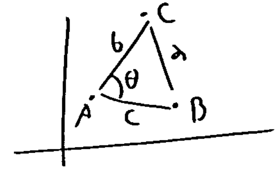


é um bom ponto de partida pra começar a entender ângulos em $\mathbb{R}^3$...

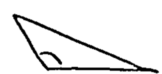
Pegue o triângulo



e desenhe um triângulo com lados a, b, c em $\mathbb{R}^2$!



...Mas repare que isto não funciona pra triângulos com um ângulo obtuso, p. ex:



Com isto a gente sabe entender ângulos retos e ortogonalidade em $\mathbb{R}^3$...

ⓐ Qual é o ponto de $r = \{D + t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ mais próximo de P?

Como é que a gente resolveria este ⓐ se estivéssemos em $\mathbb{R}^2$?

Seja Q o ponto de r mais próximo de P.

Vamos usar estes dois casos para testes:

(I) $D=(0,-2)$, $\vec{v}=(1,2)$, $P=(1,1)$,

(II) $D=(0,-2)$, $\vec{v}=(1,2)$, $P=(-2,4)$.

Como
hipót
como
V/F

(F)

(V

1.

O

(A
e

Com isto a gente sabe entender ângulos retos e ortogonalidade em $\mathbb{R}^3$...

ⓐ Qual é o ponto de $r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ mais próximo de P?

Como é que a gente resolveria este ⓐ se estivéssemos em $\mathbb{R}^2$?

Seja Q o ponto de r mais próximo de P.

Vamos usar estes dois casos para testes:

(I) $D = (0,-2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$, $P = (1,1)$,

(II) $D = (0,-2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$, $P = (-2,4)$.

Como escrever as hipóteses de vocês como questões de V/F/justifique:

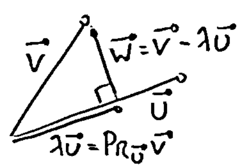
(F) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{DP}$. Então $Q = D + 99\vec{v}$.

(V) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{DP}$. Então $Q = D + Pr_{\vec{v}}\vec{u}$.

$\Uparrow$

Isto é verdade pros dois casos-teste, (I) e (II)... como é que a gente vê que ela é verdade pro caso geral?

Lembre que a gente definiu $Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ pra que nesta figura



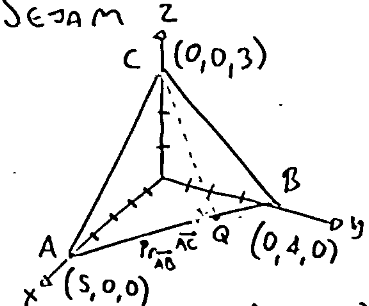
tenhamos $\vec{w} \perp \vec{u}$...

Ou seja, $\vec{v} - Pr_{\vec{u}}\vec{v} \perp \vec{u}$.

(A gente fez as contas antes, e viu que $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$)

Exercício (em $\mathbb{R}^3$)!

Sejam



e $r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Seja Q o ponto de r mais próximo de C. Encontre Q.

(F) $Q = (5,4,0)$

(V) $Q = A + Pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$

$\Uparrow$

Porquê?

$A = (5,0,0)$
$B = (0,4,0)$
$C = (0,0,3)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-5,4,0)}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-5,0,3)}$

$Pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AB} = \frac{25}{41}\overrightarrow{(-5,4,0)}$

$Q = A + Pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} =$

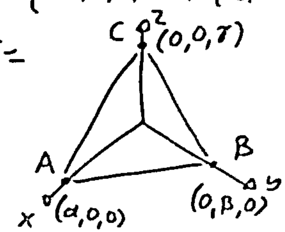
...ar ...ulos ...ulo B ...m triângulo ...a,b,c em $\mathbb{R}^2$! C a B ...e que ...ona pra ...m um ângulo ...:

$\boxed{\text{GA 10/out/2014}}\ \boxed{B}$

Sejam π este plano:

$$\pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \right\}$$

$\pi =$



Seja r esta reta em $\mathbb{R}^3$:

$$r = \{ D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

e seja P um ponto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Qual é o ponto de r mais próximo do ponto P?

(b) Qual é o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$?

(c) Qual é o ponto de π mais próximo do ponto P?

(d) Qual é o ângulo entre π e r?

Vamos começar transferindo pra $\mathbb{R}^3$ as nossas defs formais (fórmulas, contas) de produto interno, ortogonalidade, ângulo, projeção... Depois vamos ver que estas coisas têm as propriedades certas.

- $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(a',b',c')} = aa' + bb' + cc'$
- $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ (em $\mathbb{R}^3$ também!)
- $\text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = ?$

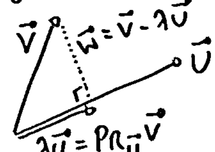
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \cos\theta \, \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| = \cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w})) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

$$\cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w})) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

$$\text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$$

Em $\mathbb{R}^2$,

$\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{v} = \lambda \vec{u}$ se e só se



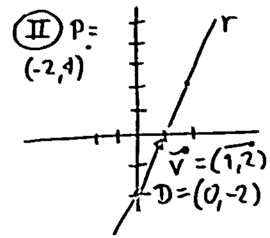
$\vec{u} \perp \vec{w}$ na figura acima...

(Lembre que a gente fez essa conta, e deduziu que λ tem que ser $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$)

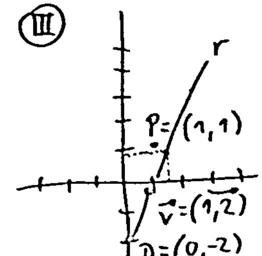
Vamos tentar resolver o (a).

Idéia: comece em $\mathbb{R}^2$, com três casos, um caso geral ("I") e dois casos de teste:

(II) $P = (-2,1)$



(III)



$\boxed{\text{Seja } Q \text{ o ponto de } r \text{ mais próximo de } P.}$

(e) Encontre Q no olhômetro no caso II.

(f) Encontre Q no caso III.

(g) Encontre uma fórmula geral (e teste-a).

Lembre qu

pode escr

pra fórm

questõe

(F) $Q =$

(F) $Q =$

(V) Sej

⇧

Obs: A

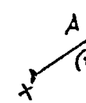
demonstr

só test

Vamos vo

mas com

fáceis t



Seja

por A

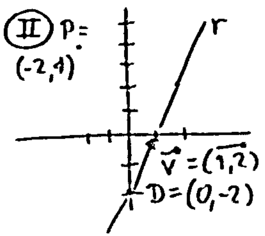
Seja

mais pr

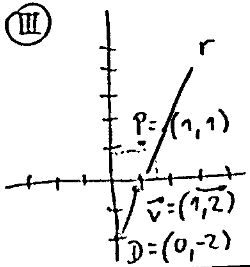
VAMOS TENTAR RESOLVER O (d).

IDÉIA: COMECE EM $\mathbb{R}^2$, COM TRÊS CASOS, UM CASO GERAL ("(I)") E DOIS CASOS DE TESTE:

(II) P = (-2,1)



(III)



$\boxed{\text{SEJA Q O PONTO DE } r \text{ MAIS PRÓXIMO DE P.}}$

(e) ENCONTRE Q NO OLHÔMETRO NO CASO II.

(f) ENCONTRE Q NO CASO III.

(g) ENCONTRE UMA FÓRMULA GERAL (E TESTE-A).

LEMBRE QUE A GENTE PODE ESCREVER HIPÓTESES PRA FÓRMULA COMO QUESTÕES DE V/F/JUSTIFIQUE!

(F) $Q = P + \vec{v}$

(F) $Q = D + 2\vec{v}$

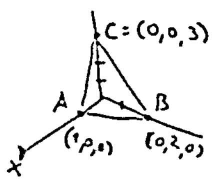
(V) SEJA $\vec{u} = \overrightarrow{DP}$. ENTÃO $Q = D + Pr_{\vec{v}}\,\vec{u}$. (!)

⇧

OBS: A GENTE AINDA NÃO DEMONSTROU ISTO NO CASO GERAL — SÓ TESTAMOS NOS CASOS II E III...

VAMOS VOLTAR PRO PROBLEMA (d), MAS COMEÇANDO COM EXEMPLOS FÁCEIS DE TESTAR.

(IV)



SEJA r A RETA QUE PASSA POR A E B.
SEJA Q O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE C.

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$,
Seja $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
Seja Q o ponto de r mais próximo de C.

Hipótese

( ) $Q = A + Pr_{\vec{v}}\,\vec{u}$

Teste em (IV):

$$Pr_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\overrightarrow{(-1,2,0)} \cdot \overrightarrow{(-1,0,3)}}{\overrightarrow{(-1,2,0)} \cdot \overrightarrow{(-1,2,0)}}\,\overrightarrow{(-1,2,0)}$$

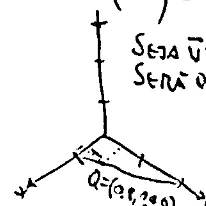
$$= \frac{1}{5}\,\overrightarrow{(-1,2,0)}$$

$$= \overrightarrow{(-0.2,0.4,0)}$$

Daí:

$$Q = (1,0,0) + \overrightarrow{(-0.2,0.4,0)}$$

$$= (0.8,0.4,0)$$



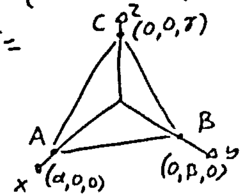
SEJA $\vec{w} = \overrightarrow{QC}$.
SERÁ QUE $\overrightarrow{AB} \perp \vec{w}$?

$\boxed{\text{GA } 10/\text{out}/2014 \ \boxed{B}}$

Sejam π este plano:

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$$

$\pi =$



Seja r esta reta em $\mathbb{R}^3$:

$$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e seja P um ponto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Qual é o ponto de r mais próximo do ponto P?

(b) Qual é o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$?

(c) Qual é o ponto de π mais próximo do ponto P?

(d) Qual é o ângulo entre π e r?

Vamos $\underbrace{\text{transferindo}}_{\text{começar}}$ pra $\mathbb{R}^3$ as nossas defs formais (fórmulas, contas) de produto interno, ortogonalidade, ângulo, projeção... Depois vamos ver que estas coisas têm as propriedades certas.

Sendo:

$$\vec{w} = (0,0,3) - (0.8, 0.4, 0) = \overrightarrow{(-0.8,-0.4,3)}$$

Então:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \overrightarrow{(-1,2,0)}\cdot(-0.8,-0.4,3) = 0.8 - 0.8 + (3\cdot 0) = 0$$

Ou seja: $\vec{v} \perp \vec{w}$ é uma verdade nesse caso

Vamos tentar resolver o (c)...

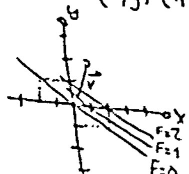
Vamos antes disso tentar encontrar um vetor $\vec{w}$ normal ao plano π...

Ou seja, $\vec{w} \neq \vec{0}$,
$\vec{w} \perp \overrightarrow{AB}$,
$\vec{w} \perp \overrightarrow{AC}$.

Idéia (em $\mathbb{R}^2$):

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$

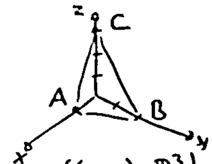
$F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}$.



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\vec{v} = 1\}$ é a curva de nível $[F(x,y)=1]$.

As curvas de nível de F são ortogonais a $\vec{v}$.
F cresce mais rápido na direção de $\vec{v}$.

