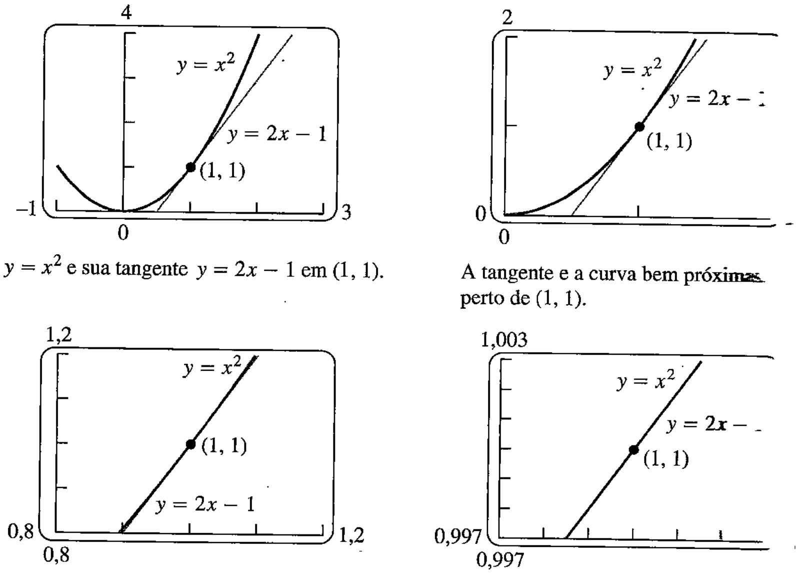
3.10 Linearização e diferenciais

Às vezes, podemos aproximar funções complicadas usando funções mais simples que, além de serem mais fáceis de trabalhar, fornecem a precisão desejada para aplicações específicas. As funções de aproximação discutidas nesta seção são denominadas *linearizações* e se baseiam em retas tangentes. Outras funções de aproximação, como os polinômios, serão discutidas no Capítulo 11, no volume II.

Vamos apresentar as novas variáveis dx e dy, chamadas *diferenciais*, e defini-las de um modo que transformará a notação de Leibniz para a derivada dy/dx em uma verdadeira razão. Usaremos dy para estimar o erro da medida e a sensibilidade de uma função à variação. A aplicação dessas idéias vai nos dar, então, uma prova precisa da regra da cadeia (Seção 3.5).

Linearização

Como você pode ver na Figura 3.56, a tangente à curva $y = x^2$ fica perto da curva próximo ao ponto de tangência. Em um pequeno intervalo, de cada lado do ponto, os valores de y ao longo da tangente fornecem boas aproximações para os valores de y na curva. Observamos esse fenômeno ampliando os dois gráficos no ponto de tangência ou analisando as tabelas com valores da diferença entre $f(x)$ e sua reta tangente próximo à abscissa do ponto de tangência. Localmente, toda curva derivável se comporta como uma reta.



$y = x^2$ e sua tangente $y = 2x - 1$ em (1, 1).

A tangente e a curva bem próximas perto de (1, 1).

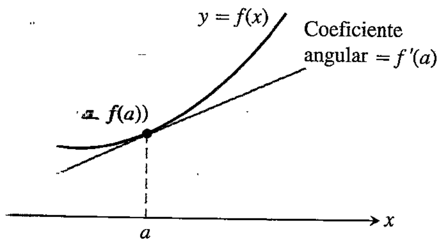
A tangente e a curva muito próximas ao longo de todo o intervalo x apresentado.

A tangente e a curva ainda mais próximas. A tela do computador não consegue distinguir a tangente da curva nesse intervalo de x.

FIGURA 3.56 Quanto mais ampliamos o gráfico de uma função próximo a um ponto onde a função é derivável, mais "reto" o gráfico se torna e mais se assemelha à sua tangente.

Em geral, a tangente a $y = f(x)$ no ponto $x = a$, onde f é derivável (Figura 3.57) passa pelo ponto $(a, f(a))$, então sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



RA 3.57 A tangente à curva $y = f(x)$ $= a$ é a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Assim, essa reta tangente é o gráfico da função linear

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Enquanto essa reta permanecer próximo ao gráfico de f, $L(x)$ fornecerá uma boa aproximação de $f(x)$.

Definições Linearização, aproximação linear padrão
Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a **linearização** de f em a. A aproximação

$$f(x) \approx L(x)$$

de f por L é a **aproximação linear padrão** de f em a. O ponto $x = a$ é o **centro** da aproximação.

EXEMPLO 1 Determinando uma linearização

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 0$ (Figura 3.58).

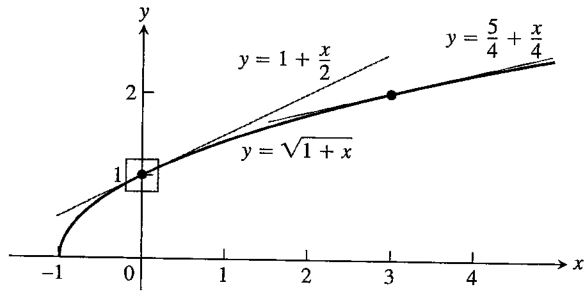


FIGURA 3.58 O gráfico de $y = \sqrt{1+x}$ e sua linearização quando $x = 0$ e $x = 3$. A Figura 3.59 apresenta uma vista ampliada na região destacada ao redor de 1, no eixo y.

