GA 11/MAR/2015

GEOMETRIA ANALÍTICA

PÁGINA DO CURSO:
http://angg.twu.net/
E CLIQUE EM "GA"
NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA
(A PÁGINA DE 2015.1 AINDA NÃO ESTÁ LÁ!)
... OU ENTÃO GOOGLEM POR "EDUARDO OCHS", QUE VOCÊS DEVEM CHEGAR NO
http://angg.twu.net/
(AS FOTOS DOS QUADROS VÃO PRO SITE).

GEOMETRIA ANALÍTICA

DESENHOS, COISAS GRÁFICAS, "GEOMETRIA É A ARTE DE MANIPULAR OBJETOS PERFEITOS USANDO DESENHOS IMPERFEITOS".

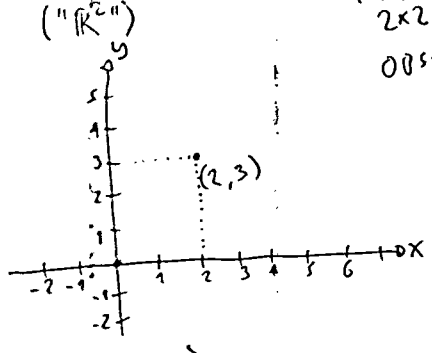
ÁLGEBRA, NÚMEROS, FÓRMULAS, ETC... PRA LIDAR COM FIGURAS GEOMÉTRICAS!

← TRADUÇÃO

VOU USAR UM TRUQUE:
"ISSO VOCÊS VIRAM NO ENSINO MÉDIO"

PLANO CARTESIANO

("$\mathbb{R}^2$")



(2,3)
COORD. X COORD. Y.

(OBS: NA ÚLTIMA PARTE DO CURSO A GENTE VAI PASSAR PRA $\mathbb{R}^3$, ONDE CADA PONTO TEM COORDENADAS x,y,z.)

MATRIZES

Ex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix}$$

MATRIZ 2×2 · MATRIZ 2×1 · MATRIZ 2×1

OBS: $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ É UMA "MATRIZ-COLUNA", OU UM "VETOR"...

SÓ QUE A TERMINOLOGIA "VETOR" VAI SER AMBÍGUA! (JÁ VAMOS VER PORQUÊ!)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \text{ERRO.}$$

SÓ PODEMOS SOMAR MATRIZES COM AS MESMAS DIMENSÕES.

$$k\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \\ ke & kf \end{pmatrix}$$

NÚMERO ("ESCALAR") · MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & j & m & p \\ h & k & n & q \\ i & l & o & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

MATRIZ 2×3 · MATRIZ 3×4 · IGUAIS · MATRIZ 2×4

OPERAÇÕES COM MATRIZES E VETORES:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$ ⇦ REGRA GERAL

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{pmatrix}$$ ⇦ CASO PARTICULAR

UM EXERCÍCIO MUITO FREQUENTE NO CURSO VAI SER PASSAR ENTRE "REGRAS GERAIS" E "CASOS PARTICULARES"...

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \\ e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2

MATRIZES

Ex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix}$$

MATRIZ 2×2 · MATRIZ 2×1 · MATRIZ 2×1

OBS: $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ É UMA "MATRIZ-COLUNA", OU UM "VETOR"...

SÓ QUE A TERMINOLOGIA "VETOR" VAI SER AMBÍGUA! (JÁ VAMOS VER PORQUÊ!)

OPERAÇÕES COM MATRIZES E VETORES:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$ ⇦ REGRA GERAL

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{pmatrix}$$ ⇦ CASO PARTICULAR

UM EXERCÍCIO MUITO FREQUENTE NO CURSO VAI SER PASSAR ENTRE "REGRAS GERAIS" E "CASOS PARTICULARES"...

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \\ e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \text{ERRO.}$$

SÓ PODEMOS SOMAR MATRIZES COM AS MESMAS DIMENSÕES.

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \\ ke & kf \end{pmatrix}$$

NÚMERO ("ESCALAR") · MATRIZ 3×2 · MATRIZ 3×2

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

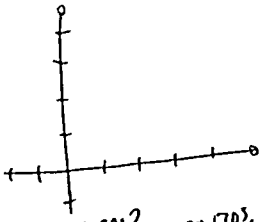
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & j & m & p \\ h & k & n & q \\ i & l & o & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

MATRIZ 2×3 · MATRIZ 3×4 · IGUAIS · MATRIZ 2×4

... O RESULTADO VAI SER:

$$\begin{pmatrix} ag+bh+ci & aj+bk+cl & \cdot & \cdot \\ dg+eh+fi & dj+ek+fl & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA ANALÍTICA É SOBRE FIGURAS NO PLANO CARTESIANO ($\mathbb{R}^2$) (E FIGURAS EM $\mathbb{R}^3$)... MAIS PRECISAMENTE, SOBRE SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}^2$ (E DEPOIS DE $\mathbb{R}^3$).

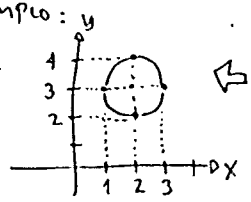


QUE FIGURAS? PRINCIPALMENTE PONTOS, RETAS, CÍRCULOS, ELIPSES, PARÁBOLAS, ETC... ("CÔNICAS")

... UM DOS OBJETIVOS DO CURSO É A GENTE APRENDER A TRADUZIR ENTRE EQUAÇÕES E FIGURAS (SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}^2$).

EXEMPLO:

A =



⇦ DESENHO MEIO TORTO, MAS CLARO O SUFICIENTE PRA VOCÊS SABEREM EXATAMENTE DE QUE FIGURA SE TRATA.

A É UM CÍRCULO COM CENTRO (2,3) E RAIO 1;

$(2,1) \in A$,

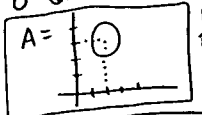
$(1,3) \in A$,

$(3,3) \in A$,

$(2,2) \in A$.

↑ ESTE SÍMBOLO QUER DIZER "PERTENCE".

VAMOS ENTENDER O QUE ESTÁ ACIMA.

A =  ISTO DEFINE O CONJUNTO A.

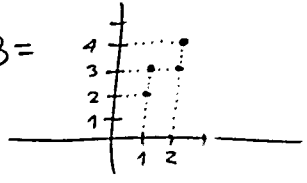
A É UM CÍRCULO COM CENTRO (2,3) E RAIO 1 — AFIRMAÇÃO (VERDADEIRA)

$(2,1) \in A$ — AFIRMAÇÃO (VERDADEIRA)

⋮

GA 11/MAR/2015

OUTRO EXEMPLO (MAIS SIMPLES!):

$B =$ 

O CONJUNTO A ERA UM CONJUNTO INFINITO...

O CONJUNTO B TEM 4 PONTOS.

PRA CADA PONTO $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ A GENTE SABE DIZER SE ELE PERTENCE OU NÃO A B...

$(1,1) \in B$ ← FALSO!
$(1,2) \in B$ ← VERDADEIRA!
$(1,3) \in B$ ← V!
$(1,4) \in B$ ← F!
$(2,2) \in B$ ← F!

OBS:
$B = \{(2,4), (1,3), (2,3), (1,2)\}$
ISTO PODERIA SER UMA DEFINIÇÃO PRO B

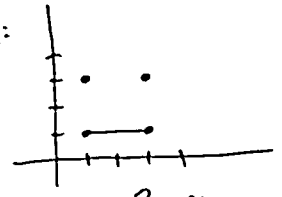
EQUIVALENTE À DEFINIÇÃO PELA FIGURA, MAS NESTE CONTEXTO É MELHOR VÊ-LA COMO UMA AFIRMAÇÃO (VERDADEIRA)...

CONJUNTOS SÃO DEFINIDOS PELOS SEUS PONTOS: SE C E D SÃO CONJUNTOS COM OS MESMOS PONTOS, ENTÃO ELES SÃO IGUAIS.

OBS: $C = \{4, 5, 6\}$,
$D = \{6, 5, 4, 4\}$

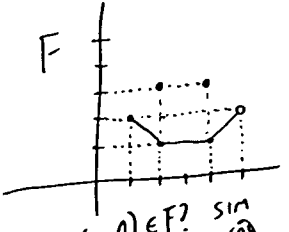
SÃO O MESMO CONJUNTO!
SÃO IGUAIS!
(MAS OS ELEMENTOS ESTÃO LISTADOS EM ORDEM DIFERENTE!...)

OUTRO EXEMPLO:

E: 

$(1,1) \in E$? SIM
$(1,2) \in E$? NÃO
$(2,1) \in E$? SIM
$(1.5, 1) \in E$? SIM
$(1.23459, 1) \in E$? SIM.
$(0.5, 1) \in E$? NÃO.

UM EXEMPLO EM QUE NÃO É TÃO FÁCIL RESPONDER PERGUNTAS DE "$\in$" USANDO A FIGURA:

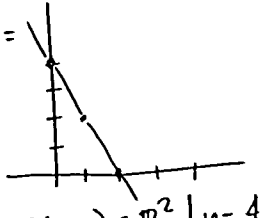
F 

$(2,1) \in F$? SIM
$(3,2) \in F$? NÃO
$(1.5, 1.5) \in F$? SIM

$(4,1) \in F$? SIM
$(4.2, 1.2) \in F$? SIM

...EM MUITOS CASOS AS NOSSAS RETAS (OU SEGMENTOS) VÃO SER MAIS COMPLICADOS E VAI SER MELHOR USARMOS EQUAÇÕES.

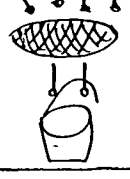
EXEMPLO:

$G =$ 

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$

ESTA NOTAÇÃO QUER DIZER QUE H É FORMADO POR TODOS OS PONTOS $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ QUE "PASSAM NO TESTE"

$y = 4 - 2x$



$(2,3)$ PASSA NA PENEIRA?
$(2,3)$ PASSA NO TESTE?

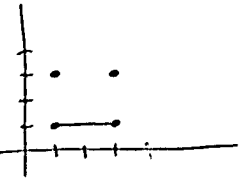
QUANDO $(x,y) = (2,3)$ A AFIRMAÇÃO $y = 4 - 2x$ É VERDADEIRA?
$3 = 4 - 2 \cdot 2$? NÃO!

EXERCÍCIO
(FAÇAM EM GRUP
SE QUISEREM!
REPRESENTEM
GRAFICAMENTE
$H = \{(x,y) \in$
$I = \{(x,y) \in$
(5 MIPS)

DICA 1:
PRA REPR
GRAFICAME
RÁPIDO, E
É ...
NÃO IN

DICA 2
CONFE
A RE
VOCÊS
CERT
CHAR
RESP
VOC
"PI
É

EXEMPLO:



,1) ∈ E? SIM

,2) ∈ E? NÃO

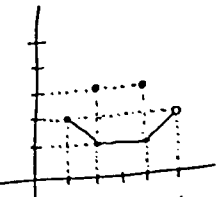
-,1) ∈ E? SIM

5, 1) ∈ E? SIM

,23459, 1) ∈ E? SIM.

,5, 1) ∈ E? NÃO.

M EXEMPLO EM
VE NÃO É TÃO FÁCIL
ESPONDER PERGUNTAS
E "∈" USANDO A
IGURA:



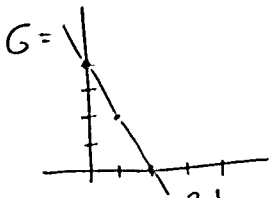
(2,1) ∈ F? SIM
(3,2) ∈ F? NÃO
(1.5, 1.5) ∈ F? SIM

$(4,1) \in F$? SIM

$(4.2, 1.2) \in F$? SIM

...EM MUITOS CASOS AS NOSSAS RETAS (OU SEGMENTOS) VÃO SER MAIS COMPLICADOS E VAI SER MELHOR USARMOS EQUAÇÕES.

EXEMPLO:



$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$

ESTA NOTAÇÃO QUER DIZER QUE H É FORMADO POR TODOS OS PONTOS $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ QUE "PASSAM NO TESTE" $y = 4-2x$

$(2,3)$ PASSA NA PENEIRA?

$(2,3)$ PASSA NO TESTE?

QUANDO $(x,y) = (2,3)$ A AFIRMAÇÃO $y = 4-2x$ É VERDADEIRA? $3 = 4-2\cdot2$? NÃO!

EXERCÍCIO
(FAÇAM EM GRUPO SE QUISEREM!):
REPRESENTEM GRAFICAMENTE

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$,

$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1+x\}$

(5 MINS)

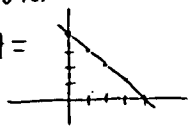
DICA 1: UM MÉTODO PRA REPRESENTAR GRAFICAMENTE, E RÁPIDO, ESTES CONJUNTOS, É ...

NÃO INTERESSA.

DICA 2: COMO CONFERIR SE A RESPOSTA DE VOCÊS ESTÁ CERTA? CHAMEM AS RESPOSTAS DE VOCÊS DE "HIPÓTESES" E TESTEM-NAS!

HIPÓTESE:

$H =$



PRA TER MENOS CONFUSÃO AINDA, A GENTE VAI FAZER DEFINIÇÕES EXTRAS PRA SIMPLIFICAR OS TESTES...

DEFINIÇÃO:

$H' =$

SERÁ QUE $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$ É O H' DA FIGURA ACIMA SÃO IGUAIS?

REPARE:
$(0,4) \in H'$,
$(1,3) \in H'$,
$(2,2) \in H'$,
$(3,1) \in H'$,
$(4,0) \in H'$
(PELO OLHÔMETRO!)

$(0,4) \in H$?

QUANDO $(x,y) = (0,4)$ A AFIRMAÇÃO $y = 4-2x$ É VERDADEIRA? OU SEJA, A AFIRMAÇÃO $4 = 4-2\cdot0$ É VERDADEIRA? SIM!

REPARE:
$(0,4) \in H'$ $(0,4) \in H$
ISTO NÃO IMPLICA EM QUE $H' = H$...

$(1,3) \in H'$ $(1,3) \in H$?

QUANDO $(x,y) = (1,3)$ A AFIRMAÇÃO $y = 4-2x$ É VERDADEIRA? OU SEJA, $3 = 4-2\cdot1$? NÃO!

OU SEJA, O PONTO $(1,3)$ PERTENCE AO H' E NÃO PERTENCE AO H...

OBS: CONSEGUIR UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA CERTA (PRA UM CONJUNTO DADO "ALGEBRICAMENTE") PODE DAR BASTANTE TRABALHO... MAS MOSTRAR QUE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA ESTÁ ERRADA É BEM RÁPIDO.

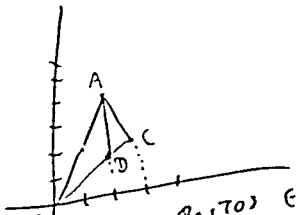
VOCÊS VÃO TER QUE APRENDER A CRIAR E TESTAR HIPÓTESES MUITO RÁPIDO!

GA 13/MAR/2015

HOJE: VETORES!

NA AULA PASSADA VIMOS CONJUNTOS (COMO P.EX. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$) E COMO REPRESENTÁ-LOS GRAFICAMENTE...

EM GEOMETRIA "CLÁSSICA" TEMOS FIGURAS COMO ESTA,



FEITAS DE PONTOS E SEGMENTOS, E NAS QUAIS ALGUNS PONTOS TÊM NOMES...

ISTO - QUANDO INCLUIMOS OS NOMES - NÃO É MAIS UM SUBCONJUNTO DE $\mathbb{R}^2$!

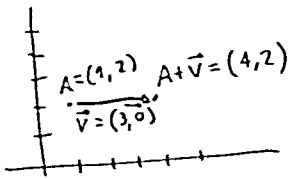
VETORES

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE VETORES É ESTRANHA - PORQUE ELES SÃO SETAS QUE PODEM ESTAR EM QUALQUER LUGAR!

COMO ASSIM?

VETORES REPRESENTAM DESLOCAMENTOS.

Ex:



NA EXPRESSÃO

$A + \vec{V}$

ISTO PODE SER INTERPRETADO COMO "APLIQUE O DESLOCAMENTO"...

A GENTE ESCREVE "DESLOQUE" COMO "+" PORQUE "DESLOCAR" "SE COMPORTA COMO" +, OU SEJA, OBEDECE ESSENCIALMENTE AS MESMAS PROPRIEDADES QUE O "+" OBEDECE...

COMO ASSIM???

NA AULA PASSADA VIMOS ALGUMAS OPERAÇÕES COM MATRIZES:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \\ e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

(SÓ FUNCIONA SE AS MATRIZES TÊM AS MESMAS DIMENSÕES)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

MATRIZ 2×2 · MATRIZ 2×1 · MATRIZ 2×2

TÊM QUE SER IGUAIS!

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \\ ke & kf \end{pmatrix}$$

A IDÉIA IMPORTANTE POR TRÁS DISTO É QUE CERTAS OPERAÇÕES SÓ FUNCIONAM SE RECEBEM OS TIPOS CERTOS DE OBJETOS.

OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES

$A = (1,2)$ ← UM PONTO (DE $\mathbb{R}^2$)

$\vec{V} = (\overrightarrow{3,0})$ ← VETOR (EM $\mathbb{R}^2$)

NOTEM A VÍRGULA E A SETA EM CIMA.

A GENTE VAI TENTAR MANTER A NOTAÇÃO DE MATRIZES SEPARADA DA NOTAÇÃO DE PONTOS E VETORES - PORQUE A NOTAÇÃO DE PONTOS E VETORES TEM UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA "BOA", E A DE MATRIZES NÃO (É AMBÍGUAS).

OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES

DEFINIÇÕES:

$(a,b) + (\overrightarrow{c,d}) = (a+c, b+d)$

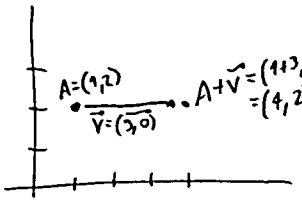
$(\overrightarrow{a,b}) + (\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c, b+d})$

OBS:

$(a,b) + (c,d) =$ ERRO

$(\overrightarrow{a,b}) + (c,d) =$ ERRO

LEMBREM:



EXERCÍ
SEJAM
A=
$\vec{U}$=
$\vec{V}$=
$\vec{W}$=
REP
GRA
((
((
(
(

= VAI TENTAR
A NOTAÇÃO
RIZES SEPARADA
ASÃO DE
E VETORES -
E A NOTAÇÃO
NTOS E VETORES
UMA REPRESENTAÇÃO
CA "BOA", E
MATRIZES NÃO
MBÍGUAS).

MAÇÕES COM
TOS E VETORES

FINIÇÕES:

$(a,b) + (\overrightarrow{c,d}) = (a+c, b+d)$

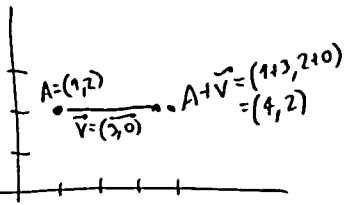
$(\overrightarrow{a,b}) + (\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c, b+d})$

SS:

$(a,b) + (c,d) =$ ERRO

$(\overrightarrow{a,b}) + (c,d) =$ ERRO

LEMBREM:



EXERCÍCIO:

SEJAM:

$A=(1,1)$,

$\vec{u}=(\overrightarrow{3,0})$

$\vec{v}=(\overrightarrow{0,2})$

$\vec{w}=(\overrightarrow{1,1})$

REPRESENTEM GRAFICAMENTE:

$((A+\vec{u})+\vec{v})+\vec{w}$,

$((A+\vec{v})+\vec{u})+\vec{w}$,

$(A+\vec{u})+(\vec{v}+\vec{w})$

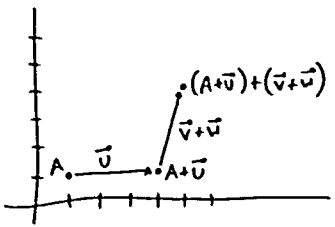
EXEMPLO:

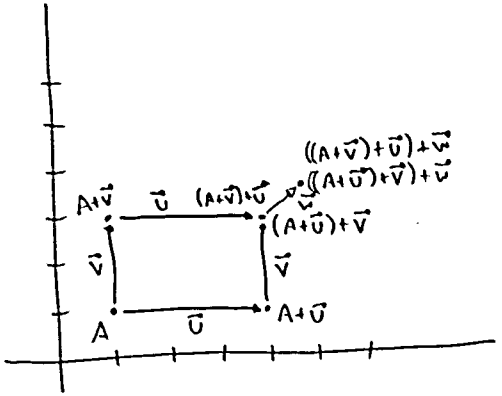
$(A+\vec{u})+(\vec{v}+\vec{w}) =$

$((1,1)+(\overrightarrow{3,0}))+((\overrightarrow{0,2})+(\overrightarrow{1,1})) =$

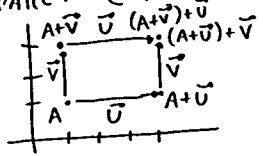
$(4,1) + (1,3) = (5,4)$

GRAFICAMENTE:





REPARE: EM



O VETOR $\vec{u}$ APARECE "DE DOIS JEITOS DIFERENTES" - EM CIMA, "COMEÇANDO" NO $A+\vec{v}$, E EMBAIXO, "COMEÇANDO" NO A...

IDEM PRO $\vec{v}$.

E ALÉM DISSO

$(A+\vec{u})+\vec{v} = (A+\vec{v})+\vec{u}$ (A)

ISTO É UMA AFIRMAÇÃO QUE NESTE CASO É VERDADEIRA...

SERÁ QUE ELA É VERDADE SEMPRE?

SIM.

PORQUÊ?

PRA RESPONDER ESSE "PORQUÊ" A GENTE PRECISA DE UM TRUQUE.

(1) COMO ASSIM, "SEMPRE"? COMO FORMALIZAR?

PROP.

$\forall A_1, A_2, u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{u_1,u_2}))+(\overrightarrow{v_1,v_2}) =$

$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{v_1,v_2}))+(\overrightarrow{u_1,u_2})$ (**)

(**) É MAIS FÁCIL DE DEMONSTRAR QUE (*).

PRA OBTER (**) A GENTE PEGOU (*) E "ABRIU" - EM (*) A GENTE TINHA VARIÁVEIS COMPLICADAS - A ERA PONTO, $\vec{u}$ E $\vec{v}$ ERAM VETORES - EM (**) AS VARIÁVEIS SÃO NÚMEROS.

GA 13/MAR/2015

$$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{U_1,U_2}))+(\overrightarrow{V_1,V_2}) =$$
$$(A_1+U_1, A_2+U_2)+(\overrightarrow{V_1,V_2}) =$$
$$(A_1+U_1+V_1, A_2+U_2+V_2)$$

$$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{V_1,V_2}))+(\overrightarrow{U_1,U_2}) =$$
$$(A_1+V_1, A_2+V_2)+(\overrightarrow{U_1,U_2}) =$$
$$(A_1+V_1+U_1, A_2+V_2+U_2)$$

MUITAS VEZES OS LIVROS VÃO FAZER DEMONSTRAÇÕES COMO A DO (☆☆) COMBINANDO AS DUAS SÉRIES DE IGUALDADES ACIMA - VAI DAR ISTO AQUI:

$$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{U_1,U_2}))+(\overrightarrow{V_1,V_2}) =$$
$$(A_1+U_1, A_2+U_2)+(\overrightarrow{V_1,V_2}) =$$
$$(A_1+U_1+V_1, A_2+U_2+V_2) =$$
$$(A_1+V_1+U_1, A_2+V_2+U_2) =$$
$$(A_1+V_1, A_2+V_2)+(\overrightarrow{U_1,U_2}) =$$
$$((A_1,A_2)+(\overrightarrow{V_1,V_2}))+(\overrightarrow{U_1,U_2})$$

OBS: MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES NÃO É COMUTATIVA, APESAR DE QUE A GENTE CHAMA ELA DE "MULTIPLICAÇÃO"...

$$2\cdot 3 = 3\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 6\\3\cdot 5+4\cdot 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \text{ERRO}$$

MATRIZ 2×1 — MATRIZ 2×2 — DIFERENTES

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

(VERIFIQUEM EM CASA!)

ESTAMOS DEFININDO OPERAÇÕES NOVAS, E TEMOS QUE VER QUE PROPRIEDADES ELAS OBEDECEM...

$$(A+\vec{U})+\vec{V} = (A+\vec{V})+\vec{U}$$

(ACABAMOS DE VER QUE ESTA VALE)

$$(A+\vec{U})+\vec{V} = A+(\vec{U}+\vec{V})$$

$$\vec{U}+\vec{V} = \vec{V}+\vec{U}$$

(ESTAS TAMBÉM SÃO VERDADE - TENTEM FAZER EM CASA!)

$$A+\vec{U} = \vec{U}+A$$

(ISTO É FALSO! $\vec{U}+A$ = ERRO)

PERSONAGENS IMPORTANTES NO CURSO DE GA:

- LEITOR DE RESSACA (SEM DESENHO)
- ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO COM DOUTORADO

(O ENG. COM DOUTORADO ACHA QUE TUDO QUE ELE FALA TÁ CERTO; O LEITOR DE RESSACA DUVIDA DE TUDO QUE NÃO TEM JUSTIFICATIVA MUITO CLARA)

OUTRAS OPERAÇÕES COM VETORES

DEF: $k\cdot(\overrightarrow{a,b}) = (\overrightarrow{ka,kb})$

OBS: ISTO É PARECIDO COM

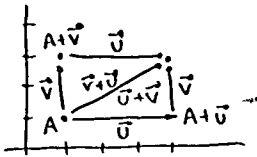
$$k\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ka&kb\\kc&kd\\ke&kf\end{pmatrix}$$

OBS: $k\cdot(a,b)$ = ERRO.

EXEMPLO:

$$2\cdot(\overrightarrow{3,4}) = (\overrightarrow{2\cdot 3, 2\cdot 4}) = (\overrightarrow{6,8})$$
$$(\overrightarrow{3,4})+(\overrightarrow{3,4}) = (\overrightarrow{6,8})$$

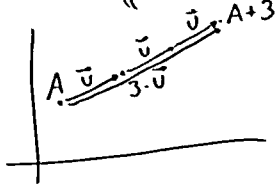
OOPS, ESQUECI UMA COISA - A "REGRA DO PARALELOGRAMO"!



$$(A+\vec{U})+\vec{V} = (A+\vec{V})+\vec{U}$$
$$= A+(\vec{V}+\vec{U})$$
$$= A+(\vec{U}+\vec{V})$$

GEOMETRICAMENTE,

$$A+(3\cdot\vec{U}) = A+(\vec{U}+\vec{U}+\vec{U})$$
$$= ((A+\vec{U})+\vec{U})+\vec{U}$$



GA 18/MAR/2015

HOJE: MAIS OPERAÇÕES COM VETORES, E SUAS PROPRIEDADES

OOPS, ERA "PONTOS E VETORES"

DEFS:

$(a,b)+(\overrightarrow{c,d}) = (a+c, b+d)$

$(\overrightarrow{a,b})+(\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c, b+d})$

$k\cdot(\overrightarrow{a,b}) = (\overrightarrow{ka, kb})$

$(a,b)-(c,d) = (\overrightarrow{a-c, b-d})$

$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d}) = ac+bd$

$\|(\overrightarrow{a,b})\| = \sqrt{(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{a,b})}$

$(\overrightarrow{a,b}) \perp (\overrightarrow{c,d})$ SE E SÓ SE $(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d}) = 0$ 000000

TERMINOLOGIA:

$a\cdot b = b\cdot a$ É "COMUTATIVIDADE"

$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ É "ASSOCIATIVIDADE"

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ É "DISTRIBUTIVIDADE"

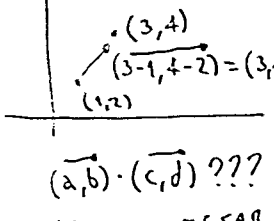
$\vec{v}\cdot\vec{w}$ É O "PRODUTO INTERNO" DE $\vec{v}$ E $\vec{w}$

$k\cdot\vec{v}$ É A "MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR"

$\|\vec{v}\|$ É A "NORMA" (OU O "COMPRIMENTO") DE $\vec{v}$

$\vec{v}\perp\vec{w}$ É "$\vec{v}$ E $\vec{w}$ SÃO ORTOGONAIS!"

