Geometria Analítica

M ó d u l o I: Geometria Analítica Plana

Jorge Delgado (IMUFF)

Katia Frensel (IMUFF)

Nedir do Espírito Santo (IMUFRJ)

Conteúdo

1 Geometria Analítica Plana **7**

Vetores no Plano - Segmentos Orientados 9

Vetores no Plano - Operações 21

A Reta e a Dependência Linear 35

Produto Interno 51

Produto interno - Aplicações 73

Produto interno - Aplicações (continuação) 83

Simetrias e simetrias das cônicas 101

Cônicas - Translação de sistemas de coordenadas 117

Cônicas - Rotação de sistemas de coordenadas 129

Regiões e inequações no plano 149

Coordenadas polares 167

Equações paramétricas das cônicas 187

Apêndice: Parametrizações de curvas planas 197

Módulo 1

Geometria Analítica Plana

Geometria una et aeterna est in mente Dei refulgens.
A Geometria é única e eterna, brilhando na mente de Deus.
Conversation with the Sidereal Messenger: carta aberta a Galileo Galilei.
Johannes Kepler

A geometria cartesiana descoberta por *Pierre de Fermat* e *René Descartes*, por volta de 1636, foi de grande importância na Matemática, permitindo estudar problemas da Geometria Clássica por meio de métodos algébricos e reciprocamente, interpretar e resolver geometricamente problemas algébricos.

No entanto, em meados do século XIX, começou a busca por um método mais simples, que permitisse obter informações geométricas a partir de equações algébricas, e obter as equações algébricas de conceitos geométricos, de uma forma mais direta. Para isso foi fundamental o desenvolvimento da noção de *vetor*.

Segundo os historiadores, os *vetores* surgiram informalmente no início do século XIX, nas publicações de *Bernard Bolzano*. Em 1804, Bolzano publicou o livro *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargoemetrie* (Reflexões sobre algumas idéias relativas à Geometria Elementar). Nesse livro, ele considera pontos, retas e planos como sendo noções primitivas e define *operações entre eles*. Este foi um grande progresso no sentido de abstrair as propriedades inerentes às noções primitivas, que originaram à noção de *vetor*. Neste Módulo aprenderemos os fundamentos da geometria vetorial e veremos como utilizar o conceito de vetor no estudo da Geometria do plano e do espaço.

Pré-requisitos.

- Pré-Cálculo.
- Geometria Básica.

Bibliografia.

[1] Lehman, C., *Geometria Analítica*. Editora Globo.
[2] Lima, E., *Coordenadas no Plano*. SBM.

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano
1781 - 1848,
Praga, Áustria
(Hoje República Tcheca).
Filósofo, matemático e teólogo, fez contribuições significativas à Matemática. A sua teoria sobre o infinito matemático antecipou-se à Teoria de Conjuntos Infinitos de George Cantor.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bolzano.html`

Vetores no Plano - Segmentos Orientados

Objetivos

- Definir os conceitos de orientação, direção e módulo de um segmento.
- Analisar a noção de equipolência entre segmentos orientados.
- Apresentar a noção de vetor no plano.

Em 1832, *Giusto Bellavitis* publicou uma obra sobre Geometria onde apareceu explicitamente a noção de vetor.

Dados dois pontos A e B do plano, Bellavitis considerou os *segmentos* AB e BA, de extremidades A e B, como objetos distintos. Ele adotou esta convenção porque o segmento de reta limitado pelos pontos A e B, pode ser percorrido de duas maneiras distintas: *partindo de* A *para chegar até* B, ou *partindo de* B *para chegar até* A.

Bellavitis classificou os segmentos orientados por meio de uma relação que chamou *equipolência*. Essa relação deu origem à noção de *vetor*.

Nesta aula caracterizaremos a noção de equipolência.

Para saber mais...

Sobre a noção de vetor e as suas implicações no desenvolvimento da Matemática, consulte: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html`

Giusto Bellavitis
1803 - 1880, Itália

Matemático autodidata. Refinou o cálculo baricêntrico de Möbius e sua teoria de vetores foi muito importante no desenvolvimento da Geometria.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bellavitis.html`

Segmentos orientados

Daqui em diante, todos os elementos considerados (pontos, retas etc.), pertencem a um plano fixo.

Designamos por AB o segmento de reta orientado percorrido de A para B. No segmento AB, o ponto A é chamado *origem* e o ponto B *extremidade*.

Mesmo que os segmentos AB e BA representem o mesmo conjunto de pontos do plano (os pontos da reta que passa por A e B que estão entre A e B, incluindo A e B), a sua *orientação* (isto é, o sentido de percurso) é *contrária* (ou oposta). Veja as figuras abaixo.

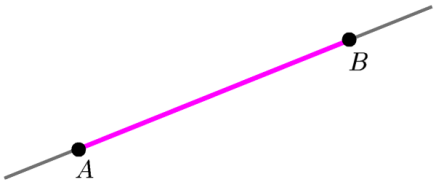


Fig. 1: Segmento de extremidades A e B.

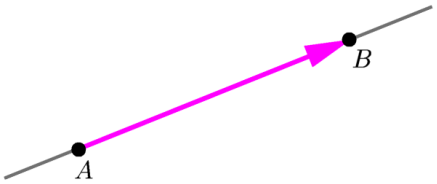


Fig. 2: Percurso de A até B: segmento AB.

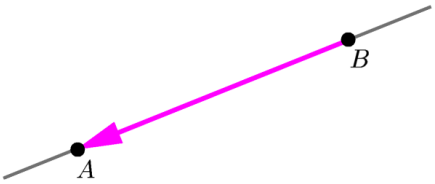


Fig. 3: Percurso de B até A: segmento BA.

Pense, por exemplo, que você possa ir de Petrópolis a Campos por uma estrada retilínea. Então você pode ir também de Campos a Petrópolis seguindo a mesma estrada, mas **em sentido contrário**.

Devemos fixar e distinguir bem dois conceitos importantes: a *direção* e o *sentido* (ou *orientação*) de um segmento.

A *direção* de um segmento é dada pela reta que o contém: *dois segmentos têm a mesma direção quando as retas que os contêm são paralelas ou coincidentes*.

Retas e segmentos paralelos. Duas retas no plano são paralelas quando não têm pontos em comum e dois segmentos são paralelos, quando as retas que os contêm são paralelas.

Pontos colineares. Lembre que três ou mais pontos são chamados *colineares* quando pertencem a uma mesma reta, caso contrário, os pontos são chamados *não-colineares*. Observe, também, que dois pontos são sempre colineares, pois estão contidos em uma única reta.

Na Figura 4, os segmentos AB e CD têm a mesma direção, pois as retas que os contêm são paralelas. Os segmentos AB e EF têm a mesma direção porque as retas que os contêm são coincidentes, isto é, os pontos A, B, E e F são colineares.