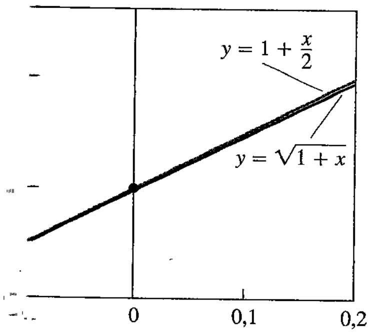
SOLUÇÃO Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x\right)^{-1/2}$$

temos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$, o que leva à linearização

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - 0\right) = 1 + \frac{x}{2}$$

Veja a Figura 3.59.



RA 3.59 Vista ampliada da da Figura 3.58.

Observe como a aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ do Exemplo 1 é precisa para valores de x próximos de zero. Conforme nos afastamos de zero, perdemos a precisão. Por exemplo, para $x = 2$, a linearização fornece 2 como a aproximação de $\sqrt{3}$, que não é exata nem para uma única casa decimal.

Aproximação	Valor real	Valor real – aproximação
$\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,10$	1,095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1,05} \approx 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$	1,024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{0,005}{2} = 1,00250$	1,002497	$<10^{-5}$

Não se deixe iludir pelos cálculos anteriores, pensando que qualquer coisa feita por meio da linearização será melhor se for feita com uma calculadora. Na prática, nunca utilizaríamos a linearização para determinar uma raiz quadrada. A utilidade da linearização está em sua capacidade de substituir fórmulas complicadas por uma mais simples ao longo de um intervalo de valores. Se precisássemos trabalhar com $\sqrt{1+x}$ para x próximo a 0 e pudéssemos tolerar o pequeno erro envolvido, em vez disso, poderíamos trabalhar com $1 + (x/2)$. Obviamente, precisamos saber qual o tamanho do erro. Falaremos mais sobre estimativa de erro no Capítulo 11, Volume II.

Uma aproximação linear normalmente perde a precisão longe de seu centro. Como a Figura 3.58 sugere, a aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ provavelmente é imprecisa para ser usada próximo a $x = 3$. Nessa região, precisamos saber a linearização quando $x = 3$.

EXEMPLO 2 Determinando uma linearização em outro ponto

Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 3$.

SOLUÇÃO Calculamos a equação definindo $L(x)$ em $a = 3$. Com

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

temos que

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

Quando $x = 3{,}2$, a linearização do Exemplo 2 fornece

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3{,}2}{4} = 1{,}250 + 0{,}800 = 2{,}050$$

que difere do valor real $\sqrt{4{,}2} \approx 2{,}04939$ em menos de um milésimo. A linearização do Exemplo 1 fornece

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx 1 + \frac{3{,}2}{2} = 1 + 1{,}6 = 2{,}6$$

um resultado que está errado em mais de 25%.

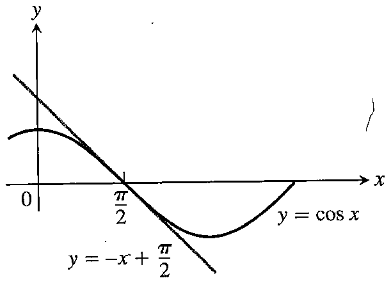


FIGURA 3.60 O gráfico de $f(x) = \cos x$ e sua linearização quando $x = \pi/2$. Próximo a $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Exemplo 3).

EXEMPLO 3 Determinando uma linearização para a função cosseno

Determine a linearização de $f(x) = \cos x$ quando $x = \pi/2$ (Figura 3.60).

SOLUÇÃO Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, e $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, temos

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Uma aproximação linear importante para raízes e potências é

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \quad (x \text{ próximo de 0, sendo } k \text{ qualquer número})$$

(Exercício 15). Essa aproximação, boa para valores de x suficientemente próximos de zero, tem uma vasta aplicação. Por exemplo, quando x é pequeno,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1; \text{ substituindo } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3; \text{ substituindo } x \text{ por } 5x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2 \text{ substituindo } x \text{ por } -x^2.$$

Diferenciais

Às vezes, usamos a notação de Leibniz dy/dx para representar a derivada de y em relação a x. Ao contrário do que parece, não se trata de uma razão. Agora, introduziremos duas novas variáveis dx e dy com a propriedade de que, caso a razão exista, esta será igual à derivada.

Definição Diferencial

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A **diferencial dx** é uma variável independente. A **diferencial dy** é

$$dy = f'(x)\,dx$$

Ao contrário da variável independente dx, a variável dy é sempre dependente. Ela depende tanto de x quanto de dx. Se atribuímos a dx um valor específico e x é um número particular no domínio da função f, então o valor numérico de dy é determinado.

EXEMPLO 4 Determinando a diferencial dy

(a) Determine dy se $y = x^5 + 37x$.
(b) Determine o valor de dy quando $x = 1$ e $dx = 0{,}2$.