O QUE CADA OPERAÇÃO DESTAS "SIGNIFICA"?



$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d})$???

VAMOS COMEÇAR POR $\|(\overrightarrow{a,b})\|$.

$\|(\overrightarrow{a,0})\| = \sqrt{(\overrightarrow{a,0})\cdot(\overrightarrow{a,0})}$

$= \sqrt{a\cdot a + 0\cdot 0}$

$= \sqrt{a^2}$

$= |a|$ ← NÃO É a!

$\|(\overrightarrow{4,0})\| = 4$

$\|(\overrightarrow{-4,0})\| = 4$

"$\|(\overrightarrow{a,0})\| = a$" NEM SEMPRE É VERDADE.

$\|(\overrightarrow{0,b})\| = \sqrt{b^2} = |b|$

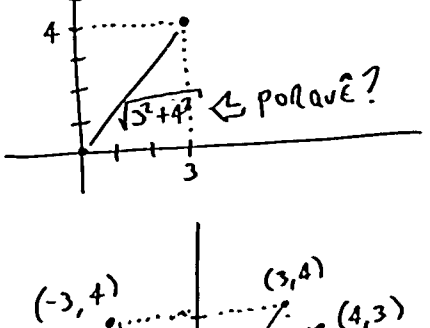
$\|(\overrightarrow{a,b})\| = \sqrt{a^2+b^2}$

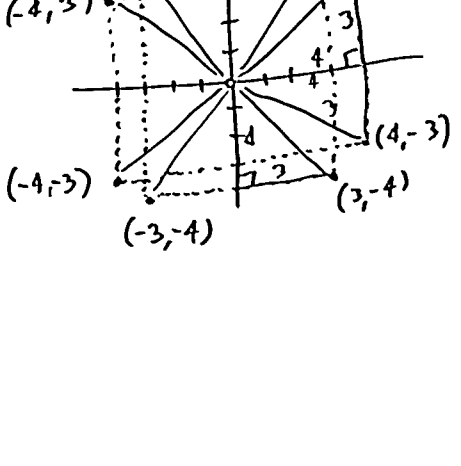
POR PITÁGORAS - NAS DUAS COLUNAS SEGUINTES.

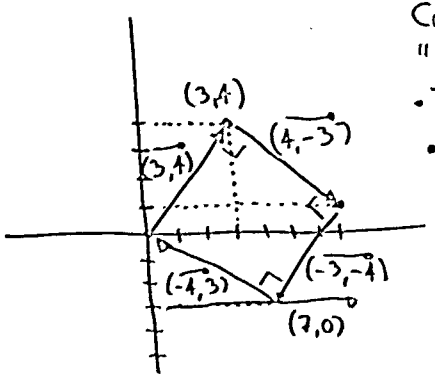
TEOREMA DE PITÁGORAS (VERSÃO SUPER-RÁPIDA!)

VAMOS VER O CASO $a=3$, $b=4$;

GENERALIZEM EM CASA.





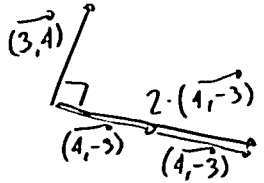


COMO FAZER O "GENERALIZEM EM CASA"?

- TROQUEM CADA "3" PEL "a",
- TROQUEM CADA "4" POR "b",
- VERIFIQUEM SE O QUE VOCÊS OBTIVERAM FAZ SENTIDO (DICA: TESTEM COM OUTROS CASOS PARTICULARES, P.EX., $a=2$, $b=1$).

PROP:
PARA QUAISQUER $a,b,c,d,k \in \mathbb{R}$,
$(\vec{a,b}) \perp (\vec{c,d})$ IMPLICA
$(\vec{a,b}) \perp k\cdot(\vec{c,d})$.

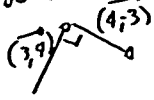
EXEMPLO:



"OLHOMETRICAMENTE"

OUTRA UTILIDADE DO PRODUTO INTERNO: VERIFICAR ORTOGONALIDADE.

P.EX., $(\vec{3,4}) \perp (\vec{4,-3})$ SÃO ORTOGONAIS "OLHOMETRICAMENTE", PORQUE A GENTE ACABOU DE VER NO DESENHO QUE



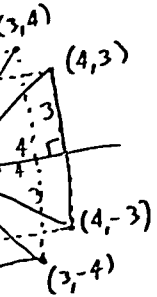
OU, EQUIVALENTEMENTE,

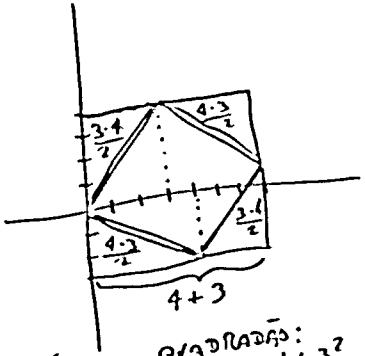
E ALGEBRICAMENTE PELA DEFINIÇÃO?

$(\vec{3,4}) \perp (\vec{4,-3})$ SE E SÓ SE
$(\vec{3,4}) \cdot (\vec{4,-3}) = 0$ SE E SÓ SE
$3\cdot 4 + 4\cdot(-3) = 0$, E ISTO É VERDADE.

ALGEBRICAMENTE:
$(\vec{a,b}) \perp k\cdot(\vec{c,d})$ SE E SÓ SE
$(\vec{a,b}) \cdot (k\cdot(\vec{c,d})) = 0$ SE E SÓ SE
$(\vec{a,b}) \cdot (\vec{kc,kd}) = 0$ SE E SÓ SE
$akc + bkd = 0$ SE E SÓ SE
$kac + kbd = 0$ SE E SÓ SE
$k(ac+bd) = 0$.
SE $(\vec{a,b}) \perp (\vec{c,d})$
ENTÃO $ac+bd=0$,
E $k(ac+bd)=0$,
E $(\vec{a,b}) \perp k\cdot(\vec{c,d})$.

ORQUÊ?





ÁREA DO QUADRADÃO:
$(4+3)^2 = 4^2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3^2$

ÁREA DOS 4 TRIÂNGULOS:
$\frac{3\cdot 4}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} = 2\cdot 3\cdot 4$

ÁREA DO QUADRADO DO MEIO:
$(4+3)^2 - 2\cdot 3\cdot 4 = 4^2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 4$
$= 4^2 + 3^2$

LADO DO QUADRADO DO MEIO: $\sqrt{4^2+3^2}$

GA 18/MAR/2015

HOJE: MAIS OPERAÇÕES COM VETORES, E SUAS PROPRIEDADES

OOPS, ERA "PONTOS E VETORES"

DEFS:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$k\cdot(a,b)=(ka,kb)$

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd$

$\|(a,b)\|=\sqrt{(a,b)\cdot(a,b)}$

$(a,b)\perp(c,d)$ SE E SÓ SE $(a,b)\cdot(c,d)=0$

TERMINOLOGIA:

$a\cdot b=b\cdot a$ É "COMUTATIVIDADE"

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ É "ASSOCIATIVIDADE"

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ É "DISTRIBUTIVIDADE"

$\vec{v}\cdot\vec{w}$ É O "PRODUTO INTERNO" DE $\vec{v}$ E $\vec{w}$

$k\cdot\vec{v}$ É A "MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR"

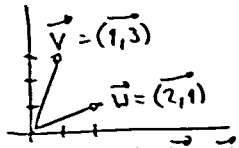
$\|\vec{v}\|$ É A "NORMA" (OU O "COMPRIMENTO") DE $\vec{v}$

$\vec{v}\perp\vec{w}$ É "$\vec{v}$ E $\vec{w}$ SÃO ORTOGONAIS"

O QUE CADA OPERAÇÃO DESTAS "SIGNIFICA"?

JÁ VIMOS ALGUNS SIGNIFICADOS GEOMÉTRICOS, MAS NÃO TODOS...

P. EX:



NESTE CASO $\vec{v}\perp\vec{w}$ É FALSO... AINDA NÃO FAZEMOS IDÉIA DE COMO INTERPRETAR GEOMETRICAMENTE

$\vec{v}\cdot\vec{w}=(1,3)\cdot(2,1)$

$=1\cdot2+3\cdot1$

$=5$

O QUE ESTE RESULTADO, 5, QUER DIZER GEOMETRICAMENTE? A ÚNICA COISA QUE A GENTE SABE É "$\vec{v}\cdot\vec{w}\neq0$" QUER DIZER "$\vec{v}$ E $\vec{w}$ NÃO SÃO ORTOGONAIS"...

QUE PROPRIEDADES ESTAS OPERAÇÕES QUE ACABAMOS DE DEFINIR OBEDECEM?

VAMOS ESCREVER AS "POSSÍVEIS PROPRIEDADES" COMO PROPOSIÇÕES, E PRA CADA UMA DELAS VAMOS TENTAR DETERMINAR SE ELA É VERDADEIRA OU FALSA E DEMONSTRAR ISSO.

TRUQUE EXTRA: CADA UMA DAS "PROPRIEDADES" PODE SER ESCRITA DE UM JEITO CURTO E UM JEITO LONGO.

OBS: $\vec{v}$ ⇦ LETRA MINÚSCULA COM SETA EM CIMA – VETOR (EM $\mathbb{R}^2$)

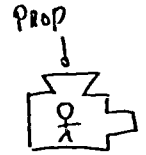
A ⇦ LETRA MAIÚSCULA SEM SETA EM CIMA – PONTO (DE $\mathbb{R}^2$)

LEMBRA DOS PERSONAGENS:

LEITOR DE RESSACA – LEITOR QUE VERIFICA TUDO CUIDADOSAMENTE, E DIZ "NÃO ACREDITO NESTE PASSO AQUI" TODA VEZ QUE ALGO NÃO É 100% CLARO.

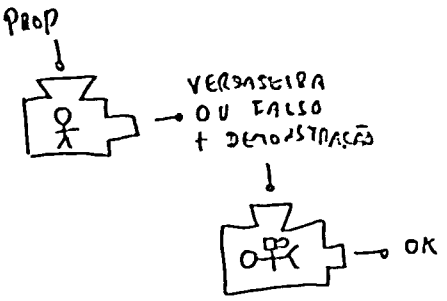
ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO COM DOUTORADO – "TEM CERTEZA" DE QUE TUDO QUE ELE DIZ ESTÁ CERTO PORQUE ELE TEM DOUTORADO.

ALUNO BÁSICO DE GA



PROPOSIÇ
(VERDAD
(a) A+
(b) $\vec{v}+$
(c) $k\cdot\vec{v}$
(d) $\vec{v}\cdot$
(e) $\vec{v}\perp$

ALUNO BÁSICO DE GA



NAR
OU
ISSO.

OPRIEDADES"
DE UM
UM

LETRA MINÚSCULA COM SETA EM CIMA - VETOR ($\mathbb{R}^2$)

LETRA MAIÚSCULA SEM SETA EM CIMA - PONTO ($\mathbb{R}^2$)

DOS PERSONAGENS:

LEITOR DE RESSACA - VERIFICA TUDO CUIDADOSAMENTE, E DIZ "NÃO ACREDITO NESTE PASSO AQUI" TODA VEZ QUE ALGO NÃO É 100% CLARO.

ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO COM DOUTORADO - "TEM CERTEZA" DE QUE TUDO QUE ELE DIZ ESTÁ CERTO PORQUE ELE TEM DOUTORADO.

PROPOSIÇÕES:
(VERDADEIRO, FALSO, JUSTIFIQUE):

(a) $A + \vec{v} = \vec{v} + A$ (COMUTATIVIDADE)

(b) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (COMUTATIVIDADE)

(c) $k \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot k$

(d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

(e) $\vec{v} \perp \vec{w}$ SE E SÓ SE $\vec{w} \perp \vec{v}$

(e') $(a,b) \perp (c,d)$ SE E SÓ SE $(c,d) \perp (a,b)$

DICA: COMECEM COM CASOS PARTICULARES.

(e'') $(1,2) \perp (3,4)$ SSE $(3,4) \perp (1,2)$

(e''') $(1,2) \perp (4,-2)$ SSE $(4,-2) \perp (1,2)$

OUTRA DICA:
PODEMOS PENSAR NESTAS PROPOSIÇÕES GERAIS USANDO TABELAS (INFINITAS)...

$\vec{v}$	$\vec{w}$	$\vec{v} \perp \vec{w}$	$\vec{w} \perp \vec{v}$	$\vec{v} \perp \vec{w}$ SSE $\vec{w} \perp \vec{v}$
$(1,2)$	$(3,4)$	FALSO	FALSO	VERDADEIRO
$(1,2)$	$(4,-2)$	VERD.	VERD.	VERD.

OUTRAS PROPOSIÇÕES (PENSEM EM CASA!):

(f) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(g) $\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{\text{NÚMERO}} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{w})}_{\text{NÚMERO}}$
VETOR ERRO

(h) $\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{\text{NÚMERO}} \cdot \vec{w} = \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{w})}_{\text{NÚMERO}} \cdot \vec{u}$
VETOR VETOR

HORÁRIOS DA MONITORIA:

2as 17-19	6B
3as 18-20	6B
4as 11-13	6A
5as 11-13	17

mari.inbellonia@gmail.com

GA 20/MAR/2015

Por enquanto vimos estas operações com pontos e vetores:

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

$(\overrightarrow{a,b})+(\overrightarrow{c,d}) = (\overrightarrow{a+c, b+d})$

$(a,b)-(c,d) = (a-c, b-d)$

$k(\overrightarrow{a,b}) = (\overrightarrow{ka, kb})$

$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d}) = ac+bd$

$\|(\overrightarrow{a,b})\| = \sqrt{(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{a,b})}$,

ou seja:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\vec{v} \perp \vec{w}$ sse $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

Aqui tem mais algumas:

$\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$

E se $\Sigma = (A, \vec{u}, \vec{v})$

$(a,b)_\Sigma = A + a\vec{u} + b\vec{v}$

$(\overrightarrow{a,b})_\Sigma = a\vec{u} + b\vec{v}$

... e vocês vão aprender a definir as operações de vocês.

Quais são as propriedades destas operações?

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$?

($\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$: número · vetor; $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$: número · vetor; "erro")

$(\vec{v}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$? (☆)

Não... por motivos mais sotis.

A gente viu como demonstrar certas igualdades, p.ex.,

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

A gente viu como demonstrar estas coisas <u>algebricamente</u>.

Se procurarmos uma demonstração (correta) pra (☆) a gente vai procurar pra sempre sem encontrar 1.

Repare:

Se $\vec{u} = (\overrightarrow{0,2})$,
$\vec{v} = (\overrightarrow{0,3})$,
$\vec{w} = (\overrightarrow{0,4})$,

temos

$\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{w})}_{12}\cdot\vec{u} \overset{?}{=} \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{6}\cdot\vec{w}$

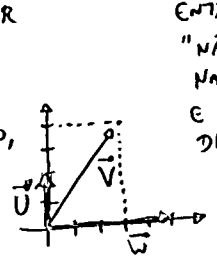
$(\overrightarrow{0,24})$ $(\overrightarrow{0,24})$

<u>Nesta caso a igualdade é verdade.</u>

Não dá pra gente fazer tudo algebricamente. Em GA – algumas coisas ficam bem mais rápidas se a gente conseguir <u>visualizar</u> o que está acontecendo.

Neste outro exemplo,

$\vec{u} = (\overrightarrow{0,2})$,
$\vec{v} = (\overrightarrow{3,4})$,
$\vec{w} = (\overrightarrow{5,0})$,



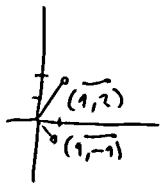
$\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{w})}_{15}\cdot\vec{u} \overset{?}{=} \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{8}\cdot\vec{w}$

$(\overrightarrow{0,30})$ $(\overrightarrow{40,0})$

Neste caso (☆) é falsa.

Lembrem que $k\cdot(\overrightarrow{a,b})$ é sempre um vetor "na mesma direção" que $(\overrightarrow{a,b})$...

P.ex., não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k\cdot(\overrightarrow{1,2}) = (\overrightarrow{1,-1})$.



Se $\vec{u} = (\overrightarrow{0,2})$,
$\vec{v} = (\overrightarrow{a,b})$,
$\vec{w} = (\overrightarrow{5,0})$,

então $\vec{u}$ e $\vec{w}$ "não estão na mesma direção", e o único jeito de (☆) ser verdade é tanto $(\vec{v}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u}$ quanto $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$ serem $(\overrightarrow{0,0})$.

Porquê? Casa. ☺

Antes da gente começar a tentar <u>visualizar</u> porque que certas igualdades são verdade nós vamos ver certos truques pra visualizar <u>expressões</u>.

Em Cálculo 1 a gente aprende a visualizar <u>funções de uma variável</u> –

P.ex., $f(x) = x^2$,
$g(x) = x^3 - 2x^2$,
$h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x} + 1$.

Vamos truqu... Funçõ... variá...

① Se...

Em...

E...

$\vec{U} = (\overrightarrow{0,2})$,
$\vec{V} = (\overrightarrow{a,b})$,
$\vec{W} = (\overrightarrow{5,0})$,

ÃO $\vec{U}$ E $\vec{W}$
ÃO ESTÃO ESTÃO
MESMA DIREÇÃO",
O ÚNICO JEITO
E (☆) SER VERDADE
É TANTO $(\vec{V}\cdot\vec{W})\cdot\vec{U}$
QUANTO $(\vec{U}\cdot\vec{V})\cdot\vec{W}$
SEREM $(\overrightarrow{0,0})$.

PORQUÊ?
CASA. ☺

NTES DA GENTE
OMEÇAR A TENTAR
SUALIZAR PORQUE
E CERTAS IGUALDADES
ÃO VERDADE NOS VAMOS
ER CERTOS TRUQUES
RA VISUALIZAR EXPRESSÕES.

M CÁLCULO 1 A GENTE
APRENDE A VISUALIZAR
UNÇÕES DE UMA VARIÁVEL -
P.EX., $f(x) = x^2$,
$g(x) = x^3 - 2x^2$,
$h(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x} + 1$.

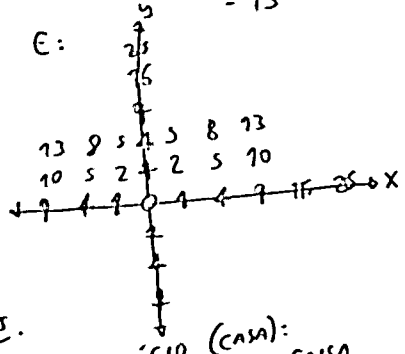
VAMOS VER ALGUNS
TRUQUES PRA VISUALIZAR
FUNÇÕES DE MAIS
VARIÁVEIS.

① SEJA $F(x,y) = (\overrightarrow{x,y})\cdot(\overrightarrow{x,y})$.

ENTÃO, P.EX,

$F(2,3) = (\overrightarrow{2,3})\cdot(\overrightarrow{2,3})$
$= 2\cdot 2 + 3\cdot 3$
$= 4 + 9$
$= 13$

É:



EXERCÍCIO (CASA):
FAÇAM A MESMA COISA
PARA $F(x,y) = \|(\overrightarrow{x,y})\|$,
INDO DE $x=-5$ ATÉ $x=5$,
E DE $y=-5$ ATÉ $y=5$.

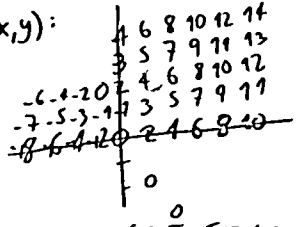
LEMBREM QUE A GENTE
AINDA NÃO TEM NENHUMA
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA
PRO $(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d})$ QUANDO
O RESULTADO DISSO É $\neq 0$...

ANTES DA GENTE VOLTAR
PRA PARTE ALGÉBRICA
DO CURSO (CONTAS E
DEMONSTRAÇÕES) TENTEM
VISUALIZAR AS FUNÇÕES

$F_1(x,y) = (\overrightarrow{0,1})\cdot(\overrightarrow{x,y})$,
$F_2(x,y) = (\overrightarrow{1,0})\cdot(\overrightarrow{x,y})$,
$F_3(x,y) = (\overrightarrow{2,0})\cdot(\overrightarrow{x,y})$,
$F_4(x,y) = (\overrightarrow{2,1})\cdot(\overrightarrow{x,y}) = 2x+y$

(ATÉ 15:40)

$F_4(x,y)$:



DEPOIS QUE A GENTE FAZ UM
DIAGRAMA DESTES A GENTE
CONSEGUE TER UMA IDEIA,
POR EXEMPLO, DE QUEM É
O CONJUNTO

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_4(x,y) = 0\}$

OBS. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_4(x,y) = 0\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}$

PRA CASA:
EU VOU PÔR NO SITE UMA LISTA
DE EXERCÍCIOS DE "V/F/JUSTIFIQUE";
PARA CADA UM DESTES EXERCÍCIOS
DETERMINE QUAIS SÃO "V" E QUAIS
SÃO "F", E TENTE JUSTIFICAR
ONDE VOCÊ CONSEGUIR.

(2c) SE $\vec{U}, \vec{V}$ SÃO VETORES NO
PLANO, ENTÃO $\|\vec{U}\|\cdot\vec{V}$
E $\|\vec{V}\|\cdot\vec{U}$
SÃO VETORES DE MESMO
COMPRIMENTO.

(2d) SE $\vec{U}, \vec{V}$ TEM MESMO
COMPRIMENTO ENTÃO
$\vec{U}-\vec{V}$ E $\vec{U}+\vec{V}$ SÃO
ORTOGONAIS.

GA 25/MAR/2015

NOSSAS OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES (DEFINIÇÕES):

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$k\cdot(a,b)=(ka,kb)$

$(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\vec{v}\perp\vec{w}$ SSE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

E ESTAS, QUE SÃO NOVAS:

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

E SE $\Sigma=(A,\vec{u},\vec{v})$ ENTÃO

$(a,b)_\Sigma=A+a\vec{u}+b\vec{v}$

$(a,b)_\Sigma=a\vec{u}+b\vec{v}$

VOCÊS DEVEM TER TENTADO FAZER EM CASA OS PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE DE UMA LISTA ANTIGA DO REGINALDO ("LISTA 1"); O "Pr" APARECE NO FIM DA PÁGINA 1.

HOJE:

- VAMOS VER COMO RESOLVER E DEMONSTRAR OS PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE,
- Pr E SISTEMAS DE COORDENADAS; VISUALIZAÇÃO DE OPERAÇÕES.

LEMBREM QUE ESTAMOS TENTANDO FAZER TUDO DE DOIS JEITOS:

1) GRÁFICO, VISUAL, INTUITIVO
2) FORMAL, ALGÉBRICO.

JEITO 1 NOS AJUDA A PENSAR, MAS DEMONSTRAÇÕES RIGOROSAS TÊM QUE SER FEITAS DO JEITO 2...

NA VERDADE TEMOS QUE APRENDER A TRADUZIR ENTRE OS JEITOS 1 E 2.

EXERCÍCIO:

CALCULE (USE A DEFINIÇÃO!):

ⓐ $Pr_{(1,0)}(3,4)$

ⓑ $Pr_{(2,0)}(3,4)$

ⓒ $Pr_{(2,0)}(a,b)$

ⓓ $Pr_{(0,2)}(a,b)$

ⓐ' $Pr_{(1,0)}(30,40)$

ⓑ' $Pr_{(2,0)}(30,40)$

ATÉ 14:40.

ⓑ SE $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(3,4)$, ENTÃO, COMO

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$,

TEMOS:

$Pr_{(2,0)}(3,4)=\frac{(2,0)\cdot(3,4)}{(2,0)\cdot(2,0)}(2,0)$

$=\frac{6}{4}(2,0)$

$=1.5\cdot(2,0)$

$=(3,0)$

ⓒ SE $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(a,b)$, ENTÃO, COMO

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$,

TEMOS:

$Pr_{(2,0)}(a,b)=\frac{(2,0)\cdot(a,b)}{(2,0)\cdot(2,0)}(2,0)$

$=\frac{2a}{4}\cdot(2,0)$

$=\frac{a}{2}\cdot(2,0)$

$=(\frac{a}{2}2,0)$

$=(a,0)$

CASOS PARTICULARES:

$Pr_{(2,0)}(0,0)=(0,0)$

$Pr_{(2,0)}(10,0)=(10,0)$

$Pr_{(2,0)}(0,10)=(0,0)$

ⓑ' $Pr_{(2,0)}(30,40)=(30,0)$.

O ⓓ É SIMILAR AO ⓒ:

$Pr_{(0,2)}(a,b)=(0,b)$.

QUE OPERAÇÃO É ESTA?

PRONÚNCIA:

"$Pr_{\vec{u}}\vec{v}$" É A

"PROJEÇÃO SOBRE $\vec{u}$ DE $\vec{v}$".

A PARTIR DOS EXERCÍCIOS ②,ⓑ,ⓒ,ⓓ,②',ⓑ', DÁ PRA GENTE IMAGINAR (MAIS PRECISAMENTE: FORMULAR HIPÓTESES E DEPOIS TENTAR TESTÁ-LAS E PROVÁ-LAS!) QUE,

① $Pr_{(1,0)}(a,b)=Pr_{(2,0)}(a,b)$

② $Pr_{(k,0)}(a,b)=(a,0)$

③ $Pr_{(0,k)}(a,b)=(0,b)$

④ $Pr_{(k\cdot\vec{u})}\vec{v}=Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

⑤ $Pr_{\vec{u}}(k\cdot\vec{v})=k\cdot Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

MAS E NO CASO $Pr_{(0,0)}(3,4)$?

$Pr_{(0,0)}(3,4)=\frac{(0,0)\cdot(3,4)}{(0,0)\cdot(0,0)}(0,0)$

$=\frac{0}{0}(0,0)$. ERRO! !!

... ENTÃO $Pr_{(0,0}$

ENTÃO (OU "I

... ENTÃO ALG HIPÓTESES PRECISAR DE

COMO ASSIM SE $\vec{u}=(1,2$ ENTÃO:

④ $Pr_{(k\cdot\vec{u}}$

NO NOSSO

$Pr_{(0\cdot(}$

$Pr_{(0,0)}$ ER

OU S É FA

SE V GEN 0 "

$\vec{u}=$

o ⓒ:

$\vec{b}$).

É ESTA?

A

OBRE $\vec{U}$ DE $\vec{V}$".

S EXERCÍCIOS

ⓑ, DÁ

IMAGINAR

ICAMENTE:

HIPÓTESES

TENTAR

E PROVÁ-LAS!)

$\vec{b}) = P_{R_{(\vec{2},\vec{0})}}(\vec{a},\vec{b})$

$\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{0})$

$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{0},\vec{b})$

$\vec{V} = P_{R_{\vec{U}}}\vec{V}$

$K\cdot\vec{V}) = K\cdot P_{R_{\vec{U}}}\vec{V}$

E NO CASO $P_{R_{(\vec{0},\vec{0})}}(\vec{3},\vec{4})$?