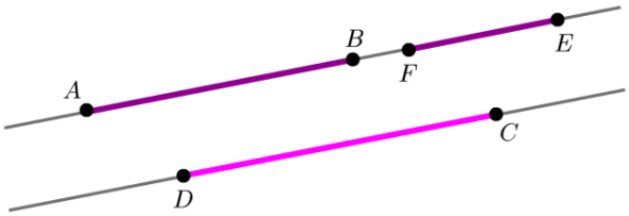


Fig. 4: Segmentos com mesma direção.

Consideremos dois segmentos *orientados* AB e CD com a mesma direção. Vejamos o que significa os segmentos terem *o mesmo sentido*.

Analisemos separadamente os seguintes dois casos:

Caso a. Os segmentos orientados AB e CD estão em retas paralelas.

Neste caso, dizemos que os segmentos têm o *mesmo sentido*, se os pontos B e D estão no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa por A e C. Caso contrário, dizemos que eles têm *sentidos opostos*.

NOTA IMPORTANTE! No plano, uma reta r determina dois *semi-planos*, cuja interseção é r. Isto é, convencionamos que a reta r está contida em ambos os semi-planos por ela determinados.

Na Figura 5, os segmentos orientados AB e CD têm o mesmo sentido, enquanto que na Figura 6, os segmentos EF e GH têm sentidos opostos.

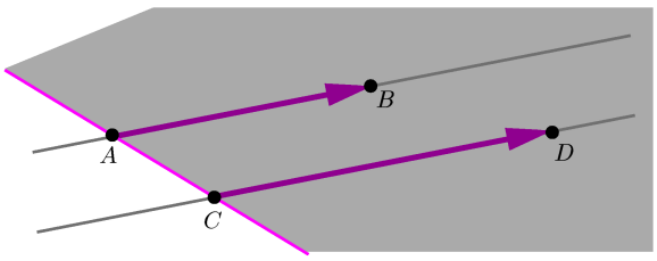


Fig. 5: Segmentos orientados de igual sentido.

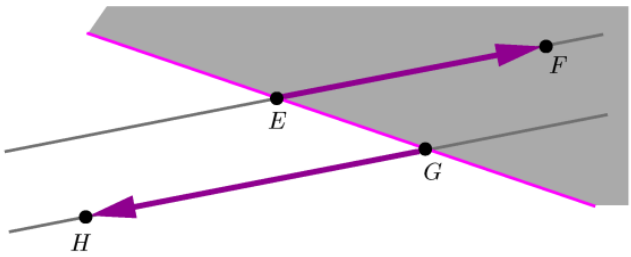


Fig. 6: Segmentos orientados de sentidos opostos.

Caso b. Os segmentos orientados AB e CD estão na mesma reta ℓ.

Sejam r e s as retas perpendiculares a ℓ que passam por A e C respectivamente (veja as Figuras 7 e 8). Cada uma das retas r e s divide o plano em dois semi-planos. Seja $\mathcal{P}_B$ o semi-plano determinado pela reta r que contém o ponto B e seja $\mathcal{P}_D$ o semi-plano determinado pela reta s que contém o ponto D.

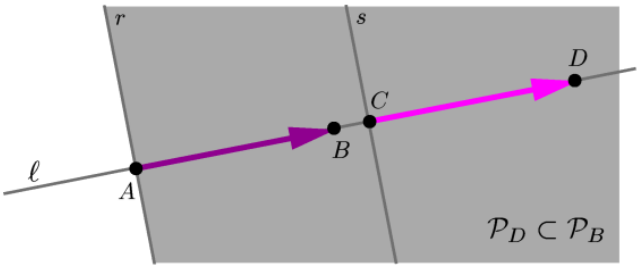


Fig. 7: Segmentos orientados de igual sentido.

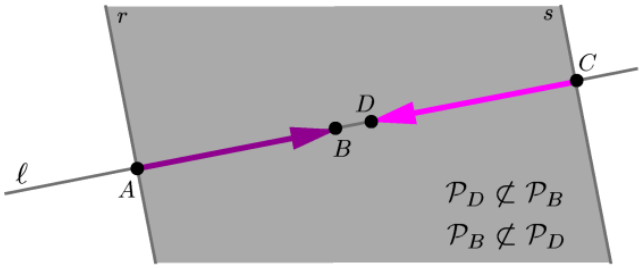


Fig. 8: Segmentos orientados de sentidos opostos.

Com essa construção, se $\mathcal{P}_B \subset \mathcal{P}_D$ ou $\mathcal{P}_D \subset \mathcal{P}_B$, dizemos que AB e CD têm o *mesmo sentido*. Se $\mathcal{P}_B \not\subset \mathcal{P}_D$ e $\mathcal{P}_D \not\subset \mathcal{P}_B$, dizemos que AB e CD têm *sentidos opostos*.

Observação.

Se AB e CD têm sentidos opostos e $A \neq C$, então $\mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_D$ é a região do plano limitada pelas retas r e s. No entanto, se $A = C$, $\mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_D = r = s$.

Você sabe que o *comprimento* de um segmento de reta AB é a distância do ponto A ao ponto B. Esta medida, designada por $|AB|$ (ou por $d(A, B)$), é o *módulo* do segmento AB.

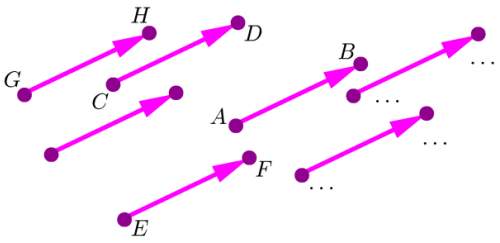


Fig. 9: Segmentos equipolentes entre si.

Note que $|AB| = |BA|$.

Bellavitis classificou os segmentos orientados pela seguinte relação.

Definição 1 (Segmentos equipolentes) *Dois segmentos orientados são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo (veja a Figura 9).*

Se os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, escrevemos $AB \equiv CD$. Caso contrário, escrevemos $AB \not\equiv CD$.

Lembre que...

Com respeito a um sistema de coordenadas cartesianas escolhido no plano, a distância de um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) a um ponto B de coordenadas (x_1, y_1), é

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}.$$

Daqui em diante, fixamos uma unidade de medida para determinar o comprimento dos segmentos orientados no plano.

Ponto Médio.
Se A e B são pontos do plano que num sistema de coordenadas cartesianas são representados pelos pares ordenados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então o *ponto médio* do segmento AB é $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Paralelogramo.
Um paralelogramo é um *quadrilátero* de lados opostos paralelos.
Um quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo se, e somente se, as diagonais AD e BC se intersectam ao meio.
É importante observar a ordem em que são nomeados os vértices, o quadrilátero $ABDC$ não é o mesmo que o quadrilátero $ABCD$. No primeiro os lados são os segmentos AB, BD, DC e CA, enquanto que, no segundo, os lados são AB, BC, CD e DA.
No paralelogramo $ABDC$ da Figura 10, as diagonais se intersectam no ponto M. Logo, $|MA| = |MD|$ e $|MB| = |MC|$.
O quadrilátero $ABDC$ da Figura 12 **não é** um paralelogramo. As diagonais não se intersectam mutuamente ao médio.