Idéia - tradução da idéia anterior para $\mathbb{R}^3$...



$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot\overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})} = 1\}$$

Será que $\vec{w} = \overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})}$ é um vetor normal ao plano π?

Será que $\vec{w} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} \perp \overrightarrow{AC}$?

$\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})}\cdot\overrightarrow{(-1,2,0)} = 0,$

$\vec{w}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})}\cdot\overrightarrow{(-1,0,3)} = 0$

$\vec{w}\cdot(t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}) =$
$\vec{w}\cdot(t\overrightarrow{AB}) + \vec{w}(u\overrightarrow{AC}) =$
$t(\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB}) + u(\vec{w}\cdot\overrightarrow{AC}) =$
$t\cdot 0 + u\cdot 0 = 0.$

Seja

$$S = \{P + t\underset{\overrightarrow{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})}}{\underset{\shortparallel}{\vec{w}}} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Então $S \perp \pi$,
e $Q \in S\cap\pi$ é o ponto de π mais próximo de P!

Exemplo:

$P = (4,5,6)$,

$S = \{(4,5,6) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})} \mid t \in \mathbb{R}\}$

e pra encontrar $Q \in \pi\cap S$ precisamos encontrar o t certo...

Se $Q = (4,5,6) + t\overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})}$
$= (4+t, 5+\tfrac{1}{2}t, 6+\tfrac{1}{3}t)$

e $Q \in \pi$, então

$$\frac{4+t}{1} + \frac{5+\frac{1}{2}t}{2} + \frac{6+\frac{1}{3}t}{3} = 1$$

É só fazer as contas.

GA 22/out/2014 | A

VAMOS RETOMAR O QUE A GENTE VIU NA ÚLTIMA AULA ANTES DA SEMANA ACADÊMICA, NA QUAL VEIO POUCA GENTE... 10 OUT?

SEJAM $P \in \mathbb{R}^3$,

$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

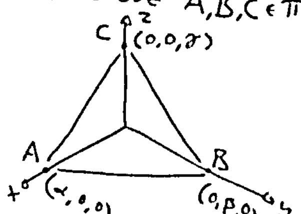
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$,

$A = (\alpha, 0, 0)$,

$B = (0, \beta, 0)$,

$C = (0, 0, \gamma)$;

REPARE QUE $A, B, C \in \pi$.



(LEMBREM QUE COSTUMA SER MAIS FÁCIL VISUALIZAR PLANOS DESTA FORMA...)

VAMOS TENTAR ADAPTAR VÁRIAS IDÉIAS DE $\mathbb{R}^2$ PARA $\mathbb{R}^3$...

UMA RETA $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ TEM UM VETOR DIRETOR ÓBVIO, $\vec{v}$, MAS QUALQUER VETOR $\lambda\vec{v}$ (COM $\lambda \neq 0$) TAMBÉM É UM VETOR DIRETOR DELA...

EM $\mathbb{R}^2$ CADA RETA TEM UM VETOR NORMAL!

SE $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$

ENTÃO $\vec{w} = \overrightarrow{(v_2, -v_1)} \perp \vec{v}$

E $\vec{w}$ É UM VETOR NORMAL À RETA r - ALIÁS QUALQUER $\lambda\vec{w}$ COM $\lambda \neq 0$ É UM VETOR NORMAL A r.

VOLTANDO A

$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$...

ESTA RETA TEM VETORES "NORMAIS" A ELA EM VÁRIAS DIREÇÕES!

MAS O PLANO π TEM UM VETOR NORMAL A ELE "NATURAL", $\overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}$ (PORQUÊ???) E TODOS OS OUTROS VETORES ORTOGONAIS A π VÃO SER MÚLTIPLOS DESTE...

O QUE ESTÁ IMPLÍCITO ACIMA É QUE SE $P, P' \in \pi$ - ENTÃO $\overrightarrow{PP'}$ VAI SER PARALELO AO PLANO π - E $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}$

EXERCÍCIO: VERIFIQUEM ISTO QUANDO P, P' SÃO A, B, C.

1º CASO:

SEJAM $P = (2, 0, 0)$

E $P' = (0, 3, 0)$.

ENTÃO O VETOR $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{(-2, 3, 0)}$ É ORTOGONAL A $\vec{w} =$

2º CASO:

SEJAM $P = A = (2, 0, 0)$,

$P' = C = (0, 0, 4)$.

ENTÃO $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{(-2, 0, 4)}$ É ORTOGONAL A $\vec{w} =$

3º CASO:

SEJAM $P = B =$

$P' = C =$

ENTÃO $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{(0, -3, 4)}$ É ORTOGONAL A $\vec{w}$:

IDÉIA: PROCUREM UM $\vec{w}$, UM VETOR NORMAL AO PLANO π QUE SIRVA PROS TRÊS CASOS.

NA AULA ...

A GENTE ...

IDÉIAS ...

OBTER: ...

- O P...
  $r =$ ...
  MAI...
- O ...
  MA...
- A "...
  DA ...
- O ...
  E ...

VAMO...

PROB...

A...

(2...

SE...

EN...

DI...

G...

r.

...

lias

e
porquê???)
tores
ser

o
$P' \in \pi$ -
paralelo
$P' \perp (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$

Exercício:
verifiquem isto
quando P, P' são A, B, C.

1º caso:
Sejam $P = (2,0,0)$
e $P' = (0,3,0)$.
Então o vetor $\overrightarrow{PP'} = (-2,3,0)$
é ortogonal a $\vec{w}$ =

2º caso:
Sejam $P = A = (2,0,0)$,
$P' = C = (0,0,4)$.
Então $\overrightarrow{PP'} = (-2,0,4)$
é ortogonal a $\vec{w}$:

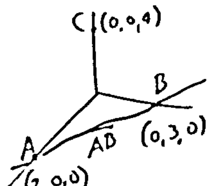
3º caso:
Sejam $P = B$ =
$P' = C$ =
Então $\overrightarrow{PP'} = (0,-3,4)$
é ortogonal a $\vec{w}$:

Idéia: procurem um $\vec{w}$, um vetor normal ao plano π que sirva pros três casos.

Na aula que vem a gente vai adaptar idéias de $\mathbb{R}^2$ pra obter:

- o ponto de $r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ mais próximo do ponto P
- o ponto do plano π mais próximo do ponto P
- a "projeção sobre o plano π" da reta r
- o ângulo entre a reta r e o plano π.

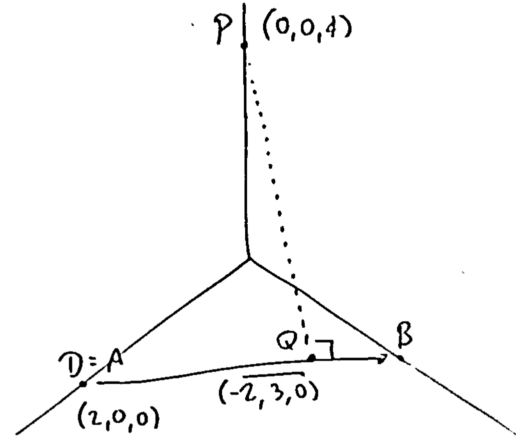
Vamos resolver o primeiro problema agora num caso fácil...



$r = \{\underbrace{A}_{D} + t\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Seja $P = C$.
Encontre o ponto de r mais próximo de P.

Dica: $Q = (2,0,0) + t(-2,3,0)$...
encontre o t certo e teste o seu resultado.



$\overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{PQ}$
$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

Na aula que vem a gente vai ver como resolver este problema e vários outros bem rápido usando "P_π" (em $\mathbb{R}^3$).

Pra casa!
Importante!!!

GA 22/out/2014 B

Sejam π este plano,

$$\pi = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1\right\},$$

$A=(\alpha,0,0)$,

$B=(0,\beta,0)$,

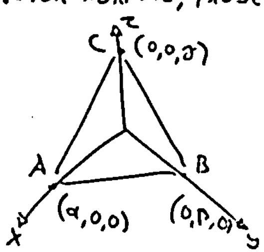
$C=(0,0,\gamma)$,

$r=\{D+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$

Vamos tentar ver como calcular:

- o ponto de r mais próximo de P,
- o ponto de π mais próximo de P,
- a "projeção de r sobre π",
- o ângulo entre r e π.

A gente vai adaptar idéias de $\mathbb{R}^2$ - ortogonalidade, vetor diretor, vetor normal, projeção.



Como $A,B\in\pi$, $\overrightarrow{AB}\parallel\pi$...

idem para $\overrightarrow{AC}\parallel\pi$,

$\overrightarrow{BC}\parallel\pi$.

Vamos voltar pro $\mathbb{R}^2$ um instante.

Qualquer vetor diretor de uma reta é ortogonal a qualquer vetor normal a ela.

Em $\mathbb{R}^3$, uma reta tem "essencialmente" um vetor diretor só - todos os outros são múltiplos deste... Mas ela tem vetores normais apontando em várias direções diferentes! (Eles formam um plano)

Cada plano em $\mathbb{R}^3$ tem "essencialmente" um só vetor normal (todos os outros são múltiplos deste).

$$\pi = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \overrightarrow{\left(\tfrac{1}{\alpha},\tfrac{1}{\beta},\tfrac{1}{\gamma}\right)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}=1\right\}$$

Exercício:

verifique que se $\vec{w}=\overrightarrow{\left(\tfrac{1}{\alpha},\tfrac{1}{\beta},\tfrac{1}{\gamma}\right)}$

então $\vec{w}\perp\overrightarrow{AB}$,

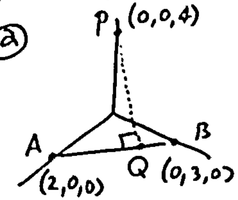
$\vec{w}\perp\overrightarrow{AC}$,

$\vec{w}\perp\overrightarrow{BC}$.

Exercícios:

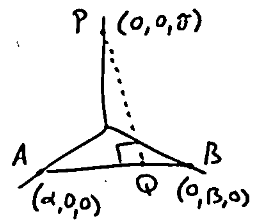
Encontre o ponto $Q\in r$ mais próximo do ponto P nos seguintes casos:

(a)



Dicas: $Q=A+t\overrightarrow{AB}$ para algum $t\in\mathbb{R}$, e $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PQ}$.

(b)



(c) $r=\{(0,1,2)+t\overrightarrow{(3,4,5)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$P=(6,7,8)$

(d) $r=\{D+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$P\in\mathbb{R}^3$

(e) Encontre uma fórmula pra calcular Q no caso d usando "Pr".

Lembre que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

(em $\mathbb{R}^3$ também!)

$\boxed{\text{IGA 24/out/2014}}\ \boxed{\text{A}}$

HOJE: PROJEÇÕES E O "x" EM $\mathbb{R}^3$ (PRA NOS AJUDAR A RESOLVER OS PROBLEMAS DA AULA PASSADA)

SEJAM:

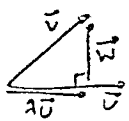
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$

$A = (\alpha, 0, 0)$,
$B = (0, \beta, 0)$,
$C = (0, 0, \gamma)$,
$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$P \in \mathbb{R}^3$.

VAMOS COMEÇAR TENTANDO ENCONTRAR O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P (DEPOIS O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P...)

(COMO LEMBRAR OS MÉTODOS PRA RESOLVER ESTAS COISAS SEM PRECISAR DECORAR NADA?)