$P_{R_{(\vec{0},\vec{0})}}(\vec{3},\vec{4}) = \frac{(\vec{0},\vec{0})\cdot(\vec{3},\vec{4})}{(\vec{0},\vec{0})\cdot(\vec{0},\vec{0})}(\vec{0},\vec{0})$

$= \frac{0}{0}(\vec{0},\vec{0})$. ERRO! !!

... ENTÃO $P_{R_{(\vec{0},\vec{0})}}(\vec{a},\vec{b})$ DÁ ERRO (OU "NÃO DEFINIDO")...

... ENTÃO ALGUMAS DAS HIPÓTESES ①...⑤ VÃO PRECISAR DE CONSERTOS!

COMO ASSIM?

SE $\vec{U}=(\vec{1},\vec{2})$, $\vec{V}=(\vec{3},\vec{4})$, $K=0$, ENTÃO:

④ $P_{R_{(K\cdot\vec{U})}}\vec{V} \overset{(?)}{=} P_{R_{\vec{U}}}\vec{V}$

NO NOSSO CASO PARTICULAR,

$P_{R_{(0\cdot(\vec{1},\vec{2}))}}(\vec{3},\vec{4}) \overset{(?)}{=} P_{R_{(\vec{1},\vec{2})}}(\vec{3},\vec{4})$

$\|$ $\|$

$P_{R_{(\vec{0},\vec{0})}}(\vec{3},\vec{4})$ $\frac{11}{5}(\vec{1},\vec{2})$

ERRO

OU SEJA, A "REGRA" ④ É FALSA!

SE ELA FOSSE UM PROBLEMA DE V/F/JUSTIFIQUE, A GENTE PODERIA JUSTIFICAR O "F" USANDO O CASO $\vec{U}=(\vec{1},\vec{2})$, $\vec{V}=(\vec{3},\vec{4})$, $K=0$.

IDEIA:

② SE $K\neq 0$ $P_{R_{(K,0)}}(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{0})$

③ SE $K\neq 0$ $P_{R_{(0,K)}}(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{0},\vec{b})$

④ SE $K\neq 0$ E $\vec{U}\neq(\vec{0},\vec{0})$, $P_{R_{(K\cdot\vec{U})}}\vec{V} = P_{R_{\vec{U}}}\vec{V}$

⑤ SE $\vec{U}\neq(\vec{0},\vec{0})$, $P_{R_{\vec{U}}}(K\cdot\vec{V}) = K\cdot P_{R_{\vec{U}}}\vec{V}$.

VÁRIOS PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE DA LISTA SÃO PROPOSIÇÕES "QUASE" VERDADEIRAS, COMO ②, ③, ④, ⑤...

EM MATEMÁTICA PROPOSIÇÕES QUASE VERDADEIRAS SÃO FALSAS!

AO INVÉS DE DIZER QUE AS PROPS DA LISTA SÃO "QUASE VERDADEIRAS" DIGAM QUE ELAS SÃO FALSAS E APRESENTEM UMA PROPOSIÇÃO PARCIDA ("CONSERTADA") QUE SEJA VERDADEIRA!

ALGUNS PROBLEMAS DA LISTA FICAM COM CONTAS ENORMES SE VOCÊS TENTAREM DEMONSTRAR ELES DIRETO. EXEMPLO: 2c.

2c) ( ) SE $\vec{U},\vec{V}$ SÃO VETORES NO PLANO ENTÃO $\|\vec{U}\|\vec{V}$ E $\|\vec{V}\|\vec{U}$ SÃO VETORES DE MESMO COMPRIMENTO.

TESTES:

$\vec{U}$	$\vec{V}$	$\|\vec{U}\|\vec{V}$	$\|\vec{V}\|\vec{U}$	$D(\vec{U},\vec{V})$	$\|\vec{U}\|\vec{V}$
$(\vec{0},\vec{0})$	$(\vec{3},\vec{4})$	$(\vec{0},\vec{0})$	$(\vec{0},\vec{0})$	0	0
$(\vec{1},\vec{0})$	$(\vec{0},\vec{2})$	$(\vec{0},\vec{2})$	$(\vec{2},\vec{0})$	2	2
$(\vec{2},\vec{0})$	$(\vec{3},\vec{4})$	$(\vec{6},\vec{8})$	$(\vec{10},\vec{0})$	10	10

MUITAS CONTAS PODEM FICAR BEM MENORES SE A GENTE "RESULTADOS ANTERIORES"...

ÀS VEZES A GENTE USA TEOREMAS MAIS "SIMPLES", OU MAIS "BÁSICOS" PRA PROVAR TEOREMAS MAIS "COMPLICADOS"...

ÀS VEZES A GENTE PROVA LEMAS (TEOREMAS "INTERMEDIÁRIOS") PRA PROVAR O TEOREMA QUE QUEREMOS.

GA 25/MAR/2015

NOSSAS OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES (DEFINIÇÕES):

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(\overrightarrow{a,b})+(\overrightarrow{c,d})=(\overrightarrow{a+c,b+d})$

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$k\cdot(\overrightarrow{a,b})=(\overrightarrow{ka,kb})$

$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d})=ac+bd$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\vec{v}\perp\vec{w}$ SSE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

E ESTAS, QUE SÃO NOVAS:

$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

E SE $\Sigma=(A,\vec{u},\vec{v})$ ENTÃO

$(a,b)_\Sigma=A+a\vec{u}+b\vec{v}$

$(\overrightarrow{a,b})_\Sigma=a\vec{u}+b\vec{v}$

VOCÊS DEVEM TER TENTADO FAZER EM CASA OS MODELOS DE V/F/JUSTIFIQUE DE UMA LISTA ANTIGA DO REGINALDO ("LISTA 1"); O "Pr" APARECE NO FIM DA PÁGINA 1.

IDÉIA:

⑥ $\|k\cdot\vec{v}\|=k\|\vec{v}\|$

ISTO É V OU F???

TESTES:

k	$\vec{v}$	$k\cdot\vec{v}$	$\|k\cdot\vec{v}\|$	$\|\vec{v}\|$	$k\|\vec{v}\|$
2	$(\overrightarrow{3,0})$	$(\overrightarrow{6,0})$	6	3	6
-2	$(\overrightarrow{3,0})$	$(\overrightarrow{-6,0})$	6	3	-6

ISTO É "QUASE VERDADEIRO" - OU SEJA, FALSO!

⑥' SE $k\geq 0$, $\|k\cdot\vec{v}\|=k\|\vec{v}\|$ ⇐ V

⑥'' $\|k\cdot\vec{v}\|=|k|\cdot\|\vec{v}\|$ ⇐ V

ISTO É UMA PROPRIEDADE MUITO IMPORTANTE, E DÁ PRA USÁ-LA PRA PROVAR O 2c...

SE $k=\|\vec{u}\|$, $\vec{v}=\vec{v}$,

ENTÃO, COMO

$\|k\cdot\vec{v}\|=|k|\|\vec{v}\|$, (POR ⑥'')

TEMOS

$\|\|\vec{u}\|\cdot\vec{v}\|=|\|\vec{u}\||\cdot\|\vec{v}\|$

E COMO SABEMOS QUE $\|\vec{u}\|\geq 0$, ENTÃO $|\|\vec{u}\||=\|\vec{u}\|$, E

$\|\|\vec{u}\|\cdot\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

E, SIMILARMENTE, FAZENDO

$k:=\|\vec{v}\|$ E $\vec{v}:=\vec{u}$

EM

$\|k\cdot\vec{v}\|=|k|\cdot\|\vec{v}\|$,

TEMOS:

$\|\|\vec{v}\|\cdot\vec{u}\|=|\|\vec{v}\||\cdot\|\vec{u}\|$

E, COMO SABEMOS QUE $\|\vec{v}\|\neq 0$, ENTÃO $|\|\vec{v}\||=\|\vec{v}\|$, TEMOS

$\|\|\vec{v}\|\cdot\vec{u}\|=\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|$.

DAÍ:

$\|\|\vec{u}\|\cdot\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

$=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|$

$=\|\|\vec{v}\|\cdot\vec{u}\|$

MORAL DA HISTÓRIA:

Ⅰ APRENDAM A FAZER SUBSTITUIÇÕES BEM, PRA

Ⅱ APRENDAM A USAR "TEOREMAS MAIS BÁSICOS" (OU LEMAS) PRA PROVAR "TEOREMAS MAIS COMPLICADOS"

Ⅲ FAÇAM UM DATABASE DE TEOREMAS, COM DEMONSTRAÇÕES, EM ORDEM.

QUASE TODAS AS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES $+,-,\cdot,\|\cdot\|,\perp,\mathrm{Pr}$, ETC, SÃO DEMONSTRADAS DA FORMA MAIS ÓBVIA - "FAZENDO TODAS AS EXPANSÕES".

O ⑥'' É UMA DAS EXCEÇÕES.

VAMOS TENTAR PROVAR

$\|k\cdot(\overrightarrow{a,b})\|\overset{(?)}{=}|k|\cdot\|(\overrightarrow{a,b})\|$.

$\|k\cdot(\overrightarrow{a,b})\|=\|(\overrightarrow{ka,kb})\|$

$=\sqrt{(\overrightarrow{ka,kb})\cdot(\overrightarrow{ka,kb})}$

$=\sqrt{(ka)\cdot(ka)+(kb)\cdot(kb)}$

$=\sqrt{k^2a^2+k^2b^2}$

$=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}$

$\overset{(*)}{=}\sqrt{k^2}\sqrt{a^2+b^2}$

$|k|\cdot\|(\overrightarrow{a,b})\|=|k|\cdot\sqrt{(a,b)\cdot(a,b)}$

$=|k|\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

$\overset{(*)}{=}\sqrt{k^2}\sqrt{a^2+b^2}$

MUITO IMPORTANTE:

TENTEM FAZER MAIS EXERCÍCIOS DA LISTA!

GA 27/MAR/2015

HOJE:
"Σ", VISUALIZAÇÃO, PROPRIEDADES, ETC;

ISTO VAI NOS AJUDAR A ENTENDER O "P_R" E OS LIVROS DE GA, QUE SÃO ESCRITOS DE UM JEITO BIZARRO ("INDEPENDENTE DE SISTEMAS DE COORDENADAS")

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(\vec{a},\vec{b})+(\vec{c},\vec{d})=(\vec{a+c},\vec{b+d})$
$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$
$k\cdot(a,b)=(ka,kb)$
$(\vec{a},\vec{b})\cdot(\vec{c},\vec{d})=ac+bd$
$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$
$\vec{v}\perp\vec{w}$ SSE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

E:
$P_{R\vec{U}}\vec{v}=\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}\vec{U}$

$(a,b)_\Sigma=A+a\vec{U}+b\vec{V}$
$(\vec{a},\vec{b})_\Sigma=a\vec{U}+b\vec{V}$
ONDE $\Sigma=(A,\vec{U},\vec{V})$.

VAMOS COMEÇAR ENTENDENDO AS OPERAÇÕES "Σ", PARA VÁRIOS "Σ" DIFERENTES.

MUITAS OPERAÇÕES EM GA VÃO PODER SER EXPRESSAS COMO "PRODUTO POR MATRIZ" OU "PRODUTO POR MATRIZ MAIS CONSTANTE".

(I) VAMOS ENTENDER $(a,b)_\Sigma$ E $(\vec{a},\vec{b})_\Sigma$ QUANDO $A=0$,
(II) VAMOS VER A CONEXÃO DISSO COM MATRIZES.

EXEMPLOS/EXERCÍCIOS:
REPRESENTE GRAFICAMENTE OS PONTOS $(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$, $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$.

NOS CASOS:
(a) $\Sigma=((0,0),\underbrace{(2,1)}_{\vec{U}},\underbrace{(-1,2)}_{\vec{V}})$ (A)
(b) $\Sigma=((0,0),(\vec{2,0}),(\vec{0,2}))$
(c) $\Sigma=((0,0),(\vec{2,0}),(\vec{0,1}))$
(d) $\Sigma=((0,0),(\vec{1,1}),(\vec{-1,1}))$.

OBS: SABEMOS CALCULAR QUALQUER $(a,b)_\Sigma$ FAZENDO CONTAS - E QUEREMOS APRENDER A ENCONTRAR O RESULTADO DE $(a,b)_\Sigma$ "NO OLHÔMETRO".

DICA: DEPOIS QUE A GENTE SABE $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, É FÁCIL ENCONTRAR OS OUTROS 6 PONTOS.

(15 MINS. FAÇAM EM GRUPO!!!)

PORQUE É QUE AS FÓRMULAS PARA $(a,b)_\Sigma$ E $(\vec{a},\vec{b})_\Sigma$ SÃO DIFERENTES?

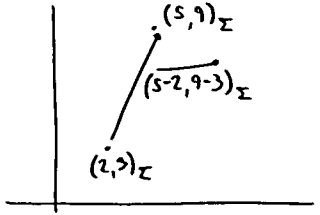
ANTES DA EXPLICAÇÃO, EXERCÍCIO:
(e) $\Sigma=((2,3),(\vec{2,0}),(\vec{0,1}))$

FATO:
(OBS: A GENTE CHAMA DE "FATO" ALGO QUE É VERDADE MAS QUE A GENTE NÃO VAI DEMONSTRAR EM TODOS OS DETALHES... LIVROS E PROFESSORES TÊM MUITO MAIS OPORTUNIDADES PRA ENUNCIAR "FATOS" QUE ALUNOS!)

$(a,b)_\Sigma-(c,d)_\Sigma=$
$(A+a\vec{U}+b\vec{V})-(A+c\vec{U}+d\vec{V})=$ (*)
$(a-c)\vec{U}+(b-d)\vec{V}=$
$(\vec{a-c,b-d})_\Sigma$.

(A IGUALDADE "(*)" NÃO É ÓBVIA.)

EXEMPLO:



OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:
FIXE UM SISTEMA DE COORDENADAS $\Sigma=(A,\vec{U},\vec{V})$.
ENTÃO A OPERAÇÃO
$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$(a,b)\mapsto(\vec{a},\vec{b})=A+a\vec{U}+b\vec{V}$
CORRESPONDE A UMA MULTIPLICAÇÃO POR MATRIZ QUANDO $A=(0,0)$, E A UMA MULTIPLICAÇÃO POR MATRIZ MAIS UMA CONSTANTE NO CASO GERAL.

VÁRIAS OPERAÇÕES IMPORTANTES DE GA CORRESPONDEM A MULTIPLICAÇÃO POR MATRIZ
SLOGAN

EXEMPLO:
O QUE É
$F:\mathbb{R}^2\to$
$(x,y)\mapsto$
$(0,0)+P_R$
$(0,0)+$
$(0,0)+$
$(0,0)\mapsto$
$\left(\frac{2}{5}(2\right.$
$\left(\frac{4}{5}x+\right.$
EXEMP
USAN
$F(2,$
ONDE
MATRIZ
TEMPO
VAI A
ENTRE
E

Exemplo:

O que é a operação

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (0,0) + Pr_{(\vec{2},\vec{1})}(\vec{x,y})$?

$(0,0) + Pr_{(\vec{2},\vec{1})}(\vec{x,y}) =$

$(0,0) + \frac{(\vec{2,1})\cdot(\vec{x,y})}{(\vec{2,1})\cdot(\vec{2,1})}(\vec{2,1}) =$

$(0,0) + \frac{2x+y}{5}(\vec{2,1}) =$

$(0,0) + \left(\frac{2}{5}(2x+y), \frac{1}{5}(2x+y)\right) =$

$\left(\frac{2}{5}(2x+y), \frac{1}{5}(2x+y)\right) =$

$\left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y, \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$

Exemplo: usando a fórmula acima,

$F(2,3) = \left(\frac{4}{5}2 + \frac{2}{5}3, \frac{2}{5}2 + \frac{1}{5}3\right)$

Onde é que entram as matrizes nessa história? Temporariamente a gente vai abolir a distinção entre (x,y) (ponto) e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (matriz coluna).

Seja $G(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemplo: $G(3,4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 1\cdot 4 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

$= (2, 11)$.

Representem graficamente
$G(0,2)$, $G(1,2)$, $G(2,2)$,
$G(0,1)$, $G(1,1)$, $G(2,1)$,
$G(0,0)$, $G(1,0)$, $G(2,0)$.

Fatos:

(I) $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(II) Se $H(x,y) = (ax+by, cx+dy)$
então $H(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(III) Se $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma operação que obedece
$H(kx,ky) = k\,H(x,y)$ e (I)
$H(x+x', y+y') = H(x,y) + H(x',y')$ (II)
então H é uma multiplicação por matriz.

Obs: Def: uma operação é linear sse ela obedece (I) e (II).

A gente ainda não viu muitas propriedades do "Pr"...

Mas:

$Pr_{(\vec{a,b})}(k(\vec{x,y})) = k\,Pr_{(\vec{a,b})}(\vec{x,y})$

$Pr_{(\vec{a,b})}((\vec{x,y})+(\vec{x',y'})) = Pr_{(\vec{a,b})}(\vec{x,y}) + Pr_{(\vec{a,b})}(\vec{x',y'})$

$Pr_{\vec{v}}\,k\vec{w} = k\,Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

$Pr_{\vec{v}}(\vec{w}+\vec{u}) = Pr_{\vec{v}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{u}$

Aviso:

Isto - linearidade, matrizes, etc - é pesado mas se vocês entenderem isso muita coisa de GA simplifica muito!

Exercício (☠, importante):

Def: $F_{(a,b)}(x,y) = (0,0) + Pr_{(\vec{a,b})}(\vec{x,y})$.

Exemplo: $F_{(2,3)}(4,5) = (0,0) + Pr_{(\vec{2,3})}(\vec{4,5})$

Expresse como multiplicação por matriz as seguintes operações:

(a) $F_{(1,0)}$, (b) $F_{(0,1)}$, } contas muito fáceis ⇦ $F_{(1,0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ⇦ $F_{(0,1)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $F_{(2,1)}$, } contas mais difíceis

(d) $F_{(a,b)}$. } caso geral.

GA 1º/ABR/2015

HOJE: ÚLTIMA AULA ANTES DA P1, QUE É NA 2ª FEIRA!

EXERCÍCIO DO FINAL DA ÚLTIMA AULA (MUITO IMPORTANTE E COMPLICADO!):

SEJA $F_{(2,6)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P_{R_{(2,6)}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$= \frac{(2,6)\cdot(x,y)}{(2,6)\cdot(2,6)}(2,6)$.

ENTÃO $F_{(1,0)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$F_{(0,1)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$...

$F_{(2,1)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ?$

$F_{(2,6)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ?$

É MAIS FÁCIL, NO PONTO EM QUE VOCÊS ESTÃO, VER O SEGUINTE:

H NÃO É LINEAR-B

⇓

H NÃO É LINEAR, LINEAR-V, LINEAR-M.

EXERCÍCIO PRA CASA:

REPARE QUE $H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1^2\\0^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0^2\\1^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$H\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^2\\4^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\64\end{pmatrix}$

$3H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$4H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

ENTÃO, QUANDO $x=3$ E $y=4$ TEMOS $H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq xH\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yH\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$...

OU SEJA, H NÃO É LINEAR-B.

EXERCÍCIO: MOSTRE QUE H NÃO É LINEAR, LINEAR-V, LINEAR-M.

SEJAM $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\4x+5y\end{pmatrix}$, ⇐ LINEAR!

$H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2\\y^3\end{pmatrix}$. ⇐ NÃO-LINEAR!

DEFS: SE $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ENTÃO:

F É LINEAR SE $F(k\vec{v}) = kF(\vec{v})$ E $F(\vec{v}+\vec{w}) = F(\vec{v})+F(\vec{w})$ $(\forall k,\vec{v},\vec{w})$

F É LINEAR-B SE $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yF\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(\forall x,y)$

F É LINEAR-V SE $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ $(\exists a,b,c,d.\forall x,y)$

F É LINEAR-M SE $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $(\exists a,b,c,d.\forall x,y)$

FATO: AS 4 DEFS DE "LINEAR" ACIMA SÃO EQUIVALENTES: F LINEAR ⇔ F LINEAR-B ⇔ F LINEAR-M ⇔ F LINEAR-V

LEMBREM QUE

$P_{R_{\vec{U}}}(k\vec{v}) = kP_{R_{\vec{U}}}\vec{v}$,

$P_{R_{\vec{U}}}(\vec{v}+\vec{w}) = P_{R_{\vec{U}}}\vec{v} + P_{R_{\vec{U}}}\vec{w}$...

OU SEJA, PRA QUAISQUER $\vec{U}$ FIXO, A OPERAÇÃO "$P_{R_{\vec{U}}}$" É LINEAR... E PORTANTO B,M,V-LINEAR.

... NA VERDADE ISTO, E O EXERCÍCIO MUITO IMPORTANTE DA AULA PASSADA (QUE CONTINUO SENDO UM EXERCÍCIO) ERAM PREPARAÇÃO PRO SEGUINTE...

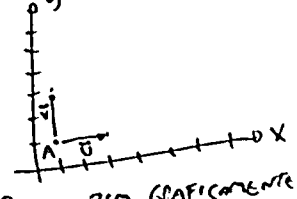
FIXE $A,\vec{U},\vec{V}$.

("$\Sigma = (A,\vec{U},\vec{V})$").

DEF: $(x,y)_\Sigma = A + x\vec{U} + y\vec{V}$

IDÉIA: ISTO É UM MODO DE FALAR DE OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS.

EXEMPLO:



EXERCÍCIO: REPRESENTEM GRAFICAMENTE

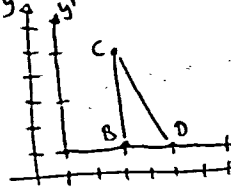
$B = (1,0)_\Sigma$,

$C = (1,2)_\Sigma$,

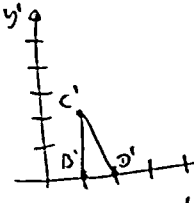
$D = (2,0)_\Sigma$,

E O TRIÂNGULO FORMADO POR ESTES TRÊS PONTOS.

...REPARE QUE A GENTE PODE USAR $A,\vec{U},\vec{V}$ PRA CRIAR EIXOS NOVOS - VOU CHAMÁ-LOS DE EIXOS x' E y' -



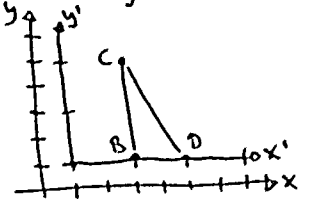
... E O QUE ACONTECE SE A GENTE DESENHA ESSA MESMA FIGURA "NOS EIXOS x' E y'"



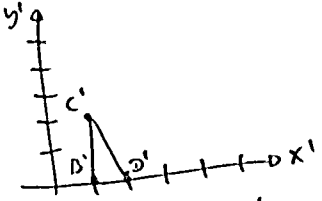
NOME	x	y	x'	y'
B	3	1	1	1
C	3	5	1	2
D	5	1	2	1

MUDANÇAS DE COORDENADAS NOS PERMITEM MOVER (TRANSLAÇÕES), GIRAR (FAZER ROTAÇÕES, FAZER "ESPELHAMENTOS")

...REPARE QUE A GENTE PODE USAR $A, \vec{u}, \vec{v}$ PRA CRIAR EIXOS NOVOS - VOU CHAMÁ-LOS DE EIXOS x' E y' -



... E O QUE ACONTECE SE A GENTE DESENHAR ESSA MESMA FIGURA "NOS EIXOS x' E y'"?

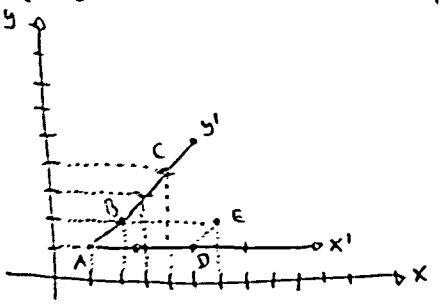


NOME	x	y	x'	y'
B	3	1	1	0
C	3	5	1	2
D	5	1	2	0

MUDANÇAS DE COORDENADAS NOS PERMITEM MUDAR A ORIGEM (TRANSLAÇÕES), MUDAR A ESCALA, FAZER ROTAÇÕES, FAZER ESPELHAMENTOS, FAZER "ENTORTAMENTOS".

EXERCÍCIO

(EM GRUPO SE PRECISAR):



$A = (1,1)$
$\vec{u} = (2,0)$
$\vec{v} = (1,1)$.

OBTENHA AS COORDENADAS x, y, x', y' DE CADA UM DOS PONTOS DA FIGURA ACIMA.

NOME	x	y	x'	y'
A	1	1	0	0
B	2	2	0	1
C	4	4	0	3
D	5	1	2	0
E	6	2	2	1

(DICA: USEM O OLHÔMETRO).

FATO:

MUDANÇAS DE SISTEMAS DE COORDENADAS QUE PRESERVAM A ORIGEM SÃO DA FORMA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ONDE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ É UMA MATRIZ INVERSÍVEL, OU SEJA, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$

↑ DETERMINANTE.

MUDANÇAS DE ESCALA SÃO DA FORMA $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

ROTAÇÕES SÃO DA FORMA $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

ONDE $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

MUDANÇAS DE SISTEMAS DE COORDENADAS MAIS GERAIS, QUE PODEM MUDAR A ORIGEM (OU SEJA, $A \neq (0,0)$, $(a,0) \neq \neq (0,0)$) SÃO DA FORMA $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

E AS CONTAS PRA INVERTER UMA MUDANÇA DE COORDENADAS DESSAS SÃO UM POUCO PIORES - NÃO VAMOS VÊ-LAS AGORA.

OBS: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

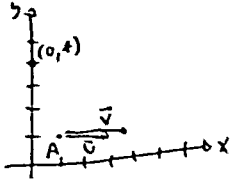
É A CONTA JÁ ERRADO QUANDO $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

OBS:

DIGAMOS QUE

$A = (1,1)$,
$\vec{u} = (2,0)$
$\vec{v} = (1,0)$.

ENCONTRE NO OLHÔMETRO x' E y' TAIS QUE $A + x'\vec{u} + y'\vec{v} = (0,1)$.



!!

PORQUE QUE NÃO DÁ PRA RESOLVER? PORQUE $\vec{u}, \vec{v}$ SÃO PARALELOS... ("LINEARMENTE DEPENDENTES").

QUE MUDANÇAS DE COORDENADAS PRESERVAM...

- ORIGEM?
- CONTRAIMENTOS?
- PROPORÇÕES ENTRE COMPRIMENTOS
- ÂNGULOS
- ÁREAS

GA 1º/ABR/2015

... AGORA VOCÊ ENTENDERAM MUDANÇAS DE COORDENADAS (BEM)!

VÁRIOS LIVROS COMEÇAM FALANDO DE PONTOS E VETORES DE UM JEITO "INDEPENDENTE DE COORDENADAS"... ...POR AXIOMAS (GEOMÉTRICOS!) - E SÓ INTRODUZEM COORDENADAS DEPOIS.

A GENTE VIU M.D.C.S NAS QUAIS O PONTO B "VIRAVA" B', C "VIRAVA" C', ...

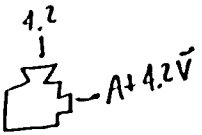
PODEMOS FAZER A MESMA COISA COM RETAS, CÍRCULOS, ETC... MUDANÇAS DE COORDENADAS SEMPRE PRESERVAM PARALELISMO (DE RETAS E DE VETORES!)

RETAS (VIA PONTOS E VETORES)

CONJUNTOS DA FORMA $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$ SÃO RETAS, MAS NEM TODA RETA É ASSIM... RETAS VERTICAIS NÃO PODEM SER POSTAS NESTA FORMA.

CONJUNTOS DA FORMA $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$ SÃO RETAS SE E SÓ SE $(a,b) \neq (0,0)$.