SOLUÇÃO

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$
(b) Substituindo $x = 1$ e $dx = 0{,}2$ na expressão de dy, temos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0{,}2 = 8{,}4$$

O significado geométrico das diferenciais é mostrado na Figura 3.61. Seja $x = a$ e estabeleçamos $dx = \Delta x$. A variação correspondente em $y = f(x)$ é

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a)$$

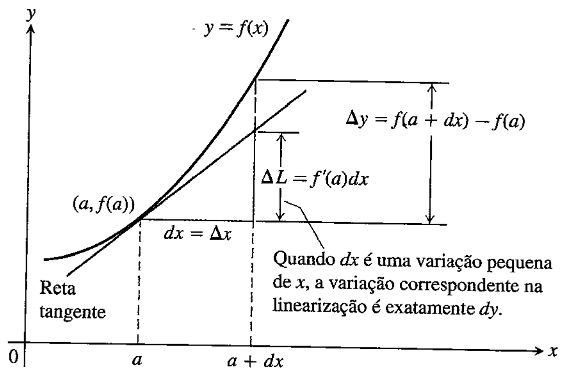


FIGURA 3.61 Geometricamente, a diferencial dy é a variação ΔL na linearização de f quando $x = a$ varia em uma quantidade $dx = \Delta x$.

A variação correspondente em L é

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \\ &= f'(a)\,dx\end{aligned}$$

Ou seja, a variação da linearização de f equivale justamente ao valor da diferencial dy quando $x = a$ e $dx = \Delta x$. Portanto, dy representa a medida em que a reta tangente sobe ou desce quando x varia em uma quantidade $dx = \Delta x$.

Se $dx \neq 0$, então o quociente da diferencial dy pela diferencial dx é igual à derivada $f'(x)$, pois

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Às vezes, escrevemos

$$df = f'(x)\,dx$$

em vez de $dy = f'(x)\,dx$, denominando df a **diferencial de f**. Por exemplo, se $f(x) = 3x^2 - 6$, então

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx$$

Toda fórmula de diferenciação do tipo

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(\text{sen}\,u)}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

tem uma forma diferencial do tipo

$$d(u + v) = du + dv \qquad \text{ou} \qquad d(\text{sen}\,u) = \cos u\,du$$

EXEMPLO 5 Determinando diferenciais de funções

(a) $d(\text{tg}\,2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x + 1)^2}$

Estimando com diferenciais

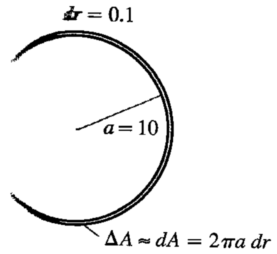
Suponha que saibamos o valor de uma função derivável $f(x)$ em um ponto a e que queiramos prever a variação que esse valor sofrerá se formos para um ponto $a + dx$ próximo. Se dx for pequeno, observamos pela Figura 3.61 que Δy é aproximadamente igual à diferencial dy. Uma vez que

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y$$

a aproximação diferencial resulta em

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

onde $dx = \Delta x$. Assim, a aproximação $\Delta y \approx dy$ pode ser usada para calcular $f(a + dx)$ quando $f(a)$ é conhecido e dx é pequeno.



[illegible]A **3.62** Quando dr é pe- [illegible] comparado a a, como é [illegible] $dr = 0{,}1$ e $a = 20$, a diferen- [illegible] $= 2\pi a\, dr$ oferece uma ma- [illegible] de estimar a área do círculo [illegible] $r = a + dr$ (Exemplo 6).

EXEMPLO 6 Estimando com diferenciais

O raio r de uma circunferência aumenta de $a = 10$ m para 10,1 m (Figura 3.62). Utilize dA para estimar o aumento na área A da circunferência. Estime a área do círculo aumentado e compare essa estimativa com a área real.

SOLUÇÃO Como $A = \pi r^2$, o aumento estimado é
$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0{,}1) = 2\pi \text{ m}^2$

Logo,

$$\begin{aligned} A(10 + 0{,}1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi \end{aligned}$$

A área de um círculo de raio 10,1 m é de aproximadamente $102\pi \text{ m}^2$. A verdadeira variação é

$$\begin{aligned} A(10{,}1) &= \pi(10{,}1)^2 \\ &= 102{,}01\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

O erro em nossa estimativa é $0{,}01\pi \text{ m}^2$, que corresponde à diferença $\Delta A - dA$.

Erro na aproximação diferencial

Suponha que $f(x)$ seja uma função derivável em $x = a$ e que $dx = \Delta x$ seja um incremento de x. Há duas maneiras de descrever a variação de f à medida que x varia de a para $a + \Delta x$:

Variação real:	$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
Estimativa diferencial:	$df = f'(a)\, \Delta x$

Em que medida df se sai bem aproximando Δf?

