UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS

Gabarito da Verificação de Reposição Geometria Analítica e Cálculo Vetorial – 2/2014
06/12/2014

Geometria Analítica Plana

1. Considere os pontos $A = (1, 4)$, $B = (7, -2)$ e seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro $C = (6, 4)$ e raio $\sqrt{5}$.
   (a) [1,5 pts] Ache as equações cartesiana e paramétricas da mediatriz do segmento da reta com extremidades no pontos A e B.
   (b) [1,5 pts] Determine os pontos da circunferência $\mathcal{C}$ equidistantes de A e B.

Solução:

(a)

0,5

Como $\overrightarrow{AB} = (6, -6)$ sabemos que $\vec{n} = (1, -1)$ é um vetor normal à mediatriz. Neste caso a equação tem a forma

$$m: \ x - y + c = 0$$

0,5

Para determinar c precisamos deteminar um ponto da reta m, que neste caso será o ponto médio de AB, a saber,

$$M_{AB} = (4, 1).$$

Substituindo as coordenadas de M_{AB} nesta equação obtemos $c = -3$. Logo a equação cartesina da reta é

$$x - y - 3 = 0.$$

0,5

Para às equações paramétricas, basta observar que $\overrightarrow{v} = (1, 1)$ é um vetor diretor de m, daí, as equações paramétrica são dadas por:

$$(x, y) = (4 + t, 1 + t), \ t \in \mathbb{R}.$$

(b)

0,5

Os pontos equidistantes de A e B são todos pontos da mediatriz. Neste caso são pontos da forma $P_t = (4 + t, 1 + t)$.

0,5

A equação de $\mathcal{C}$ é dada por

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

0,5

Neste caso, substituindo as coordenadas de P_t na equação de $\mathcal{C}$ obtemos $t = 2$ ou $t = 5$. Logo os pontos procurados são:

$$P_1 = (5, 2) \text{ e } P_4 = (8, 5).$$

2. [1 pt] Identifique e faça um esboço da cônica

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Solução:

0,5

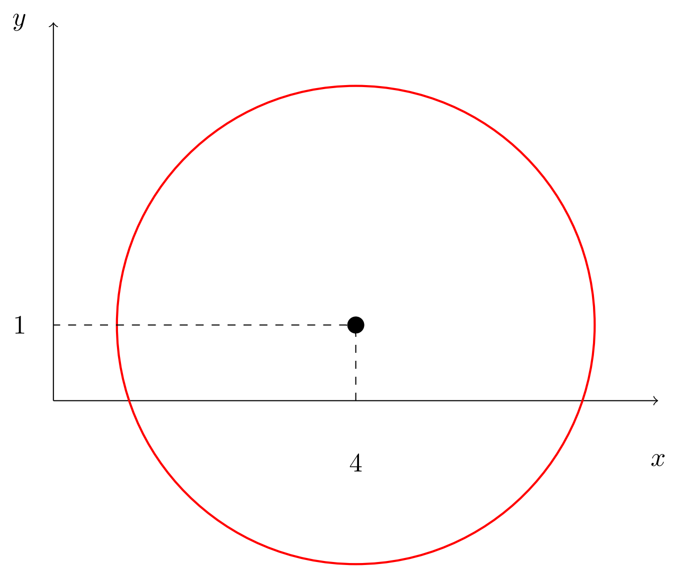
Completando quadrado:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 8x + y^2 - 2y + 7 = 0 \\
\Rightarrow &(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 7 = 0 \\
\Rightarrow &(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10.
\end{aligned}$$

Com isso temos que a cônica é um círculo de raio $\sqrt{10}$ e centro $(4, 1)$.

0,5

Esboço;



Geometria Analítica Espacial

Considere o ponto $P = (1, 2, 1)$, os planos $\pi_1 : x + y - z - 1 = 0$, $\pi_2 : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ e $\pi_3 : x + 2y + z - 1 = 0$ e considere as retas $m = \pi_1 \cap \pi_2$, $r : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, -6, -5)$ e $s : (-1, 1, 1) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Determine:
   (a) [1 pt] As equações paramétricas da reta m.
   (b) [1,5 pts] A distância entre r e m.
   (c) [1,5 pts] A reta que passa por P e é perpendicular a s.
   (d) [1 pt] A distância entre s e π_3.

Solução:

(a)

0,3

Sabemos que $\overrightarrow{n}_1 = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (2, -3, 4)$ são vetores normais a π_1 e π_2 respectivamente. Neste caso, um vetor diretor para m é dado por:

$$\overrightarrow{v}_m := \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = (1, -6, -5)$$

0,5

Precisamos encontrar uma ponto que pertença a m. Para isso, fazemos $x = 0$ nas equações de π_1 e π_2 e obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \quad y & -z & = 1 \\ -3y & +4z & = 5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $y = 9$ e $z = 8$, portanto o ponto procurado é $P_m = (0, 9, 8)$

0,2

Assim as equações paramétrica de m são:

$$m : \begin{cases} x = t \\ y = 9 - 6t \\ z = 8 - 5t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b)

0,5

Como os vetores diretores de m e r são exatamente os mesmos temos que elas são paralelas ou coincidentes.

0,5

Note que $P_r = (2,1,0) \in r$, assim temos que:

$$\overrightarrow{P_rP_m} = (-2,8,8),$$

$$\vec{v}_m \times \overrightarrow{P_rP_m} = (-8,2,-4),$$

$$\|\vec{v}_m \times \overrightarrow{P_rP_m}\| = 2\sqrt{21} \quad \text{e} \quad \|\vec{v}_m\| = \sqrt{62}.$$

0,5

Com isso, sabemos que a distância é dada por

$$d(r,m) = \frac{\|\vec{v}_m \times \overrightarrow{P_rP_m}\|}{\|\vec{v}_m\|} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{62}}.$$

(c)

0,5

Sabemos que um ponto sobre s é da forma $P_s := (-1, 1-t, 1+2t)$. Devemos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PP_s}$ seja perpendicular a $\vec{v}_s = (0,-1,2)$.

0,5

Note que $\overrightarrow{PP_s} = (-2,-1-t,2t)$. Daí,

$$\overrightarrow{PP_s} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow 1 + 5t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}.$$

Com isso, temos que $\overrightarrow{PP_s} = \left(-2, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

0,5

Assim como a reta procurada passa por $P = (1,2,1)$ e tem direção dada pelo vetor $\overrightarrow{PP_s} = \left(-2, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ temos que as equações paramétrica são:

$$m : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t/5 \\ z = 1 - 2t/5, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(d)

0,5

Sabemos que $\vec{n}_3 = (1, 2, 1)$ é um vetor normal ao plano π_3. Como $\vec{n}_3 \cdot \vec{v}_s = 0$ temos que s é paralelo ou está contida em π_3. Neste caso basta calcular a distância de um ponto da reta s a π_3.

0,5

Note que $Q = (-1, 1, 1) \in s$, daí,

$$d(s, \pi_3) = d(Q, \pi_3) = \frac{|-1+2+1-1|}{\|\vec{n}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

4. [1 pt] Mostre que r e s são reversas.

Solução:

1,0

Sabemos que $Q = (-1, 1, 1) \in s$, $P_r = (2, 1, 0) \in r$ e que $\vec{v}_r = (1, -6, -5)$ e $\vec{v}_s = (0, -1, 2)$ são vetores diretores de r e s respectivamente. Neste caso, basta mostrar que o produto misto entre $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ e $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3, 0, 1)$ é diferente de zero. De fato,

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PrPs}] = \det \begin{vmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 50.$$