A PROPRIEDADE MAIS INTERESSANTE DO "PR" É A SEGUINTE:



$Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ É UM VETOR $\lambda\vec{u}$ QUE FAZ COM QUE $\vec{w} \perp \vec{u}$...

REPARE QUE A CONDIÇÃO "$\vec{w} \perp \lambda\vec{u}$" É FRACA DEMAIS, PORQUE ELA SEMPRE PERMITE A SOLUÇÃO $\lambda = 0$...

... E VIMOS QUE

$\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

HOJE A GENTE VAI TENTAR CHUTAR MÉTODOS QUE PARECEM RAZOÁVEIS E TESTÁ-LOS.

(1) SEJA Q O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P.

ENCONTRE UMA FÓRMULA PRO Q E TESTE-A.

SUGESTÕES:

(a) ENCONTRE ALGUNS CASOS (EM $\mathbb{R}^3$) NOS QUAIS VOCÊ CONSIGA O Q NO OLHÔMETRO.

(b) TESTE ESTES CASOS.

CASOS-TESTE:

(I) $r = \{\underbrace{(0,0,0)}_{D} + t\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (1,3,0)$

$Q = (2,2,0)$

(II) $r = \{(0,0,0) + t(2,2,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (1,3,0)$

$Q = (2,2,0)$

(III) $r = \{(0,0,1) + t(2,2,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (1,3,1)$

$Q = (2,2,1)$

(IV) $r = \{(0,2,0) + t(2,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (2,1,3)$

$Q = (2,1,0)$

REPARE QUE AQUI $\vec{QP} = (0,0,3)$

E $\vec{v} = (2,-1,0)$,

ENTÃO É BEM ÓBVIO QUE ESTES VETORES SÃO ORTOGONAIS...

(V) (TENTE CRIAR UM CASO NO QUAL
$A = (\alpha,0,0)$,
$B = (0,\beta,0)$,
$r = \{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
P E Q TAIS QUE $\vec{QP}$ TENHA AS TRÊS COORDENADAS NÃO-NULAS.)

SUGESTÃO:
$A = (4,0,0)$
$B = (0,6,0)$
$Q = (2,3,0)$
E QUEREMOS QUE $\vec{AB} \perp \vec{QP}$.

$\vec{AB} = (-4,6,0)$

$P = (P_1,P_2,P_3)$

$Q = (2,3,0)$

$\vec{QP} = (P_1-2, P_2-3, P_3$

E QUEREMOS $\vec{AB} \perp \vec{QP}$.

OUTRO JEITO:

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\vec{AB} \perp \vec{w}$

$\vec{QP} = \vec{w}$, OU SEJ

$\vec{AB} \cdot \vec{w} = -4w_1 +$

$6w_2 = 4w_1$

$w_2 = \frac{2}{3}w_1$

PRA CASA:

(1) NO CA
EXERCÍ
VISUALI
CONJUN
$\{P \in \mathbb{R}$
(DICA
UM

Casos-teste:

(I) $r=\{\underbrace{(0,0,0)}_{D}+t\underbrace{\overrightarrow{(1,1,0)}}_{\vec{v}} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P=(1,3,0)$

$Q=(2,2,0)$

(II) $r=\{(0,0,0)+t\overrightarrow{(2,2,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P=(1,3,0)$

$Q=(2,2,0)$

(III) $r=\{(0,0,1)+t\overrightarrow{(2,2,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P=(1,3,1)$

$Q=(2,2,1)$

(IV) $r=\{(0,2,0)+t\overrightarrow{(2,-1,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P=(2,1,3)$

$Q=(2,1,0)$

Repare que aqui $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{(0,0,3)}$

e $\vec{v}=\overrightarrow{(2,-1,0)}$,

então é bem óbvio que estes vetores são ortogonais...

(V) (Tente criar um caso no qual

$A=(\alpha,0,0)$,

$B=(0,\beta,0)$,

$r=\{A+t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

P e Q tais que $\overrightarrow{QP}$ tenha até três coordenadas não-nulas.)

Sugestão:

$A=(4,0,0)$

$B=(0,6,0)$

$Q=(2,3,0)$

e queremos que $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QP}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(-4,6,0)}$

$P=(p_1,p_2,p_3)$

$Q=(2,3,0)$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{(p_1-2,p_2-3,p_3)}$

e queremos

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QP}$.

Outro jeito:

$\vec{w}=\overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{w}$

$\overrightarrow{QP}=\vec{w}$, ou seja, $P=Q+\vec{w}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{w}=-4w_1+6w_2=0$

$6w_2=4w_1$

$w_2=\frac{2}{3}w_1$

Pra casa:

(1) No caso do exercício (V), visualize este conjunto:

$\{P\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QP}\}$

(Dica: vai ser um plano.)

(2) Seja

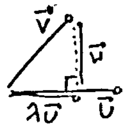
$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\}$.

Verifique que $Q=(1,2,3)\in\pi$ e procure pontos $P\in\mathbb{R}^3$ tais que $\overrightarrow{QP}$ seja ortogonal ao plano π.

$\boxed{\text{GA 24/out/2014}}\boxed{\text{B}}$

COMO RESOLVER OS PROBLEMAS DA ÚLTIMA AULA — PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P, ETC — EM $\mathbb{R}^3$ DECORANDO O MÍNIMO POSSÍVEL?

LEMBRE QUE



$Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ É O $\lambda\vec{u}$ QUE FAZ COM QUE $\vec{u} \perp \vec{w}$...

REPARE QUE "$\lambda\vec{u} \perp \vec{w}$" É UMA CONDIÇÃO MAIS FRACA QUE "$\vec{u} \perp \vec{w}$"...

"$\lambda\vec{u} \perp \vec{w}$" É SEMPRE VERDADE QUANDO $\lambda = 0$!

LEMBRE QUE $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

(ISTO VALE EM $\mathbb{R}^3$ TAMBÉM!)

PRA CADA UM DOS PROBLEMAS A GENTE VAI:

- CHUTAR FÓRMULAS
- CRIAR CASOS-TESTE FÁCEIS
- TESTAR A FÓRMULA NOS CASOS-TESTE
- PROVAR QUE ELA VALE NO CASO GERAL (MAIS DIFÍCIL, MAIS DEMORADO)

SEJAM:

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$,

$A = (\alpha, 0, 0)$,

$B = (0, \beta, 0)$,

$C = (0, 0, \gamma)$,

$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

$P \in \mathbb{R}^3$,

E Q O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P.

(1) CRIE VÁRIOS CASOS-TESTE.

(a) $r = \{\underbrace{(0,0,0)}_{D} + t\underbrace{\overrightarrow{(1,1,0)}}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (1,3,0)$

$Q = (2,2,0)$

(b) $r = \{(0,0,0) + t\overrightarrow{(1,1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P = (2,2,3)$

$Q = (2,2,0)$

COMO É QUE A GENTE TESTA ALGEBRICAMENTE ESTES CASOS?

(c) $r = \{(0,2,0) + t\overrightarrow{(2,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

DIGAMOS QUE $Q = (2,1,0)$,

$P = Q + \vec{w}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}$

ENCONTRE TRÊS PONTOS "P" DIFERENTES PARA OS QUAIS O Q (O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P) SEJA O $(2,1,0)$ E VISUALIZE O CONJUNTO $\{P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{(2,-1,0)}\}$...

	D	$\vec{v}$	P	Q
(a)	$(0,0,0)$	$\overrightarrow{(1,1,0)}$	$(1,3,0)$	$(2,2,0)$
(b)	$(0,0,0)$	$\overrightarrow{(1,1,0)}$	$(2,2,3)$	$(2,2,0)$
(c)	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(1,-1,0)$	$(2,1,0)$
(d)	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(2,1,3)$	$(2,1,0)$
(e)	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(2,1,0)$	$(2,1,0)$
(f)	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(1,-1,3)$	$(2,1,0)$

HIPÓTESE 1:

$Q = \frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} + D$

VAMOS TESTÁ-LA NO CASO (f).

$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{(1,-3,3)}$

$\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \frac{5}{5}$

$\underbrace{\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}}_{\text{NÚMERO}} + \underbrace{D}_{\text{PONTO DE } \mathbb{R}^3} = \text{ERRO!!}$

HIPÓTESE 2:

$Q = \left(\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} \cdot \vec{v}\right) + D$

$= \left(1 \cdot \overrightarrow{(2,-1,0)}\right) + (0,2,0)$

$= (2,1,0)$

REESCREVENDO:

$Q = D + \left(\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)$

$= D + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{DP}$

COMO ENCONTRAR O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P?

IDÉIA: CRIE VÁRIOS CASOS-TESTE FÁCEIS DE VISUALIZAR.

OUTRA IDÉIA:

$Q = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\gamma}{3}\right) \in \pi$

E SE, POR EXEMPLO,

$\alpha = 3,\ \beta = 6,\ \gamma = 9$

OU

$\alpha = 3,\ \beta = 3,\ \gamma = 3$,

O PONTO $\frac{A+B+C}{3}$ TEM COORDENADAS INTEIRAS.

(OBS: $\frac{A+B}{2} = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$,

$\frac{A+B+C}{3} = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{\overrightarrow{AC}}{3}$)

ENCONTRE PONTOS "P" TAIS QUE O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P SEJA O PONTO Q ESCOLHIDO.

	D	$\vec{v}$	P	Q
a	$(0,0,0)$	$\overrightarrow{(1,1,0)}$	$(1,3,0)$	$(2,2,0)$
b	$(0,0,0)$	$\overrightarrow{(1,1,0)}$	$(2,2,3)$	$(2,2,0)$
c	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(1,-1,0)$	$(2,1,0)$
d	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(2,1,3)$	$(2,1,0)$
e	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(2,1,0)$	$(2,1,0)$
f	$(0,2,0)$	$\overrightarrow{(2,-1,0)}$	$(1,-1,3)$	$(2,1,0)$

HIPÓTESE 1:

$$Q = \frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} + D$$

VAMOS TESTÁ-LA NO CASO f.

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{(1,-3,3)}$$

$$\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \frac{5}{5}$$

$$\underbrace{\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}}_{\text{NÚMERO}} + \underbrace{D}_{\text{PONTO DE } \mathbb{R}^3} = \text{ERRO. !!}$$

HIPÓTESE 2:

$$Q = \left(\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}\right) + D$$

$$= \left(1\cdot\overrightarrow{(2,-1,0)}\right) + (0,2,0)$$

$$= (2,1,0)$$

REESCREVENDO:

$$Q = D + \left(\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)$$

$$= D + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{DP}$$

COMO ENCONTRAR O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P?

IDÉIA: CRIE VÁRIOS CASOS-TESTE FÁCEIS DE VISUALIZAR.

OUTRA IDÉIA:

$$Q = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\gamma}{3}\right) \in \pi$$

E SE, POR EXEMPLO,

$\alpha=3,\ \beta=6,\ \gamma=9$

OU

$\alpha=3,\ \beta=3,\ \gamma=3$,

O PONTO $\frac{A+B+C}{3}$ TEM COORDENADAS INTEIRAS.

(OBS: $\frac{A+B}{2} = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$,

$\frac{A+B+C}{3} = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} + \frac{\overrightarrow{AC}}{3} \ldots$)

ENCONTRE PONTOS "P" TAIS QUE O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P SEJA O PONTO Q ESCOLHIDO.