Medimos o erro da aproximação subtraindo df de Δf:

$$\begin{aligned} \text{Erro da aproximação} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{Chame esta parte de } \epsilon} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Conforme $\Delta x \to 0$, a razão incremental

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima de $f'(a)$ (lembre-se da definição de $f'(a)$), então a quantidade entre parênteses se torna um número muito pequeno (daí, a notação ϵ). Na verdade, $\epsilon \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Quando Δx é pequeno, o erro de aproximação $\epsilon\, \Delta x$ é menor ainda.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{variação}\\\text{verdadeira}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{variação}\\\text{estimada}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{erro}}$$

Embora não saibamos exatamente a magnitude do erro (e não faremos muito progresso nesse aspecto até o Capítulo 11, no Volume II), há algo que vale a pena observar aqui, que é a *forma* assumida pela equação.

Variação de y = f(x) próximo de x = a

Se $y = f(x)$ é derivável quando $x = a$ e x varia de a para $a + \Delta x$, então a variação Δy de f é dada por uma equação na forma

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad (1)$$

na qual $\epsilon \to 0$ à medida que $\Delta x \to 0$.

No Exemplo 6, descobrimos que

$$\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{\text{erro}})\ \text{m}^2$$

Logo, o erro de aproximação é $\Delta A - dA = \epsilon\,\Delta r = 0{,}01\pi$ e $\epsilon = 0{,}001\pi/\Delta r = 0{,}01\pi/0{,}1 = 0{,}1\pi$ m.

A Equação (1) nos permite levar a prova da regra da cadeia a uma conclusão bem-sucedida.

PROVA DA REGRA DA CADEIA Nosso objetivo é mostrar que se $f(u)$ é uma função derivável de u, e $u = g(x)$ é uma função derivável de x, então a função composta $y = f(g(x))$ é uma função derivável de x.

Mais precisamente, se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$, então a composta é derivável em x_0 e

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Seja Δx um incremento de x, e Δu e Δy os incrementos correspondentes em u e y. Aplicando a Equação (1), temos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\,\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

onde $\epsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De modo similar,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\,\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

onde $\epsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Observe também que $\Delta u \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Combinando as equações para Δu e Δy, temos

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

logo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2\,g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

Como ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero conforme Δx tende a zero, três dos quatro termos da direita desaparecem no limite, restando

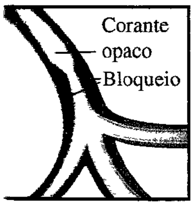
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Isso conclui a prova.

Sensibilidade à variação

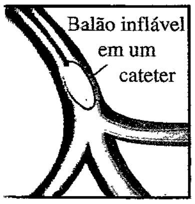
A equação $df = f'(x)\,dx$ nos mostra o quanto o valor de f é *sensível* a uma variação de x. Quanto maior o valor de f' em x, maior é o efeito de uma determinada variação dx. Conforme nos deslocamos de a para um ponto $a + dx$ próximo, podemos descrever a variação de f de três maneiras:

	Real	**Estimada**
Variação absoluta	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Variação relativa	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Variação percentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$



...grafia

...te opaco é injetado em uma ... parcialmente obstruída para ... interior visível aos raios X. ...ela a localização e a gravidade ...ção.



...plastia

...eter com um balão na extre-...e é inflado no interior da artéria ... alargá-la no local da obstrução.

EXEMPLO 7 Determinando a profundidade de um poço

Você deseja calcular a profundidade de um poço a partir da equação $s = 4{,}9t^2$ determinando quanto tempo leva para uma pedra pesada que você derruba da entrada do poço encontrar a água no fundo deste. Qual será a sensibilidade de seus cálculos a um erro de 0,1 s na medição do tempo?

SOLUÇÃO O tamanho de ds na equação

$$ds = 9{,}8t\,dt$$

depende do tamanho de t. Se $t = 2$ s, a variação causada por $dt = 0{,}1$ é de cerca de

$$ds = 9{,}8(2)(0{,}1) = 1{,}96 \text{ m}$$

Três segundos depois, quando $t = 5$ s, a variação causada pelo mesmo dt é

$$ds = 9{,}8(5)(0{,}1) = 4{,}9 \text{ m}$$

A profundidade estimada do poço difere da real por uma distância maior quanto maior for o tempo que a pedra leva para atingir a água, para dado erro na medição do tempo.

EXEMPLO 8 Desobstruindo artérias

No final da década de 1830, o fisiologista francês Jean Poiseuille descobriu a fórmula que hoje empregamos para predizer quanto o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja restabelecido. Sua fórmula

$$V = kr^4$$

diz que o volume V de líquido correndo por um pequeno vaso ou tubo por unidade de tempo, sob pressão constante, é uma constante multiplicada pela quarta potência do raio r do duto. Como é que um aumento de 10% em r afeta V?

SOLUÇÃO As diferenciais de r e V estão relacionadas pela equação

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr$$

A variação relativa de V é

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}$$

A variação relativa de V é quatro vezes a variação relativa de r, portanto um aumento de 10% em r acarretará um aumento de 40% no fluxo.

EXEMPLO 9 Convertendo massa em energia

A segunda lei de Newton,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$$

vale desde que admitamos que a massa seja constante, mas sabemos que isso não é estritamente verdadeiro, pois a massa de um corpo aumenta com a velocidade. Na fórmula corrigida de Einstein, a massa possui o valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde a "massa de repouso" m_0 representa a massa de um corpo que não está se deslocando e c é a velocidade da luz, cerca de 300.000 km/s. Use a aproximação

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$$

para estimar o aumento Δm na massa resultante do aumento da velocidade v.