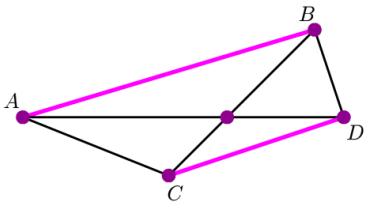


Fig. 12: Quadrilátero $ABDC$.

Vejamos um critério importante para determinar quando dois segmentos orientados são equipolentes.

Proposição 1 *Sejam A, B, C e D pontos do plano (colineares ou não). Então:*

$AB \equiv CD$ se, e somente se, AD e BC possuem o mesmo ponto médio.

Demonstração. Consideramos separadamente os casos possíveis:

(a) Os pontos A, B, C e D não são colineares e três dentre esses pontos também não são colineares.

Neste caso os pontos são vértices de um quadrilátero que tem seus lados contidos em retas que não são coincidentes.

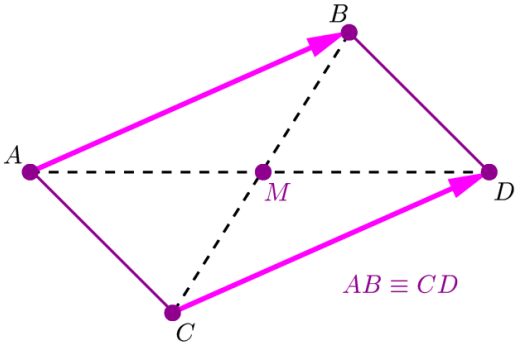


Fig. 10: Paralelogramo $ABDC$.

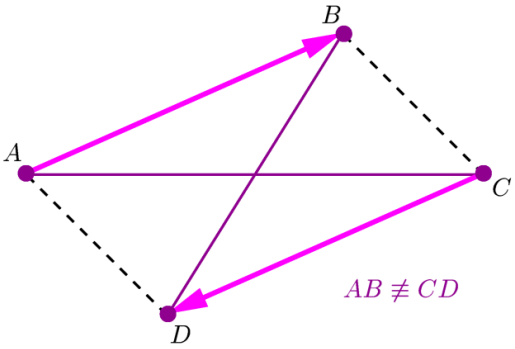


Fig. 11: $ABDC$ não é um paralelogramo.

($\Rightarrow$) Se $AB \equiv CD$ então os segmentos estão contidos em retas paralelas e, como têm o mesmo módulo e o mesmo sentido, o quadrilátero $ABDC$ é um *paralelogramo* e, as suas diagonais AD e BC, cortam-se mutuamente ao meio.

Compare as Figuras 10 e 11 para se convencer de que a orientação dos segmentos é importante. Na Figura 11, AB e CD têm orientações contrárias e, portanto, não podem ser equipolentes.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se AD e BC têm o mesmo ponto médio então $ABDC$ é um paralelogramo. Logo AB e CD têm o mesmo sentido, o mesmo módulo e a mesma direção. Portanto $AB \equiv CD$.

(b) A, B, C e D estão contidos numa reta ℓ (Figura 13).

Consideremos um sistema de coordenadas na reta ℓ. Sejam a, b, c e d as coordenadas dos pontos A, B, C e D, respectivamente.

Então, $|AB| = |b - a|$ e $|CD| = |d - c|$.

Se $AB \equiv CD$, então $|AB| = |CD|$ e portanto $|b-a| = |d-c|$.

Como AB e CD têm o mesmo sentido, $b-a$ e $d-c$ são números reais com o mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos).

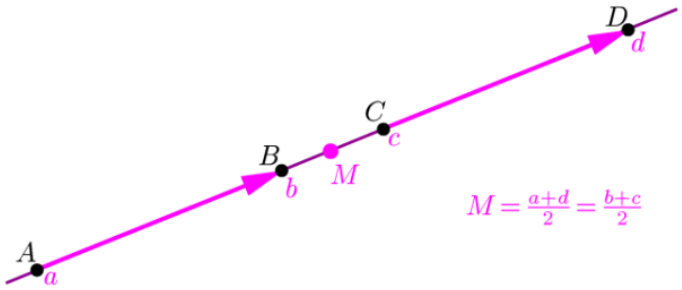


Fig. 13: AB e CD são equipolentes.

Logo $b-a = d-c$ e, portanto, $b+c = a+d$. Dividindo esta igualdade por 2, concluímos que $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$. Assim, o ponto médio de AD é igual ao ponto médio de BC.

Reciprocamente, se A, B, C e D são colineares e o ponto médio do segmento AD coincide com o ponto médio do segmento BC, então $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$. Esta igualdade equivale a $b-a = d-c$. Em particular, $b-a$ e $d-c$ têm o mesmo sinal, o que significa que AB e CD têm o mesmo sentido. Além disso, $|b-a| = |d-c|$, isto é, $|AB| = |CD|$. Como AB e CD estão contidos na mesma reta, eles têm também a mesma direção. Portanto $AB \equiv CD$. □

Observação.
Um possível terceiro caso ocorreria quando os quatro pontos A, B, C e D não são colineares, mas três deles são colineares, os segmentos AB e CD não tem a mesma direção e, portanto, não podem ser equipolentes. Também os segmentos AD e BC não se cortam num ponto diferente de uma extremidade, em particular, não se cortam ao meio. Assim, nenhuma das hipóteses da proposição 1 é satisfeita e podemos ignorar este caso.

Enquanto a Proposição 1 caracteriza geometricamente a relação de equipolência, a Proposição 2, abaixo, estabelece que qualquer ponto do plano é origem de um segmento equipolente a um segmento dado.

Proposição 2 *Se AB é um segmento orientado e C é um ponto do plano, então apenas um segmento orientado com origem em C é equipolente a AB.*

Demonstração. Devemos determinar um ponto D no plano de modo que $AB \equiv CD$. Isto é, os segmentos AB e CD devem ter a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.

Seja r a reta que passa por A e B, analisemos separadamente o que acontece quando $C \notin r$ e quando $C \in r$.

Caso $C \notin r$. Neste caso, existe apenas uma reta s paralela a r que passa pelo ponto C. Veja a Figura 14.

Seja $\mathcal{C}$ o círculo de centro C e raio $|AB|$.

A reta que passa por A e C divide o plano em dois semi-planos, um dos quais, que designamos $\mathcal{P}_B$, contém o ponto B.

O círculo $\mathcal{C}$ intersecta s em exatamente dois pontos diametralmente opostos, um dos quais, que chamaremos D, está contido em $\mathcal{P}_B$.

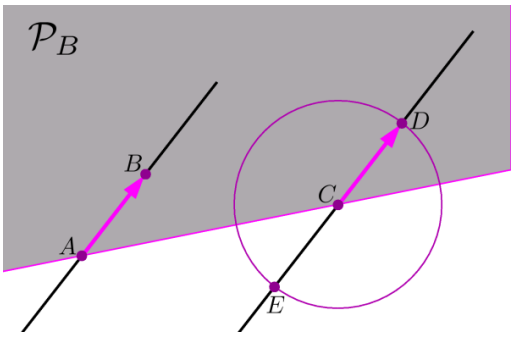


Fig. 14: Caso $C \notin r$.