DIGAMOS QUE

$A=(3,0,0)$,

$B=(0,3,0)$,

$C=(0,0,3)$,

$Q=(1,1,1)\ldots$

$\boxed{\text{GA} \quad 29/\text{out}/2014}\ \boxed{\text{A}}$

HOJE:

- O QUE A GENTE VIU NA 6ª (VEIO POUCA GENTE), MAS MAIS RÁPIDO
- x

AVISO: MUITA GENTE ERROU CONTAS NA PROVA QUE SERIAM MUITO FÁCEIS DE CONFERIR SE VOCÊS FIZESSEM OS GRÁFICOS.

VAMOS USAR ESTAS DEFS:

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$,

$A = (\alpha, 0, 0)$,

$B = (0, \beta, 0)$,

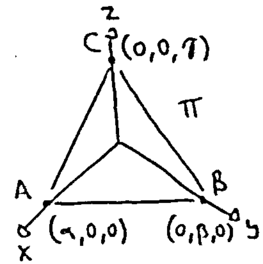
$C = (0, 0, \gamma)$

$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$P \in \mathbb{R}^3$

COMO É QUE A GENTE ENCONTRA O PONTO Q e r MAIS PRÓXIMO DO PONTO P?

IDÉIA: $\overrightarrow{QP} \perp \vec{v}$ (em $\mathbb{R}^3$!)



VAMOS COMEÇAR COM ESTE CASO PARTICULAR:

$A = (2,0,0)$,

$B = (0,4,0)$,

$P = (1,2,3)$,

$D = A$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2,4,0)$

$Q = (1,2,0)$ é o PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P (CONFIRA!!!)

OBS: ESTE "CONFIRA" TEM DUAS PARTES: UMA É VISUALIZAR r, P, Q EM $\mathbb{R}^3$ E CONFERIR QUE Q REALMENTE PARECE SER O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P; A OUTRA PARTE É VERIFICAR ALGO ALGEBRICAMENTE — UMA ORTOGONALIDADE.

PRÓXIMO CASO PARTICULAR: TUDO IGUAL, MAS AGORA $P = (3,3,0)$.

OUTRO: TUDO IGUAL, MAS AGORA $P = (3,3,3)$.

P	$\overrightarrow{QP}$	$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{(-2,4,0)}$	
$(2,3,4)$	$(1,1,4)$	2	☹ $(P \notin \pi)$
$(2,1,3)$	$(0,0,3)$	0	☺
$(1,\frac{1}{2},4)$	$(0,-\frac{3}{2},4)$	-6	☹
$(2,4,1)$	$(1,2,1)$	6	☹
$(3,3,0)$	$(2,1,0)$	0	☺
$(2,1,0)$	$(0,0,0)$	0	
$(2,\frac{5}{2},4)$	$(1,\frac{1}{2},4)$	0	☺

SEJA $\pi' = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{QP} \perp \vec{v}\}$ (COM O Q E O $\vec{v}$ DOS EXEMPLOS ANTERIORES).

FATO: π' É UM PLANO ORTOGONAL À RETA r QUE PASSA PELO PONTO Q.

EXERCÍCIO: ENCONTRE 4 PONTOS DE π' E VISUALIZE ELES EM $\mathbb{R}^3$.

OUTRO EXERCÍCIO: ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO π' E CONFIRA QUE OS PONTOS OBEDECEM ESTA EQUAÇÃO. x 2

"x"

LEMBRE QUE TODOS OS PRODUTOS "ESTRANHOS" QUE A GENTE VIU — O DE MATRIZES E O PRODUTO INTERNO — OBEDECEM "DISTRIBUTIVIDADES"...

$(M + M')M'' = MM'' + M'M''$

$M(M' + M'') = MM' + MM''$

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$(\underset{\in \mathbb{R}}{3}\vec{u}) \cdot \vec{w} = 3(\vec{u} \cdot \vec{w})$

LEMBRE QUE $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$...

$\overrightarrow{QP}$	$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{(-2,1,0)}$	
$\overrightarrow{(1,1,4)}$	2	$\neq$ ($P \notin \pi$)
$\overrightarrow{(0,0,3)}$	0	$=$
$\overrightarrow{(0,-\frac{3}{2},4)}$	-6	$\neq$
$(1,2,1)$	6	$\neq$
$(2,1,0)$	0	$=$
$(0,0,0)$	0	
$(1,\frac{1}{2},4)$	0	$=$

"x"

...BRE QUE TODOS ... PRODUTOS "ESTRANHOS" ...E A GENTE VIU - ... DE MATRIZES E O ...ODUTO INTERNO - ...BEDECEM "DISTRIBUTIVIDADES"...

$$(M+M')M'' = MM'' + M'M''$$
$$M(M'+M'') = MM' + MM''$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{u}+\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(3\vec{u})\cdot\vec{w} = 3(\vec{u}\cdot\vec{w})$$

ER

LEMBRE QUE $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} \neq \vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$...

O "x" VAI SER DISTRIBUTIVO TAMBÉM.

DEF: $\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)}$, $\vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)}$, $\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

ENTÃO $\overrightarrow{(a,b,c)} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

SE A GENTE SABE QUE O "x" É DISTRIBUTIVO, ENTÃO:

$$\underbrace{\overrightarrow{(a,b,c)}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\overrightarrow{(d,e,f)}}_{\vec{w}} = (a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\times\vec{w} = (a\vec{i})\times\vec{w} + (b\vec{j})\times\vec{w} + (c\vec{k})\times\vec{w}$$

$$\begin{aligned}(a\vec{i})\times\vec{w} &= (a\vec{i})\times(d\vec{i}+e\vec{j}+f\vec{k}) \\ &= a\vec{i}\times d\vec{i} + a\vec{i}\times e\vec{j} + a\vec{i}\times f\vec{k} \\ &= ad(\vec{i}\times\vec{i}) + ae(\vec{i}\times\vec{j}) + af(\vec{i}\times\vec{j})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(a,b,c)}\times\overrightarrow{(d,e,f)} &= ad(\vec{i}\times\vec{i}) + ae(\vec{i}\times\vec{j}) + af(\vec{i}\times\vec{k}) \\ &+ bd(\vec{j}\times\vec{i}) + be(\vec{j}\times\vec{j}) + bf(\vec{j}\times\vec{k}) \\ &+ cd(\vec{k}\times\vec{i}) + ce(\vec{k}\times\vec{j}) + cf(\vec{k}\times\vec{k})\end{aligned}$$

E SE SOUBERMOS OS RESULTADOS DE $\vec{i}\times\vec{i}, \vec{i}\times\vec{j}, \dots, \vec{k}\times\vec{k}$, SABEMOS FAZER QUALQUER CONTA TIPO $\overrightarrow{(a,b,c)}\times\overrightarrow{(d,e,f)}$!

DEF: $\vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = 0$, $\vec{k}\times\vec{k} = 0$,
$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$,
$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

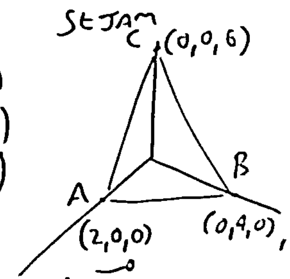
FATO (MÁGICO POR ENQUANTO - DEMONSTRAÇÃO DEPOIS)

$\vec{V}\times\vec{W} \perp \vec{V}$,
$\vec{V}\times\vec{W} \perp \vec{W}$...

A GENTE PODE USAR O "x" PRA CONSEGUIR VETORES NORMAIS A PLANOS.

EXERCÍCIO:

SEJAM



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$,
$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$.

CALCULE $\vec{w}$ E VERIFIQUE QUE $\vec{u}\perp\vec{w}$ E $\vec{v}\perp\vec{w}$.

$(a,b,c)\times(d,e,f) =$
[illegible]
$(-2,4,0)\times(-2,0,6) =$
(

$\boxed{\text{GA } 29/\text{out}/2014 \mid \text{A}}$

$\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)} =$

$ad(\vec i\times\vec i)+ae(\vec i\times\vec j)+af(\vec i\times\vec k)$
$+bd(\vec j\times\vec i)+be(\vec j\times\vec j)+bf(\vec j\times\vec k)$
$+cd(\vec k\times\vec i)+ce(\vec k\times\vec j)+cf(\vec k\times\vec k)=$

$$ae\vec k - af\vec j$$
$$-bd\vec k + bf\vec i$$
$$+cd\vec j - ce\vec i =$$

$(bf-ce)\vec i+(cd-af)j+(ae-bd)\vec k=$
$\overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}$

$$\begin{array}{r} \overrightarrow{(a,\ b,\ c)} \\ \times\ \overrightarrow{(d,\ e,\ f)} \\ \hline \overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)} \end{array}$$

(1) Encontre uma fórmula para calcular o ponto $Q\in r$ mais próximo de P. ⇦ Pra casa

(2) Encontre uma fórmula pra calcular o ponto $Q\in\pi$ mais próximo de P. ⇦ Pra agora (algumas partes)

Como encontrar estas fórmulas?

- Chutar uma fórmula
- Testar a fórmula em alguns casos (testar é fácil, provar formalmente que uma fórmula funciona é difícil)
- Procure vários casos-teste nos quais você consiga o resultado no olhômetro
- Procure algum modo de verificar algebricamente que os seus casos-teste funcionam como deveriam.

(a) $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$,
$P=(2,3,4)$
$Q=(2,3,0)$
O vetor $\overrightarrow{(0,0,4)}$ é normal ao plano π.

(b) $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2\}$,
$P=(2,3,4)$
$Q=(2,2,4)$

(c) $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2-y\}$
$P=(2,2,2)$
$Q=(\quad\quad)$

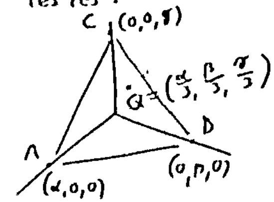
Dica: descubra as interseções do π com o seu $\mathbb{R}^3$ de papel. (Se achar difícil comece encontrando vários pontos de π).

Dica pro (1):
Lembrar a fórmula (em $\mathbb{R}^2$) para calcular o ponto de $r=\{D+t\vec v \mid t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ mais próximo de P;
tentar adaptá-la pra $\mathbb{R}^3$, testar, etc.

Dicas pro (2):

O plano π vai ser gerado (como? encontre uma fórmula!) por um ponto $A\in\pi$ e um vetor normal a π;
chute fórmulas pra calcular Q, e teste estas fórmulas.

Estes "π"s e "Q"s podem ser bons pra testes:



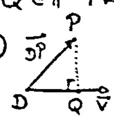
GA 29/out/2014 B

Sejam
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$,
$A = (\alpha, 0, 0)$,
$B = (0, \beta, 0)$,
$C = (0, 0, \gamma)$,
$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,
$P \in \mathbb{R}^3$

① Como encontrar o ponto $Q \in r$ mais próximo de P?

② Como encontrar o ponto $Q' \in \pi$ mais próximo de P?

① $\overrightarrow{DP}$



$Q = D + \mathrm{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{DP}$

"×"

Fato: Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$
então $\vec{u} \perp \vec{w}$,
$\vec{v} \perp \vec{w}$

Def: $\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)} =$
$\overrightarrow{(bf-ce, cd-af, ae-bd)}$

Como encontrar uma fórmula pro $Q' \in \pi$ mais próximo de P?

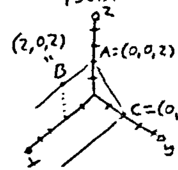
- Chute uma fórmula
- Teste-a em vários casos-teste
  (obs: testar é fácil, demonstrar que funciona sempre é difícil!)
- Precisamos encontrar vários casos-teste bons... Queremos casos nos quais conseguimos o resultado no olhômetro, e queremos testar algebricamente estes casos...