SOLUÇÃO Quando v é muito pequena comparada a c, a razão v^2/c^2 está próxima de zero e é seguro utilizar a aproximação

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{Equação (2) com } x = \frac{v}{c}$$

para obter

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

ou

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

A Equação (3) expressa o aumento da massa que resulta do acréscimo de velocidade v.

INTERPRETAÇÃO ENERGÉTICA Na física newtoniana, $(1/2)m_0v^2$ é a energia cinética (Ec) do corpo, e, se reescrevemos a Equação (3) na forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

vemos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{Ec})$$

ou

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{Ec})$$

Em outras palavras, a variação da energia cinética $\Delta(\text{Ec})$ ao se variar a velocidade de 0 para a velocidade v é aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, a variação da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz. Usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, vemos que uma pequena variação da massa pode causar uma grande variação da energia.

Exercícios 3.10

Determinando linearizações

Nos exercícios 1–5, determine a linearização $L(x)$ de $f(x)$ quando $x = a$.

$f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$

$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$

$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = \pi$

Aproximações lineares comuns quando $x = 0$ Determine as linearizações das seguintes funções quando $x = 0$.

(a) $\operatorname{sen} x$ (b) $\cos x$ (c) $\operatorname{tg} x$

(d) e^x (e) $\ln(1 + x)$

Linearização para aproximar

Você está em busca de linearizações capazes de substituir as funções dos exercícios 7–14 dentro de intervalos que incluam os pontos dados x_0. Para facilitar seu trabalho, escolha linearizações cujo centro não esteja em $x = a$, mas em um valor próximo no qual a função e sua derivada sejam fáceis de calcular. Qual linearização você usaria em cada caso?

$f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0{,}1$

$f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0{,}9$

$f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0{,}9$

$f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8{,}1$

$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8{,}5$

$f(x) = \frac{x}{x + 1}, \quad x_0 = 1{,}3$

$f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = -0{,}1$

$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad x_0 = \pi/12$

Aproximação $(1 + x)^k \approx 1 + kx$

15. Mostre que a linearização de $f(x) = (1 + x)^k$ em $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

16. Use a aproximação linear $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para determinar uma aproximação da função $f(x)$ para valores de x próximos a zero.

(a) $f(x) = (1 - x)^6$ (b) $f(x) = \frac{2}{1 - x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$ (d) $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

(e) $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ (f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{2 + x}\right)^2}$

17. **Mais rápido que uma calculadora** Use a aproximação $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar

(a) $(1{,}0002)^{50}$ (b) $\sqrt[3]{1.009}$

18. Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{x+1} + \operatorname{sen} x$ quando $x = 0$. Como ela está relacionada com as linearizações individuais de $\sqrt{x+1}$ e de $\operatorname{sen} x$ quando $x = 0$?

Derivadas na forma diferencial

Nos exercícios 19–38 determine dy.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
20. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
21. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$
22. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$
23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$
24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$
25. $y = \operatorname{sen}(5\sqrt{x})$
26. $y = \cos(x^2)$
27. $y = 4\operatorname{tg}(x^3/3)$
28. $y = \sec(x^2 - 1)$
29. $y = 3\operatorname{cosec}(1 - 2\sqrt{x})$
30. $y = 2\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
31. $y = e^{\sqrt{x}}$
32. $y = xe^{-x}$
33. $y = \ln(1 + x^2)$
34. $y = \ln\left(\frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}\right)$
35. $y = \operatorname{tg}^{-1}(e^{x^2})$
36. $y = \operatorname{cotg}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \cos^{-1} 2x$
37. $y = \sec^{-1}(e^{-x})$
38. $y = e^{\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x^2+1}}$

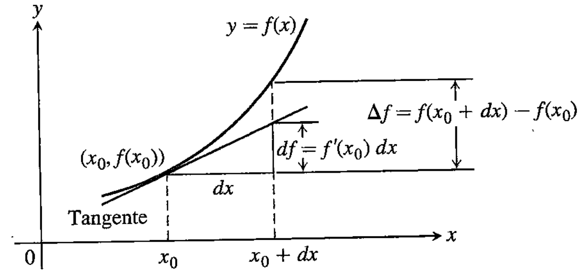
Erro de aproximação

Nos exercícios 39–44, o valor de cada função $f(x)$ varia quando x varia de x_0 para $x_0 + dx$. Determine

(a) a variação $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;

(b) o valor da estimativa $df = f'(x_0)\, dx$;

(c) o erro de aproximação $|\Delta f - df|$.



39. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0, \quad dx = 0{,}1$

40. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0{,}1$

41. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0{,}1$

42. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0{,}1$

43. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0{,}5, \quad dx = 0{,}1$

44. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0{,}1$

Estimativas diferenciais de variação

Nos exercícios 45–50, escreva uma fórmula diferencial que permita estimar a variação dada do volume ou da área da superfície.