Pela forma como foi obtido o ponto D, o segmento orientado CD é equipolente a AB.

Caso $C \in r$. Neste caso, o círculo $\mathcal{C}$, de centro C e raio $|AB|$, intersecta a reta r em dois pontos diametralmente opostos. Mas, apenas um deles, que chamaremos D, é tal que AB e CD têm o mesmo sentido. Logo, AB e CD são equipolentes, pois têm a mesma direção e os seus módulos são iguais. □

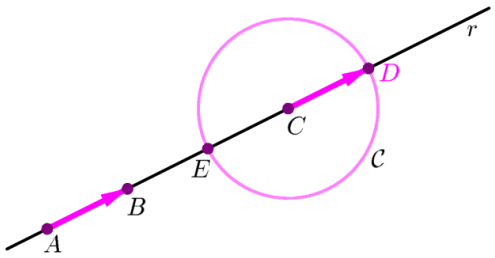


Fig. 15: Caso $C \in r$.

Convenção.

- Um segmento AB onde $A = B$ é chamado um *segmento nulo*. Os segmentos nulos têm módulo zero e não têm direção nem sentido.
- Se A é um ponto do plano, designamos por AA o segmento nulo de origem e extremidade A.
- *Todos os segmentos nulos são considerados equipolentes*.
- No que se segue, passaremos a considerar um sistema (ortogonal) de coordenadas cartesianas no plano com origem no ponto O. Os pontos do plano são identificados por suas coordenadas.

Proposição 3 *Sejam* $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ *e* $D =$

(d_1, d_2) *pontos no plano cartesiano, então:*

$$AB \equiv CD \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$$

Demonstração. Pela Proposição 1, $AB \equiv CD$ se, e somente se, AD e BC têm o mesmo ponto médio.

O ponto médio do segmento AD é $\left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right)$ e o ponto médio do segmento BC é $\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$.

Portanto, $AB \equiv CD$ se, e somente se, $\left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$, isto é, $\frac{a_1+d_1}{2} = \frac{b_1+c_1}{2}$ e $\frac{a_2+d_2}{2} = \frac{b_2+c_2}{2}$, que equivale a $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$, ou seja $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$. □

Exemplo 1 *Sejam $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 1)$ pontos do plano. Determinemos o ponto $P = (x, y)$, tal que $OP \equiv AB$.*

Solução: *Segundo a Proposição 3, $AB \equiv OP$ se, e somente se, $(-1 - 1, 1 - 0) = (x - 0, y - 0) = (x, y) = P$. Portanto, $P = (-2, 1)$.*

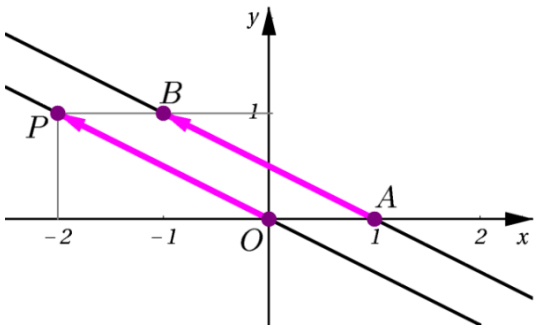


Fig. 16: Exemplo 1.

A relação de equipolência verifica as seguintes propriedades:

Reflexiva. Todo segmento orientado é equipolente a si próprio.
Simétrica. Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.
Transitiva. Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

As propriedades reflexiva e simétrica são fáceis de serem verificadas. Para mostrarmos a propriedade transitiva, usamos a Proposição 3.

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$, $E = (e_1, e_2)$ e $F = (f_1, f_2)$ pontos do plano.

Como $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, temos:

Para saber mais...
Uma relação entre os elementos de um conjunto que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva é chamada uma *relação de equivalência*. Dois elementos do conjunto que estão relacionados são ditos equivalentes.
Havendo uma relação de equivalência no conjunto, ele pode ser dividido em subconjuntos chamados *classes de equivalência*.
Cada classe de equivalência consiste de todos os elementos do conjunto que estão relacionados entre si, isto é, que são equivalentes entre si.

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$ e $(d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (f_1 - e_1, f_2 - e_2)$

Logo, $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (f_1 - e_1, f_2 - e_2)$ e, portanto, $AB \equiv EF$.

Essas propriedades permitem dividir o conjunto de todos os segmentos orientados do plano em subconjuntos, cada um dos quais consistindo de todos os segmentos orientados que são equipolentes entre si.

Definição 2 (Vetor no plano) *Um vetor no plano é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado dado. Se AB é um segmento orientado, o vetor que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes a AB é designado por $\overrightarrow{AB}$. Qualquer segmento orientado equipolente a AB é chamado um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Os vetores são também escritos usando letras minúsculas com uma flecha, como $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ etc.*

Assim, pela Definição 2,

$$\boxed{AB \equiv CD \text{ se, e somente se, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$$

Você deve estar achando um pouco estranha a definição de vetor, e provavelmente está perguntando a si mesmo: como desenhar um vetor no plano?

Na verdade, o que desenhamos são apenas os representantes dos vetores, isto é, segmentos orientados.

Note que...
As noções de direção, sentido e módulo, juntas, dão lugar à noção de vetor.

Pela Proposição 2, temos:

Dados um vetor $\overrightarrow{a}$ e um ponto A, existe um único ponto B, tal que o segmento AB representa o vetor $\overrightarrow{a}$. Isto é, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.

Vejamos agora como representar os vetores em termos de coordenadas de um sistema cartesiano dado.

Definição 3 (Coordenadas e módulo de um vetor)

Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos do plano, e $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{a}$, e escrevemos:

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)}$$

Observação.

As coordenadas de um vetor $\overrightarrow{a}$ não dependem do segmento escolhido para representá-lo e são as coordenadas do único ponto P, tal que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OP}$.

De fato, se $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$ e $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, então, $CD \equiv AB$ e, pela Proposição 3:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

Seja agora $P = (x, y)$, tal que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OP}$. Então, $AB \equiv OP$ e usando novamente a Proposição 3, temos:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, y - 0) = (x, y) = P.$$

Exemplo 2 *Sejam os pontos $A = (0, 1)$, $B = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e $C = (-1, 1)$.*

Determinemos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, o (único) ponto D, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e o ponto P, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$.

Solução: *As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são*

$$\overrightarrow{AB} = \left(1 - 0, -\tfrac{1}{2} - 1\right) = \left(1, -\tfrac{3}{2}\right).$$

Seja $D = (d_1, d_2)$, tal que $CD \equiv AB$. Isto é, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Pela Proposição 3, temos $(d_1 - (-1), d_2 - 1) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

Portanto, $d_1 = 0$, $d_2 = -\frac{1}{2}$, e $D = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Segundo vimos na observação anterior, $P = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$, pois P e $\overrightarrow{AB}$ têm coordenadas iguais.

Exemplo 3 *Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.*

Solução: *Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$ então:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\ &\iff (2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\ &\iff 2 = d_1 - 4 \quad \textit{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\ &\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \textit{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Portanto, $D = (6, -1)$.