Casos-teste

ⓐ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
$P = (2,3,4)$
$Q' = (2,3,0)$

ⓑ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2\}$
$P = (2,3,4)$
$Q' = (2,2,4)$
Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \,/\!/\, \pi$:
Sejam $A = (3,2,3)$,
$B = (2,2,2)$,
$C = (1,2,4)$;
então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,0,-1)} \,/\!/\, \pi$,
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-2,0,1)} \,/\!/\, \pi$.
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(0,1,0)} \perp \vec{u}$

ⓒ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - y\}$
$P = (2,2,2)$
$Q' = (2,1,1)$
Como encontrar vetores normais a este plano?
Idéia 1: com "×".



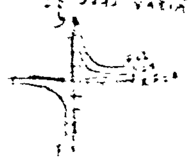
Um modo mais rápido de encontrar um vetor normal ao plano

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$

Repare que
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 1\}$
e que $\pi \,/\!/\, \pi'$,
$\pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 0\}$

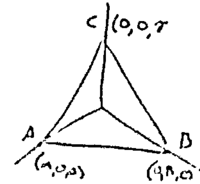
Revisão de cursos de cálc.

Seja $F(x,y) = xy$
Como a gente visualiza uma função de duas variáveis como esta F?



Seja $F(x,y,z) =$
$\overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$.
Em que conjuntos $F = 0$?
Em que conjuntos $F = 1$?

Truque:
$\vec{n} = \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}$
é um vetor normal ao plano π.
Vamos testar isto!



$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$?
$\overrightarrow{(-\alpha,\beta,0)} \cdot \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \stackrel{?}{=} 0$ sim!
$\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$? sim!

$\boxed{\text{GA } 29/\text{out}/2014 \; B}$

SEJAM

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$,

$A = (\alpha, 0, 0)$,

$B = (0, \beta, 0)$,

$C = (0, 0, \gamma)$,

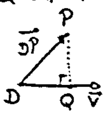
$r = \{D + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

$P \in \mathbb{R}^3$

① COMO ENCONTRAR O PONTO $Q \in r$ MAIS PRÓXIMO DE P?

② COMO ENCONTRAR O PONTO $Q' \in \pi$ MAIS PRÓXIMO DE P?

①



$Q = D + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{DP}$

"×"

FATO: SE $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

ENTÃO $\vec{u} \perp \vec{w}$,
$\vec{v} \perp \vec{w}$

DEF: $\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)} = \overrightarrow{(bf-ce, cd-af, ae-bd)}$

COMO ENCONTRAR UMA FÓRMULA PRO $Q' \in \pi$ MAIS PRÓXIMO DE P?

- CHUTE UMA FÓRMULA
- TESTE-A EM VÁRIOS CASOS-TESTE
  (OBS: TESTAR É FÁCIL, DEMONSTRAR QUE FUNCIONA SEMPRE É DIFÍCIL!)
- PRECISAMOS ENCONTRAR VÁRIOS CASOS-TESTE BONS... QUEREMOS CASOS NOS QUAIS CONSEGUIMOS O RESULTADO NO OLHÔMETRO, E QUEREMOS TESTAR ALGEBRICAMENTE ESTES CASOS...

CASOS-TESTE

ⓐ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

$P = (2,3,4)$

$Q' = (2,3,0)$

ⓑ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2\}$

$P = (2,3,4)$

$Q' = (2,2,4)$

DOIS VETORES $\vec{u}, \vec{v} \,//\, \pi$:

SEJAM $A = (3,2,3)$,
$B = (2,2,2)$,
$C = (1,2,4)$;

ENTÃO $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,0,-1)} \,//\, \pi$,
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-2,0,-1)} \,//\, \pi$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(0,1,0)} \perp \vec{u}$

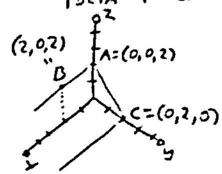
ⓒ $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - y\}$

$P = (2,2,2)$

$Q' = (2,1,1)$

COMO ENCONTRAR VETORES NORMAIS A ESTE PLANO?

IDÉIA 1: COM "×".



UM MODO MAIS RÁPIDO DE ENCONTRAR UM VETOR NORMAL AO PLANO

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\}$

REPARE QUE

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 1\}$,

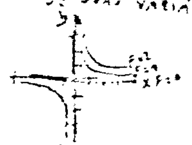
E QUE $\pi \,//\, \pi'$,

$\pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 0\}$

REVISÃO DE CURVAS DE NÍVEL

SEJA $F(x,y) = xy$

COMO A GENTE VISUALIZA UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS COMO ESTA F?



SEJA $F(x,y,z) = \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$.

EM QUE CONJUNTOS $F = 0$?

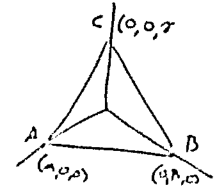
EM QUE CONJUNTOS $F = 1$?

TRUQUE:

$\vec{n} = \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}$

É UM VETOR NORMAL AO PLANO π.

VAMOS TESTAR ISTO!



$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$?

$\overrightarrow{(-\alpha,\beta,0)} \cdot \overrightarrow{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \stackrel{?}{=} 0$ SIM!

$\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$? SIM!

GA 31/out/2014 A

Teorema:

Se $\pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}=k\}$

Então $\pi /\!/ \pi' =$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}=0\}$

e $\vec{n} = \overrightarrow{(a,b,c)}$ é normal a π e π'.

Outro teorema:

Se $\pi \perp \vec{n}$, $\vec{n}\neq\emptyset$, $P\in\mathbb{R}^3$,

e Q é o ponto de π mais próximo de P, então $Q = P+\lambda\vec{n}$ para algum $\lambda\in\mathbb{R}$ (que vamos descobrir qual é.

Vamos comparar isto com a versão 2D:

Se $r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=k\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=k\}$

Então $r /\!/ r' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=0\}$

e $\vec{n} = \overrightarrow{(a,b)}$ é normal a r e r'

Se $r\perp\vec{n}$, $\vec{n}\neq\emptyset$, $P\in\mathbb{R}^2$,

e Q é o ponto de r mais próximo de P, então $Q = P+\lambda\vec{n}$.

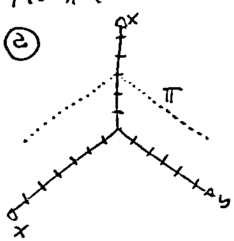
Lembrem que a coisa que vocês mais têm que treinar é chutar fórmulas (ou: "escrever hipóteses") e testá-las!

Dicas:

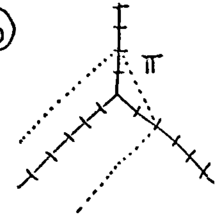
Comecem com uma r horizontal, depois uma vertical, depois uma com coef. ang. = 1 ou −1.

Pra casa: tente encontrar o λ pro caso em $\mathbb{R}^3$ no olhômetro nos casos-teste fáceis abaixo, e chute fórmulas pro λ e teste-as.

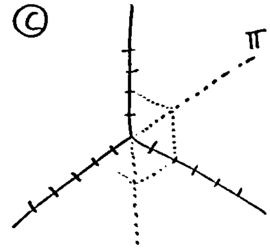
(e)



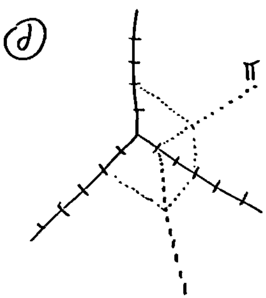
(b)



(c)



(d)



• Agora está todo mundo dispensado pra assistir a palestra

• Lembrem que se vocês continuarem a fazer erros de conta bobos em coisas que eram fáceis de verificar geometricamente vocês vão se ferrar na P2 e na VS e eu vou rir da cara de vocês!

:)

$\boxed{\text{GA 5/NOV/2014}}\ \boxed{A}$

HOJE: LISTA SOBRE VISUALIZAÇÃO (20 MINS), VÁRIOS TEOREMAS SOBRE PROJEÇÕES E MATRIZES...

(AVISO: A VISTA DE PROVA AINDA NÃO COMEÇA HOJE - PRECISO ANTES DISCUTIR MAIS UMAS COISAS COM REGINALDO E ANA ISABEL)

REPARE QUE

$$Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(x,y)} = \frac{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}}{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(a,b)}$$

$$= \frac{ax+by}{a^2+b^2}\overrightarrow{(a,b)}$$

$$= \frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\frac{ax+by}{a^2+b^2} \\ b\frac{ax+by}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2}x + \frac{ab}{a^2+b^2}y \\ \frac{ab}{a^2+b^2}x + \frac{b^2}{a^2+b^2}y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

... E $Pr_{\overrightarrow{(a,b,c)}}\overrightarrow{(x,y,z)} =$

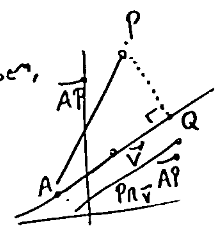
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

LEMBREM QUE O PONTO DA RETA $r = \{A + t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ MAIS PRÓXIMO DE $P\in\mathbb{R}^2$ É:

$Q = A + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}$

MAS SE $A=0$ ENTÃO:

- r PASSA PELA ORIGEM,
- AS CONTAS FICAM MAIS SIMPLES...



SE $P=(x,y)$ ENTÃO $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{(x,y)}$,

E SE $\vec{v} = \overrightarrow{(a,b)}$, ENTÃO

$$Q = A + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{(x,y)}$$

$$= (0,0) + Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS:

CALCULE Q PELA FÓRMULA NOS SEGUINTES CASOS:

ⓐ $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(1,0)}$, $(x,y)=(2,3)$ $\quad Q=(2,0)\quad \frac{1}{1^2+0^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

ⓑ $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(5,0)}$, $(x,y)=(2,3)$

ⓒ $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(0,5)}$, $(x,y)=(2,3)$

ⓓ $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(1,1)}$, $(x,y)=(2,3)$ $\quad Q\approx(2.5,2.5)\quad \frac{1}{1^2+1^2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix}$$

... E COMPARE SEUS RESULTADOS COM O "CÁLCULO" DE Q POR MÉTODOS OLHOMÉTRICOS.

$\boxed{\text{PROJETAR SOBRE UMA RETA QUE PASSA PELA ORIGEM } \underline{\underline{\text{É}}} \text{ MULTIPLICAR POR UMA MATRIZ.}}$

AGORA EM $\mathbb{R}^3$...

VAMOS COMEÇAR ENCONTRANDO $\vec{v}_{10}, \vec{w}_{10}, \vec{n}_{10}$.