CONJUNTOS DA FORMA $\{A+t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ SÃO RETAS SE E SÓ SE $\vec{v} \neq (\vec{0},\vec{0})$.



VOU PÔR NO SITE ATÉ A MEIA-NOITE DE HOJE EXERCÍCIOS DE PREPARAÇÃO PRA PROVA. ALGUNS DELES VÃO ENVOLVER PARALELISMO DE RETAS E INTERSEÇÕES DE RETAS - QUE POR ENQUANTO A GENTE SÓ SABE FAZER INTUITIVAMENTE / NO OLHÔMETRO...

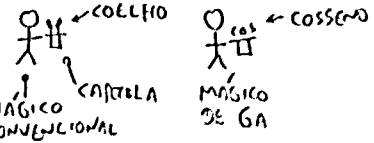
MAS ALGUNS DOS EXERCÍCIOS QUE JÁ FIZEMOS INCLUEM ENCONTRAR FÓRMULAS SIMPLES E TESTÁ-LAS - VOU FAZER A MESMA COISA COM PARALELISMO E INTERSEÇÕES.

DÚVIDAS, ETC: VOU ESTAR DISPONÍVEL DAS 18:00 ÀS 19:15 NA SALA 6A OU NA 4B.

GA 15/ABRIL/2015

(AINDA NÃO TENHO AS NOTAS DAS PROVAS!)

HOJE:



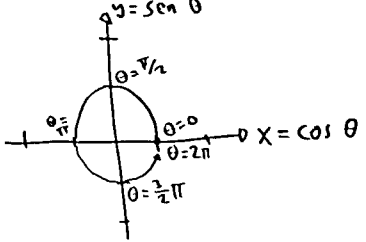
...A FÓRMULA DO ÂNGULO, COISAS SOBRE PR, PONTO DE RETA MAIS PRÓXIMO DE PONTO DADO, ETC!

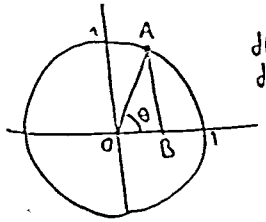
(...SE VOCÊS FOREM COMO EU QUANDO VOCÊS VIRAM COS NO ENSINO MÉDIO VOCÊS NÃO ENTENDERAM NADA.)

FÓRMULA MÁGICA:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,\underbrace{\cos \text{ANG}(\vec{v},\vec{w})}_{???} \qquad (\star)$$

DEFINIÇÃO DE COS (E SEN) NO NOSSO CASO PARTICULAR PREFERIDO:



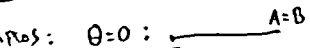


$d(0,A)=1$

$d(0,B)=\cos\theta$

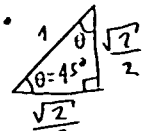
$d(B,A)=\operatorname{sen}\theta$

EXEMPLOS: $\theta=0$:



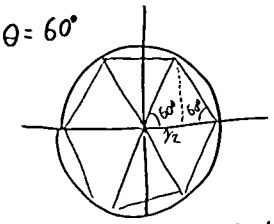
TRIÂNGULO DEGENERADO, $OB=1$, $BA=0$

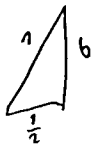
$\theta=\frac{\pi}{4}=45°$



$\cos\theta=\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta=60°$



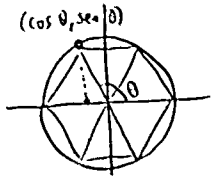


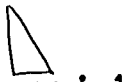
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2=1$$

$$b^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

E QUANDO $\theta=120°$?



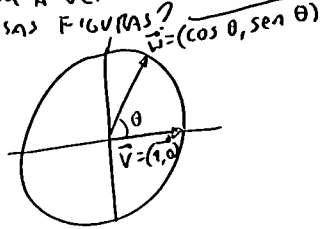


$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$d(0,B)=\frac{1}{2}$

OOPS, A GENTE NÃO QUER UMA DISTÂNCIA - A GENTE QUER O PONTO $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

O QUE A FÓRMULA $(\star)$ TEM A VER COM ESSAS FIGURAS?



NESTE CASO:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos \text{ANG}(\vec{v},\vec{w})$$
$$= 1\cdot 1\cdot\cos\theta$$

E $\vec{v}\cdot\vec{w} = (\overrightarrow{1,0})\cdot(\overrightarrow{\cos\theta, \operatorname{sen}\theta})$

$$= 1\cdot\cos\theta + 0\cdot\operatorname{sen}\theta$$
$$= \cos\theta.$$

LEMBRE QUE:

$$(a\vec{v})\cdot(b\cdot\vec{w}) = ab(\vec{v}\cdot\vec{w}).$$

SLOGAN: MUITAS CONTAS FICAM MAIS SIMPLES COM VETORES UNITÁRIOS.

SLOGAN 2: TODO VETOR NÃO-NULO PODE SER "UNITARIZADO"

EXEMPLO: SE $\vec{v}=(\overrightarrow{4,3})$

ENTÃO $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+3^2}$

SEJA $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{4,3})$

ENTÃO $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ (OB Ge CO Co $\vec{v}$

TEM NORMA 1 (OB

E TEM MESMA ? E SENTIDO QUE O $\vec{v}$ ORIGINAL.

OBS: ALGUNS L $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ DE AO VETOR $\vec{v}$.

Lembre que:

$(a\vec{v})\cdot(b\cdot\vec{w}) = ab(\vec{v}\cdot\vec{w})$.

Slogan: muitas contas ficam mais simples com vetores unitários.

Slogan 2: todo vetor não-nulo pode ser "unitarizado"

Exemplo: se $\vec{v} = \overrightarrow{(4,3)}$

então $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$;

Seja $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(4,3)} = \overrightarrow{\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}$

$= \overrightarrow{(0.8, 0.6)}$.

Então $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ (obs: o caso geral é começarmos com qualquer $\vec{v} \neq \overrightarrow{(0,0)}$)

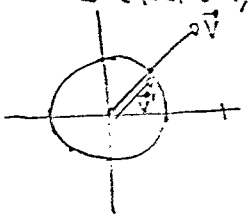
Tem norma 1 (obs: $\|\vec{v}'\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\|$

$= \left|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right| \|\vec{v}\|$

$= \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\|$

$= 1$)

Geometricamente,



Mais precisamente:

Se $r = \{0 + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

então $r \cap C$ tem dois pontos, um deles é $0+\vec{v}'$, o outro é $0-\vec{v}'$.

...te

...a (☆)

...m

...?

$\vec{w} = \overrightarrow{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$

$\|\vec{w}\| \cos \operatorname{ang}(\vec{v},\vec{w})$

$\cdot\ 1 \cdot \cos\theta$

$\overrightarrow{(\ ,0)}\cdot\overrightarrow{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$

$\cdot\cos\theta + 0\cdot\operatorname{sen}\theta$

$\cos\theta$.

e tem mesma direção e sentido que o vetor $\vec{v}$ original.

Obs: alguns livros chamam $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ de o versor associado ao vetor $\vec{v}$.

O que isso tem a ver com projeção?

$Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

e se $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \neq \overrightarrow{(0,0)}$, $a,b \in \mathbb{R}$

$Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = Pr_{\vec{u}}a\vec{u} + Pr_{\vec{u}}b\vec{v}$

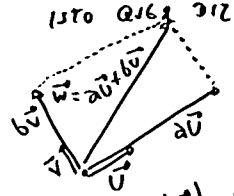
$= a\,Pr_{\vec{u}}\vec{u} + b\,Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

$= a\vec{u} + 0\vec{v}$ (☆☆)

$= a\vec{u}$

Porquê? Casa! Importante!

Geometricamente, o que isto quer dizer?



$Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = Pr_{\vec{u}}\vec{w} = a\vec{u}$

Repare que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

onde $a\vec{u}$ é paralelo a $\vec{u}$,

e $b\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$...

(porque ortogonal?

$(b\vec{v})\cdot\vec{u} = b(\vec{v}\cdot\vec{u}) = b\cdot 0$

porque $\vec{u} \perp \vec{v}$).

A gente pode usar o "Pr" pra decompor vetores em "parte parte paralela" e "parte ortogonal" a um vetor dado.

Exemplo/exercício:

Para cada um dos casos abaixo calcule $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ e $\vec{w} - Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

Usando o olhômetro.

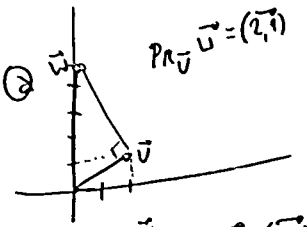
(a) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,5)}$

(b) $\vec{u} = \overrightarrow{(4,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,5)}$

(c) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,4)}$

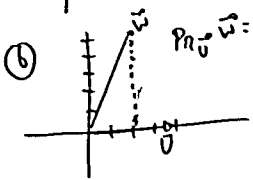
(d) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,3)}$

(a)



$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \overrightarrow{(2,1)}$

(b)



$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \overrightarrow{(2,0)}$

GA 15/ABRIL/2015

...AGORA QUE VOCÊS ENTENDERAM O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO "PR" VOCÊS PODEM USAR A DEFINIÇÃO ALGÉBRICA DO PR PRA CONFERIR OS RESULTADOS DE VOCÊS...

...E DÁ PRA CONFERIR OS RESULTADOS DE OUTRO JEITO (TRUQUE IMPORTANTE!)

PROPRIEDADES DO PR:

- $Pr_{\vec{U}}\vec{W}$ É UM MÚLTIPLO DE $\vec{U}$,
- $\vec{W} - Pr_{\vec{U}}\vec{W} \perp \vec{U}$.

BASTA VERIFICAR ESTAS DUAS COISAS!

ATÉ AGORA $Pr_{\vec{U}}\vec{W} = \underbrace{\frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}}_{\text{PORQUÊ???}}\vec{U}$

DE ONDE VEM O $\frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$?

SEJA $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{V} = \vec{W} - \lambda\vec{U}$.

PRA QUE VALORES DE λ TEMOS $\vec{V} \perp \vec{U}$?

DICA: $\lambda_{\vec{U}}\vec{W} = \frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$, $Pr_{\vec{U}}\vec{U} = (\lambda_{\vec{U}}\vec{W})\vec{U}$

$\vec{V}\cdot\vec{U} = 0$ SSE

$(\vec{W} - \lambda\vec{U})\cdot\vec{U} = 0$ SSE

$\vec{W}\cdot\vec{U} - \lambda\vec{U}\cdot\vec{U} = 0$ SSE

$\vec{W}\cdot\vec{U} = \lambda(\vec{U}\cdot\vec{U})$ SSE

$\frac{\vec{W}\cdot\vec{U}}{\vec{U}\cdot\vec{U}} = \lambda$

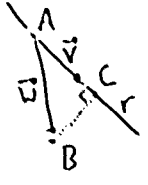
OU SEJA (VAMOS VOLTAR A ISTO NA AULA QUE VEM!) O ÚNICO VALOR PARA λ QUE FAZ COM QUE TENHAMOS $\vec{V} \perp \vec{U}$ É $\lambda = \lambda_{\vec{U}}\vec{W} = \frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$...

PRA CASA, MUITO IMPORTANTE!: TENTEM FAZER O PROBLEMA 9 DA LISTA!

PRÓXIMA AULA:

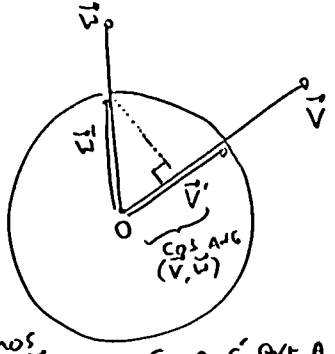
SE $r = \{A + t\vec{V} \mid t \in \mathbb{R}\}$ E $B = A + \vec{U}$,

QUAL É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B?



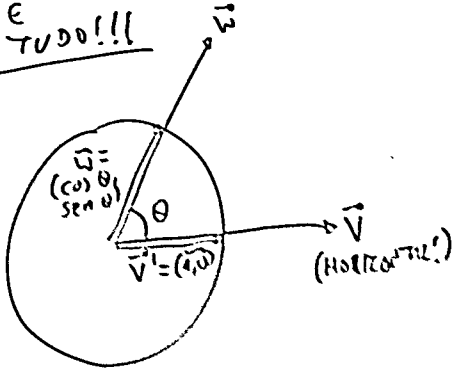
RESPOSTA (ESBOÇO/DICA): USE A PROJEÇÃO!

E O COS E OS ÂNGULOS?



COMO É QUE A GENTE FAZ ESSA CONTA? (PRODUTO INTERNO COMPLICADO, ÂNGULO, COS...)

O JEITO QUE DEIXA TUDO MAIS SIMPLES É RODAR TUDO!!!



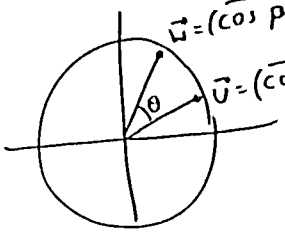
GA 17/03/2015

NA AULA PASSADA A GENTE COMEÇOU A VER UMAS CONEXÕES ENTRE ÂNGULO, "PR" E ENCONTRAR O PONTO DE UMA RETA $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ MAIS PRÓXIMO DE UM PONTO B DADO...

(AINDA NÃO TENHO AS NOTAS DAS PROVAS 😕)

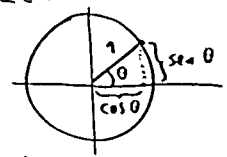
SLOGAN: MUITAS CONTAS FICAM MAIS FÁCEIS COM VETORES UNITÁRIOS.

DIGAMOS QUE $\vec{U}, \vec{W}$ SÃO UNITÁRIOS, E QUE:



OBS: $c^2 + s^2 = 1$
$\overline{c}^2 + \overline{s}^2 = 1$

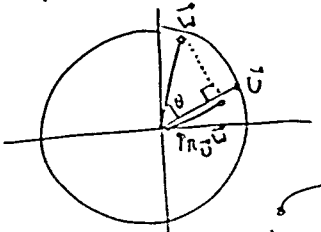
LEMBRE QUE:



COMO É QUE A GENTE PODE MEDIR (CALCULAR) O θ EM

COM O QUE A GENTE JÁ SABE?

PODEMOS USAR O "PR"...



$\|\operatorname{Pr}_{\vec{U}}\vec{W}\| = |\cos\theta|$ ← o "|·|" CUIDA DAS COISAS QUANDO $\theta > 90°$

$$\operatorname{Pr}_{\vec{U}}\vec{W} = \frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}\vec{U} = \frac{(\overline{c},\overline{s})\cdot(c',s')}{(\overline{c},\overline{s})\cdot(\overline{c},\overline{s})}(\overline{c},\overline{s}) = \frac{(\overline{c},\overline{s})\cdot(c',s')}{\overline{c}^2+\overline{s}^2}(\overline{c},\overline{s}) = \big((\overline{c},\overline{s})\cdot(c',s')\big)(\overline{c},\overline{s}) = (\vec{U}\cdot\vec{W})\vec{U}$$

$$\|\operatorname{Pr}_{\vec{U}}\vec{V}\| = \|(\vec{U}\cdot\vec{V})\cdot\vec{U}\| = |(\vec{U}\cdot\vec{V})|\,\|\vec{U}\| = |\vec{U}\cdot\vec{V}|$$

LEMBRE QUE A GENTE DEFINIU $\lambda_{\vec{U}}\vec{W} = \frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$,

$$\operatorname{Pr}_{\vec{U}}\vec{W} = (\lambda_{\vec{U}}\vec{W})\cdot\vec{U}$$

QUANDO $\|\vec{U}\| = 1$,

$$\lambda_{\vec{U}}\vec{W} = \vec{U}\cdot\vec{W}$$

REPARE QUE ISSO NOS DÁ UM POUCO MAIS DE INFORMAÇÃO QUE $\|\operatorname{Pr}_{\vec{U}}\vec{W}\| = |\vec{U}\cdot\vec{W}| = |\cos\theta|$

$$\lambda_{\vec{U}}\vec{W} = \vec{U}\cdot\vec{W} = \cos\theta$$

QUANDO $\|\vec{U}\| = \|\vec{W}\| = 1$,

$$\vec{U}\cdot\vec{W} = \cos\theta \quad (\star)$$

LEMBREM QUE HAVIA UMA FÓRMULA MÁGICA, QUE ERA:

PARA QUAISQUER $\vec{U}, \vec{V}$ NÃO-NULOS,

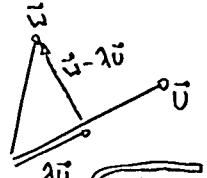
$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\cos\underbrace{\theta}_{\text{ANG}(\vec{U},\vec{V})} \quad (\star\star)$$

A FÓRMULA $(\star\star)$ É CONSEQUÊNCIA DA FÓRMULA $(\star)$! COMO?

EXERCÍCIO PRA CASA (FÁCIL - A DIFICULDADE É SÓ ESCLARECER QUEM SÃO AS SUBSTITUIÇÕES): PROVE QUE $(a\vec{U})\cdot(b\vec{W}) = |ab|\cos\theta$ E PORTANTO $(\star\star)$ ☺ !!

DICA: COMECEM COM $\vec{U} = (4,3)$, $\vec{V} = (6,8)$ EM $(\star\star)$. (DEPOIS PENSEM PRA VETORES GERAIS.)

LEMBREI TAMBÉM QUE NESTA FIGURA



OOPS, ERA NÃO

TEMOS $\lambda\vec{U} \perp \vec{W} - \lambda\vec{U}$ SE E SÓ SE $\lambda = \lambda_{\vec{U}}\vec{W}$.

EXERCÍCIO:

ENCONTRE O λ QUE FAZ COM QUE $\lambda\vec{U} \perp \vec{W} -$

NOS SEGUINTES CASOS:

(a) $\vec{U} = (3,0)$, $\vec{W} = (2,$

(b) $\vec{U} = (4,2)$, $\vec{W} = (0,$

(USE O OLHÔMETRO E AS CONTAS, CONFIRA)

DICA: REPRESENTE TUDO GRAFICAMENTE PARA $\lambda = 0, 1, 2.$

"TUDO" É: $\vec{U}$, $\vec{W}$, $\lambda\vec{U}$, $\vec{W} - \lambda$

$\vec{u})\cdot\vec{v}\,\|$

$\vec{v})\|\,\|\vec{v}\,\|$

$|$

ENTE

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$,

$(\lambda_{\vec{u}}\vec{u})\cdot\vec{u}$

$=1$,

SSO NOS

MAIS

SÃO

$\|=|\vec{u}\cdot\vec{u}|=|\cos\theta|$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}=\cos 0$

$\vec{u}\|=\|\vec{u}\|=1$,

$\vec{u}=\cos\theta$! (☆)

UE HAVIA UMA

MÁGICA, QUE ERA:

QUER $\vec{u},\vec{v}$ NÃO-NULOS,

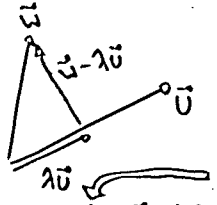
$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\underbrace{\theta}_{\text{ÂNG}(\vec{u},\vec{v})}$ (☆☆)

LA (☆☆) É CONSEQUÊNCIA

ULA (☆)! COMO?

O PRA CASA (FÁCIL - UL DISSE É SÓ ESCLARECER O AS SUBSTITUIÇÕES): QUE $(\lambda\vec{u})\cdot(b\vec{u})=|ab|\cos\theta$ ANTO (☆☆) ⇔ !!

LEMBRE TAMBÉM QUE NESTA FIGURA



OOPS, ERA $\vec{u}$, NÃO $\lambda\vec{u}$!

TEMOS $\lambda\vec{u}\perp\vec{w}-\lambda\vec{u}$ SE E SÓ SE $\lambda=\lambda_{\vec{u}}\vec{u}$.

EXERCÍCIO:

ENCONTRE O λ QUE FAZ COM QUE $\lambda\vec{u}\perp\vec{w}-\lambda\vec{u}$ NOS SEGUINTES CASOS:

ⓐ $\vec{u}=(3,0)$, $\vec{w}=(2,1)$

ⓑ $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{w}=(0,5)$

(USE O ALGORITMO E AS CONTAS; CONFIRA)

DICA: REPRESENTE TUDO GRAFICAMENTE PARA $\lambda=0,1,2$.

"TUDO" É: $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\lambda\vec{u}$, $\vec{w}-\lambda\vec{u}$.

DICA: COMECE COM $\vec{u}=(4,3)$, $\vec{v}=(6,8)$, EM (☆☆). (DEPOIS PENSE PRA VALER.)

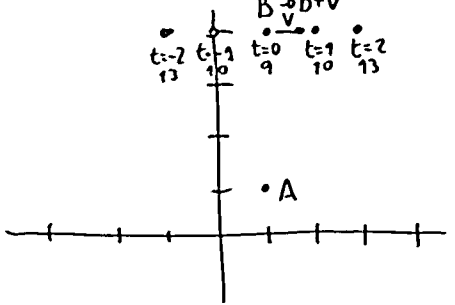
EXERCÍCIO 9 DA LISTA QUE EU PASSEI ANTES DA P1:

9) NOS CASOS ABAIXO, CALCULE $d(A,B+t\vec{v})^2$ PARA OS VALORES DE t PEDIDOS, E ESCREVA OS RESULTADOS NO LADO DO PONTO $B+t\vec{v}$ CORRESPONDENTE.

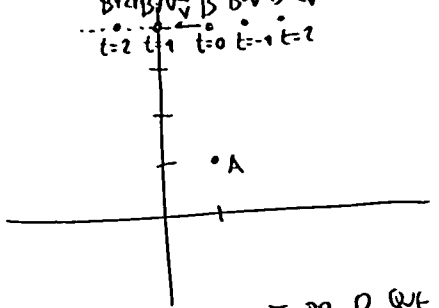
LEMBRE DO QUE VIMOS SOBRE VISUALIZAR OPERAÇÕES NA AULA DE 20/MARÇO - SÓ QUE AGORA TODOS OS PONTOS NOS QUAIS ESTAMOS CALCULANDO $d(A,P)^2$ ESTÃO AO LONGO DE UMA RETA.

ⓐ $A=(1,1)$, $B=(1,4)$, $\vec{v}=(1,0)$, $t\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

ⓔ $A=(0,0)$, $B=(2,1)$, $\vec{v}=(1,-2)$, $t\in\{-2,-1,0,1,2\}$.



A	B	$\vec{v}$	t	$B+t\vec{v}$
(3,1)	(3,4)	(3,0)	-2	(-3,4)
(3,1)	(3,4)	(3,0)	-1	(0,4)
(3,1)	(3,4)	(3,0)	0	(3,4)
(3,1)	(3,4)	(3,0)	1	(2,4)
(3,5)	(3,4)	(3,0)	2	(3,4)



PRA CASA: FAÇAM TUDO O QUE VOCÊS PUDEREM DO 9 - PORQUE A GENTE VAI VER VÁRIAS COISAS QUE SÃO MUITO MAIS FÁCEIS DE ENTENDER SE A GENTE SOUBER "VISUALIZAR AS CONTAS"!

GA 22/ABRIL/2015

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PUS TODO MUNDO PRA FAZER O PROBLEMA 9 DA LISTA...

ELE TEM ALGO A VER COM COMO A GENTE VAI USAR O "PR" PRA ENCONTRAR O PONTO DE $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ MAIS PRÓXIMO DE B, COM ESTES SLOGANS,

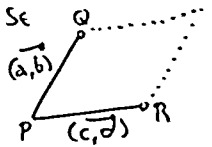
SLOGAN: TODO PROBLEMA DE ENCONTRAR UM PONTO $P\in r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ COM A PROPRIEDADE TAL CORRESPONDE A UM PROBLEMA DE ENCONTRAR O t COM UMA PROPRIEDADE CORRESPONDENTE.

E ESTE OUTRO, PARECIDO:

SLOGAN: ...
UM PONTO $P\in r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+b\}$
... ENCONTRAR O x...

...E ESTAS IDEIAS RESOLVEM, P. EX., OS ITENS 1b E 3a DA PROVA.

OBS: SE



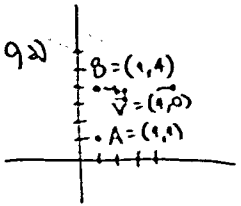
ENTÃO A ÁREA DO PARALELOGRAMO É DADA PELO DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

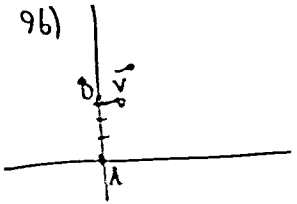
AGORA QUE PROVAMOS 9g, 9h, 9i ...

SERÁ QUE ISSO AJUDA NOS ITENS 9a, 9b ..., 9e?

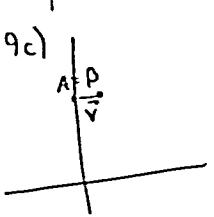
9a)



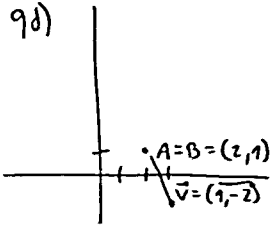
9b)



9c)



9d)



9g) PROVE

$$(\vec{v}+\vec{v}')\cdot(\vec{w}+\vec{w}') = (\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w}')+(\vec{v}'\cdot\vec{w})+(\vec{v}'\cdot\vec{w}').$$

DISTRIBUTIVIDADE (S):

D1 $a\cdot(b+c)=ab+ac$

D2 $(a+b)\cdot c=ac+bc$

D3 $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

D4 $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

$$(\vec{v}+\vec{v}')\cdot(\vec{w}+\vec{w}') \overset{\text{POR D4, com } \vec{u}=\vec{v},\ \vec{v}=\vec{v}',\ \vec{w}=(\vec{w}+\vec{w}')}{=} \vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{w}')+\vec{v}'\cdot(\vec{w}+\vec{w}')$$

$$= (\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w}')+(\vec{v}'\cdot\vec{w})+(\vec{v}'\cdot\vec{w}')$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{w}') \overset{\text{POR D3 com } \vec{u}:=\vec{v},\ \vec{v}:=\vec{w},\ \vec{w}:=\vec{w}'}{=} (\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w}')$$

9h

9h) Prove que quando $\vec{v} \perp \vec{w}$, ou seja, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, temos

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2. \qquad (1P)$$

Dicas:

- Expanda todas as definições

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \sqrt{(\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})}^2$$
$$= \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{v}}^2$$
$$= \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w}}^2$$
$$= \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w}$$

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}^2 + \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}^2$$
$$= \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w}$$

9i)

9i) Prove que quando $\vec{v} \perp \vec{w}$ temos $\|\vec{v}+k\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + |k|^2\|\vec{w}\|^2$.

$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$
$\Rightarrow k(\vec{v}\cdot\vec{w}) = 0$
$\Rightarrow \vec{v}\cdot(k\vec{w}) = 0$
$\Rightarrow \vec{v} \perp k\vec{w}$

Usando 9h, com $\vec{v} := \vec{v}$, $\vec{w} := k\vec{w}$

Temos
$\|\vec{v}+k\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|k\vec{w}\|^2$

e $\|k\vec{w}\| = |k|\|\vec{w}\|$
$\|k\vec{w}\|^2 = (|k|\|\vec{w}\|)^2$
$= |k|^2\|\vec{w}\|^2$

Então:
$\|\vec{v}+k\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + |k|^2\|\vec{w}\|^2$
$= \|\vec{v}\| + k^2\|\vec{v}\|^2$

Entendam os detalhes em casa!

GA 22/ABRIL/2015

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PUS TODO MUNDO PRA FAZER O PROBLEMA 9 DA LISTA...