Para saber mais...
Outros matemáticos, como os franceses *Victor Poncelet* (1788-1867), *Michel Chasles* (1793-1880) e o alemão *August Möbius* (1790-1868), continuaram os estudos de Bolzano. Em 1827, Möbius publica o seu livro *Der barycentrische Calcul*, um tratado geométrico sobre as transformações das linhas e cônicas. Nesta obra, destaca-se a manipulação dos vetores para determinar as *coordenadas baricêntricas* de um triângulo. Dez anos depois, em 1837, Möbius publicou outro livro no qual a noção de vetor é aplicada diretamente à resolução de problemas de Estática.

Resumo

Nesta aula, analisamos o significado de direção, sentido e módulo de um segmento no plano e definimos a relação de equipolência entre dois segmentos orientados.

Você viu o significado da relação de equipolência entre segmentos orientados do ponto de vista tanto geométrico quanto analítico (em coordenadas).

Definimos a noção de vetor no plano e observamos que as coordenadas de um vetor não dependem do representante do vetor.

Exercícios

1. Verifique se os seguintes pares de segmentos AB e CD estão em retas paralelas ou coincidentes. Caso afirmativo, mostre, geometricamente, se têm o mesmo sentido ou sentidos opostos.

a. $A = (0, -2)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 1)$, $D = (-1, -1)$.

b. $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (0, 0)$, $D = (2, 4)$.

c. $A = (0, -2)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 3)$, $D = (2, 1)$.

d. $A = (1, 1)$, $B = (2, -3)$, $C = (-2, 4)$, $D = (0, 1)$.

2. Determine em cada caso, o ponto D, tal que $CD \equiv AB$, onde $A = (-1, -1)$ e $B = \left(2, \frac{1}{2}\right)$. Faça também um esboço dos segmentos orientados no plano cartesiano seguindo a construção da Proposição 2.

a. $C = (1, -1)$.
b. $C = (1, 2)$.
c. $C = (0, -\sqrt{2})$.
d. $C = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

3. Determine se os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, onde:

a. $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (-1, -1)$.

b. $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (0, 1)$, $D = (2, 1)$.

c. $A = (1, -3)$, $B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $C = (1, 0)$, $D = (-\frac{1}{2}, 1)$.

d. $A = (1, -3)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $C = (1, 0)$, $D = (-\frac{1}{2}, 1)$.

4. Determine as coordenadas do ponto P, tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, onde:

a. $A = (1, -1)$, $B = (3, 4)$.

b. $A = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (\frac{4}{3}, \frac{5}{4})$.

c. $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

5. Determine se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onde:

a. $A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (-1, -1)$, $D = (0, -2)$.

b. $A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, -1)$, $D = (0, 0)$.

c. $A = (-2, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, 1)$, $C = (-\frac{1}{2}, -1)$, $D = (-1, 1)$.

d. $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$, $C = (-1, 1)$, $D = (2, 3)$.

6. Determine os vértices C e D do paralelogramo $ABDC$, sabendo que $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ e as diagonais AD e BC se cortam no ponto $M = (4, 2)$.

7. Sejam $P = (1, 0)$, $Q = (2, 4)$ e $R = (3, 3)$ pontos do plano. Determine os pontos S do plano de modo que P, Q, R e S sejam vértices de um paralelogramo.

Sugestão: Observe que há três possíveis diagonais para o paralelogramo, PR, PQ ou QR, cada uma delas fornece um possível ponto S.

Auto-avaliação

Se você entendeu as noções de direção, sentido e módulo de um segmento orientado assimilando bem o significado da relação de equipolência, então conseguiu resolver os exercícios 1, 2 e 3. Se você resolveu os exercícios 4 e 5, entendeu a noção de vetor e aprendeu a determinar as coordenadas de um vetor. Se você entendeu a equipolência e a sua relação com o paralelogramo, então resolveu os exercícios 6 e 7. Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. Não esqueça que há tutores que poderão ajudar a eliminar as suas dúvidas. Desde já, lembre-se de discutir os conteúdos com seus colegas.

Vetores no Plano - Operações

Objetivos

- Definir as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares reais.
- Compreender as propriedades das operações com vetores.
- Resolver problemas geométricos utilizando a linguagem vetorial.

Na aula anterior vimos que por cada ponto do plano é possível traçar um segmento orientado que representa um vetor dado (Proposição 2). Começamos esta aula utilizando esse resultado para definir a *operação de adição de vetores no plano*.

Definição 4 (Adição de vetores) *Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores no plano, A um ponto qualquer do plano, AB o representante de $\vec{a}$ com origem no ponto A e BC o representante de $\vec{b}$ com origem no ponto B. O vetor soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, designado por $\vec{a}+\vec{b}$, é o vetor representado pelo segmento orientado AC:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Na Figura 17, mostramos a soma $\vec{a}+\vec{b}$ dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representada pelo segmento orientado $\overrightarrow{AC}$. No entanto, observe que a definição do vetor soma $\vec{a}+\vec{b}$, depende da escolha do ponto A. Para verificarmos que o vetor soma *está bem definido*, devemos demonstrar que ele independe dessa escolha.

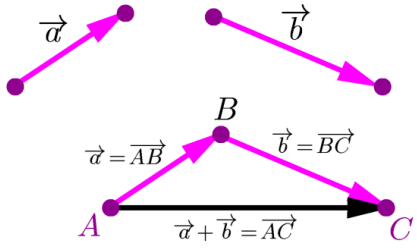


Fig. 17: Adição dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Sejam A' outro ponto do plano e B' o ponto determinado pela Proposição 2, tal que $\vec{a}=\overrightarrow{A'B'}$ e seja C' o ponto determinado pela mesma Proposição, tal que $\vec{b}=\overrightarrow{B'C'}$. Devemos demonstrar que $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{A'C'}$, ou seja, que $AC\equiv A'C'$.

Bem definido...
Em Matemática, muitas noções são definidas a partir da escolha de determinados objetos. Dizer que a noção *está bem definida*, significa que a escolha dos objetos utilizados na definição é irrelevante, e podem ser substituídos por outros, com propriedades similares. No caso da definição da operação de adição de vetores, o vetor soma $\vec{a}+\vec{b}$ é definido a partir da escolha do ponto A, onde $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. O vetor soma está bem definido, pois, como vemos na demonstração ao lado, podemos substituir a origem A do vetor $\vec{a}$ por outro ponto.