$\vec{v}_{10} = \overrightarrow{(-2,3,0)}$

$\vec{w}_{10} = \overrightarrow{(-2,0,4)}$

$\vec{n}_{10} = \cancel{\overrightarrow{\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4}\right)}}$

$\vec{n}_{10} = \overrightarrow{(6,4,3)}$

AGORA:

$A = (0,0,0)$,

$r = \{A + t\overrightarrow{(6,4,3)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P = (1,1,1)$

$$Q = \frac{1}{6^2+4^2+3^2}\begin{pmatrix}36&24&18\\24&16&12\\18&12&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36+16+9}\begin{pmatrix}78\\52\\39\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{61}\begin{pmatrix}78\\52\\39\end{pmatrix}$$

$$= \frac{13}{61}\begin{pmatrix}6\\4\\3\end{pmatrix}$$

$Q=(2,0)$ $\frac{1}{1^2+0^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$Q\approx(2.5,2.5)$ $\frac{1}{1^2+1^2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix}$

AGORA:

$A=(0,0,0)$,

$r=\{A+t\overrightarrow{(6,4,3)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$P=(1,1,1)$

$$Q=\frac{1}{6^2+4^2+3^2}\begin{pmatrix}36&24&18\\24&16&12\\18&12&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{36+16+9}\begin{pmatrix}78\\52\\39\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{61}\begin{pmatrix}78\\52\\39\end{pmatrix}$$

$$=\frac{13}{61}\begin{pmatrix}6\\4\\3\end{pmatrix}$$

SUGESTÃO:
QUANDO VOCÊS FOREM ESTUDAR ISTO EM CASA COMECEM COM π_4.

$\boxed{\text{PROJETAR SOBRE UM PLANO QUE PASSA PELA ORIGEM } \underline{\underline{\text{É}}} \text{ MULTIPLICAR POR UMA MATRIZ.}}$

OBS: SE $\|\overrightarrow{(a,b,c)}\|=1$
ENTÃO $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}=1$
E AS CONTAS FICAM MAIS FÁCEIS ...

PRA CASA, URGENTE:
TESTE ESTA FÓRMULA NO CASO π_4
(OBS: $\pi_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1x+0y+1z=3\}$,
$\pi_4'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1x+0y+1z=0\}$)

Def: $$M_{(a,b,c)}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$$

A PROJEÇÃO DO PONTO (x,y,z) SOBRE A RETA $r=\{(0,0,0)+t\overrightarrow{(a,b,c)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ É O PONTO $M_{(a,b,c)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

SEJAM $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$,
$\pi'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$,
$\vec{n}=\overrightarrow{(a,b,c)}$.

ENTÃO $\vec{n}\perp\pi$, $\vec{n}\perp\pi'$,
E O PONTO DE π' MAIS PRÓXIMO DE $P=(x,y,z)$
É: $$Q=\left(1-M_{(a,b,c)}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

... E PRA GENTE PODER CALCULAR O PONTO DE π (NÃO DE π'!) MAIS PRÓXIMO A UM PONTO P DADO, A GENTE VAI PRECISAR DA INTERSEÇÃO ENTRE
$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$
E $r=\{(0,0,0)+t\overrightarrow{(a,b,c)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

PRA CALCULAR ESTE PONTO A GENTE PRECISA CALCULAR t.
QUEREMOS

$a(ta)+b(tb)+c(tc)=k$

$t(a^2+b^2+c^2)=k$

$t=\frac{k}{a^2+b^2+c^2}$

$\boxed{\text{GA 5/NOV/2014}}\boxed{B}$

FATO: $Pr_{\overrightarrow{(a,b)}} \overrightarrow{(x,y)} = M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

ONDE M É UMA MATRIZ.

$$Pr_{\overrightarrow{(a,b)}} \overrightarrow{(x,y)} = \frac{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}}{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}} \overrightarrow{(a,b)} = \frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\frac{ax+by}{a^2+b^2} \\ b\frac{ax+by}{a^2+b^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a^2}{a^2+b^2}x+\frac{ab}{a^2+b^2}y \\ \frac{ab}{a^2+b^2}x+\frac{b^2}{a^2+b^2}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

AGORA SEJAM

$r' = \{A + t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$P \in \mathbb{R}^2$,

Q O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P.

ENTÃO $Q = A + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}$.

SE $A=(0,0)$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(a,b)}$,

$P = (x,y)$,

ENTÃO A FÓRMULA ANTERIOR FICA BEM SIMPLES...

$$Q = (0,0) + Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(x,y)} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

> SE r PASSA PELA ORIGEM ENTÃO OBTER O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE UM PONTO P $\underline{\underline{É}}$ MULTIPLICAR POR UMA MATRIZ.

EM $\mathbb{R}^3$,

$$Pr_{\overrightarrow{(a,b,c)}}\overrightarrow{(x,y,z)} = \underbrace{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

OBS: $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(a\,b\,c) = \begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$

DEF: $M_{(a,b,c)} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$

$M_{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}$

> SE π PASSA PELA ORIGEM ENTÃO OBTER O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE UM PONTO P $\underline{\underline{É}}$ MULTIPLICAR POR UMA MATRIZ.

SEJAM

$\pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$,

$\pi' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$,

$\vec{n} = \overrightarrow{(a,b,c)}$,

$r = \{(0,0,0)+t\overrightarrow{(a,b,c)} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

ENTÃO: $\vec{n}\perp\pi$,
$\vec{n}\perp\pi'$.

SEJA $P=(x,y,z)$.

ENTÃO: $M_{(a,b,c)}P$ É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P,

$(1-M_{(a,b,c)})P$ É O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE P.

EXERCÍCIO:

DIGAMOS QUE $\pi=\pi_4$.

- ENCONTRE a,b,c,k, π', $\vec{n}$, r.
- SEJA $P=(2,2,2)$. ENCONTRE NO DIAGRAMA OS PONTOS DE π, π' E r MAIS PRÓXIMOS DE P, E DEPOIS CALCULE

  $M_{(a,b,c)}P$,

  $(1-M_{(a,b,c)})P$.

> PRA ENCONTRAR O PONTO DE π (NÃO MAIS DE π') MAIS PRÓXIMO DE P NÓS PRECISAMOS DE $r\cap\pi$, QUE TAMBÉM É O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DA ORIGEM.

PRA ENCONTRAR $\pi\cap r$ TEMOS QUE ENCONTRAR O t QUE FAÇA $(0,0,0)+t(a,b,c)$ PERTENCER A π... OU SEJA,

$a(ta)+b(tb)+c(tc)=k$

$ta^2+tb^2+tc^2=k$

$t(a^2+b^2+c^2)=k$

$t=\frac{k}{a^2+b^2+c^2}$, $(x,y,z)=\left(\frac{ka}{a^2+b^2+c^2}, \frac{kb}{a^2+b^2+c^2}, \frac{kc}{a^2+b^2+c^2}\right)$

GA 7/nov/2014 A

Sejam:
r uma reta em $\mathbb{R}^2$,
r' uma reta paralela a r passando pela origem,
$\vec{v}$ um vetor diretor para r,
$\vec{n}$ um vetor normal a r,
P um ponto de $\mathbb{R}^2$.

Então:

Encontrar o ponto de r' mais próximo de um ponto dado é multiplicar por uma matriz,
Encontrar o ponto de r mais próximo de um ponto dado é multiplicar por uma matriz e somar uma constante.

...e em $\mathbb{R}^3$ valem coisas correspondentes, mas para retas e planos ao invés de só para retas.

Além disto, em $\mathbb{R}^2$,

Encontrar o ponto simétrico por r' a um ponto dado é multiplicar por uma matriz
Encontrar o ponto simétrico por r a um ponto dado é multiplicar por uma matriz e somar uma constante.

...e coisas correspondentes valem para $\mathbb{R}^3$.

Casos-teste:

Sejam
$r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2\}$,
$r' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$.

Então se $P=(x,y)$
o ponto de r' mais próximo a P é dado por $Q = M\binom{x}{y}$.
Determine M. $\boxed{1P}$

Se $P=(2,3)$ então $Q=(0,3)$ $\boxed{1/2\,P}$

Se $P=(3,10)$ então $Q=$?
Se $P=(0,1)$?...
Se $P=(1,0)$?...

Outro caso-teste fácil:
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3\}$,
$r'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$
Determine M. $\boxed{1P}$

Um mais difícil:
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+2\}$
$r'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$.
Determine M, $\boxed{1P}$
e teste a sua M. $\boxed{1P/1P}$

...Pra que estamos vendo isto?
Pra <u>muitas</u> coisas.
Montes de problemas podem ser reduzidos a projeções, interseções, espelhamentos — inclusive problemas com cônicas, quádricas, etc.

<u>Esfera</u>

Seja
$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

(a) Quais são os 6 pontos mais óbvios de E?

Seja
$E'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=1\}$.

(b) Quais são os 6 pontos mais óbvios de E'?

(a) $(1,0,0)\in E$,
$(-1,0,0)\in E$,
$(0,1,0)\in E$,
$(0,-1,0)\in E$,
$(0,0,1)\in E$
$(0,0,-1)\in E$.

(b) $(3,3,4)\in E'$ $(1/2\,P)$
$(2,4,4)\in E'$ $(1/2\,P)$
$(2,3,5)\in E'$
$\vdots$

Exercício:
Sejam $A=($
$B=$
$C=\{P\in\mathbb{R}$
$=\{P\in\mathbb{R}$
$=\{(x,y,$
Que pla
obtenha
repr
e en
P,P' e
ao
(OBS:
(
E
(
(
(

s
ue

$y^2+z^2=1\}$
tos mais

$(x-2)^2+$
$-4)^2=1\}$.
pontos mais

(b) $(3,3,4)\in E'$ (1/2 P)
$(2,4,4)\in E'$ (1/2 P)
$(2,3,5)\in E'$
⋮

Exercício:

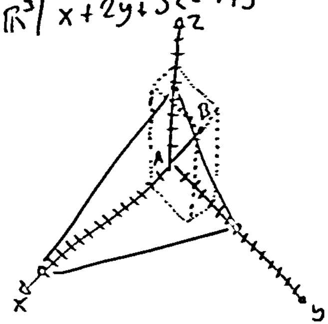
Sejam $A=(0,0,0)$,
$B=(2,4,6)$,

$$C=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid d(A,P)=d(B,P)\}$$
$$=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid d(A,P)^2=d(B,P)^2\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2\}$$

Que plano é este?
Obtenha a sua equação,
representem-o graficamente,
e encontre dois pontos
$P,P'\in C$ que pertençam
ao plano xy
(Obs: $\pi_{xy}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$)

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}= (\cancel{x^2}-4x+4)+(\cancel{y^2}-8y+16)+(\cancel{z^2}-12z+36)\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0=-4x-8y-12z+4+16+36\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4x+8y+12z=56\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=14\}$$

e portanto
$(14,0,0)\in C$,
$(0,7,0)\in C$,
$(0,0,\frac{14}{3})\in C$



24-1.2a:
Determine o centro,
o raio e os 6 pontos
mais óbvios de:
$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+(y+6)^2+z^2=25\}$$

24-5.2a:
Obtenha uma equação da
superfície esférica
de centro $(1,1,2)$ que
contém o ponto $(1,1,3)$.

Exercício extra:
Quais são os 6 pontos
mais óbvios e a equação
da esfera de centro
(a,b,c) e raio R?

Outro exercício extra:
Sejam $A=(2,0,0)$,
$B=(2,4,0)$,
$C=(2,4,6)$.
Encontre o centro e o
raio de duas esferas
diferentes que contêm
os pontos A,B,C.

(Compare isto ⇧ com o
exercício 24-12).

Pra casa:
Exercícios do Boulos,
da seção 24:
1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12
Pags 375-377.

HIP:

$(2,-6,5)\in E$ (ok)
$(6,-3,0)\in E$ (ok)
$(2,-11,0)\in E$ (ok)
$(3,-6,4)\in E$ (não)
$(-3,-6,0)\in E$ (ok)
$(5,-6,4)\in E$ (ok)

$\boxed{\text{GA 12/nov/2014}}\,\boxed{A}$

HOJE: QUÁDRICAS!
(CAP 25 DO LIVRO, COM ALGUNS TRUQUES EXTRAS).