ELE TEM ALGO A VER COM COMO A GENTE VAI USAR O "PR" PRA ENCONTRAR O PONTO DE $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ MAIS PRÓXIMO DE B, COM ESTES SLOGANS,

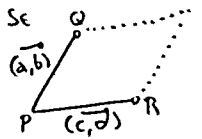
SLOGAN: TODO PROBLEMA DE ENCONTRAR UM PONTO $P\in r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ COM A PROPRIEDADE TAL CORRESPONDE A UM PROBLEMA DE ENCONTRAR O t COM UMA PROPRIEDADE CORRESPONDENTE.

E ESTE OUTRO, PARECIDO:

SLOGAN:
UM PONTO $P\in r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+6\}$
... ENCONTRAR O x...

...E ESTAS IDEIAS RESOLVEM, P. EX., OS ITENS 1b E 3a DA PROVA.

OBS: SE



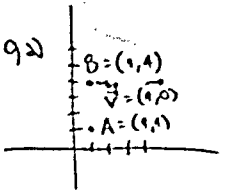
ENTÃO A ÁREA DO PARALELOGRAMO É DADA PELO DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

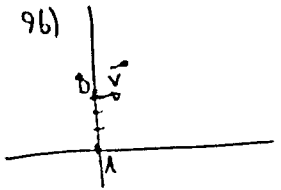
AGORA QUE PROVAMOS 9g, 9h, 9i ...

SERÁ QUE ISSO AJUDA NOS ITENS 9a, 9b ..., 9e?

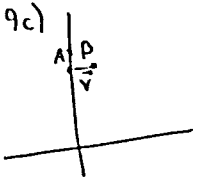
9a)



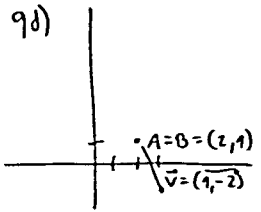
9b)



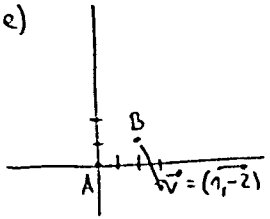
9c)



9d)



9e)



EM TODOS ESTES CASOS TEMOS $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$, $\overrightarrow{BA}\perp\vec{v}$

$$d(A,\underbrace{B+t\vec{v}}_{\text{PONTO DE UMA RETA } r})^2 = \|B+t\vec{v}-A\|^2$$
$$= \|(B-A)+t\vec{v}\|^2$$
$$= \|\overrightarrow{AB}+t\vec{v}\|^2$$
$$\overset{\text{PITÁGORAS}}{=} \|\overrightarrow{AB}\|^2+\|t\vec{v}\|^2$$
$$= \|\overrightarrow{AB}\|^2+t^2\|\vec{v}\|^2$$

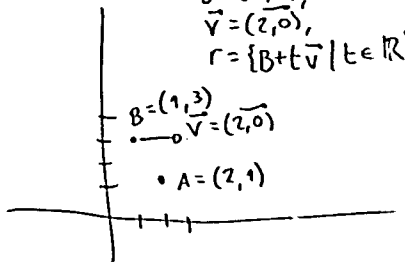
...E QUANDO $\|\vec{v}\|^2>0$ O VALOR DE $\|\overrightarrow{AB}\|^2+t^2\|\vec{v}\|^2$ É MÍNIMO QUANDO $t=0$.

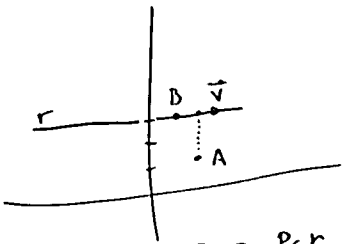
NO PROBLEMA 9 TÍNHAMOS RETAS $r=\{B+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ E PONTOS $A\in\mathbb{R}^2$, TAIS QUE:

1) $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$,
2) O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE A ERA EXATAMENTE O PONTO B.

E NO CASO GERAL, SEM (1) E (2)?

EXEMPLO: $A=(2,1)$, $B=(1,3)$, $\vec{v}=(\vec{2},\vec{0})$, $r=\{B+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

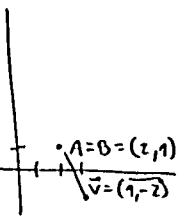




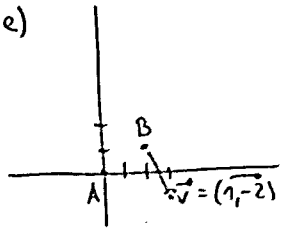
NESTE CASO O PONTO $P\in r$ MAIS PRÓXIMO DE A É O PONTO $(2,3)$, QUE CORRESPONDE A $t=\frac{1}{2}$!

mos

...ura
96 ..., 9e?



9e)



Em todos estes casos temos $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$, $\overrightarrow{BA} \perp \vec{v}$

$$d(A, \underbrace{B+t\vec{v}}_{\text{ponto de uma reta } r})^2 = \|B+t\vec{v}-A\|^2$$
$$= \|(B-A)+t\vec{v}\|^2$$
$$= \|\overrightarrow{AB}+t\vec{v}\|^2$$
$$\overset{\text{(por 9)}}{=} \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|t\vec{v}\|^2$$
$$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + t^2\|\vec{v}\|^2$$

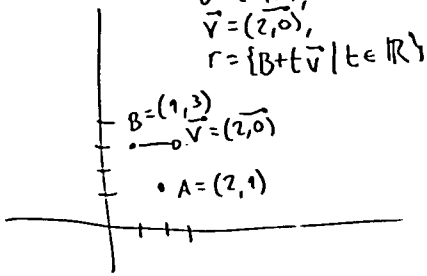
...e quando $\|\vec{v}\|^2 > 0$ o valor de $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + t^2\|\vec{v}\|^2$ é mínimo quando $t=0$.

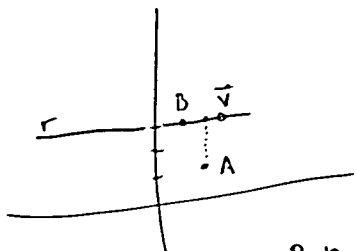
No problema 9 tínhamos retas $r=\{B+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e pontos $A\in\mathbb{R}^2$, tais que:

1) $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$,
2) o ponto de r mais próximo de A era exatamente o ponto B.

E no caso geral, sem (1) e (2)?

Exemplo: $A=(2,1)$, $B=(1,3)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $r=\{B+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$





Neste caso o ponto $P\in r$ mais próximo de A é o ponto $(2,3)$, que corresponde a $t=\frac{1}{2}$!

Perguntas:

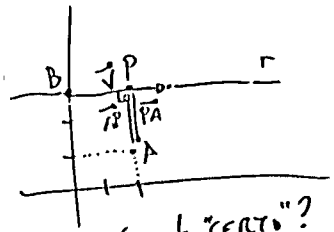
- Como encontrar esse t?
- O que isso tem a ver com o "Pr"?
- Qual o método geral por trás disto que tem a ver com os slogans?

GA 24/ABRIL/2015

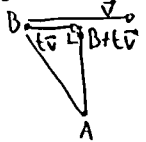
Sejam:
$r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$A \in \mathbb{R}^2$...

Qual é o ponto $P \in r$ mais próximo de A?
Qual é o ponto $P \in r$ tal que $d(A,P)$ é mínima?
Qual é o ponto $P \in r$ tal que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$?
Qual é o $t \in \mathbb{R}$ tal que $(B + t\vec{v}) - A \perp \vec{v}$?

Todas essas perguntas são equivalentes.



Qual é o t "certo"?
Ou seja, $t \in \mathbb{R}$ tal que

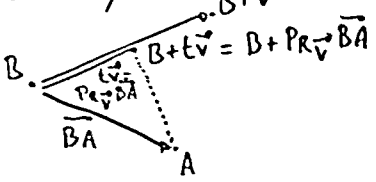


... o "t certo" é este: $t = \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Lembre que: $Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA} = \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = t\vec{v}$

Exercícios:
Encontre t tal que $\vec{v} \perp \overrightarrow{BA} - t\vec{v}$ nestes casos:
(a) $B = (0,3)$, $\vec{v} = (3,0)$, $A = (2,1)$
(b) $B = (0,0)$, $\vec{v} = (2,1)$, $A = (5,0)$

(Vimos que $t\vec{v} \perp \overrightarrow{BA} - t\vec{v}$ sempre tem $t=0$ como solução)

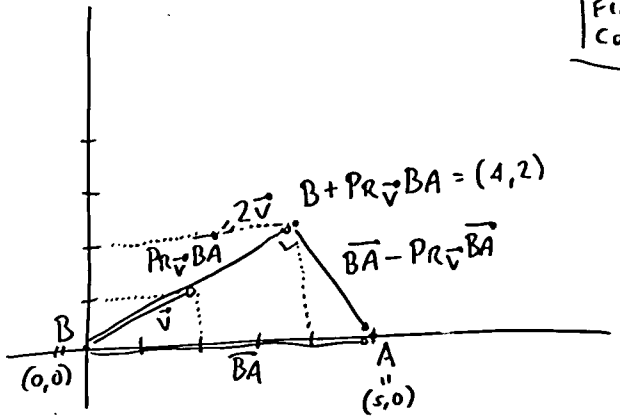


... Acabamos de aprender como encontrar o ponto de $r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ mais próximo de A... ele é $B + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA}$.

... e com isto sabemos calcular $d(r,A)$...
$d(r,A)$ = "o mínimo de todos os $d(B+t\vec{v}, A)$"
$d(r,A) = d(B + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA}, A)$.

(c) Calculem $d(r,A)$ no caso (b).

(Depois vamos ver como simplificar a fórmula da distância entre ponto e reta.)



$$d(r,A) = d\left(B + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA}, A\right)$$
$$= d((4,2),(5,0))$$
$$= \sqrt{(4-5)^2 + (2-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+4}$$
$$= \sqrt{5}$$

$$Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA} = Pr_{(2,1)}(5,0)$$
$$= \frac{(2,1)\cdot(5,0)}{(2,1)\cdot(2,1)}(2,1)$$
$$= \frac{10}{5}(2,1) = (4,2)$$
$$B + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{BA} = (0,0) + (4,2) = (4,2)$$

Seja $r = \{B+t$
Como é que
O ponto de
k de B?

Slogan: M
Ficam mais
com vetor

Exemp

Quais
A dis
(a) $k =$
(b) $k =$
(c) $k =$
(d) $k =$

Como re
Resp:

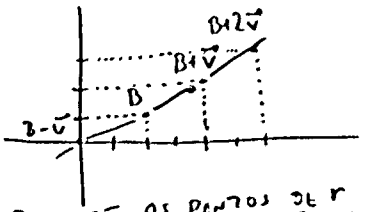
Ou ain

Seja $r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Como é que a gente encontra os pontos de r a uma distância k de B?

Slogan: muitas contas ficam mais fáceis com vetores unitários

Exemplo:



Quais são os pontos de r a distância k de B para:

(a) $k = \sqrt{5}$ Resp: $B+\vec{v}$, $B-\vec{v}$

(b) $k = 0$

(c) $k = 2\sqrt{5}$ $d(B, B+2\vec{v}) = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ Resp: $B+2\vec{v}$, $B-2\vec{v}$

(d) $k = 4$.

Como resolver o (d)?

Resp: $B+\alpha\vec{v}$, $B-\alpha\vec{v}$

$\alpha = ?$

Ou encontrar t tal que...

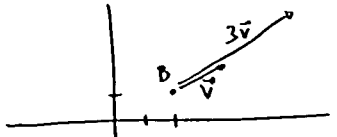
Truque:

$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ($\vec{v}'$ é unitário - $\|\vec{v}'\| = 1$).

$r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r' = \{B + t'(3\vec{v}) \mid t' \in \mathbb{R}\}$

$r = r'$!!!



"Reparametrização"!

Truque (agora direito!)

$r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r' = \{B + t'\vec{v}' \mid t' \in \mathbb{R}\}$, $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$r = \{(2,1) + t(2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r' = \{(2,1) + t'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \mid t' \in \mathbb{R}\}$

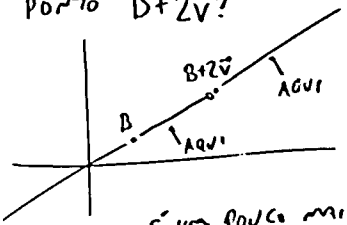
$d(B, B+t'\vec{v}') = |t'| \cdot \underbrace{0,0}$

$d(B, B+t'\vec{v}') = \|(B - t'\vec{v}') - B\| = \|t'\vec{v}'\| = |t'|\,\|\vec{v}'\| = |t'|$

Para que valores de t' temos $d(B, B+t'\vec{v}') = 4$?

Resp: $t' = 4$, $t' = -4$.

E se quiséssemos os pontos de r a distância 6 do ponto $B+2\vec{v}$?



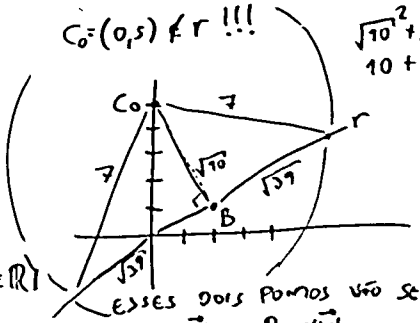
A conta é um pouco mais complicada (cata!)

E se quiséssemos os pontos de r a uma distância 7 do ponto $C_0 = (0,5)$?

$C_0 = (0,5) \notin r$!!!

$\sqrt{10}^2 + \sqrt{39}^2 = 7^2$

$10 + 39 = 49$



Esses dois pontos vão ser $B+\alpha\vec{v}'$ e $B-\alpha\vec{v}'$...

Pra qual α?

Resp: $\alpha = \sqrt{39}$!!!!

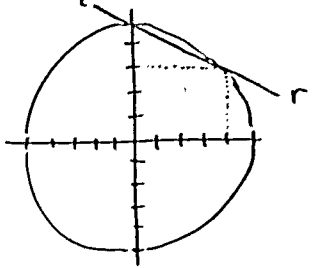
GA 29/ABRIL/2015

No final da última aula vimos dois jeitos de reparametrizar retas, e vimos que daria para usá-los para resolver problemas de interseção de reta e círculo...

Exemplo:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 5^2\}$

$r = \{(0,5) + t(\overrightarrow{2,-1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$



Hoje:
Círculos (algebricamente e geometricamente),
vários modos de encontrar $r \cap C$ (uns mais geométricos, outros mais algébricos)
e um problema parecido no qual vai aparecer uma parábola !!.

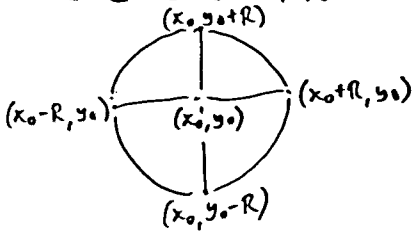
Círculos

Se C é um círculo de centro $C_0 = (x_0, y_0)$ e raio R então:

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(C_0, P) = R\}$$
$$= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(C_0, P)^2 = R^2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}\}$$

Pensem em Pitágoras

e C tem este 4 pontos "óbvios":



Formalmente:
$(x_0, y_0 \pm R) \in C$
$(x_0 \pm R, y_0) \in C$

Exercício:
① Desenhe C_0, C e os 4 pontos mais óbvios de C nestes casos:
② $C_0 = (0,0)$, $R = 5$
③ $C_0 = (4,2)$, $R = 3$
④ $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4^2\}$

Agora para cada um dos itens anteriores verifique que os seus "pontos óbvios" obedecem $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

② $(0,0+5)$, $(0-5,0)$, $C_0=(0,0)$, $(0+5,0)$, $(0,0-5)$

(x,y)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$
$(0,5)$	$0^2+5^2=5^2$
$(-5,0)$	$5^2+0^2=5^2$
$(5,0)$	$0^2+(-5)^2=5^2$
$(0,-5)$	$(-5)^2+0^2=5^2$

(1P/2C)

③ (2P/4C)

(x,y)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$
$(4,5)$	$0^2 + 3^2 = 3^2$
$(7,2)$	$3^2 + 0^2 = 3^2$
$(4,-1)$	$0^2 + (-3)^2 = 3^2$
$(1,2)$	$(-3)^2 + 0^2 = 3^2$

Repare que os 4 "pontos óbvios" estão "obviamente" à distância R do centro"!

(x_0, y_0+R) está R unidades acima do centro etc...

④ Quais pontos
Vamos com c
e te

(x,y)
$(3,5)$
$(3,-3)$
$(7,1)$
$(-1,1)$

Repare que os 4 "pontos óbvios" estão "obviamente à distância R do centro"!

(x_0, y_0+R) está R unidades acima do centro, etc...

$(0+5,0)$

$-y_0)^2$
$= 5^2$
$= 5^2$
$)^2 = 5^2$
$)^2 = 5^2$

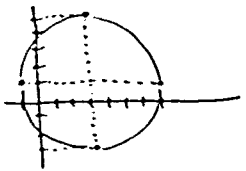
(1P/2C)

$-x_0)^2 + (y-y_0)^2$
$^2 + 3^2 = 3^2$
$+ 0^2 = 3^2$
$+ (-3)^2 = 3^2$
$3)^2 + 0^2 = 3^2$

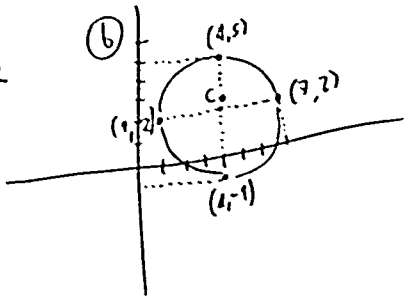
(c) Quais os 4 pontos óbvios? Vamos começando com chutes (bons) e testá-los...

(x,y)	$(x-3)^2+(y-1)^2=4^2$?
$(3,5)$	$0^2+4^2=4^2$ (sim)
$(3,-3)$	$0^2+(-4)^2=4^2$ (sim)
$(7,1)$	$4^2+0^2=4^2$ (sim)
$(-1,1)$	$(-4)^2+0^2=4^2$ (sim)

(c)



(b)



Voltando à pergunta lááá da esquerda...

Como é que a gente encontra as duas interseções de C e r?

Nomes: I, I' são as interseções, M é o ponto médio delas.

Uma das interseções é o "ponto óbvio de cima", $(0,5)$.

Seja $I=(0,5)$.

Quem é I'?

(Dica: chutem e testem.)

$I' = (4,3)$

$M = \frac{I+I'}{2} = (2,4)$

Lembrem que toda pergunta sobre pontos de uma reta (parametrizada) com uma propriedade pode ser convertida pra uma sobre "t"s com uma propriedade "correspondente".

Pra que valores de t temos isto?

$$\underbrace{(0,5)+t\overrightarrow{(2,-1)}}_{\text{ponto de } r} \in C$$

Ou, equivalentemente,

$$(0+2t, 5-1t) \in \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$$

Ou,

$$\underbrace{(0+2t)}_{\text{"x"}}{}^2 + \underbrace{(5-1t)}_{\text{"y"}}{}^2 = 5^2$$

Ou,

$$4t^2 + (5-t)^2 = 5^2$$

$$4t^2 + \cancel{5^2} - 10t + t^2 = \cancel{5^2}$$

$$5t^2 - 10t = 0$$

Isto é verdade se e só se $t \in \{0,2\}$.

E, repare:

$t=0 \Rightarrow (0,5)+t\overrightarrow{(2,-1)} = (0,5)$

$t=2 \Rightarrow (0,5)+t\overrightarrow{(2,-1)} = (4,3)$

Exercício:

$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2+(y-2)^2=3^2\}$,

$r = \{(5,3)+t\overrightarrow{(1,-2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

Quais são as duas interseções de C e r?

Dica: uma das interseções tem coordenadas inteiras. Desenhem tudo, encontrem-na no olhômetro, encontrem o t associado a ela, e testem tudo.

A outra fica pra casa.

GA 29/ABRIL/2015

TEM JEITOS AINDA MAIS ALGÉBRICOS DE RESOLVER $C \cap r$...

NOSSO EXEMPLO ORIGINAL:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5^2\}$$
$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = 5 - \frac{x}{2}}_{\text{EQ CARTESIANA}}\}$$

QUAIS SÃO OS PARES (x,y) QUE OBEDECEM AS DUAS EQUAÇÕES ACIMA AO MESMO TEMPO?

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y = 5 - \frac{x}{2}$$
$$x + \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 = 25$$
$$x + \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 - 25 = 0$$

ISTO DÁ ALGO DA FORMA $ax^2 + bx + c = 0$...

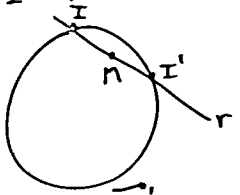
DÁ PRA USAR BHASKARA PRA ENCONTRAR DOIS VALORES DE x...

E PRA CADA UM DELES ENCONTRAMOS O y CORRESPONDENTE FAZENDO

$$y = 5 - \frac{x}{2}.$$

TEM JEITOS "MAIS GEOMÉTRICOS" (NO SENTIDO DE QUE CADA PASSO TEM UM SIGNIFICADO GEOMÉTRICO CLARO) DE ENCONTRAR $C \cap r$...

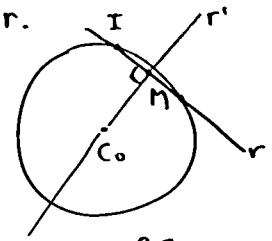
ÀS VEZES A GENTE CONHECE UMA DAS INTERSEÇÕES E O M... QUANDO A GENTE TEM I E M PODEMOS ENCONTRAR O I' "POR SIMETRIA"...



$$\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{MI'}$$
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MI'}$$
$$\overrightarrow{I'} = M + \overrightarrow{IM}$$

EM QUE SITUAÇÕES O M É FÁCIL DE CONSEGUIR?

SE CONHECEMOS r A GENTE CONHECE UM "VETOR DIRETOR" PRA r, E O "COEFICIENTE ANGULAR" DE r.



r' É UMA RETA PERPENDICULAR A r QUE PASSA PELO C_0...

$M = r \cap r'$,

E AGORA É FÁCIL ENCONTRAR I'.

EXERCÍCIOS PRA TREINAR ISTO EM CASA:

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5^2\}$

$I = (0,5)$

$\vec{v} = (1,-2)$

$r = \{I + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

ENCONTREM r', M, I'.

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2\}$,

$I = (4,5)$,

$\vec{v} = (1,2)$...

VOU PÔR MAIS EXERCÍCIOS NA PÁGINA DO CURSO.

GA 6/MAIO/2015

NO FINAL DA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS, COMO "QUAIS SÃO OS PONTOS DE r A DISTÂNCIA 4 DE C_0" PODEM SER VISTOS COMO PROBLEMAS DE INTERSEÇÃO DE RETA E CÍRCULO, E PODEM SER RESOLVIDOS ALGEBRICAMENTE...

SEJAM: $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1\}$,

$A = (0,1)$,

$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,r)\}$ "CONJUNTO"

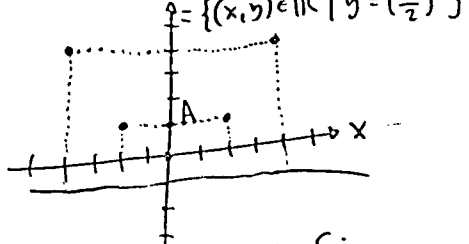
$= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A)^2 = d(P,r)^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-0)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \left(\frac{x}{2}\right)^2\}$



ALGUNS PONTOS DE C:

(-1,4) (4,4)

(-2,1) (0,0) (2,1)

EXERCÍCIO:

ENCONTRE OS PONTOS DE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \left(\frac{x}{2}\right)^2\}$

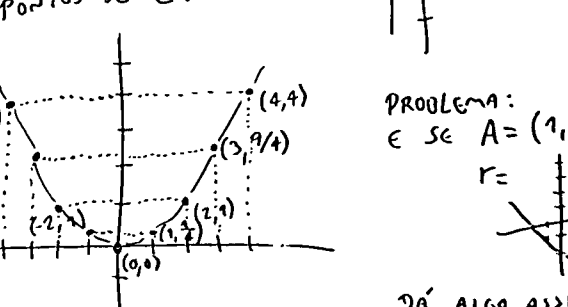
COM:

- $x = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$
- $x = -1 \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$
- $x = 3 \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9/4$
- $x = -3 \Rightarrow y = 9/4$

E CONFIRA QUE ESTES PONTOS OBEDECEM $d((x,y),A) = d((x,y),r)$.

DEPOIS REPRESENTE ESTES PONTOS GRAFICAMENTE JUNTO COM OS ANTERIORES.

9 PONTOS DE C:



ACABAMOS DE VER QUE $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,r)\}$ É UMA PARÁBOLA!

PROBLEMA (2P, EM GRUPO, 5 MINS):

SEJAM $A = (1,0)$,

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1\}$,

$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,r)\}$.

ENCONTREM 9 PONTOS DE C E ESBOCE C.

PROBLEMA:

E SE $A = (1,1)$,

DÁ ALGO ASSIM - UMA PARÁBOLA TORTA!

CÔNICAS C

$C = \{(x,y$

$P = \{(x,$

$H = \{(x$

CÔNICAS N

$C' = \{($

$P' = \{($

$H' = \{($

ONDE U

V

TRUQU

VARI

SE A

U=0,

V=0,

A GE

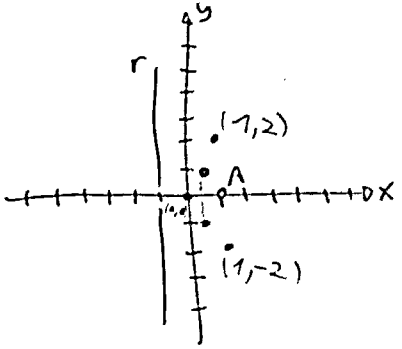
ESTES

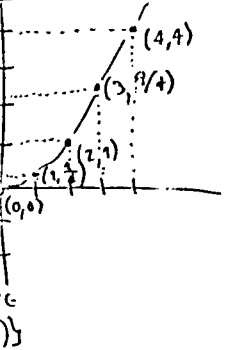
SABE

(OLHO

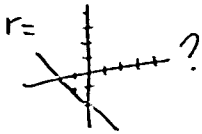
MEU

PROBLEMA (2P, EM GRUPO, 5 MIN):
SEJAM $A=(1,0)$,
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-1\}$,
$C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,A)=d(P,r)\}$.
ENCONTREM 9 PONTOS DE C
E ESBOCE C.

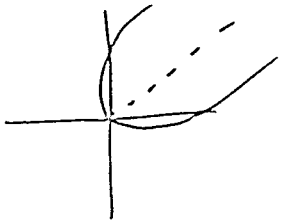




PROBLEMA:
E SE $A=(1,1)$,
$r=$



DÁ ALGO ASSIM -
UMA PARÁBOLA TORTA!



CÔNICAS CANÔNICAS

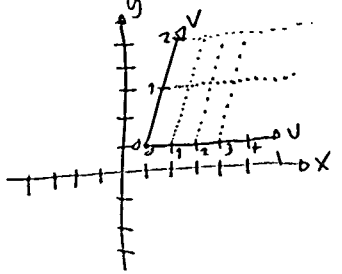
$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$
$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$

CÔNICAS NÃO CANÔNICAS

$C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$
$P'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v=u^2\}$
$H'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$

ONDE $u=ax+by+c$,
$v=dx+ey+f$.

TRUQUE: MUDANÇA DE VARIÁVEIS, GRAFICAMENTE.