Com respeito a um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto O, suponha que os pontos A, B, C, A', B' e C' têm coordenadas:

$$A = (a_1, a_2)\,, \qquad A' = (a'_1, a'_2)\,,$$
$$B = (b_1, b_2)\,, \qquad B' = (b'_1, b'_2)\,,$$
$$C = (c_1, c_2)\,, \qquad C' = (c'_1, c'_2)\,.$$

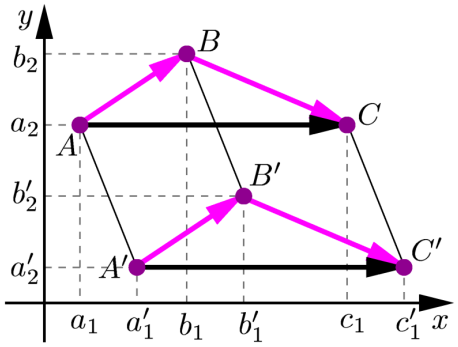


Fig. 18: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Sabemos que:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff AB \equiv A'B' \iff \begin{cases} b_1 - a_1 = b'_1 - a'_1 \\ b_2 - a_2 = b'_2 - a'_2\,, \end{cases}$$

e

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \iff BC \equiv B'C' \iff \begin{cases} c_1 - b_1 = c'_1 - b'_1 \\ c_2 - b_2 = c'_2 - b'_2\,. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (c_1 - b_1) + (b_1 - a_1) &= (c'_1 - b'_1) + (b'_1 - a'_1)\,, \\ (c_2 - b_2) + (b_2 - a_2) &= (c'_2 - b'_2) + (b'_2 - a'_2)\,, \end{aligned}$$

isto é, $c_1 - a_1 = c'_1 - a'_1$ e $c_2 - a_2 = c'_2 - a'_2$, e, portanto, $AC \equiv A'C'$.

Com isso provamos que o vetor soma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ está bem definido, pois depende apenas das parcelas $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, e não da escolha do ponto A. □

Além disso:

se $\overrightarrow{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{b} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (x_2, y_2)$,

então $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Resumindo,

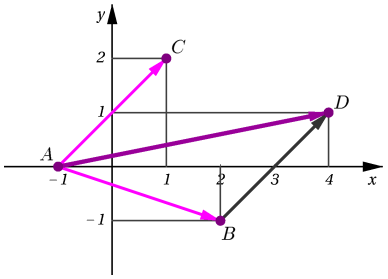


Fig. 19: Soma de vetores.

Coordenadas do vetor soma.

As coordenadas do vetor soma são obtidas somando as coordenadas respectivas das parcelas. Isto é, se $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$, então:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$

Exemplo 4 *Sejam* $A = (-1, 0)$, $B = (2, -1)$ *e* $C = (1, 2)$. *Determinemos* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução: *Segundo o destaque acima:* $\overrightarrow{AB} = (2-(-1), -1-0) = (3,-1)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (1-(-1), 2-0) = (2,2)$. *Logo,* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3,-1)+(2,2) = (5,1)$ *(Figura 19).*

O representante do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *com origem no ponto* A *é o segmento orientado* AD*, onde* $D = (d_1, d_2)$ *é o ponto, tal que* $AC \equiv BD$*. Então,* $d_1 - 2 = 1 - (-1)$ *e* $d_2 - (-1) = 2 - 0$*, isto é,* $D = (d_1, d_2) = (4,1)$.

Observação.

Sejam A*,* B*,* C *pontos não-colineares do plano, então o ponto* D *faz do quadrilátero* $ABDC$ *um paralelogramo se, e somente se,*

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\,.$$

De fato, se $ABDC$ é um paralelogramo, então $AC \equiv BD$.

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\,.$$

Reciprocamente, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, então, pela definição da adição de vetores, o ponto D é a extremidade do representante de $\overrightarrow{AC}$ com origem no ponto B. Isto é, $AC \equiv BD$ e portanto $ABDC$ é um paralelogramo (Figura 20).

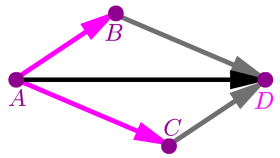


Fig. 20: O quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo se, e somente se, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Propriedades da adição de vetores.

A adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Propriedade comutativa*:

$$\boxed{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}}$$

Com efeito, se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$, então:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\,.$$

2. *O vetor nulo, que designamos por* $\overrightarrow{0}$*, é o vetor representado por qualquer segmento nulo.*

As coordenadas do vetor nulo são:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB} = (b_1 - b_1, b_2 - b_2) = (0,0).$$

onde $B = (b_1, b_2)$ *é um ponto qualquer do plano.*

Se $\overrightarrow{a}$ *é um vetor qualquer, temos:*

Segmento nulo.
Lembre que um *segmento nulo* é um segmento cuja origem e extremidade coincidem. Os segmentos nulos têm módulo zero, mas não têm direção nem sentido. Todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.

$$\boxed{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}}$$

De fato, se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, então,

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2) = \overrightarrow{a}.$$

3. *Dado um vetor $\overrightarrow{a}$ existe um vetor que designamos por $-\overrightarrow{a}$ e chamamos o simétrico de $\overrightarrow{a}$, tal que*:

$$\boxed{\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}}$$

De fato, se AB é um segmento orientado que representa o vetor $\overrightarrow{a}$, então o segmento orientado BA é um representante do vetor $-\overrightarrow{a}$, pois pela definição da adição de vetores vemos que:

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}\,.$$

Observe também que, se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, então as coordenadas de $-\overrightarrow{a}$ são:

$$-\overrightarrow{a} = (-a_1, -a_2)\,.$$

4. *A adição de vetores é associativa. Isto é, dados três vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$:*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)}$$

Com efeito, sejam $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ e $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2)$. Usando a propriedade associativa da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (c_1, c_2) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)\\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2)\\ &= \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\,.\end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que a operação de adição de vetores, possui as mesmas propriedades que a operação de adição de números reais.

Definimos agora uma operação de multiplicação de um número real por um vetor.

Convenção: No seguinte, os números reais serão chamados também *escalares*.

Subtração de vetores. *Subtração* é a soma de um vetor $\overrightarrow{b}$ com o *simétrico* $-\overrightarrow{a}$ de um vetor $\overrightarrow{a}$. O vetor $\overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a})$ se escreve de forma abreviada como $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

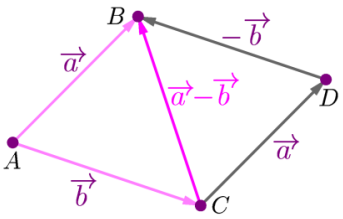


Fig. 21: Subtração de vetores.

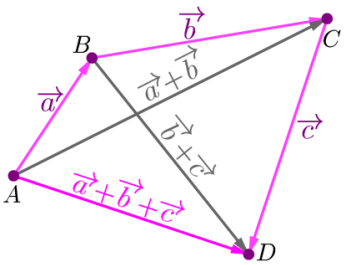


Fig. 22: Propriedade associativa da adição de vetores.

Definição 5 (Multiplicação de escalares por vetores)

Se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o produto de λ por $\overrightarrow{a}$ como sendo o vetor $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ representado pelo segmento AB', de modo que:

- *A, B e B' são colineares,*
- *$|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$,*
- *AB e AB' têm* $\begin{cases} \text{o mesmo sentido, se } \lambda > 0, \\ \text{sentidos opostos, se } \lambda < 0, \end{cases}$

Observe que, quando $\lambda = 0$, $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e, portanto, $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Similarmente, se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, podemos verificar a partir da definição, que $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Os vetores $\lambda \cdot \overrightarrow{a}$.
Na Figura 23 mostramos vetores da forma $\lambda \cdot \overrightarrow{a}$ com $\lambda = 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

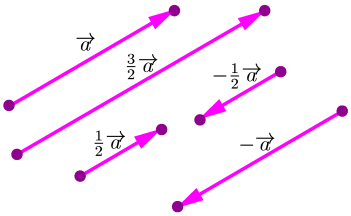


Fig. 23: Múltiplos de um vetor.