45. A variação do volume $V = (4/3)\pi r^3$ de uma esfera quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$.

46. A variação do volume $V = x^3$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de x_0 para $x_0 + dx$.

47. A variação na área da superfície $S = 6x^2$ de um cubo quando o comprimento das arestas varia de x_0 para $x_0 + dx$.

48. A variação na área da superfície lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de um cone circular reto quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$ e a altura permanece a mesma.

49. A variação do volume $V = \pi r^2 h$ de um cilindro circular reto quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$ e a altura permanece a mesma.

50. A variação na área da superfície lateral $S = 2\pi rh$ de um cilindro circular reto quando a altura varia de h_0 para $h_0 + dh$ e o raio permanece o mesmo.

Aplicações

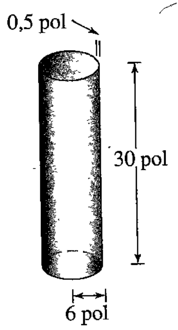
51. O raio de uma circunferência aumentou de 2 m para 2,02 m.

(a) Estime a variação resultante na área.

(b) Expresse a estimativa como uma porcentagem da área inicial da circunferência.

52. O diâmetro de uma árvore era 10 pol. Durante o ano seguinte, a circunferência aumentou 2 pol. Quanto variou aproximadamente o diâmetro da árvore? E a área da seção transversal?

53. **Estimando o volume** Estime o volume de material presente em uma embalagem cilíndrica de 30 pol de altura, 6 pol de raio e 0,5 pol de espessura.



54. **Estimando a altura de um edifício** Um agrimensor a 3[illegible] pés da base de um edifício mede o ângulo de elevação do topo do edifício como 75°. Que exatidão deve apresentar a medição desse ângulo para que o erro percentual na estimativa da altura do edifício seja inferior a 4%?

55. **Tolerância** A altura e o raio de um cilindro reto são iguais, de modo que o volume desse cilindro é dado por $V = \pi h^3$. O volume deve ser calculado com erro não maior que 1% em relação ao valor real. Determine aproximadamente o maior erro que pode ser tolerado na medida de h, expressando-o como porcentagem de h.

56. **Tolerância**

(a) Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do diâmetro interno de um tanque cilíndrico de armazenagem com 10 m de altura para que o cálculo de seu volume fique *a* 1% do valor real?

(b) Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do diâmetro externo desse tanque para que o cálculo da quantidade de tinta para pintar sua parede fique a no máximo 5% da quantidade real?

57. **Cunhando moedas** Uma empresa foi contratada para cunhar moedas para o governo federal. Que variação pode ser tolerada no raio r das moedas para que o peso das moedas não exceda 1/1.000 do peso ideal? Suponha que não haja variação da espessura das moedas.

Lucro O lucro P de certo fabricante, ao vender x itens, é

$$P(x) = 200xe^{-x/400}$$

Estime a variação e a variação percentual conforme as vendas aumentam de $x = 145$ para $x = 150$ itens.

Efeito das manobras de vôo sobre o coração A quantidade de trabalho realizado pela principal câmara de bombeamento do coração, o ventrículo esquerdo, é dada pela equação

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

onde W é o trabalho por unidade de tempo, P é a pressão arterial média, V é o volume de sangue bombeado por unidade de tempo, δ ("delta") é a densidade do sangue, v é a velocidade média do sangue ejetado e g é a aceleração da gravidade.

Quando P, V, δ e v permanecem constantes, W se torna uma função de g e a equação toma a forma de

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a,\ b \text{ constantes})$$

Como membro da equipe médica da Nasa, você quer saber qual é a sensibilidade de W às variações aparentes de g causadas pelas manobras de vôo, e isso depende do valor inicial de g. Como parte de seu estudo, você decide comparar o efeito em W causado por dada variação dg na superfície da Lua, onde $g = 5{,}2$ pés/s^2, com o efeito que a mesma variação dg teria na Terra, onde $g = 32$ pés/s^2. Utilize a equação simplificada para determinar a razão dW_{Lua} sobre dW_{Terra}.

Medindo a aceleração da gravidade Quando o comprimento L do pêndulo de um relógio é mantido constante, controlando-se a temperatura, o período T do pêndulo depende da aceleração g da gravidade. Portanto, o período variará ligeiramente à medida que o relógio for deslocado para diferentes posições na superfície da Terra, dependendo das variações de g. Acompanhando-se as variações de ΔT, podemos estimar a variação de g pela equação $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ que relaciona T, g e L.

(a) Mantendo-se L constante e sendo g a variável independente, calcule dT e use-o para responder aos itens (b) e (c).

(b) Se g aumenta, T vai aumentar ou diminuir? Um relógio de pêndulo adiantará ou atrasará? Explique.

(c) Um relógio cujo pêndulo mede 100 cm é deslocado de um lugar (onde $g = 980$ cm/s^2) para outro. Isso aumenta o período em $dT = 0{,}001$ s. Determine dg e estime o valor de g nesse outro lugar.

61. Mede-se a aresta de um cubo em 10 cm com um erro de 1%. O volume do cubo será calculado a partir dessa medição. Estime o erro percentual no cálculo do volume.