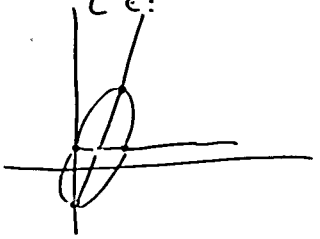
SE A GENTE SOUBER ONDE
$u=0$, $u=1$,
$v=0$, $v=1$,
A GENTE SABE TRAÇAR ESTES EIXOS NOVOS, E SABEMOS ENCONTRAR (OLHOMETRICAMENTE, PELO MENOS) OS PONTOS (x,y) COM COORDENADAS u,v DADAS.

DIGAMOS QUE
$v=0$ AQUI: $\{(1,1)+t(\overrightarrow{1,0}) \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$v=1$ AQUI: $\{(2,3)+t(\overrightarrow{1,0}) \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$u=0$ AQUI: $\{(1,1)+t(\overrightarrow{1,2}) \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$u=1$ AQUI: $\{(2,1)+t(\overrightarrow{1,2}) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

REPRESENTEM GRAFICAMENTE ESTAS 4 RETAS;
DEPOIS COMPLETE:

u	v	x	y
0	0		
1	0		
0	1		
1	1		
-1	0		
0	-1		

PRA QUE A GENTE QUER ISTO?
ISTO VAI NOS PERMITIR ENCONTRAR ALGUNS PONTOS DE C', P', H', E ESBOÇAR ESTES CONJUNTOS... P.EX., C' É:



GA 8/MAIO/2015

HOJE: A GRANDE FÁBRICA DE CÔNICAS!

LEMBREM QUE:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

E:

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 = 1\}$

$P' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid v = u^2\}$

$H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 1\}$

ONDE PRA C', P', H' FAZEREM SENTIDO A GENTE PRECISA DEFINIR O QUE SÃO AS VARIÁVEIS NOVAS u E v.

DÁ PRA GENTE DESENHAR C', H', P' SE NOS DEREM OS EIXOS u E v...

VAMOS USAR O TRUQUE DOS "PONTOS ÓBVIOS".

EM C' ELES SÃO

u	v
0	1
0	-1
1	0
-1	0

EM H' ELES SÃO

u	v
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
1/2	2
1	1
2	1/2

E EM P' ELES SÃO

u	v
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

NOTAÇÃO (NÃO-PADRÃO):

[eq] QUER DIZER $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid eq\}$.

EX: $[u=0]$ QUER DIZER $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u = 0\}$

NOTAÇÃO:

(a,b) É O PONTO QUE TEM $x=a$ E $y=b$,

$(c,d)_\Sigma$ É O PONTO QUE TEM $u=c$ E $v=d$.

E ALGEBRICAMENTE?...

DIGAMOS QUE

$[v=0] = \{(1,1)+t(\overrightarrow{1,0}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$[v=1] = \{(2,3)+t(\overrightarrow{1,0}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$[u=0] = \{(1,1)+t(\overrightarrow{1,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$[u=1] = \{(2,1)+t(\overrightarrow{1,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE AS 4 RETAS ACIMA, E DEPOIS, USANDO OS EIXOS u E v, QUE VOCÊ ACABOU DE DESCOBRIR QUAIS SÃO, REPRESENTE GRAFICAMENTE C', H', P' (CADA UM NUM GRÁFICO) } 3min ½?

NOTE QUE $(a,b)_\Sigma = (1,1)+a(\overrightarrow{1,0})+b(\overrightarrow{1,2})$.

EXEMPLO: $(2,4)_\Sigma = (1,1)+2(\overrightarrow{1,0})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{1,2})$

$(1,1)+(\overrightarrow{2,0})+(\overrightarrow{1,3}) = (7,9)$

DIGAMOS QUE

$u = F(x,y) = ax+by+c$.

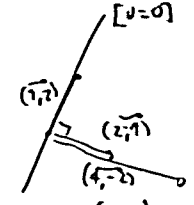
COMO PODEMOS ENCONTRAR OS VALORES DE a,b,c?

$u = F(x,y) = 0$ NUMA RETA -

A RETA $[u=0] = \{(1,1)+t(\overrightarrow{1,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

SABEMOS O VETOR DIRETOR DESTA RETA, $(\overrightarrow{1,2})$.

TRUQUE: $(\overrightarrow{a,b})$ VAI SER ALGUM VETOR NORMAL A $[u=0]$...



TANTO $(2,-1)$ QUANTO $(4,-2)$ SÃO NORMAIS A $[u=0]$.

1º PASSO:

VAMOS ENCONTRAR UMA FUNÇÃO $F'(x,y) = a'x+b'y+c'$,

"PARECIDA" COM A $F(x,y)$...

MAIS PRECISAMENTE,

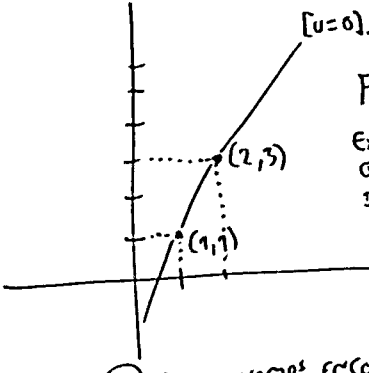
$F(x,y) = kF'(x,y)$,

E VAMOS ENCONTRAR k DEPOIS.

PASSOS:

(I) (a',b') É ALGUM VETOR NORMAL A $[u=0]$; A GENTE ESCOLHE. POR EXEMPLO, $(a',b') = (\overrightarrow{4,-2})$

(II) AGORA A GENTE AJUSTA O c' PRA QUE $F'(x,y)$ SEJA 0 EM ALGUM PONTO DE $[u=0]$ (E DAÍ EM TODOS).

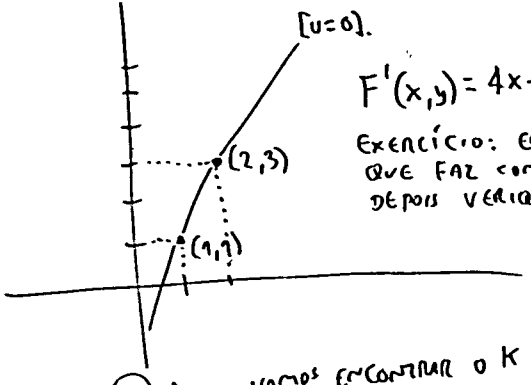


(III) AGORA VAMOS ENCO
REPARE QUE $F'(x,$
EXATAMENTE QUAN

QUEREMOS $F(x,y$
EM ALGUM PONTO
(E CONSEQUENTE
VAMOS ESCOLHE
$F(x,y) = F($

(II) Agora a gente ajusta o c' pra que $F'(x,y)$ seja 0 em algum ponto de $[u=0]$ (e daí em todos).

$\mathbb{R}\}$.



$F'(x,y) = 4x - 2y + c'$

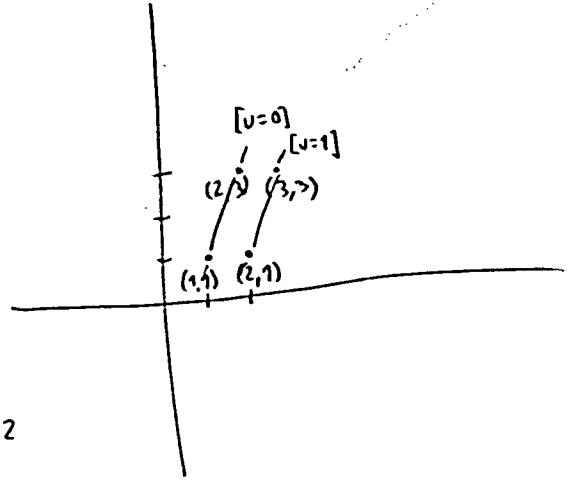
Exercício: encontre o c' que faz com que $F'(1,1)=0$, depois verique que $F'(2,3)=0$. $\Rightarrow 4-2+c'=0$, $c'=-2$, $F'(x,y)=4x-2y-2$

Então $K=\frac{1}{4}$,

$$F(x,y)=\frac{1}{4}(4x-2y-2)$$
$$= x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}.$$

Vamos conferir!

OK!



$\mathbb{R}$

$F'(x,y)=$

$b'y+c'$,

m a $F(x,y)$...

ente,

$'(x,y)$,

contrar K

é algum vetor

ormal a $[u=0]$;

a gente escolhe.

emplo, $(a',b')=(4,-2)$

(III) Agora vamos encontrar o K $(\neq 0)$.

Repare que $F'(x,y)=0$ exatamente quando $F(x,y)=0$

$$F(x,y) = K F'(x,y) = K(4x-2y-2) = (4K)x+(-2K)y-2K$$

Queremos $F(x,y)=1$ em algum ponto de $[u=1]$ (e consequentemente, em todos).

Vamos escolher $(x,y)=(2,1)$.

$$F(x,y)=F(2,1)=K(4\cdot 2-2\cdot 1-2)$$
$$=K(8-2-2)=4\cdot K$$

... ou seja,

$$u = x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$$
$$v = \frac{y}{2}-\frac{1}{2}$$

e:

$$C' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})^2=1\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})^2-1}_{\text{e expandindo isto obtemos um polinômio de 2º grau em } x \text{ e } y!!!}=0\}$$

Pra casa: leiam os capítulos sobre cônicas no livro!

Vou tentar pôr exercícios na página amanhã (do livro e das listas da bel

GA 13/maio/2015

Lembra que:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

e

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$

$H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 1\}$

$P' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid v = u^2\}$

Variação (novidade):

$C'_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = R^2\}$

$H'_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = k\}$

e idem para C_R e H_k.

Hoje:

Vamos treinar um pouco mais um método "algébrico" de definir cônicas usando C, H, P, u, v, e vamos fazer a ponte com a abordagem do Reis & Silva (incluí umas contas mágicas).

Exercício:

(a) Represente graficamente

$C'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{4}{36}x^2 + \frac{9}{36}y^2 = 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

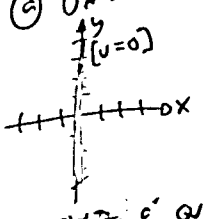
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\left(\frac{x}{3}\right)^2}_{u} + \underbrace{\left(\frac{y}{2}\right)^2}_{v} = 1\}$

... agora a gente descobre e trasa os conjuntos $[u=0]$, $[u=1]$, $[u=-1]$, $[v=0]$, $[v=1]$, $[v=-1]$;

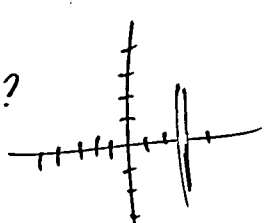
aí vai ficar fácil descobrir os 4 pontos óbvios de C''.

(b) Faça o mesmo para $C''' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}_{u} + \underbrace{\left(\frac{y-4}{2}\right)^2}_{v} = 1\}$

(a) Onde é que $u=0$, ou seja, $\frac{x}{3} = 0$? $x = 0$



Onde é que $v=1$?



... depois represente graficamente os pontos

u	v
0	1
0	-1
1	0
-1	0

(c) Faça o mesmo para $P'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+y)}_{u} = \underbrace{(x-2)^2}_{v}\}$

Pontos "óbvios":

u	v
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2

Até 3:15

A abordagem do Reis & Silva

P. 57:

$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d($

dá uma elipse;

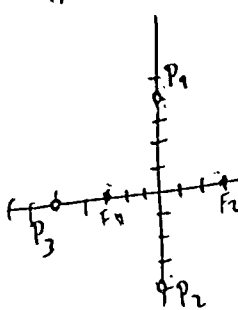
P. 60:

$[P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) - ($

dá um dos "ramos" de uma hipérbole

e essas contas [illegible] raízes quadrad[illegible] nas quais a ge[illegible] aprender a se[illegible]

Vamos começar [illegible] caso da elipse. $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ são



Exemplo: $F_1 = ($

$F_2 = ($

$d(F_1, P)$

Seja $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}$

Seja $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}$ tal que $P_1, P_2, P_3,$

A ABORDAGEM DO REIS & SILVA

P. 57:

$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1)+d(P,F_2)=K\}$

DÁ UMA ELIPSE;

P. 60:

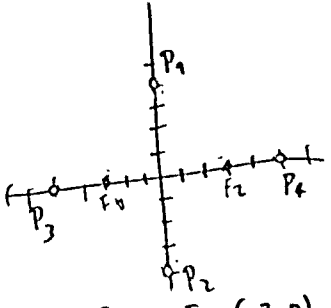
$[P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1)-d(P,F_2)=K\}$

DÁ UM DOS "RAMOS" DE UMA HIPÉRBOLE;

E ESSAS CONTAS INCLUEM RAÍZES QUADRADAS COMPLICADAS NAS QUAIS A GENTE PRECISA APRENDER A SE LIVRAR!

VAMOS COMEÇAR COM O CASO DA ELIPSE.

$F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ SÃO OS "FOCOS"



EXEMPLO: $F_1=(-3,0)$,
$F_2=(3,0)$,
$d(F_1,P)+d(F_2,P)=10$

SEJA $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d(F_1,P)+d(F_2,P)=K\}$
" $(-3,0)$ " $(3,0)$ " 10

SEJA $E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$
TAL QUE $P_1,P_2,P_3,P_4 \in E'$

SEJAM $u=\frac{x}{5}$, $v=\frac{y}{4}$.

ENTÃO $E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\}$

VAMOS TESTAR:

$P_3 \in E'$? $(-5,0)\in E'$?

$\frac{(-5)^2}{25}+\frac{0^2}{16}=1$? OK

A EQUAÇÃO DO E
(LEMBREM QUE ESTAMOS NO CASO $F_1=(-3,0)$, $F_2=(3,0)$, $K=10$)

É:

$d((-3,0),(x,y))+d((3,0),(x,y))=2\cdot 5$

$\|(x,y)-(-3,0)\| + \|(x,y)-(3,0)\|$

$\sqrt{(x+3)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 2\cdot 5 - \sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$(x+3)^2+y^2 = (2\cdot 5)^2 - 2\cdot 2\cdot 5\sqrt{(x-3)^2+y^2} + ((x-3)^2+y^2)$

$(x+3)^2+y^2-(2\cdot 5)^2-(x-3)^2-y^2 = -2\cdot 2\cdot 5\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$12x-100 = -20\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$(12x-100)^2 = 400((x-3)^2+y^2)$

PRA CASA: (MAS IMPORTANTE):

(III) NAS PÁGS 63 E 64 O LIVRO FAZ ALGO BEM PARECIDO PRA HIPÉRBOLES; NOTE QUE O LIVRO USA "1-1" PRA OBTER OS DOIS RAMOS DE UMA VEZ.

(II) REFAÇA A CONTA DA ELIPSE EM CASA "GENERALIZANDO-A" - ALGUNS NÚMEROS VIRAM "a", OUTROS VIRAM "c", ETC.

(I) TERMINE A CONTA PRA ELIPSE COM $F_1=(-3,0)$, $F_2=(3,0)$, $K=10$

EM CASA (OU REFAÇA-A).

GA 15/maio/2015

Lembre que

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$

$H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$

$P' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid v=u^2\}$

e que a equação de uma cônica (Reis & Silva sec 3.4, p.70) é

$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$;

as "formas reduzidas", ou "canônicas" (p.70, logo abaixo) são

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (elipse)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ (hipérbole)

$y=\frac{1}{4a}x^2$ ou

$y=-\frac{1}{4a}x^2$ ou

$x=\frac{1}{4a}y^2$ ou (parábola)

$x=-\frac{1}{4a}y^2$

e o que estamos chamando de "descrições geométricas" são as equações:

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ (elipse, p. 55)

$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=a$ (hipérbole, p. 60)

$d(P,F)=d(P,r)$ (parábola, p. 64)

Hoje:

- Vamos treinar traduzir entre esses vários formatos
- O que são cônicas degeneradas? (p.80 em diante)
- Talvez: "definição unificada". p.85, $d(P,F)=e\,d(P,r)$ onde F é o foco, r (que o Reis & Silva chama de d) é a diretriz (uma reta), e $e>0$.
- "excentricidade" e outros termos

Exercícios:

(I) Sabemos, pelo livro, que se $F_1=(-2,0)$, $F_2=(2,0)$ então

$H''_a=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid (d(P,F_1)-d(P,F_2))^2=a^2\}$

é uma hipérbole para cada a.

Qual?

(a) Encontre alguns pontos de H''_0 e H''_2.

(b) Faça um esboço de H''_0 e H''_2 ← chute

(c) Encontre u e v tais que $H''_2=H'$

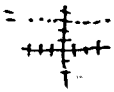
(d) Faça as contas complicadas que mostram que $H''_2=H'$.

O que são cônicas degeneradas?

Exemplos:

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)(y-3)=0\}$

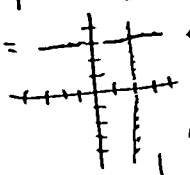
$A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2=0\}=$

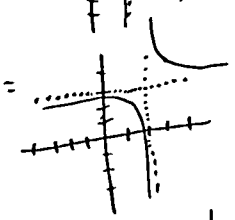
$A''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-3=0\}=$ 

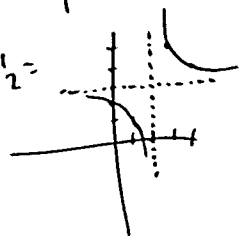
$A=A'\cup A''=$

Sejam $u=x-2$, $v=y-3$,

$H'_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=a\}$

Então: $H'_0=$  ⇐ cônica degenerada, união de duas retas

$H'_1=$ 

$H'_2=$ 

Moral: pra desenhar H'_a comece desenhando H'_0.

Dicas pra obter mais pontos de H''_2:

(a) Encontre os "y" tais que $P=(5,$ obedeça $d(P,$

(b) Generalize

Ou: use as pra s na eq

$(d(P$

$\Rightarrow (d((x,$

$\Rightarrow (\sqrt{(x+}$

$(x+2)$

$(x+2)^2$

$(x^2+\cancel{4x}$

$2x^2+2$

$2(x^2+$

$(\cancel{x^4}+\cancel{y^4}$

MORAL:
PRA DESENHAR H_a'
COMECE DESENHANDO
H_0.

DICA PRA OBTER
MAIS PONTOS DE
H_2'':
ⓐ ENCONTRE OS "y"s
TAIS QUE $P=(5,y)$
OBEDEÇA $d(P,F_1)-d(P,F_2)=2^2$
ⓑ GENERALIZE

OU:
USE AS IDÉIAS DA P.60
PRA SE LIVRAR DAS "$\sqrt{}$"s
NA EQUAÇÃO:

$(d(P,F_1)-d(P,F_2))^2=2^2$

$\Rightarrow (d((x,y),(-2,0))-d((x,y),(2,0)))^2=4$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2=4$

$(x+2)^2+y^2-2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2=4$

$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2-4=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$(x^2+4x+4)+(x^2-4x+4)+y^2+y^2-4=2\sqrt{((x+2)^2+y^2)((x-2)^2+y^2)}$

$2x^2+2y^2+4$

$2(x^2+y^2+2)$

$=2\sqrt{(x+2)^2(x-2)^2+y^2y^2+(x+2)^2y^2+y^2(x-2)^2}$

$=2\sqrt{(x^4-8x^2+16)+(2x^2y^2+8y^2)+y^4}$

$=2\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2+8y^2-8x^2+16}$

$(x^4+y^4+2x^2y^2+4x^2+4y^2+4)=x^4+y^4+2x^2y^2+8y^2-8x^2+16$

$4x^2+4y^2+4=8y^2-8x^2+16$

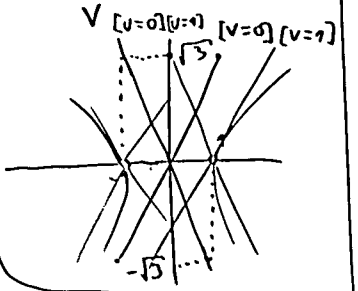
$12x^2-4y^2=12$

$3x^2-y^2=3$

$x^2-\frac{1}{3}y^2=1$ ⟸ Se $a=1$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ então $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b}=x^2-\frac{1}{3}y^2$

$\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)=x^2-\frac{1}{3}y^2$

$\underbrace{\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)}_{\vee}\underbrace{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)}_{\vee}=1$



$a:=d(P,F_1)-d(P,F_2)$

$(x+2)^2(x-2)^2=(x+2)(x-2)(x+2)(x-2)$
$=(x^2-4)(x^2-4)$
$=(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16$

$y^2((x+2)^2+(x-2)^2)=$
$y^2(x^2+4x+4+x^2-4x+4)=$
$y^2(2x^2+8)=$
$2x^2y^2+8y^2$

$(x^2+y^2+2)^2=x^2(x^2+y^2+2)$
$+y^2(x^2+y^2+2)$
$+2(x^2+y^2+2)$
$=x^4+x^2y^2+2x^2$
$+x^2y^2+y^4+2y^2$
$+2x^2+2y^2+4$
$=x^4+y^4+2x^2y^2+$
$4x^2+4y^2+4$

EXERCÍCIOS PRA CASA
URGENTE!: REIS &
SILVA P.68, EXERCS
3.3 A 3.7.
VAI TER MEU EXERCÍCIO NO SITE EM BREVE

⇦ CÔNICA DEGENERADA, UNIÃO DE DUAS RETAS

GA 20/maio/2015

Notícias sobre a P2:

- Ela passou pra 2ª 25/maio
- A comissão dos profs de GA conseguiu afinal definir o que pode cair na P2
- Não vai cair hipérboles nesta posição:

Porque Bel e Reginaldo estão evitando polinômios com o termo xy

- Pode cair parametrização de cônicas, mas valendo bem pouco
- Não cai demonstrações
- Cai muito representar cônicas graficamente! Vocês vão precisar de todos os truques possíveis pra fazer isto rápido!
- Dica: imprimam o cap. 3 do Reis & Silva e levem ele pra todo lugar, incluindo ponto de ônibus, banheiro e fila da padaria

Parametrizações:

$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
$= \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

$P = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$H = \{(t, \frac{1}{t}) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

Que que acontece quando $t \to -\infty$?
$t \to 0^-$? ⇐ pela esquerda
$t \to 0^+$? ⇒ pela direita
$t \to +\infty$

... a gente descobre as assíntotas da hipérbole.

E nas cônicas não-canônicas?

$C' = \{A + (\cos\theta)\vec{u} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{v} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

$P' = \{A + t\vec{u} + t^2\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$H' = \{A + t\vec{u} + \frac{1}{t}\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

Representem graficamente C', P', H' no caso $A = (3,2)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3)}$;

Depois faça o mesmo para o caso $A = (3,2)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0,-1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$

Como é que a gente "lembra" onde estão as assíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

(tem dois jeitos!)

O exercício:

P':

t	$A + t\vec{u} + t^2\vec{v}$
-2	$(3,2) + (-2)\overrightarrow{(2,0)} + (-2)^2\overrightarrow{(0,3)} = (-1,14)$
-1	$(3,2) + (-1)\overrightarrow{(2,0)} + (-1)^2\overrightarrow{(0,3)} = (1,5)$
0	$(3,2) + 0\overrightarrow{(2,0)} + 0^2\overrightarrow{(0,3)} = (3,2)$
1	$(3,2) + 1\overrightarrow{(2,0)} + 1^2\overrightarrow{(0,3)} = (5,5)$
2	$(3,2) + 2(2,0) + 2^2\overrightarrow{(0,3)} = (7,14)$

H':

t	$A + t\vec{u} + \frac{1}{t}\vec{v}$
-2	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	
1	$A + 1\vec{u} + \frac{1}{1}\vec{v}$
2	

Onde estão as assíntotas?

em $\{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$

e $\{A + \cancel{\frac{1}{t}}\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
t

C':

(

ON
ASS
HI
x
E
x
RES
x^2
(x-
U
AGO
ALG

C': θ $\quad A + \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

$0^\circ \quad A + 1\vec{u} + 0\vec{v}$

$90^\circ \quad A + 0\vec{u} + 1\vec{v}$

$180^\circ \quad A - 1\vec{u} + 0\vec{v}$

$270^\circ \quad A + 0\vec{u} - 1\vec{v}$

(O caso $A=(3,2)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(0,-1)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$ fica pra casa)

$\overrightarrow{(0,3)} = (-1,14)$

$\overrightarrow{(0,3)} = (1,5)$

$\overrightarrow{(0,3)} = (3,2)$

$\overrightarrow{(0,3)} = (5,5)$

$\overrightarrow{(0,3)} = (7,14)$

As hipérboles com equações

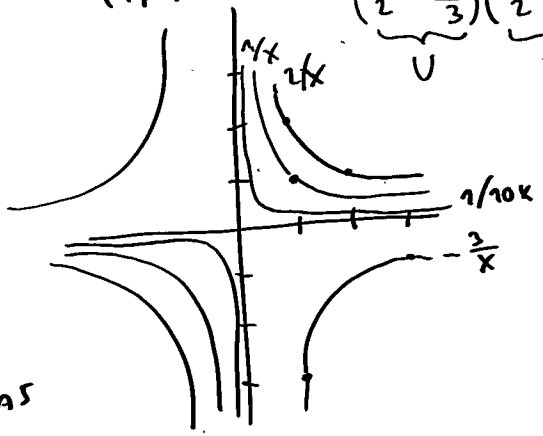
$y = \frac{1}{x}$,

$y = \frac{2}{x}$,

$y = \frac{1}{10x}$, ...

$y = -\frac{3}{x}$

têm as mesmas assíntotas.

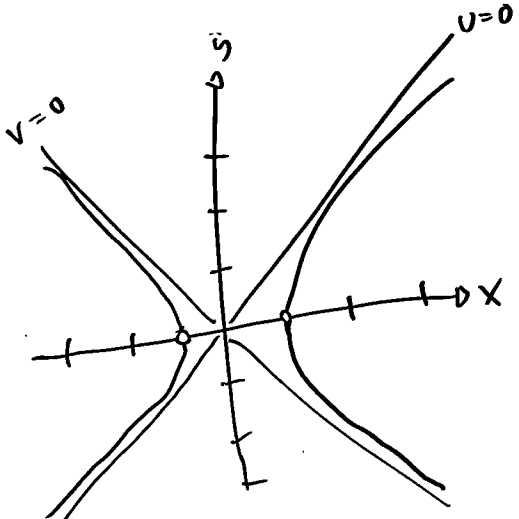


Onde estão as assíntotas da hipérbole $x^2-y^2=1$?

E da hipérbole $x^2-y^2=2$?

Resposta: em $x^2-y^2=0$!

$$x^2-y^2 = \underbrace{(x-y)}_{u}\underbrace{(x+y)}_{v}$$



Agora vamos tentar encontrar algum ponto de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=1\}$.

Ex: $(x,y)=(1,0)$.

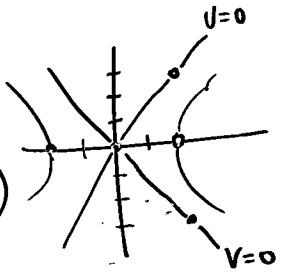
E da hipérbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$?

Assíntotas:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$$

$$\| $$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)}_{u}\underbrace{\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)}_{v}$$



$d(P,F) = \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{d(P,d)}_{3}}_{3/2}$

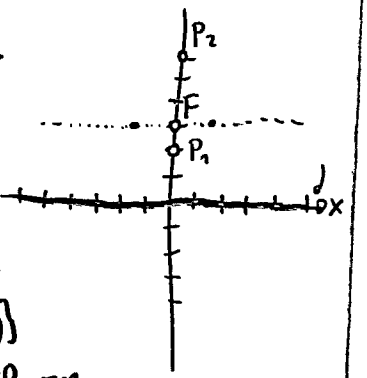
Seção 3.6: "Definição unificada das cônicas".

$$d(P,F) = e\, d(P,d)$$

F: ponto: "foco"

e: número: "excentricidade"

d: reta: "diretriz".