Proposição 4

A multiplicação do escalar λ pelo vetor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ não depende do segmento representante AB.

Demonstração. Devemos mostrar que se $CD \equiv AB$, então $\overrightarrow{CD'} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$ coincide com $\overrightarrow{AB'}$, isto é, que $AB' \equiv CD'$.

Como $CD \equiv AB$, temos que CD e AB têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Logo,

$$|CD'| = |\lambda| \cdot |CD| = |\lambda| \cdot |AB| = |AB'|.$$

Suponhamos primeiro que $\lambda > 0$.

Neste caso, AB' tem a mesma direção e sentido que AB e CD' tem a mesma direção e sentido que CD. Portanto, AB' e CD' têm também a mesma direção e sentido.

Suponhamos, agora, que $\lambda < 0$.

Neste caso, AB' e AB têm a mesma direção e sentidos contrários. O mesmo acontece com CD e CD'.

Como AB e CD têm o mesmo sentido, concluímos que AB' e CD' têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Portanto, seja λ positivo ou negativo, obtemos $CD' \equiv AB'$, como queríamos.

Faça você mesmo os argumentos para os casos em que $\lambda = 0$ ou AB é um segmento nulo. □

Proposição 5 *Se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, é um escalar não-nulo, então:*

$$\boxed{\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)}$$

Demonstração. Sejam $P = (a_1, a_2)$ e $Q = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ pontos do plano. Devemos mostrar que $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$. Isto significa que

- O, P e Q são pontos colineares;
- $|OQ| = |\lambda| \cdot |OP|$;
- OQ têm o mesmo sentido que OP quando $\lambda > 0$ e, sentido oposto, quando $\lambda < 0$.

O simétrico de um vetor.
Observe que $-\overrightarrow{a} = (-1) \cdot \overrightarrow{a}$ pois, se $a = (a_1, a_2)$, então:

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{a} &= (-a_1, -a_2) \\ &= (-1 \cdot a_1, -1 \cdot a_2) \\ &= -1 \cdot \overrightarrow{a}. \end{aligned}$$

De fato, se $a_1 = 0$, então O, P e Q estão sobre o eixo y.

Se $a_1 \neq 0$, então a reta que passa por O e Q tem inclinação $\dfrac{\lambda \cdot a_2}{\lambda \cdot a_1} = \dfrac{a_2}{a_1}$, que é igual à inclinação da reta que passa por O e P.

Logo, O, P e Q são colineares.

Observe também que

$$|OQ| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda| \cdot |OP|.$$

Resta mostrar que OP e OQ têm o mesmo sentido quando $\lambda > 0$ e sentidos opostos quando $\lambda < 0$. Para isto, é necessário analisar os seguintes casos:

- $a_1 > 0$ e $a_2 = 0$
- $a_1 < 0$ e $a_2 = 0$
- $a_1 = 0$ e $a_2 > 0$
- $a_1 = 0$ e $a_2 < 0$
- $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$
- $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$
- $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$
- $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$

Suponhamos $\lambda > 0$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

Neste caso, os pontos $P = (a_1, a_2)$ e $Q = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ estão no primeiro quadrante do plano. Logo P e Q estão no mesmo semi-plano determinado pela perpendicular à reta que passa por O, P e Q. Isto é, OP e OQ têm o mesmo sentido.

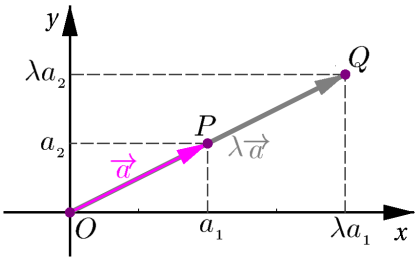


Fig. 24: Caso $\lambda > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Os outros casos são tratados de maneira similar. Faça-os você mesmo! □

Exemplo 5 *Sejam $A = (0,1)$ e $B = (1,0)$. Determinemos os representantes CD, CD' e CD'' dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1,1)$.*

Solução: *Temos que*

$$\overrightarrow{AB} = (1-0, 0, -1) = (1,-1)\,,\ -2\overrightarrow{AB} = (-2\cdot 1, -2\cdot(-1)) = (-2,2)\,,$$
$$2\overrightarrow{AB} = (2\cdot 1, 2\cdot(-1)) = (2,-2)\,,\ \textit{e}\ C = (1,1).$$

E os pontos buscados $D = (d_1, d_2)$, $D' = (d_1', d_2')$ e $D'' = (d_1'', d_2'')$, devem satisfazer as seguintes relações (veja a Proposição 3, da Aula 1):

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = -1 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1' - 1 = -2 \\ d_2' - 1 = 2 \end{cases};$$

e

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1'' - 1 = 2 \\ d_2'' - 1 = -2\,. \end{cases}$$

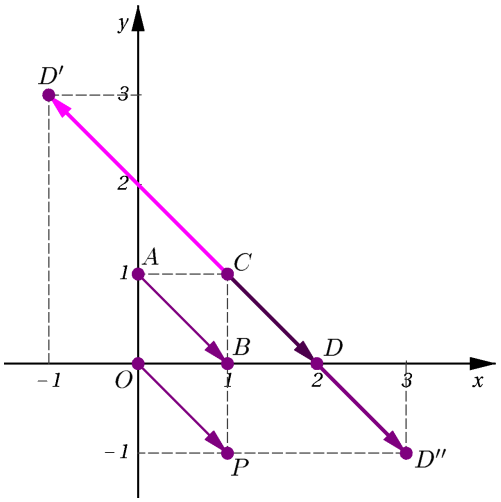


Fig. 25: Exemplo 5.

Isto é, $D = (2,0)$, $D' = (-1,3)$ e $D'' = (3,-1)$.

Na Figura 25 ilustramos os segmentos orientados AB, CD, CD' e CD'', assim como o segmento OP representante na origem do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Propriedades da multiplicação de escalares por vetores.

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores do plano e sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. *A multiplicação de escalares por vetores é associativa. Isto é,*

$$\boxed{\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}}$$

De fato, se $\vec{a} = (a_1, a_2)$, com respeito a um sistema de coordenadas no plano, temos:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) &= \lambda \cdot (\mu a_1, \mu a_2) \\ &= (\lambda(\mu a_1), \mu(\lambda a_2)) \\ &= ((\lambda\mu)a_1, (\lambda\mu)a_2) \\ &= (\lambda\mu)\vec{a}. \end{aligned}$$

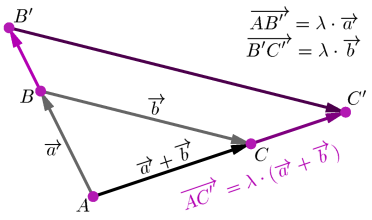


Fig. 26: Distributividade.