62. Aproximadamente que exatidão deve ter a medição do lado de um quadrado para termos certeza de que o cálculo da área não se afastará mais de 2% do valor real?

63. Mede-se o diâmetro de uma esfera em 100 ± 1 cm e o volume é calculado a partir dessa medição. Estime o erro percentual no cálculo do volume.

64. Estime o erro percentual admissível na medição do diâmetro D de uma esfera se o volume pode ser calculado corretamente com uma margem de erro de 3%.

65. *(Continuação do Exemplo 7.)* Mostre que um erro de 5% na medição de t causará um erro de cerca de 10% no cálculo de s a partir da equação $s = 16t^2$.

66. *(Continuação do Exemplo 8.)* Em qual percentual r deveria ser aumentado para aumentar V em 50%?

Teoria e exemplos

67. Mostre que a aproximação de $\sqrt{1+x}$ por sua linearização na origem deve melhorar à medida que $x \to 0$, mostrando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+(x/2)} = 1$$

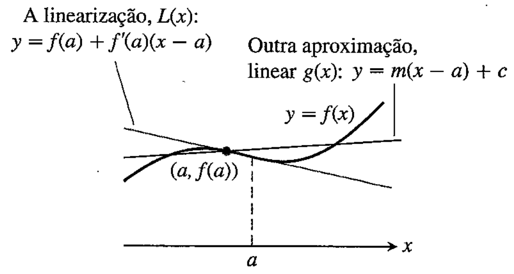
68. Mostre que a aproximação de tg x por sua linearização na origem deve melhorar à medida que $x \to 0$, mostrando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

69. **A linearização é a melhor aproximação linear** (Por isso utilizamos a linearização.) Suponha que $y = f(x)$ seja derivável quando $x = a$ e que $g(x) = m(x - a) + c$ seja uma função linear em que m e c são constantes. Se o erro $E(x) = f(x) - g(x)$ for suficientemente pequeno perto de $x = a$, poderemos pensar em utilizar g como aproximação linear de f em vez da linearização $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demonstre que se impusermos a g as condições

1. $E(a) = 0$ — O erro de aproximação é nulo quando $x = a$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ — O erro é desprezível quando comparado com $x - a$

então $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Assim, a linearização $L(x)$ fornece a única aproximação cujo erro é zero para $x = a$, sendo ainda desprezível em relação a $x - a$.



70. Aproximações quadráticas

(a) Seja $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ uma aproximação quadrática de $f(x)$ quando $x = a$ com as seguintes propriedades:

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$

Determine os coeficientes b_0, b_1 e b_2.

(b) Determine a aproximação quadrática de $f(x) = 1/(1 - x)$ quando $x = 0$.

(c) **T** Esboce o gráfico de $f(x) = 1/(1 - x)$ e sua aproximação quadrática quando $x = 0$. Depois, amplie os dois gráficos no ponto $(0, 1)$. Comente o que você observa.

(d) **T** Determine a aproximação quadrática de $g(x) = 1/x$ em $x = 1$. Trace juntamente os gráficos de g e de sua aproximação quadrática. Comente o que você observa.

(e) **T** Determine a aproximação quadrática de $h(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 0$. Trace juntamente os gráficos de h e de sua aproximação quadrática. Comente o que você observa.

(f) Quais são as linearizações de f, g e h nos respectivos pontos dos itens **(b)**, **(d)** e **(e)**?

71. A linearização de 2^x

(a) Determine a linearização de $f(x) = 2^x$ quando $x = 0$. Depois, arredonde seus coeficientes para duas casas decimais.

(b) **T** Trace juntamente os gráficos da linearização e da função para $-3 \le x \le 3$ e $-1 \le x \le 1$.

72. A linearização de $\log_3 x$

(a) Determine a linearização de $f(x) = \log_3 x$ quando $x = 3$. Depois, arredonde seus coeficientes para duas casas decimais.

(b) **T** Trace juntamente os gráficos da linearização e da função para $0 \le x \le 8$ e $2 \le x \le 4$.

73. Lendo as derivadas a partir dos gráficos A idéia de que curvas deriváveis tornam-se retas quando ampliadas pode ser utilizada para estimar o valor das derivadas dessas funções em alguns pontos específicos. Ampliamos a curva até que a porção observada se assemelhe a uma reta no ponto em questão; depois, usamos a escala das coordenadas na tela para determinar a inclinação da curva como a inclinação da reta à qual esta se assemelha.

(a) Para ver como o processo funciona, tente fazê-lo primeiro com a função $y = x^2$ quando $x = 1$. O coeficiente angular obtido deve ser 2.

(b) Depois, tente fazê-lo com a curva $y = e^x$ quando $x = 1$, $x = 0$ e $x = -1$. Em cada caso, compare sua estimativa da derivada com o valor de e^x em cada ponto. Que padrão você pode observar? Teste isso usando outros valores de x. No Capítulo 7, vamos explicar o que está acontecendo.

74. Suponha que o gráfico de uma função derivável $f(x)$ tenha uma tangente horizontal em $x = a$. Podemos dizer algo sobre a linearização de f quando $x = a$? Justifique sua resposta.