Exercício:

Sejam $F=(0,3)$,

$d=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid y=0\}$,

$e=2$,

$$C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,\underset{(0,3)}{F}) = \underset{1/2}{e}\, d(P,\underset{\text{eixo horizontal}}{d})\}$$

Esbocem o conjunto C.

$P_1=(0,2)\in C$

$P_2=(0,6)\in C$.

GA 22/MAIO/2015

HOJE: COISAS DE VÉSPERA DE PROVA!!!

RECOMENDAÇÕES DE MATERIAL EXTRA PRA ESTUDAR NO FIM DE SEMANA:

LISTAS DA BEL (ATÉ 6) E MINDMAPS DA MONITORIA - PRA EXERCÍCIOS E PORQUE A GENTE VIU MUITO POR ALTO AQUI "FOCO", "EXCENTRICIDADE", E OUTROS TERMOS ASSIM.

AVISO: NA PROVA DEVEM CAIR COISAS SOBRE DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA, ENTRE RETAS, POSIÇÕES RELATIVAS DE RETAS...

VAMOS VER UM TRUQUE PRA LEMBRAR A FÓRMULA DA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA - A DA DISTÂNCIA ENTRE RETAS É CONSEQUÊNCIA DESTA FÓRMULA.

EXERCÍCIOS:

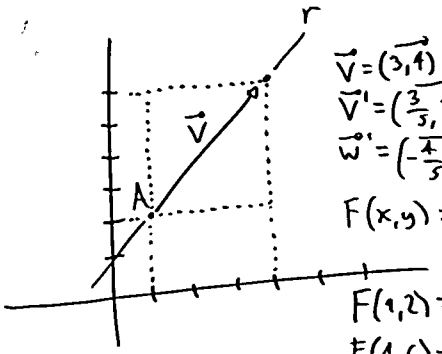
① QUAIS SÃO OS VÉRTICES DA HIPÉRBOLE $y=\frac{1}{x}$?

E OS FOCOS?

E OS SEMI-EIXOS?

② SEJA $r=\{(1,2)+t(\overrightarrow{3,4}) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
(A = $(1,2)$, $\vec{v}$ = $(\overrightarrow{3,4})$)

- CALCULE $\vec{v}'$.
- ENCONTRE UM VETOR $\vec{w}'$ ORTOGONAL A $\vec{v}'$ FORMANDO $\vec{v}'$ DE 90°.
- VERIFIQUE QUE $F(x,y)=(\overrightarrow{x,y})\cdot\vec{w}'$ É CONSTANTE EM r.
- VERIFIQUE QUE $G(x,y)=F(x,y)-F(A)$ É CONSTANTE EM r E É 0 EM r.
- $d(P,r)=|G(P)|=|\vec{P}\cdot\vec{w}'-\vec{A}\cdot\vec{w}'|$



$\vec{v}=(\overrightarrow{3,4})$

$\vec{v}'=(\overrightarrow{\frac{3}{5},\frac{4}{5}})$

$\vec{w}'=(\overrightarrow{-\frac{4}{5},\frac{3}{5}})$

$F(x,y)=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$

$F(1,2)=-\frac{4}{5}1+\frac{3}{5}2=\frac{2}{5}$

$F(4,6)=-\frac{4}{5}4+\frac{3}{5}6=\frac{2}{5}$

$F(A)=F(1,2)=\frac{2}{5}$

$d((x,y),r)=\left|-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}\right|$

③ SEJAM $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3-2x\}$,
$S=\{(1,0)+t(\overrightarrow{1,4}) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

CALCULE OS DOIS PONTOS DE r QUE ESTÃO À DISTÂNCIA 5 DE s.

CALCULE OS DOIS PONTOS DE s QUE ESTÃO A DISTÂNCIA 4 DE r.

GA 7/out/2015

Hoje: $\mathbb{R}^3$!

Várias idéias de $\mathbb{R}^2$ vão ser adaptadas pra $\mathbb{R}^3$...

$(2,3,4)$ é um ponto em $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{(3,4,5)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$

Se A é um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$ (não-nulo) então

$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta parametrizada em $\mathbb{R}^3$

Novidade: planos!

Exemplo:

$\pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1\right\}$

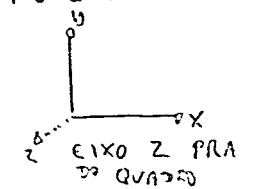
é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Como visualizar estas coisas?

Vários tipos...

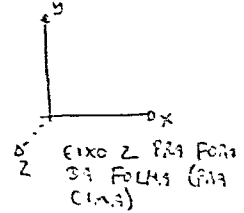
Convenções:

No quadro:



Eixo z pra fora do quadro

No caderno:



Eixo z pra fora da folha (pra cima)

Exercício:

Visualize (aproximado com o seu) os seguintes pontos de $\mathbb{R}^3$:

$(2,1,0)$,

$(2,0,1)$,

$(2,1,3)$

Para cada uma das retas abaixo,

- Visualize os pontos dela correspondentes a $t=0$ e $t=1$;
- Visualize ela toda;
- Encontre os pontos de interseção dela com os planos

$\pi_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$

$\pi_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

$\pi_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

a) $r_a = \{(2,0,0) + t\overrightarrow{(-1,1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) $r_b = \{(2,3,0) + t\overrightarrow{(0,0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) $r_c = \{(1,2,3) + t\overrightarrow{(1,1,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

d) $r_d = \{(1,2,3) + t\overrightarrow{(1,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Como encontrar as interseções de r_a, r_b, r_c, r_d com π_x, π_y, π_z algebricamente?

Exemplo: $r_a \cap \pi_x$

Quais são os pontos de r_a que pertencem a π_x?

Quais são os pontos da forma $(2,0,0) + t\overrightarrow{(-1,1,0)}$ que obedecem $x=0$?

Pra que valores de t temos $(2,0,0) + t\overrightarrow{(-1,1,0)}$ obedecendo $x=0$?

Dicas (pra quem não souber fazer direto):

- Faça uma tabela com vários valores de t
- Ou: volte à visualização, encontre um candidato a ser o t certo no olhômetro, e teste-o.

- Encontre $r_a \cap \pi_y$ ($t=0$; ponto: $(2,0$
- Encontre $r_a \cap \pi_z$ (toda a reta r_a)

Encontre:

- $r_d \cap \pi_x$ ($t=$
- $r_d \cap \pi_y$ ($t=$
- $r_d \cap \pi_z$ (NÃ

Reta paralela

Ex: $r_d \parallel \pi_z$

Retas paralel

$r_b = \{(2,3,0) +$

$r_c = \{(1,2,0) +$

Essas retas

Elas não s

$r_b \cap r_c = \emptyset$

Mas os vet

Delas não s

As retas

Não são pa

Elas são re

Encontre:

- $r_d \cap \pi_x$ ($t=-1 \Rightarrow$ Ponto $= (0,3,3)$)
- $r_d \cap \pi_y$ ($t=2 \Rightarrow$ Ponto $= (3,0,3)$)
- $r_d \cap \pi_z$ (Não tem! $r_d \parallel \pi_z$)

Reta paralela a plano

Ex: $r_d \parallel \pi_z$

Retas paralelas em $\mathbb{R}^3$

$r_b = \{(2,3,0) + t(\overrightarrow{0,0,1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_e = \{(1,2,0) + t(\overrightarrow{1,0,0}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Essas retas são paralelas? Elas não se cruzam - $r_b \cap r_e = \emptyset$ mas os vetores diretores delas não são paralelos...

As retas r_b e r_e não são paralelas - elas são reversas.

$r_a \cap \pi_y$ ($t=0$; ponto: $(2,0,0)$).

$r_a \cap \pi_z$ (toda a reta r_a).

e r_b e r_f,

onde $r_f = \{(1,2,0) + t(\overrightarrow{0,0,1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

São paralelas.

e r_b e r_g,

onde $r_g = \{(0,0,0) + t(\overrightarrow{0,0,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

Sim - $(\overrightarrow{0,0,1}) \in (\overrightarrow{0,0,2})$

são múltiplos um do outro.

Lista 7 da Ana Isabel

1) Achar os pontos de interseção da reta

$$\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

com os planos coordenados.

π_x, π_y, π_z

Sejam:

$\pi_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z-3=0\}$

$\pi_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z-1=0\}$

$r = \pi_a \cap \pi_b$.

Queremos $r \cap \pi_x$, $r \cap \pi_y$, $r \cap \pi_z$.

Como lidar com esse problema? ‼

- Podemos tentar visualizar $\pi_a \in \pi_b$ (não vai ajudar muito agora)
- Podemos tentar encontrar dois pontos, $A \in B$, pertencentes a $\pi_a \cap \pi_b$. (☺)
- Sejam $A = \pi_a \cap \pi_b \cap \pi_x$ e $B = \pi_a \cap \pi_b \cap \pi_y$.

Se $A = (x,y,z)$, queremos $x, y \in z$ que obedeçam, ao mesmo tempo,

$2x+y-z-3=0$

$x+y+z-1=0$

$x=0$.

Então:

$y-z-3=0$

$y+z-1=0$

$2y-4=0$

$(y-y)+(-z-z)+(-3+1)=0$

$-2z-2=0$

$y-2=0$

$y=2$

$2z+2=0$

$z=-1$

GA 7/out/2015

Lista 7 da Ana Isabel:

$\pi_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z-3=0\}$

$\pi_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z-1=0\}$

$r = \pi_a \cap \pi_b$

$A = \pi_a \cap \pi_b \cap \pi_x = (0,2,-1)$

$B = \pi_a \cap \pi_b \cap \pi_y = (\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3})$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$

$= (\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}) - (0,2,-1)$

$= (\frac{4}{3}, -2, \frac{2}{3})$

$\frac{\vec{v}}{2} = (\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3})$

$\frac{3}{2}\vec{v} = (2,-3,1)$

$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{v} = (2,-3,1)$

$r = \{A + t\vec{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0,2,-1) + t(2,-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Agora vamos calcular $r \cap \pi_x$, $r \cap \pi_y$, $r \cap \pi_z$...

Problema	t	Ponto
$r \cap \pi_x$	0	$(0,2,-1)$
$r \cap \pi_y$	2/3	$(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3})$
$r \cap \pi_z$	1	$(2,-1,0)$

Para casa:

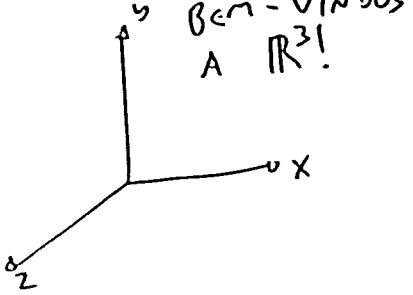
- Vejam no livro o que é a "equação simétrica de um plano"
- Aprendam a converter entre

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$

e $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0\}$

- Tentem resolver os seguintes problemas da lista 7:

1
2
3 ← talvez
4
5 ← talvez
6
7
9 ← talvez
10
11



Bem-vindos a $\mathbb{R}^3$!

Os exercícios 3, 5, 9 envolvem a mesma ideia ex:1.

Encontre:

- $r_j \cap \pi_x$
- $r_j \cap \pi_y$
- $r_j \cap \pi_z$

Reta par

Ex: r_j /

Retas pa

$r_b = \{(2,$

$r_e = \{(1$

Essas

Elas

$r_b \cap r$

Mas

Delas

Aí

Não

Elas

-o; pon

om a

GA 9/OUT/2015

HOJE: $\cdot$, $\|\|$, $\times$ em $\mathbb{R}^3$,

E VAMOS USAR A LISTA 8 COMO UM ROTEIRO DO QUE A GENTE PRECISA APRENDER A CALCULAR E RESOLVER.

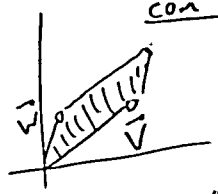
VAMOS LEMBRAR DE DETERMINANTES EM $\mathbb{R}^2$.

$\vec{v}, \vec{w}$ em $\mathbb{R}^2$,

$\vec{v} = (a,b)$

$\vec{w} = (c,d)$,

$\begin{matrix}\vec{v} \to \\ \vec{w} \to\end{matrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ESTE DETERMINANTE DIZ A ÁREA DESTE PARALELOGRAMO, COM SINAL



NOTAÇÃO: $[\vec{v}, \vec{w}]$ "MONTA E CALCULA" DETERMINANTES EM $\mathbb{R}^2$.

DEF: $[(a,b),(c,d)] = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

EM $\mathbb{R}^3$: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ "MONTA E CALCULA" DETERMINANTES EM $\mathbb{R}^3$.

DEF: $[(a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

LEMBRE QUE: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

$aei + bfg + cdh$

$- ceg - afh - bdi$

AGORA A GENTE SABE CALCULAR DETERMINANTES EM $\mathbb{R}^3$, TANTO VIA MATRIZES QUANTO NA NOTAÇÃO $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

MAS A GENTE NÃO FAZ IDÉIA DE QUE PROPRIEDADES ISSO TEM E PRA QUE ISSO SERVE.

O QUE É O "$\times$"?

ELE É TOTALMENTE DIFERENTE DO "$\cdot$"!

O "$\cdot$" TAMBÉM FAZ SENTIDO EM $\mathbb{R}^3$:

$(a,b,c) \cdot (c,d,e) = ac + bd + ce$

$\|(a,b,c)\| = \sqrt{(a,b,c) \cdot (a,b,c)}$

$\mathrm{Pr}_{\vec{u}} \vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$

⇧ ATÉ AGORA EU SÓ ADAPTEI PRA $\mathbb{R}^3$ VÁRIAS IDÉIAS DE $\mathbb{R}^2$... O "$\cdot$", "$\|\|$", "Pr", VÃO TER ESSENCIALMENTE AS MESMAS PROPRIEDADES QUE AS EM $\mathbb{R}^2$ – AS CONTAS QUE DEMONSTRAM ESSAS PROPRIEDADES SÃO ESSENCIALMENTE AS MESMAS.

O "$\times$" É NOVIDADE. ELE É UM "PEDAÇO DO DETERMINANTE".

DEF: $\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

E A GENTE COSTUMA LEMBRAR UM DETALHE CONFUSO DA DEFINIÇÃO DO "$\times$" ASSIM:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

DEF: $[(a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)] =$ (☆)

$((a,b,c) \times (d,e,f)) \cdot (g,h,i)$ ← (☆☆)

REPARE:

$[(a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)] =$

$aei + bfg + cdh$

$- ceg - afh - bdi =$

$(bf - ce)g + (cd - af)h + (ae - bd)i =$

$\underbrace{(bf - ce, cd - af, ae - bd)}_{(a,b,c) \times (d,e,f)} \cdot (g,h,i)$

IDÉIA: O "$\times$" TEM UMA DEFINIÇÃO ESQUISITA, MAS ELA VAI TER MUITAS PROPRIEDADES PARECIDAS COM AS DO DETERMINANTE.

DETERMINANTE MEDE ÁREA.
DETERMINANTE MEDE VOLUME
PROPRIEDADES IMPORTANTES

$[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}$

$[\vec{u}, a\vec{v}] =$

EM $\mathbb{R}^3$

$[\vec{u}, \vec{v}$ (☆)

$[\vec{u}, \vec{v}$
$[\vec{u}$
$[\vec{v}$
$[\vec{u}$
$-[$
$-[$
$-[$

Determinante em $\mathbb{R}^2$ mede área.

Determinante em $\mathbb{R}^3$ mede volume.

Propriedades muito importantes:

$$[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v}+\alpha\vec{u}]$$

$$[\vec{u},\alpha\vec{v}] = \alpha[u,\vec{v}]$$

Em $\mathbb{R}^3$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}]$$

$$[\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$$

$\overrightarrow{g,h,i)}] =$ (☆)

$\overrightarrow{g,h,i)}$ ← (☆☆)

$\overrightarrow{(g,h,i)}] =$

$=$

$)h + (ae-bd)i =$

$\overrightarrow{e-bd)} \cdot \overrightarrow{(g,h,i)}$

$\overrightarrow{f)}$

uma definição
a vai ter
des parecidas
minante.

Lista 8, exercício 1:

Dados os vetores

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,-1,1)}$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1,0)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(-1,2,2)}$,

calcular:

a) $\vec{w}\times\vec{v}$

b) $\vec{v}\times(\vec{w}-\vec{u})$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$

d) $2\vec{u}\times 3\vec{v}$

e) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

f) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ e $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

Truque pra calcular $\vec{u}\times\vec{v}$ rápido:

$$\begin{array}{r} \overrightarrow{(a,b,c)} \\ \times\ \overrightarrow{(d,e,f)} \\ \hline (bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd) \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} \overrightarrow{(-1,2,2)} \\ \times\ \overrightarrow{(1,-1,0)} \\ \hline \overrightarrow{(0+2,\ 2+0,\ 1-2)} \end{array}$$

Treinem em casa!

A propriedade mais importante do "x" é a seguinte.

Escolha $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.

Seja $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$.

$\boxed{\text{Então } \vec{w}\perp\vec{u} \text{ e } \vec{w}\perp\vec{v}.}$

Pra que que a gente usa isso?

Exemplo:

Seja $\pi = \{A + t\vec{v} + u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R}\}$ -

por exemplo (exemplo simples!):

$\pi = \{(0,0,0) + t\overrightarrow{(2,0,0)} + u\overrightarrow{(0,3,0)} \mid t,u\in\mathbb{R}\}$.

π contém estes pontos:

$(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(4,0,0)$,
$(0,3,0)$, $(2,3,0)$, $(4,3,0)$
$(0,6,0)$, $(2,6,0)$, $(4,6,0)$

Como determinar se um ponto $P\in\mathbb{R}^3$ pertence a um plano parametrizado?

- Podemos tentar encontrar t e u.
- Podemos encontrar uma equação pra esse plano.

$$\pi = \{A + t\vec{v} + u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R} \mid \overrightarrow{(x,y,z)}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = d\}$$

GA 9/OUT/2015

EXERCÍCIO:

EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO ENCONTRE UMA EQUAÇÃO PARA O PLANO π E TESTE A SUA EQUAÇÃO COM OS PONTOS A, $A+\vec{v}$, $A+\vec{w}$, B.

a) $\pi = \{\underbrace{(0,0,0)}_{A} + t\underbrace{\overrightarrow{(2,0,0)}}_{\vec{v}} + u\underbrace{\overrightarrow{(0,3,0)}}_{\vec{w}} \mid t,u \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(x,y,z)} \cdot \underbrace{(\vec{v}\times\vec{w})}_{\overrightarrow{(0,0,6)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d}}\}$,

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a}}x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{b}}y + \underset{6}{\underset{\shortparallel}{c}}z = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d}}\}$

$A = (0,0,0)$
$A+\vec{v} = (2,0,0)$
$A+\vec{w} = (0,3,0)$
$B = (0,0,4)$ $(\notin \pi)$

(ATÉ 15:50. DEPOIS DÚVIDAS DA LISTA 7).

IDÉIA EXTRA, NECESSÁRIA PRA ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA 7:

DUAS RETAS

$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$s = \{B + u\vec{w} \mid u \in \mathbb{R}\}$

SÃO PARALELAS SE $\vec{v}$ E $\vec{w}$ SÃO MÚLTIPLOS UM DO OUTRO.

PROBLEMA 3:

b) $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}\}$

ENCONTRE DOIS PONTOS DE r:

- O QUE TEM $\frac{x-1}{5} = 0$ $\quad (x,y,z) = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(1,-2,-1)}}$
- O QUE TEM $\frac{x-1}{5} = 1$. $\quad (x,y,z) = \underset{B}{\underset{\shortparallel}{(6,0,2)}}$

$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(1,-2,-1) + t(B-A) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(1,-2,-1) + t\overrightarrow{(5,2,3)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

PRA CASA: LISTA 7,

DÊEM UMA OLHADA NA LISTA 8.

GA 14/OUT/2015

ESTAMOS TENTANDO TRANSFERIR PRA $\mathbb{R}^3$ VÁRIAS IDÉIAS DE $\mathbb{R}^2$...

POR EXEMPLO, A EQUAÇÃO DA RETA

$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

É

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\overrightarrow{x,y}) \cdot (\overrightarrow{v_1,v_2}) = k\}$,

ONDE $\vec{w} = (\overrightarrow{w_1,w_2})$ É UM VETOR NORMAL À RETA r, E ORTOGONAL A $\vec{v}$...

A PRINCIPAL UTILIDADE DO "$\times$" É QUE $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$;

ENTÃO UM PLANO

$\pi = \{A + t\vec{u} + t'\vec{v} \mid t, t' \in \mathbb{R}\}$

TEM COMO VETOR NORMAL O $\vec{u} \times \vec{v}$!

AVISO: TREINEM MUITO EM CASA FAZER CONTAS COM "$\times$"!

PROBLEMA 7 DA LISTA 8:

DETERMINE A EQUAÇÃO DA RETA r QUE PASSA POR $P = (2,3,4)$ E É PERPENDICULAR AO PLANO

$\alpha: X = (2,3,1) + \lambda(\overrightarrow{1,0,-1}) + \mu(\overrightarrow{3,1,1}),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$\alpha = \{\underbrace{(2,3,1)}_{A} + \lambda\underbrace{(\overrightarrow{1,0,-1})}_{\vec{u}} + \mu\underbrace{(\overrightarrow{3,1,1})}_{\vec{v}} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

TEM MUITOS MODOS DA GENTE ENCONTRAR A EQUAÇÃO DO PLANO α — A GENTE PODE USAR ALGUNS DELES PRA TESTAR AS CONTAS DE OUTROS.

O PLANO α CONTÉM:

$A,\ A+\vec{u},\ A+2\vec{u}\ \ldots$

$A+\vec{v},\ \ldots$

$A+2\vec{v},\ \ldots$

$\vdots$

ASSIM QUE A GENTE OBTIVER UMA EQUAÇÃO PRO PLANO α, A GENTE PODE VERIFICÁ-LA TESTANDO SE A, $A+\vec{u}$, $A+\vec{v}$ OBEDECEM A EQUAÇÃO.

EQUAÇÃO DA RETA:

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\overrightarrow{x,y}) \cdot (\overrightarrow{a,b}) = c\}$

EQUAÇÃO DO PLANO:

$\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+cz=d\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (\overrightarrow{x,y,z}) \cdot \underbrace{(\overrightarrow{a,b,c})}_{\vec{w}} = d\}$

IDÉIA:

SE O PLANO α "CONTÉM" (OU: É PARALELO AOS) VETORES $\vec{u} \in \vec{v}$, ENTÃO O $(\overrightarrow{a,b,c})$ ($= \vec{w}$) VAI SER ORTOGONAL AOS $\vec{u} \in \vec{v}$.

PORQUÊ?

ESBOÇO:

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$(\overrightarrow{x,y,z}) \cdot \vec{w} = ((\overrightarrow{x,y,z}) + \vec{u}) \cdot \vec{w}$

$= (\overrightarrow{x,y,z}) \cdot \vec{w} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{w}}_{=0}$

PORQUE $\vec{u} \perp \vec{w}$.

IDEM PRO CASO MAIS GERAL:

$(\overrightarrow{x,y,z}) \cdot \vec{w} = ((\overrightarrow{x,y,z}) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w}$.

PENSEM NISSO EM CASA.

LEMBREM QUE A GENTE SABE ENCONTRAR UMA RETA CONTENDO OS PONTOS $A \in B$... (TANTO EM $\mathbb{R}^2$ QUANTO EM $\mathbb{R}^3$!)

A GENTE SABE QUE TRÊS PONTOS A, B, C EM $\mathbb{R}^3$ DETERMINAM UM PLANO (DESDE QUE A, B, C NÃO SEJAM "COLINEARES" !!)

SE A GENTE TEM $A = (A_1, A_2, A_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$, $C = (C_1, C_2, C_3)$, A GENTE CONSEGUE A EQUAÇÃO DO PLA... $(A, B, C \in \alpha)$, $\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$...

RESOLUÇÃO ...

- MAS IST...
- $\in \alpha = \{($...

(CUIDA...

O "... FAZEA... RÁPI...

E...

SE A GENTE TEM
$A=(A_1,A_2,A_3)$,
$B=(B_1,B_2,B_3)$,
$C=(C_1,C_2,C_3)$,
A GENTE CONSEGUE
A EQUAÇÃO DO PLANO α
$(A,B,C \in \alpha)$,
$\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$
RESOLVENDO UM SISTEMA...

- MAS ISTO DÁ TRABALHO,
- E $\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4ax+4by+4cz+4d=0\}$

(CUIDADO PRA NÃO ESQUECER DISTO!)

O "x" VAI NOS AJUDAR A FAZER AS CONTAS BEM MAIS RÁPIDO!

$\ldots z)+\vec{u})\cdot\vec{w}$
$\ldots z)\cdot\vec{w}+\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{w}}_{=0}$
PORQUE $\vec{u}\perp\vec{w}$.

MAIS GERAL
$((\overrightarrow{x,y,z})+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})$.
NISSO EM CASA.

EMBREM QUE A GENTE SABE ENCONTRAR UMA RETA CONTENDO OS PONTOS A E B...
(TANTO EM $\mathbb{R}^2$ QUANTO EM $\mathbb{R}^3$!)
A GENTE SABE QUE TRÊS PONTOS A,B,C EM $\mathbb{R}^3$ DETERMINAM UM PLANO
(DESDE QUE A,B,C, NÃO SEJAM "COLINEARES" !!)

EXERCÍCIO:
ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO
$\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$
QUE CONTÉM:
$(2,3,4)$,
$(2,3,4)+(\overrightarrow{5,0,0})$,
$(2,3,4)+(\overrightarrow{0,1,-1})$.

DICA:
$A=(2,3,4)$, $\vec{u}=(\overrightarrow{5,0,0})$,
$\vec{v}=(\overrightarrow{0,1,-1})$,
$\vec{w}:=\vec{u}\times\vec{v}=(\overrightarrow{0,5,5})$

VAMOS TENTAR
$(\overrightarrow{a,b,c})=\vec{w}$
E ENCONTRAR d
TAL QUE $(2,3,4)\in\alpha$.

$(\overrightarrow{a,b,c})=\vec{w}$
$(\overrightarrow{a,b,c})=(\overrightarrow{0,5,5})$
$a=0$, $b=5$, $c=5$.
$\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+5y+5z=d\}$
QUAL É O VALOR DE d QUE FAZ COM QUE $(2,3,4)\in\alpha$?
$0\cdot2+5\cdot3+5\cdot4=d$
$35=d$

VAMOS TENTAR:
$\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+5y+5z=35\}$
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y+z=7\}$
$\alpha\in(2,3,4)$? SIM ☺
$\alpha\in(2,3,4)+(\overrightarrow{5,0,0})=(7,3,4)$? SIM ☺
$\alpha\in(2,3,4)+(\overrightarrow{0,1,-1})=(2,4,3)$? SIM ☺

OBS: NEM SEMPRE
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$
É UM PLANO.
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+0y+0z=0\}=\mathbb{R}^3$,
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0x+0y+0z=99\}=\emptyset$
PRA VERIFICAR QUE α (ACIMA) É UM PLANO BASTA VER QUE α CONTÉM ALGUM PONTO DE $\mathbb{R}^3$ E NÃO CONTÉM UM OUTRO — OU QUE $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
(PENSEM EM CASA).

VOLTANDO PROBLEMA 7 DA LISTA 8...
DETERMINE A EQUAÇÃO DA RETA r QUE PASSA POR $P=(2,3,4)$ E É PERPENDICULAR AO PLANO
$\alpha=\{(2,3,1)+\lambda\underbrace{(\overrightarrow{1,0,-1})}_{\vec{u}}+\mu\underbrace{(\overrightarrow{3,1,1})}_{\vec{v}} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
E (EXTRA): ENCONTRE O PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE r E α.

