Geometria Analítica
PURO-UFF - 2015.1
Mini-gabarito da P2 - Eduardo Ochs
Versão: 13/out/2015 4:00
Links importantes:
http://angg.twu.net/2015.1-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/2015.1-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/GA_Reis_Silva.pdf (livro)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/2015-1-GA-P2-gabarito.pdf
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

1a) Duas retas verticais, uma com $x = 1$, outra com $x = 3$.
1b) Uma parábola com concavidade para cima, passando pelos pontos $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(3, 0)$.

2) Seja r' a reta que passa por A e B. Temos:

$$\begin{array}{rcl} r & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0\,\} \\ & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\,\} \\ & = & \{\,(0,1) + t\overrightarrow{(1,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\,\} \\ r' & = & \{\,A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\,\} \\ & = & \{\,(3,2) + t\overrightarrow{(-1,-3)} \mid t \in \mathbb{R}\,\} \end{array}$$

2a) Sejam $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -3)$ os vetores diretores de r e r'.

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} \cdot \vec{v} & = & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) = 2 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & = & ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos\theta \\ & = & \sqrt{2}\sqrt{10} \cos\theta \\ \cos\theta & = & \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{10}} \\ & = & \frac{2}{2\sqrt{5}} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{array}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e entre r e r'.
2b)

$$\begin{array}{rcl} s & = & \{\,(2 - 2t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\,\} \\ & = & \{\,(2,0) + t\overrightarrow{(-2,-2)} \mid t \in \mathbb{R}\,\} \end{array}$$

O vetor diretor da reta s, $\vec{w} := \overrightarrow{(-2, 2)}$, é paralelo ao vetor diretor da reta r, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1, 1)}$. A reta s passa pelo ponto $(2, 0)$, que não pertence à reta r porque não obedece a equação $x + y - 1 = 0$, portanto as retas r e s são paralelas e não coincidentes.

3) Seja

$$E = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + y^2 = 20 \,\}.$$

E é simétrica com relação aos eixos horizontal e vertical, e E contém os pontos $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,\sqrt{20})$, $(0,-\sqrt{20})$. Seu eixo maior é vertical, portanto seus focos são os pontos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo vertical e tais que

$$\begin{array}{rcl} d(F_i,(-2,0)) & = & d((0,0),(0,\sqrt{20}) \\ & = & \sqrt{20} \end{array}$$

Daí os focos são os pontos $F_1 = (0,4)$ e $F_2 = (0,-4)$, e o paralelogramo com vértices $(-2,0)$, $(2,0)$, F_1, F_2 tem área $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$.

4a) Temos $A = (6,6)$ e $B = (2,10)$. Os pontos equidistantes de A e B formam uma reta r:

$$\begin{array}{rcl} M & := & \frac{A+B}{2} = (4,8) \\ \overrightarrow{AB} & = & (-4,4) \\ \vec{v} & := & (4,4) \\ r & := & \{\, M + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ & := & \{\, (4,8) + t\overrightarrow{(4,4)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ & := & \{\, (4,8) + t\overrightarrow{(1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ & := & \{\, (0,4) + t\overrightarrow{(1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ & := & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 4 \,\} \end{array}$$

4b)

$$\begin{array}{rcl} C & := & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \,\} \\ r \cap C & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in \mathbb{R}, (t-1)^2 + (t+4-2)^2 = 3^2 \,\} \\ & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in \mathbb{R}, (t^2-2t+1) + (t^2+4t+4) = 9 \,\} \\ & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in \mathbb{R}, 2t^2 + 2t - 4 = 0 \,\} \\ & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in \mathbb{R}, t^2 + t - 2 = 0 \,\} \\ & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in \mathbb{R}, (t-1)(t+2) = 0 \,\} \\ & = & \{\, (t,t+4) \mid t \in -2, 1 \,\} \\ & = & \{(-2,2),(1,5)\} \end{array}$$

5) Sejam:

$$
\begin{aligned}
A &= (3,0) \\
y &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \,\} \\
H &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),A) = 2d((x,y),r) \,\}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
H \cap \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \,\} = \{(-3,0),(1,0)\} \\
H \cap \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \,\} = \{(3,6),(3,-6)\}
\end{aligned}
$$

e H é simétrica com relação ao eixo horizontal, o que sugere que H deve ser uma hipérbole. Temos:

$$
\begin{aligned}
H &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),A) = 2d((x,y),r) \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),A)^2 = 4d((x,y),r)^2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + y^2 = 4x^2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x^2 - x^2 + 6x - 9 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 3(x^2 + 2x - 3) \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 3((x+1)^2 - 4) \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 12 = 3(x+1)^2 - y^2 \,\}
\end{aligned}
$$

E portanto as assíntotas de H são em:

$$
\begin{aligned}
H_A &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 3(x+1)^2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm\sqrt{3}(x+1) \,\}
\end{aligned}
$$