75. À qual velocidade relativa um corpo em repouso deve ser acelerado para que sua massa aumente em 1%?

76. Radiciação repetida

(a) **T** Digite "2" em sua calculadora e extraia sucessivas raízes quadradas pressionando repetidamente a tecla correspondente (ou elevando o número apresentado a 0,5). Que padrão você vê surgindo? Explique o que está acontecendo. O que vai acontecer se, em vez disso, você tirar sucessivas raízes décimas?

(b) Repita o procedimento com 0,5, em vez de 2, como valor inicial. O que acontece agora? Você poderia utilizar qualquer número positivo x, em vez de 2? Explique o que está acontecendo.

77. Ampliando a imagem para "ver" se uma função é derivável **T** Alguma destas funções é derivável quando $x =$

$$f(x) = |x| + 1, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 0{,}0001} + 0{,}99$$

(a) Já sabemos que f não é derivável quando $x = 0$; seu gráfico apresenta um vértice nesse ponto. Esboce o gráfico de f e amplie a imagem no ponto $(0, 1)$ várias vezes. O vértice mostra sinais de que vai se tornar linear?

(b) Agora faça o mesmo com g. O gráfico de g mostra sinais de que vai se tornar linear? Sabemos que g é derivável quando $x = 0$ e, de fato, possui uma tangente horizontal nesse ponto.

(c) Quantas ampliações foram necessárias para que o gráfico de g se parecesse exatamente com uma reta horizontal?

(d) Agora, trace o gráfico de f *juntamente* com o de g em uma janela normal. Eles parecem idênticos até que você use o "Zoom". A função derivável acaba por se assemelhar a uma reta, enquanto a função não derivável permanece inalterada.

78. Esboçando a variação do volume de um cubo O volume $V = x^3$ de um cubo com arestas de comprimento x aumenta em uma quantidade ΔV quando x aumenta em uma quantidade Δx. Faça um esboço para mostrar como representar ΔV geometricamente como a soma dos volumes de

(a) três placas de dimensões x por x por Δx

(b) três barras de dimensões x por Δx por Δx

(c) um cubo de dimensões Δx por Δx por Δx.

A fórmula diferencial $dV = 3x^2\,dx$ estima a variação em V com as três placas.

USANDO O COMPUTADOR

Comparando funções com as suas linearizações

Nos exercícios 79–84, utilize um SAC para estimar a magnitude do erro no uso da linearização, em lugar da função ao longo de um intervalo I determinado. Siga os passos indicados.

(a) Esboce o gráfico da função f ao longo de I.

(b) Determine a linearização L da função no ponto a.

(c) Trace os gráficos de f e L juntos em um mesmo gráfico.

(d) Trace o erro absoluto $|f(x) - L(x)|$ ao longo de I, determinando seu valor máximo.

(e) A partir do gráfico do item (d), estime o maior $\delta > 0$ que você conseguir que satisfaça

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para ϵ = 0,5; 0,1, e 0,01. Verifique graficamente se a estimativa de δ continua verdadeira.

79. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

80. $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

81. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

82. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

83. $f(x) = x2^x, \quad [0, 2], \quad a = 1$

84. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}^{-1} x, \quad [0, 1], \quad a = \dfrac{1}{2}$

Questões de revisão

1. O que é a derivada de uma função f? Como seu domínio está relacionado com o domínio da função f? Dê exemplos.
2. Que papel a derivada tem na definição de coeficientes angulares, tangentes e taxas de variação?
3. Às vezes, como você pode fazer o gráfico da derivada da função quando tudo o que tem é uma tabela com os valores da função?
4. O que significa uma função ser derivável em um intervalo aberto? E em um intervalo fechado?
5. Como as derivadas estão relacionadas com as derivadas laterais?
6. Descreva geometricamente quando uma função *não* tem derivada em um ponto.
7. O fato de uma função ser derivável em um ponto está relacionado com a continuidade da função nesse ponto? Como?
8. A função salto unitário

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

poderia ser a derivada de outra função em $[-1, 1]$? Explique.

9. Que regras você conhece para calcular derivadas? Cite alguns exemplos.
10. Explique como as três fórmulas

(a) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (b) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

nos permitem derivar qualquer polinômio.

11. Além das três fórmulas apresentadas no Exercício 10, de que mais precisamos para derivar funções racionais?
12. O que é uma segunda derivada? E uma terceira derivada? Quantas derivadas têm as funções que você conhece? Cite exemplos.
13. Qual é a derivada da função exponencial e^x? Compare o domínio dessa derivada com o domínio da função.
14. Qual é a relação entre taxa de variação instantânea e média? Dê um exemplo.
15. Como as derivadas aparecem no estudo do movimento? O que você pode aprender sobre o movimento de um corpo ao longo de uma reta, examinando as derivadas da função posição do corpo? Dê exemplos.
16. Como as derivadas surgem em economia?
17. Dê exemplos de outras aplicações da derivada.
18. Como os limites $\lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} h)/h$ e $\lim_{h\to 0} ((\cos h - 1)/h)$ estão relacionados com as derivadas das funções seno e cosseno? Quais são as derivadas dessas funções?