LEMBRE QUE UMA CÔNICA É UM CONJUNTO DA FORMA:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2=0\}$$

UMA QUÁDRICA É ALGO PARECIDO EM $\mathbb{R}^3$,

$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\begin{array}{l}ax^2+\\ bx+cxy+\\ d+ey+fy^2\end{array}\right)+\left(\begin{array}{l}gx+\\ h+iy\end{array}\right)z+jz^2=0\}.$$

QUAIS SÃO AS "QUÁDRICAS CANÔNICAS"?

SE $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (ax)^2+(by)^2+(cz)^2+d=0\}$

ENTÃO ELA TEM CERTAS SIMETRIAS...

SE $(\alpha,\beta,\gamma)\in Q$

ENTÃO $(-\alpha,\beta,\gamma)\in Q$,

$(\alpha,-\beta,\gamma)\in Q$,

$(\alpha,\beta,-\gamma)\in Q$...

PONTOS ÓBVIOS PARA UM Q DESTA FORMA SÃO FÁCEIS DE ACHAR!

VAMOS COMEÇAR COM $a,b,c,d\in\{-1,0,1\}$, E O CASO GERAL VAI SER DEIXADO COMO EXERCÍCIO.

CONES

SEJA:

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2\}$$

O "CONE CANÔNICO"...

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=0\}$$

ALGUNS PONTOS ÓBVIOS DE C:

$(0,0,0)\in C$

$(1,0,1)\in C$

$(0,1,1)\in C$

$(99,0,99)\in C$

$(3,4,5)\in C$

(E DÁ PRA INVERTER SINAIS...)

COMO MODIFICAR ESSE CONE?

VOLTANDO PRA $\mathbb{R}^2$:

$$H_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^2\}$$
$$H_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x^2+1\}$$

VOLTANDO PRA $\mathbb{R}^3$:

("HIPERBOLÓIDES")

$$H_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2\},$$
$$H_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2+1\}$$

EXERCÍCIO:

ENCONTRE VÁRIOS PONTOS ÓBVIOS DE H_1, E TENTE VISUALIZAR H_1.

(OBS: VOCÊ JÁ CONSEGUE VISUALIZAR DIREITO H_0???)

ALGUNS PONTOS DE H_1:

$(0,0,\pm1)$, $(0,\pm1,\pm\sqrt{2})$

$(\pm1,0,\pm\sqrt{2})$, $(0,\pm2,\pm\sqrt{5})$

$(\pm2,0,\pm\sqrt{5})$,

$(\pm1,\pm1,\pm\sqrt{3})$

REPRESENTEM GRAFICAMENTE

$H_1\cap\Pi_{xz}$ ⟲ HIPÉRBOLE!

$(\Pi_{xz}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\})$

... $H_1\cap\Pi_{yz}$

AGORA:

$H_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$z^2=x^2+y^2-$

ALGUNS PONTOS DE

$(\pm1,0,0)$,

$(\pm\sqrt{2},0,\pm1)$,

$(\pm\sqrt{5},0,\pm2)$

H_{-1} É UM

DE UM

H_1 É U

DE D

$\ldots \mathbb{R}^3 \mid$

$\ldots \}$

...IOS

DE H_1,

...ALIZAR H_1.

JÁ

VISUALIZAR

...lo ???)

...NTOS DE H_1:

$\ldots 1),\quad (0, \pm 1, \pm\sqrt{2})$

$\ldots \sqrt{2}),\quad (0, \pm 2, \pm\sqrt{5})$

$\ldots \sqrt{5}),$

$\ldots \sqrt{3})$

...EM GRAFICAMENTE

...xz ⇦ HIPÉBOLE!

$\ldots (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\})$

...yz

AGORA:

$$H_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 - 1\}$$

ALGUNS PONTOS DE H_{-1}:

$(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$,

$(\pm\sqrt{2}, 0, \pm 1)$, $(0, \pm\sqrt{2}, \pm 1)$,

$(\pm\sqrt{5}, 0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{5}, \pm 2)$

H_{-1} É UM "HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA"

H_1 É UM "HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS".

AGORA JÁ CONHECEMOS VÁRIAS QUÁDRICAS DA FORMA

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0\} \ldots$$

a	b	c	d	NOME	DESENHO
1	1	-1	0	CONE	
1	1	-1	1	HIP. 2F	
1	1	-1	-1	HIP. 1F	
1	1	1	-1	ESFERA	
1	1	0	-1	CILINDRO (INFINITO)	

SEJAM

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\},$$

$$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 1 = 0\}$$

ENTÃO:

$(\pm 1, 0, 0) \in E$, $(\pm\frac{1}{2}, 0, 0) \in E'$,

$(0, \pm 1, 0) \in E$, $(0, \pm\frac{1}{3}, 0) \in E'$,

$(0, 0, \pm 1) \in E$ $(0, 0, \pm\frac{1}{4}) \in E'$.

PRA CASA:

EXISTE UMA CORRESPONDÊNCIA "NATURAL" ENTRE PONTOS DE E E PONTOS DE E'.

- ENCONTRE UMA FÓRMULA QUE PARA QUALQUER PONTO $(x,y,z) \in E$ A SUA FÓRMULA PRODUZ UM PONTO $(x',y',z') \in E'$.
- SEJA $E'' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (ax)^2 + (bx)^2 + (cy)^2 = 1\}$. ADAPTE A SUA FÓRMULA PARA ESTE CASO.

AGORA VAMOS OLHAR PRA ALGUMAS QUÁDRICAS QUE NÃO TÊM TODAS AQUELAS SIMETRIAS...

AO INVÉS DE OLHARMOS PARA EQUAÇÕES COMO

$$(ax)^2 + (by)^2 + \underbrace{(cz)^2}_{= c^2 z^2} + d = 0$$

VAMOS OLHAR PARA:

$$ax^2 + by^2 + (-z) + d = 0$$

QUE É EQUIVALENTE A:

$$z = ax^2 + by^2 + d \ldots$$

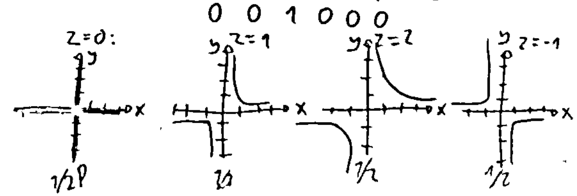
O VALOR DE z VAI SER UMA FUNÇÃO DE x E y.

MAIS GERAL:

$$z = ax^2 + bx + cxy + d + ey + fy^2$$

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax^2 + bx + cxy + d + ey + fy^2\}$$

a	b	c	d	e	f	DESENHO
1	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	0	0	

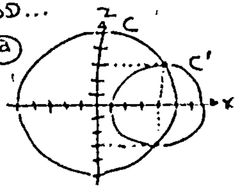


GA 14/NOV/2014 A

HOJE: INTERSEÇÕES EM 3D, COPLANARIDADE, CÍRCULOS, PARÁBOLAS, ETC EM 3D

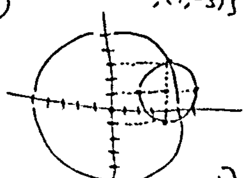
VAMOS COMEÇAR COM ESTES CASOS AQUI EM 2D, DEPOIS PASSÁ-LOS PRA 3D...

ⓐ



$C \cap C' = \{(4,3),(4,-3)\}$

ⓑ



$C \cap C' = \{(4,3),(4,0)\}$

ⓐ' $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 5^2\}$,
$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-4)^2+y^2+z^2 = 3^2\}$

$E \cap E'$?

$(4,3,0) \in E \cap E'$,
$(4,-3,0) \in E \cap E'$.

E SE A GENTE SUBTRAIR AS EQUAÇÕES UMA DA OUTRA?

SEJAM $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5^2$,
$G(x,y,z) = (x-4)^2+y^2+z^2-3^2$.

ENTÃO $F(x,y,z)-G(x,y,z) =$
$(x^2+y^2+z^2-25)-$
$(x^2-8x+16+y^2+z^2-9) =$
$-25+8x-16+9 =$
$8x-32$

E $F(x,y,z)-G(x,y,z)=0$
$\Leftrightarrow 8x-32=0$
$\Leftrightarrow x=4$

SEJA $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=4\}$.

ENTÃO: $E \cap E' \subsetneq \pi$

TRUQUE: $E \cap E' = E \cap \pi = E' \cap \pi$,

E NESTE CASO
$E \cap E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=4,\ y^2+z^2=3^2\}$.

EXERCÍCIO: VISUALIZE
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2=3^2\}$.

ⓑ' $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 5^2\}$,
$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-4)^2+(y-1)^2+z^2 = 2^2\}$,

E SE FIZERMOS AS CONTAS (FAÇAM EM CASA!)

A DIFERENÇA DOS DOIS POLINÔMIOS VAI SER UM PLANO π, QUE PASSA PELO PONTO $(4,3,0) \in$ ALÉM DISSO $\pi \perp \overline{E_0E_0'}$.

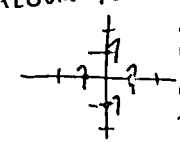
LEMBREM QUE UM DOS SLOGANS DE GA É QUE DÁ PRA RESOLVER MUITOS PROBLEMAS POR CONJUNTOS E INTERSEÇÕES...

... MAS NEM TODA INTERSEÇÃO DE DUAS QUÁDRICAS VAI ESTAR NUM PLANO!

EXEMPLO: SEJAM
$C' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$,
$C'' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2-y^2\}$

$F(x,y) = x^2-y^2$.

ALGUNS PONTOS DE $C' \cap C''$:



$A = (0,1,-1)$
$B = (-1,0,1)$,
$C = (1,0,1)$,
$D = (0,-1,-1)$,

ESTES PONTOS NÃO SÃO COPLANARES!!!

EXERCÍCIO:

SEJAM $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,-1,2)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(1,-1,2)}$,
$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(0,4,2)}$

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$,
$\vec{n} \perp \pi$.

- DETERMINE a,b,c PARA QUE $\vec{n} \parallel \vec{w}$,
- DETERMINE k PARA QUE $A \in \pi$,
- VERIFIQUE QUE $B, C \in \pi$,
- VERIFIQUE QUE $D \notin \pi$ (OU SEJA, A,B,C,D NÃO SÃO COPLANARES).
- ENCONTRE O PONTO DA FORMA $(0,-1,z)$ QUE PERTENCE A π.

$a=0$
$b=4$
$c=2$
$k=2$

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0x+4y+2z=2\}$,

$A \in \pi$ (ok)
$B \in \pi$ (ok)
$C \in \pi$ (ok)
$D \notin \pi$ (ok)
$(0,-1,3) \in \pi$.

OBS:
O PL
VISU
Z=
-3
-1
3
EX

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=5^2\}$,

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-4)^2+(y-1)^2+z^2=2^2\}$,

(se fizermos as contas
façam em casa! ☺)

A diferença dos dois polinômios vai ser um plano, π, que passa pelo ponto $(4,3,0)$ e além disso $\pi \perp \overrightarrow{E_0E_0'}$.

Lembrem que um dos slogans de GA é que dá pra resolver muitos problemas por conjuntos e interseções...

... mas nem toda interseção de duas quádricas vai estar num plano!

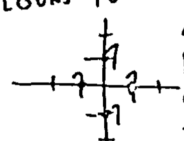
Exemplo: sejam

$C'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$,

$C''=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2-y^2\}$,

$F(x,y)=x^2-y^2$.