DICA: COMECE ENCONTRANDO $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ E A EQUAÇÃO DE α.

GA 14/out/2015

$$\alpha = \{\underbrace{(2,3,1)}_{A} + \lambda\underbrace{(1,0,-1)}_{\vec{u}} + \mu\underbrace{(3,1,1)}_{\vec{v}} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

$P = (2,3,4)$

Seja $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1,-4,1)$.

$$\begin{array}{l} (1,0,-1) \\ \times\,(3,1,1) \\ \hline (1,-4,1) \end{array}$$

$\vec{w}$ é um vetor normal a α.

$\vec{u} \perp \vec{w}$ $(\vec{u}\cdot\vec{w} = 0)$

$\vec{v} \perp \vec{w}$ $(\vec{v}\cdot\vec{w} = 0)$.

- Pra obter a reta contendo P e ortogonal a α, podemos fazer:

$$r = \{P + t\vec{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(2,3,4) + t(1,-4,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

A equação do plano α é:

$$\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y + z = d\}$$

$(a,b,c) = \vec{w}$
$a = 1$
$b = -4$
$c = 1$

Pra termos $A \in \alpha$ temos que ter:

$$\underset{(2,3,1)}{2 - 4\cdot 3 + 1} = d \qquad d = -9$$
$$2 - 12 + 1 = -9$$

$$\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y + z = -9\}.$$

Pra encontrar $r \cap \alpha$ podemos fazer de dois jeitos:

1) Qual é o valor de t que faz com que $(2,3,4) + t(1,-4,1) \in \alpha$?

$$\begin{array}{l} (2,3,4) + t(1,-4,1) \in \alpha? \\ \| \\ (2+t, 3-4t, 4+t) \\ \| \\ (2+t) - 4(3-4t) + (4+t) = -9 \\ \| \\ (2+t) - 12 + 16t + 4 + t \\ \| \\ 18t - 6 \end{array}$$

$$18t - 6 = -9$$
$$18t = -9 + 6 = -3$$
$$t = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

Não vou conferir as contas agora, mas devemos ter:

$$\left(2 - \frac{1}{6}, 3 + 4\frac{1}{6}, 4 - \frac{1}{6}\right) \in r \cap \alpha.$$

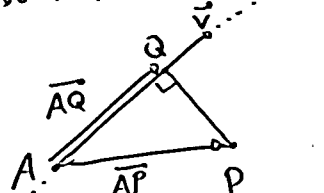
Agora vamos lembrar de mais uma coisa que a gente sabia fazer (e rápido!) em

Digamos que a gente te

$$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$.

A gente sabe obter o p de r mais próximo



$$\overrightarrow{AQ} = \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}$$
$$Q = A + \overrightarrow{AQ}.$$

Dá pra fazer exatamente a mesma coisa em $\mathbb{R}^3$ – só que $\mathbb{R}^3$ os problemas que envolvem isto vão ter várias caras diferen

Voltando pro problema (no qual eu acrescentei item extra),

Qual é o ponto de α próximo de P? Ou qual é o ponto de r próximo de A ($\in \alpha$)

$-4y+z=-9\}$.

α

DOIS JEITOS:

DE t

$\vec{\ }$

$1,1) \in \alpha$?

$t)$

$) + (4+t) = -9$

$+ 4 + t$

$= -3$

$= -\frac{1}{6}$

EAIR AS

A,

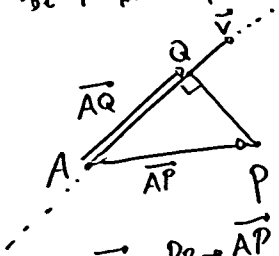
OS TER:

$+\frac{1}{6}, 4-\frac{1}{6}) \in r \cap \alpha$.

AGORA VAMOS LEMBRAR DE MAIS UMA COISA QUE A GENTE SABIA FAZER (E RÁPIDO!) EM $\mathbb{R}^2$...

DIGAMOS QUE A GENTE TEM $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (EM $\mathbb{R}^2$) E UM PONTO $P \in \mathbb{R}^2$.

A GENTE SABE OBTER O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P...



$$\overrightarrow{AQ} = Pr_{\vec{v}}\,\overrightarrow{AP}$$
$$Q = A + \overrightarrow{AQ}.$$

DÁ PRA FAZER EXATAMENTE A MESMA COISA EM $\mathbb{R}^3$ - SÓ QUE $\mathbb{R}^3$ OS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM ISTO VÃO TER VÁRIAS CARAS DIFERENTES... VOLTANDO PRO PROBLEMA 7 (NO QUAL EU ACRESCENTEI UM ITEM EXTRA),

QUAL É O PONTO DE α MAIS PRÓXIMO DE P? OU: QUAL É O PONTO DE r ($r \perp \alpha$) MAIS PRÓXIMO DE A ($\in \alpha$)? (☆) (☆☆)

PRA CASA:

TENTEM RESOLVER (☆) E (☆☆) USANDO

MAIS FÁCIL

"Pr" EM $\mathbb{R}^3$. VOCÊ VAI TER QUE RELEMBRAR AS PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO, PRINCIPALMENTE A EQUAÇÃO QUE FAZ COM QUE APAREÇA ISTO:

$$Pr_{\vec{u}}\,\vec{v} = \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\,\vec{u}$$

E, MUITO IMPORTANTE:

$\boxed{\text{TENTEM FAZER O MAIOR NÚMERO POSSÍVEL DE EXERCÍCIOS DA LISTA 8, E MARQUE OS EM QUE VOCÊ TIVER DIFICULDADES!!!}}$

ALGUNS TÊM IDÉIAS MEIO NOVAS - P.EX, 9

AVISO: NA PRÓXIMA AULA A GENTE PROVAVELMENTE VAI TERMINAR TODA A MATÉRIA DA LISTA 8 -

GA 16/OUT/2015

HOJE: DÚVIDAS, OU SE VOCÊS NÃO TIVEREM DUVIDAS MATÉRIA NOVA: ÁREAS E VOLUMES EM $\mathbb{R}^3$, E ALGUMAS FÓRMULAS RAPIDAS (ENVOLVENDO ÁREAS E VOLUMES) PRA CALCULAR DISTÂNCIAS ENTRE RETAS, PLANOS E PONTOS EM $\mathbb{R}^3$!

DÚVIDAS (LISTA 8):

5) DETERMINAR $\vec{v}$ TAL QUE $\vec{v} \perp OY$ E $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$, SENDO $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1,-1)}$ E $\vec{w} = \overrightarrow{(2,-1,1)}$.

OK ☺

16) ESCREVA A EQUAÇÃO GERAL DO PLANO QUE CONTÉM O PONTO $A = (6,0,-2)$ E É PARALELO AOS VETORES $\vec{i}$ E $-2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)}$

$\vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)}$

$\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

9) CONSIDERE OS PLANOS

$\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z - 1 = 0\}$ E

$\beta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z - 10 = 0\}$.

SEJA $r = \alpha \cap \beta$.

(1) $2x - 3y + z - 1 = 0$

(2) $x - 2y + 3z - 10 = 0$

(3) $z = -2x + 3y + 1$

(4) $x - 2y + 3(-2x + 3y + 1) - 10 = 0$

$\parallel$

$-5x + 7y - 7 = 0$

(5) $7y = 5x + 7$

(6) $y = \frac{5x+7}{7}$

(7) $z = -2x + 3\left(\frac{5x+7}{7}\right) + 1$

$= -2x + \frac{15}{7}x + 3 + 1$

$= -\frac{14}{7}x + \frac{15}{7}x + 4$

$= \frac{1}{7}x + 4 = z$

$r = \{(x, \frac{5x}{7}+1, \frac{1}{7}x+4) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= \{(t, \frac{5}{7}t+1, \frac{1}{7}t+4) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0,1,4) + t\underbrace{\overrightarrow{(1, \frac{5}{7}, \frac{1}{7})}}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{(2,-3,1)}$

$\vec{n}_\beta = \overrightarrow{(1,-2,3)}$

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}$ OK ☺

$\vec{n}_\beta \perp \vec{v}$ OK ☺

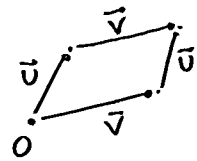
AS DÚVIDAS ACABARAM ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

A GENTE SABE QUE SE $\vec{w} := \vec{u} \times \vec{v}$ ENTÃO $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$.

A GENTE AINDA NÃO VIU NENHUM TRUQUE (ALÉM DE FAZER AS CONTAS) QUE NOS DIGA QUAL O COMPRIMENTO E QUAL A DIREÇÃO DE $\vec{w}$.

TEOREMA (ACREDITEM NELE, PORQUE A GENTE NÃO VAI TER TEMPO DE DEMONSTRÁ-LO)...

SE FIZERMOS ESTA FIGURA:



A GENTE
PARALEL

SEJA
PARALEL

ENTÃO

EXEM

1) $\vec{u} =$

$\vec{v} =$

$\vec{w} =$

2) $\vec{u} =$

$\vec{v} =$

$\vec{w} =$

C

D

C

LE

EN

[

IST

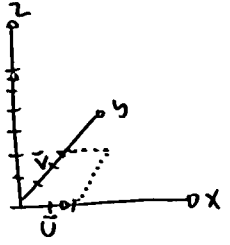
A GENTE OBTÉM UM PARALELOGRAMO EM $\mathbb{R}^3$.

SEJA α A ÁREA DESTE PARALELOGRAMO.

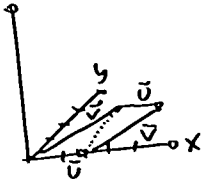
ENTÃO $\|\vec{U}\times\vec{V}\| = \alpha$.

EXEMPLOS:

1) $\vec{U} = (2,0,0)$
$\vec{V} = (0,3,0)$
$\vec{W} = (0,0,6)$



2) $\vec{U} = (2,0,0)$
$\vec{V} = (2,3,0)$
$\vec{W} = (0,0,6)$

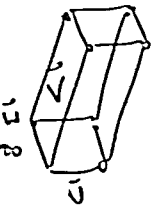


OS PRIMEIROS EXERCÍCIOS DA LISTA 9 SÃO SOBRE CALCULAR ÁREAS DE PARALELOGRAMOS... O QUE NÃO PARECE MUITO ÚTIL.

LEMBREM DO DETERMINANTE EM $\mathbb{R}^3$...

$$[\vec{U},\vec{V},\vec{W}] = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}$$

ISTO DÁ O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

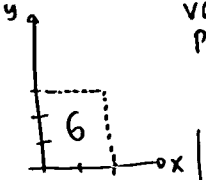


EXEMPLO:
$\vec{U} = (2,0,0)$,
$\vec{V} = (0,3,0)$,
$\vec{W} = (0,0,4)$,
$[\vec{U},\vec{V},\vec{W}] = 2\cdot3\cdot4 = 24$.

TEM UMA COMPLICAÇÃO: O SINAL.

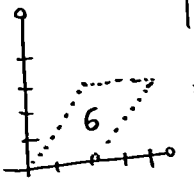
$[\vec{U},\vec{W},\vec{V}] = -24$.

NA VERDADE: $|[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]|$ É O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO.

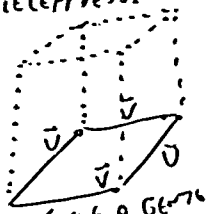


GRANDE TRUQUE:

$$\left|\frac{[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]}{\vec{U}\times\vec{V}}\right| = \begin{matrix}\Leftarrow \text{VOL. DO PARALELEPÍPEDO} \\ \Leftarrow \text{ÁREA DA BASE}\end{matrix}$$



= ALTURA DO PARALELEPÍPEDO.



COMO É QUE A GENTE INTERPRETA ESTA ALTURA? COMO É QUE A GENTE DESENHORTA UM PARALELEPÍPEDO?

IDÉIA:
$\vec{U}\times\vec{V}$ É ORTOGONAL A $\vec{U}$ E $\vec{V}$.
$\vec{W}$ NÃO É NEC. ORTOGONAL A $\vec{U}$ E $\vec{V}$
$\vec{W}' = P_{R_{\vec{U}\times\vec{V}}}\vec{W}$

$\vec{U},\vec{V},\vec{W}'$ DÃO UM PARALELEPÍPEDO "DESENHORTADO" COM A MESMA ALTURA (E VOLUME) QUE O ORIGINAL.

DIGAMOS QUE A GENTE TEM UM PLANO,

$\alpha = \{A + \lambda\vec{U} + \mu\vec{V} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ (PARAMETRIZADO)

E UM PONTO B.

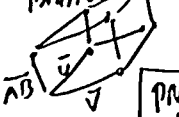
COMO CALCULAR $d(\alpha, B)$?

DOIS JEITOS:

1) (MAIS ÓBVIO): CRIE UMA RETA r PASSANDO POR B, ORTOGONAL A α. CALCULE $C = \alpha\cap r$, CALCULE $d(C,B)$.

2) COMPARE A ÁREA DO PARALELOGRAMO

COM O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO:



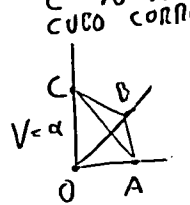
PRA CADA PESSOA MUITO NISTO, LEIAM A LISTA 9, LEIAM ALGUM LIVRO DE GA

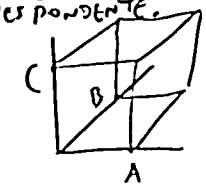
GA 21/OUT/2015

HOJE: LISTA 9!

DÁ PRA FAZER QUASE TODOS OS EXERCÍCIOS ATÉ O 20 USANDO OS SEGUINTES TRUQUES:

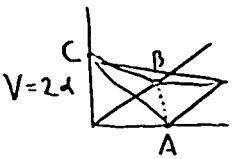
- PRA CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS EM $\mathbb{R}^3$, OU ENTRE UM PONTO E UM PLANO, OU ENTRE RETA E PLANO, ETC, TRANSFORME O PROBLEMA NUM PROBLEMA DE DISTÂNCIA ENTRE DOIS PLANOS PARALELOS
- O VOLUME DO TETRAEDRO OABC É 1/6 DO VOLUME DO CUBO CORRESPONDENTE.





$V = 6\alpha$

(PORQUÊ?



- USE O "x" PRA CALCULAR ÁREAS DE PARALELOGRAMOS EM $\mathbb{R}^3$ E TESTAR COLINEARIDADE EM $\mathbb{R}^2$.

IDÉIA PRA COMO RESOLVER O 7:

SEJAM $P = (2, 3, -1)$,

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y - 4z = 0\}$.

a) CALCULE O PONTO Q DO PLANO π QUE É A PROJEÇÃO ORTOGONAL DO P SOBRE π.

b) CALCULE R, O PONTO SIMÉTRICO DE P COM RELAÇÃO A π.

⇧ PROBLEMA

⇩ SOLUÇÃO.

SEJA $\vec{n}$ UM VETOR NORMAL A π.

SEJA $r = \{P + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

SEJA $Q \in r \cap \pi$.

SEJA $R = Q + \overrightarrow{PQ}$.

AULA EXTRA:
AMANHÃ (5ª)
16:00 (SALA 4B)
DE DÚVIDAS.

QUÁDRICAS

QUÁDRICAS SÃO MAIS OU MENOS A MESMA COISA QUE CÔNICAS, MAS EM $\mathbb{R}^3$. 🙂

DA MESMA FORMA QUE A GENTE COMEÇOU COM PARÁBOLAS, HIPÉRBOLES, ELIPSES, ETC EM POSIÇÕES CANÔNICAS, A GENTE VAI COMEÇAR COM QUÁDRICAS "CANÔNICAS"...

NOSSAS QUÁDRICAS PREFERIDAS

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (ESFERA).

$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$

COMO É QUE A GENTE DESCOBRE QUE CARA O CONJUNTO Q TEM? VAMOS TENTAR FAZER CORTES NELE.

NOTAÇÃO (TEMPORÁRIA):

$[\text{EQUAÇÃO}] := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$.

- $[z=0] \cap Q = ?$
- $[z=0] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ z = x^2 + y^2\}$
  $= \{(0,0,0)\}$
- $[z=1] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1,\ z = x^2 + y^2\}$

ALGUNS PONTOS DESTE CONJUN

$(0,1,1)$,
$(1,0,1)$,
$(0,-1,1)$,
$(-1,0,1)$

- $[z=4] \cap Q = \{(x,y,z$
  $z = 4,$

ALGUNS PONTOS DE CONJUNTO:

$(0, \pm 2, 4)$,
$(\pm 2, 0, 4)$

- $[z=-1] \cap Q = \{($
  z
  $= \emptyset$

- $[x=0] \cap Q = ?$

Q É UM PARA

- $[z=0] \cap Q = ?$
- $[z=0] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0,\ z=x^2+y^2\}$
$= \{(0,0,0)\}$
- $[z=1] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=1,\ z=x^2+y^2\}$

ALGUNS PONTOS DESTE CONJUNTO:
$(0,1,1)$,
$(1,0,1)$,
$(0,-1,1)$,
$(-1,0,1)$

- $[z=4] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=4,\ z=x^2+y^2\}$ (UM "O" NO PLANO YZ)

...

$+y^2+z^2=1\}$

$-x^2+y^2\}$

ENTE DESCOBRO
INTO Q TEM?
ER CORTES

PORÁRIA):
$x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ EQUAÇÃO$\}$.

ALGUNS PONTOS DESTE CONJUNTO:
$(0,\pm 2,4)$,
$(\pm 2,0,4)$

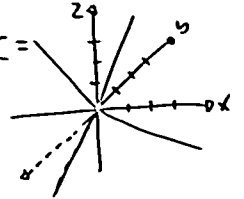
- $[z=-1] \cap Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=-1,\ z=x^2+y^2\}$
$= \emptyset$
- $[x=0] \cap Q = ?$ UMA PARÁBOLA.

Q É UM PARABOLÓIDE.

VAMOS COMPARAR COM ESTE OUTRO CONJUNTO.

$C = [z^2 = x^2+y^2]$

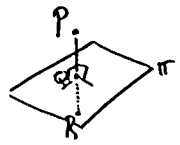
- $[z=0] \cap C = \{(0,0,0)\}$ (CÍRCULO DE RAIO 0)
- $[z=1] \cap C =$ CÍRCULO DE RAIO 1
- $[z=4] \cap C =$ CÍRCULO DE RAIO 4
- $[z=-1] \cap C =$ CÍRCULO DE RAIO 1
- $[z=-4] \cap C =$ CÍRCULO DE RAIO 4
- $[x=0] \cap C =$



C É UM CONE.

VOLTANDO À LISTA 9, PROBLEMA 7b...

GEOMETRICAMENTE, O QUE SÃO OS PONTOS $Q \in R$?



SEJA s UMA RETA EM $\mathbb{R}^3$.
SEJA Q' A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE P EM s (OU, EQUIVALENTEMENTE, Q' É O PONTO DE s MAIS PRÓXIMO DE P).
SEJA R' O SIMÉTRICO DE P COM RELAÇÃO À RETA s.

SE VOCÊS TIVEREM UM POUCO DE INTUIÇÃO GEOMÉTRICA, VOCÊS DEVEM SER CAPAZES DE RESPONDER AS PERGUNTAS ABAIXO SEM CONTAS...

PONTO	EIXO OU PLANO DE SIMETRIA	PROJEÇÃO ORTOGONAL	SIMÉTRICO
$(1,2,3)$	$[z=0]$ (ou: π_{xy})	$(1,2,0)$	$(1,2,-3)$
(a,b,c)	$[z=0]$	$(a,b,0)$	$(a,b,-c)$
$(1,2,3)$	$[x=0]$ (ou: π_{yz})	$(0,2,3)$	$(-1,2,3)$
(a,b,c)	$[x=0]$	$(0,b,c)$	$(-a,b,c)$
$(1,2,3)$	$[y=0]$ (ou: π_{xz})	$(1,0,3)$	$(1,-2,3)$
(a,b,c)	$[y=0]$	$(a,0,c)$	$(a,-b,c)$
$(1,2,3)$	$[x=y=0]$ (ou: $0Z$)	$(0,0,3)$	$(-1,-2,3)$
(a,b,c)	$0Z$	$(0,0,c)$	$(-a,-b,c)$
(a,b,c)	$[x=z=0]$ (ou: $0Y$)	$(0,b,0)$	$(-a,b,-c)$
(a,b,c)	$[y=z=0]$ (ou: $0X$)	$(a,0,0)$	$(a,-b,-c)$

PRA CASA: OS CONJUNTOS $Q \in C$ QUE VIMOS ANTES SÃO SIMÉTRICOS COM RELAÇÃO A QUAIS DESTES PLANOS E EIXOS?

GA 23/OUT/2015

HOJE: VAMOS TERMINAR A INTRODUÇÃO A QUÁDRICAS E VAMOS VER UM POUCO DA LISTA 10 (ESFERAS, TANGÊNCIA)... QUE NÃO DEVEM CAIR NA PROVA!

NAS PRÓXIMAS AULAS TRAGAM TODAS AS DÚVIDAS QUE VOCÊS PUDEREM PRA VOCÊS SE PREPARAREM PRA PROVA!

NA AULA PASSADA VIMOS QUE...

(VAMOS USAR A ABREVIAÇÃO, TEMPORÁRIA,

$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$)

$[x^2+y^2+z^2=1]$ É UMA ESFERA,

$[z=x^2+y^2]$ É UM PARABOLÓIDE,

$[z^2=x^2+y^2]$ É UM CONE.

VIMOS TAMBÉM UM POUCO SOBRE EIXOS E PLANOS DE SIMETRIA.

PRA ESTE DERMOS QUE $C=[z^2=x^2+y^2]$ É UM CONE, NÓS FIZEMOS CORTES NELE.

$C \cap [z=0] = \{(0,0,0)\}$

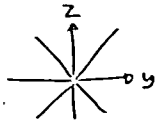
$C \cap [z=1]$ É UM CÍRCULO,

$C \cap [z=4]$ IDEM,

$C \cap [z=-1]$ IDEM,

$C \cap [z=-4]$ IDEM,

$C \cap [x=0]$ É ISTO:



O QUE É ISTO?

$H = [z^2 = x^2+y^2+1]$

$H \cap [z=0] = ?$

$H \cap [z=1] = ?$

$H \cap [z=0] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2+y^2+1,\ z=0\}$

OS PONTOS DE $H \cap [z=0]$ OBEDECEM $z^2 = x^2+y^2+1$, $z=0$,

$0 = x^2+y^2+1$

$-1 = x^2+y^2$...

a) OBTENHA ALGUNS PONTOS DE $H \cap [z=0]$. NÃO DÁ!

b) IDEM PARA $H \cap [z=1]$. $(0,0,1)$

c) IDEM PARA $H \cap [z=2]$. $(\pm\sqrt{3},0,2)$, $(0,\pm\sqrt{3},2)$

d) IDEM PARA $H \cap [z=\sqrt{5}]$. $(\pm 2,0,\sqrt{5})$, $(0,\pm 2,\sqrt{5})$

e) IDEM PARA $H \cap [z=-1]$.

f) $H \cap [z=-2]$.

g) IDEM PARA $H \cap [x=0]$.

REPRESENTE SEUS PONTOS NO PLANO

NA ÚLTIMA AULA VIMOS ALGUNS TIPOS DE SIMETRIAS.

O PONTO SIMÉTRICO A (a,b,c) PELO PLANO $[z=0]$ É $(a,b,-c)$.

O PONTO SIMÉTRICO A (a,b,c) PELA RETA $[y=z=0]$ É $(a,-b,-c)$.

UM CONJUNTO C É SIMÉTRICO COM RELAÇÃO AO PLANO $[z=0]$ QUANDO $(a,b,c) \in C$ IMPLICA $(a,b,-c) \in C$.

OS CONJUNTOS QUE ESTAMOS ESTUDANDO AGORA TÊM MUITAS DESTAS SIMETRIAS... MAS NÃO TODAS...

MAS SE $(a,b,c) \in [z=x^2+y^2]$ (O PARABOLÓIDE) ENTÃO NÃO NECESSARIAMENTE TEMOS $(a,b,-c) \in [z=x^2+y^2]$...

EXEMPLO: $(0,2,4) \in C$,

$(0,2,-4) \notin C$.

DICA: SE VOCÊS SOUBEREM USAR ESTAS SIMETRIAS BEM, CADA PONTO QUE VOCÊS OBTIVEREM DE CONJUNTO DESTES GERA VÁRIOS OUTROS PONTOS!...

VOLTANDO:

$[z^2=x^2+y^2+1]$ É

"HIPERBOLÓIDE DE 2 FOLHAS",

$[z^2=x^2+y^2-1]$ É UM

"HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA".

... AGORA VOCÊS JÁ OUVIRAM FALAR DE VÁRIAS QUÁDRICAS "CANÔNICAS"!

VOLTANDO:

$[z^2 = x^2+y^2+1]$ É UM "HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS".

$[z^2 = x^2+y^2-1]$ É UM "HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA".

... AGORA VOCÊS JÁ OUVIRAM FALAR DE VÁRIAS QUÁDRICAS "CANÔNICAS"!

...OS QUE
...TUDANDO
... MUITAS
...TRIAS...
...DAS...
$,c) \in [z = x^2+y^2]$ (O PARABOLÓIDE)
...ECESSARIAMENTE TEMOS
$,-c) \in [z = x^2+y^2]$...

$(0,2,4) \in C$,
$(0,2,-4) \notin C$.
...OCÊS SOUBEREM USAR ESTAS
...BEM, CADA PONTO QUE VOCÊS
... DE CONJUNTO DESTES GERA
...ROS PONTOS!...

LISTA 10

IDÉIAS PRINCIPAIS:

- EQUAÇÃO DA ESFERA
- TANGÊNCIA ENTRE ESFERA E PLANO
- TANGÊNCIA ENTRE ESFERA E RETA
- DIÂMETRO DE UMA ESFERA

GRANDE TRUQUE:

SEJA E UMA ESFERA DE CENTRO E_0 E RAIO R.

SEJA π UM PLANO.

SEJA r UMA RETA.

E É TANGENTE A π SE E SÓ SE $d(E_0,\pi) = R$.

E É TANGENTE A r SE E SÓ SE $d(E_0,r) = R$.

LISTA 10, PROBLEMA 3:

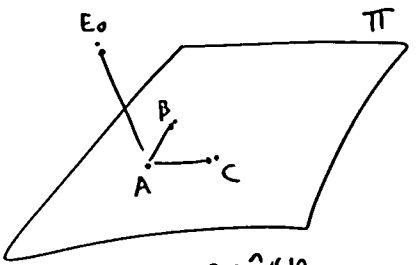
ENCONTRE O RAIO DA ESFERA E DE CENTRO $E_0 = (2,1,-1)$ QUE É TANGENTE AO PLANO:

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z+1=0\}$

$A = (-1,0,0) \in \pi$,

$B = (-2,0,1) \in \pi$,

$C = (-2,1,1) \in \pi$.



DÁ PRA CALCULAR A DISTÂNCIA $d(E_0,\pi)$ FAZENDO:

$$\frac{[\overrightarrow{AE_0}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}$$

← VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

← ÁREA DO PARALELOGRAMO

LISTA 10, PROBLEMA 5:

SEJA E_0 O CENTRO DA ESFERA E.

SEJA P O PONTO DE π MAIS PRÓXIMO DE E_0.

(P VAI SER O CENTRO DE $\pi \cap E$).

UM PROBLEMA PARECIDO MAS BEM MAIS SIMPLES:

$E = [(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 5^2]$,

$\pi = [z=0]$

(OU $\pi = [z=1]$)