Alguns pontos de $C'\cap C''$:



$A=(0,1,-1)$,
$B=(-1,0,1)$,
$C=(1,0,1)$,
$D=(0,-1,-1)$,

$z^2=3^2\}$.

Estes pontos não são coplanares!!!

Exercício:

Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(-1,-1,2)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{(1,-1,2)}$,
$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\overrightarrow{(0,4,2)}$

$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$,

$\vec{n}\perp\pi$.

- Determine a,b,c para que $\vec{n}\,/\!/\,\vec{w}$,
- determine k para que $A\in\pi$,
- verifique que $B,C\in\pi$,
- verifique que $D\notin\pi$ (ou seja, A,B,C,D não são coplanares).
- Encontre o ponto da forma $(0,-1,z)$ que pertence a π.

$a=0$
$b=4$
$c=2$
$k=2$

$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+4y+2z=2\}$,

$A\in\pi$ (ok)
$B\in\pi$ (ok)
$C\in\pi$ (ok)
$D\notin\pi$ (ok)
$(0,-1,3)\in\pi$.

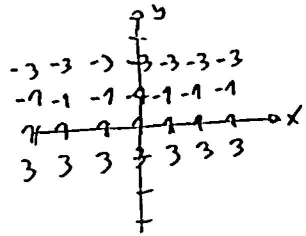
Obs: dá pra visualizar o plano $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+4y+2z=2\}$

Visualizando isto:

$2z=2-4y$

$z=1-2y$

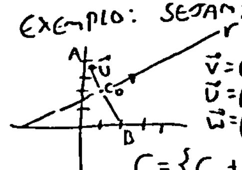
$z=F(x,y)=1-2y$



Como a gente pode descrever círculos, elipses, hipérboles, parábolas, etc em $\mathbb{R}^3$ ao invés de "vóides"?

- Por $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid eq_1, eq_2\}$,
- por $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y)=0,\ z=G(x,y)\}$ (ou com x ou y como a "coordenada distinguida"),
- por parametrizações...

Exemplo: sejam:



$\vec{v}=\overrightarrow{(2,1,0)}$,
$\vec{u}=\overrightarrow{(-1,2,0)}$,
$\vec{w}=\overrightarrow{(0,0,\sqrt{5})}$,

$C=\{C_0+\alpha\vec{u}+\beta\vec{w} \mid \alpha^2+\beta^2=1\}$

Encontrem 4 pontos óbvios de C e verifique que todos eles são equidistantes de C_0.

Pra casa:

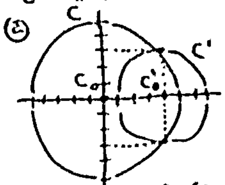
Façam os exercícios das seções 24C e 24D do Boulos (eles usam muito a ideia de "plano tangente à esfera" - mas vocês vão conseguir se virar!!)

GA 14/nov/2014 | B

HOJE: INTERSEÇÕES DE ESFERAS, PLANOS, QUÁDRICAS EM GERAL, COPLANARIDADE...

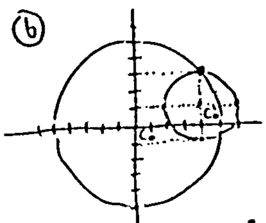
EM $\mathbb{R}^2$:

(a)



$C \cap C' = \{(4,3),(4,-3)\}$.

(b)



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2+(y-1)^2=2^2\}$

$C \cap C' = \{(4,3),(\alpha,\beta)\}$

EM $\mathbb{R}^3$:

(a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=5^2\}$,

$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-4)^2+y^2+z^2=3^2\}$

$(4,3,0) \in E \cap E'$

$(4,-3,0) \in E \cap E'$

SEJAM:

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5^2$,

$G(x,y,z) = (x-4)^2+y^2+z^2-3^2$

QUEREMOS $E \cap E'$...

REPARE QUE $F(x,y,z) - G(x,y,z) =$

$(\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-25) -$

$(\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-9) =$

$-25+8x-16+9 =$

$8x-32$

TODO PONTO $P \in E \cap E'$ OBEDECE $F(x,y,z)=0$ E $G(x,y,z)=0$, E PORTANTO ELE OBEDECE TAMBÉM $F(x,y,z)-G(x,y,z)=0$...

SEJA $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 8x-32=0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=4\}$.

$P \in E \cap E' \Rightarrow P \in \pi$, MAS O REVERSO NÃO É VERDADEIRO: $(4,0,0) \in \pi$, $(4,0,0) \notin E \cap E'$.

$E \cap E' \subsetneq \pi$, $E \cap E' = E \cap \pi = E' \cap \pi$.

EM $\mathbb{R}^3$:

(b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=5^2\}$,

$E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-4)^2+(y-1)^2+z^2=2^2\}$

SEJAM

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5^2$,

$G(x,y,z) = (x-4)^2+(y-1)^2+z^2-2^2$,

$H(x,y,z) = F(x,y,z) - G(x,y,z)$...

$H(x,y,z)$ SÓ TEM TERMOS DE GRAU NO MÁXIMO 1...

SEJA $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid H(x,y,z)=0\}$

(UM PLANO!)

REPARE:

$(4,3,0) \in E, E', \pi$

SEJA $\vec{n} \perp \pi$.

SEJA $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=k\}$.

ENTÃO $(a,b,c) \perp \pi$,

$\pi \perp \overrightarrow{C_0C_0'} = (4,1,0)$,

E PODEMOS TOMAR $(a,b,c) = (4,1,0)$...

ALÉM DISSO, $(4,3,0) \in \pi$, E PORTANTO QUANDO $(x,y,z) = (4,3,0)$ TEMOS $ax+by+cz = k$

$\quad = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0$

$\quad = 19$

ENTÃO $k=19$,

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x+1y+0z=19\}$

...E O CENTRO DO CÍRCULO $E \cap E'$ ESTÁ NA INTERSEÇÃO

$\pi \cap \{C_0 + t\overrightarrow{C_0C_0'} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \{(0,0,0) + t(4,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \{(4t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

EXERCÍCIO:

CALCULE A INTERSEÇÃO DE $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x+1y+0z=15\}$ COM $r = \{(4t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$4(4t)+1(t)+0 \cdot 0 = 15$

$17t = 15$

$t = \frac{15}{17}$

$P = \left(4\frac{15}{17}, \frac{15}{17}, 0\right) \in \pi \cap r$.

PORQUE É PRIMEIRO A GENTE VIU PARABOLÓIDES, HIPERBOLÓIDES, ELIPSÓIDES, ESFERAS ("CIRCULÓIDES") EM $\mathbb{R}^3$, E SÓ AGORA ESTAMOS VENDO CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^3$?

OS "ÓIDES" SÃO DA FORMA $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$, E CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^3$ SÃO DA FORMA $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}_1, \text{EQUAÇÃO}_2\}$

NO EXEMPLO (a):

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=25, x=4\}$

CÍRCULOS,
PARÁBOLAS
ELIPSES,
HIPERBOL
(NÃO-"Ó
EM $\mathbb{R}^3$
CONTIDAS
MAS NEC
INTERS
QUADR
CON
PL

$C' = \{($

$C'' = \{$

$F(x,$

E ES
PERM
CURVA
E A
$C'' =$

$.2^2,$

$2)...$

$z)=0\}$

$x+by+cz=k\}.$

$\pi,$

$,0),$

AR

$)...$

$3,0)\in\pi,$

UNDO

$cz=k$

$+0\cdot 0$

$|4x+1y+0z=15\}$

...E O CENTRO DO CÍRCULO $E\cap E'$ ESTÁ NA INTERSEÇÃO

$$\pi\cap\{C_0+t\overrightarrow{C_0C_0'}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$
$$\{(0,0,0)+t\overrightarrow{(4,1,0)}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$
$$\{(4t,t,0)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

EXERCÍCIO: CALCULE A INTERSEÇÃO DE $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,4x+1y+0z=15\}$ COM $r=\{(4t,t,0)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

$$4(4t)+1(t)+0\cdot 0=15$$
$$17t=15$$
$$t=\frac{15}{17}$$
$$P=\left(4\tfrac{15}{17},\tfrac{15}{17},0\right)\in\pi\cap r.$$

PORQUE É PRIMEIRO A GENTE VIU PARABOLOÍDES, HIPERBOLOÍDES, ELIPSOÍDES, ESFERAS ("CIRCULOÍDES") EM $\mathbb{R}^3$, E SÓ AGORA ESTAMOS VENDO CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^3$?

OS "ÓIDES" SÃO DA FORMA $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,\text{EQUAÇÃO}\}$ E CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^3$ SÃO DA FORMA $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,\text{EQUAÇÃO}_1,\ \text{EQUAÇÃO}_2\}$

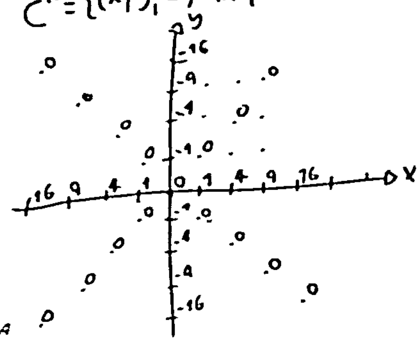
NO EXEMPLO (a'),

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=25,\ x=4\}$

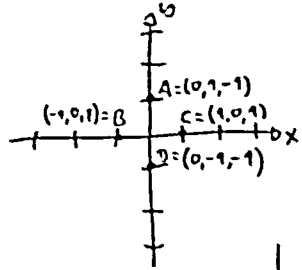
CÍRCULOS, PARÁBOLAS, ELIPSES, HIPÉRBOLES (NÃO-"ÓIDES") EM $\mathbb{R}^3$ ESTÃO CONTIDAS EM PLANOS... MAS NEM TODA INTERSEÇÃO DE QUÁDRICAS ESTÁ CONTIDA NUM PLANO!... SEJAM:

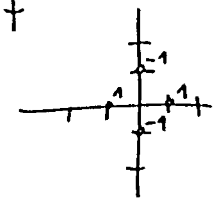
$$C'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2=1\},$$
$$C''=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z=x^2-y^2\},$$
$$F(x,y)=x^2-y^2,$$

E ESTE DIAGRAMA NOS PERMITE VISUALIZAR AS CURVAS DE NÍVEL DA F E A SUPERFÍCIE $C''=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z=F(x,y)\}$...



ALGUNS PONTOS DE $C'\cap C''$:





SEJAM:

$A=(0,1,-1),$
$B=(-1,0,1),$
$C=(1,0,1),$
$D=(0,-1,-1),$
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
$\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$
$\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,ax+by+cz=k\}$

TAL QUE: $\vec{w}\perp\pi$, $A\in\pi$.

VERIFIQUE QUE $A,B,C\in\pi$, E QUE $D\notin\pi$; ALÉM DISTO ENCONTRE UM PONTO DA FORMA $(0,-1,z)\in\pi$.

(MORAL: $C'\cap C''$ NÃO ESTÁ CONTIDO NUM PLANO!)

PRA CASA: PROBLEMAS DO BOULOS, SEÇÕES 24C E 24D. ELES FALAM MUITO DE TANGÊNCIA ENTRE PLANO E ESFERA OU ENTRE DUAS ESFERAS, MAS AS IDÉIAS QUE FALTAM SÃO BEM SIMPLES E DEVE DAR PRA VOCÊ SE VIRAR! ☺