2. *A multiplicação de escalares por vetores satisfaz as propriedades distributivas:*

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} &= \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} \end{aligned}$$

A primeira destas propriedades, ilustrada na Figura 26, se verifica da seguinte maneira: se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$, então:

$$\begin{aligned} \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (\lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2)) \\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2) + (\lambda b_1, \lambda b_2) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}\,. \end{aligned}$$

Faça você mesmo a verificação da outra propriedade distributiva usando coordenadas e interprete geometricamente o seu significado.

3. *O número $1 \in \mathbb{R}$ é o elemento neutro da multiplicação de escalares por vetores*:

$$1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$$

De fato, se $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, então $1 \cdot \overrightarrow{a} = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) = (a_1, a_2) = \overrightarrow{a}$.

Exemplo 6

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, determine

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,, \qquad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\,, \qquad \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\,.$$

Solução: *Temos*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= 2(1, -1) + (3, 1) = (2(1), 2(-1)) + (3, 1) \\ &= (2, -2) + (3, 1) = (2 + 3, -2 + 1) \\ &= (5, -1)\,. \\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} &= (1, -1) + 2(3, 1) = (1, -1) + (2(3), 2(1)) \\ &= (1, -1) + (6, 2) = (1 + 6, -1 + 2) \\ &= (7, 1)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} &= \frac{1}{2}(7, 1) - (5, -1) \\ &= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5, -1) \\ &= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

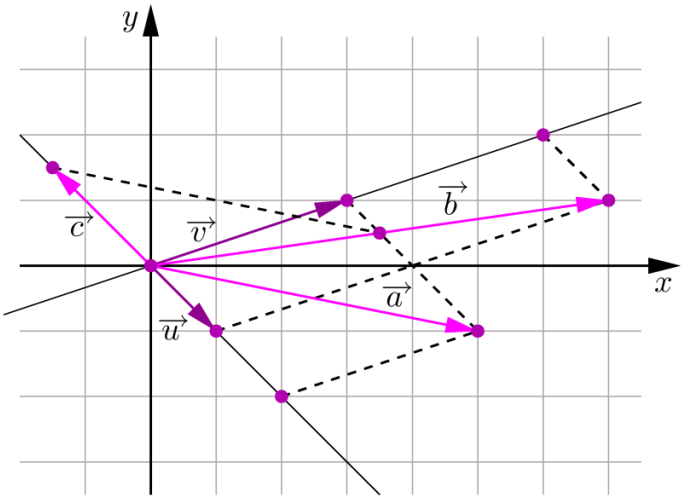


Fig. 27: Exemplo 6.

Vejamos agora como usar a linguagem vetorial para resolver alguns problemas geométricos simples.

Exemplo 7 *Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer determinam um paralelogramo.*

Solução: *De fato, seja $ABCD$ um quadrilátero (Figura 28). Sejam X o ponto médio do lado AB; Y o ponto médio do lado BC; W o ponto médio do lado CD e Z o ponto médio do lado DA.*

Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo. Para tal, basta mostrar que $XY \equiv ZW$, isto é, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZW}$. Temos:

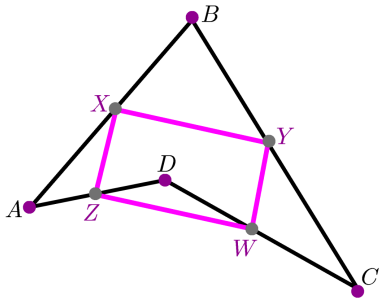


Fig. 28: Exemplo 7.

X ponto médio de $AB \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

Y ponto médio de $BC \Rightarrow \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{YC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

W ponto médio de $DC \Rightarrow \overrightarrow{DW} = \overrightarrow{WC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,

Z ponto médio de $AD \Rightarrow \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{ZD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Logo,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Similarmente,

$$\overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{ZD} + \overrightarrow{DW} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Portanto, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}AC = \overrightarrow{ZW}$, como queríamos.

Exemplo 8 **O baricentro de um triângulo:** *Sejam A, B e C pontos não-colineares do plano e O um ponto qualquer do plano. Definimos o baricentro do triângulo ABC como sendo o ponto G, tal que:*

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})} \qquad (1)$$

Mostraremos que o ponto G independe do ponto O, isto é, dado outro ponto O' do plano, temos:

$$\overrightarrow{O'G} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C})\,.$$

Solução: *De fato, se O' é outro ponto do plano:*

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} \quad , \quad \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}\,.$$

Logo,

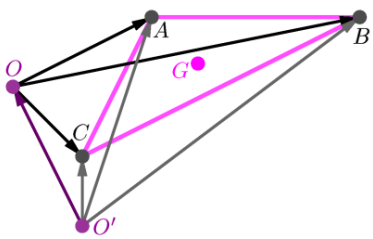


Fig. 29: O baricentro não depende da escolha do ponto O.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'G} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} \\
&= \overrightarrow{O'O} + \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
&= \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}) \\
&= \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}).
\end{aligned}$$

Assim, o baricentro G do triângulo ABC depende apenas dos vértices A, B e C.

Mais ainda, como a identidade (1) é válida para todo ponto O do plano, podemos substituir O pelo próprio ponto G.

Nesse caso, como $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GG} = \overrightarrow{0}$, segue, da identidade (1), que:

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}} \qquad (2)$$

Exemplo 9 **O baricentro e as medianas:**

As medianas do triângulo ABC são os segmentos que vão de cada um dos vértices até o ponto médio do lado oposto.

Na Figura 30, mostramos o triângulo ABC e suas medianas AX, BY e CZ.

Neste exemplo, verificamos que:

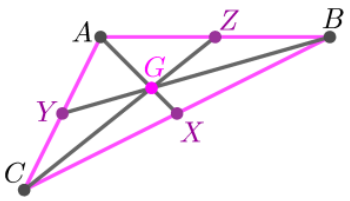


Fig. 30: O baricentro G é a intersecção das medianas do triângulo.

As medianas do triângulo ABC se intersectam no baricentro G.

Solução: *Para isto, basta mostrar que o baricentro G, caracterizado pela identidade (2), pertence às três medianas AX, BY e CZ do triângulo ABC.*

Verifiquemos que o baricentro G pertence à mediana AX. De forma similar você poderá mostrar que G pertence às medianas BY e CZ.

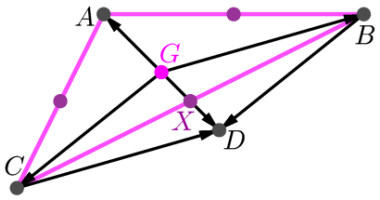


Fig. 31: $2\overrightarrow{GX} = \overrightarrow{GD}$.

Seja D o ponto, tal que $GBDC$ é um paralelogramo. Desta forma,

- $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$,
- *BC e GD, as diagonais do paralelogramo $GBDC$, cortam-se ao meio no ponto X (ponto médio do segmento BC).*

Como:

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GX} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} ,$$

os pontos G, A, X são colineares e G pertence à mediana AX, pois GA e GX têm sentidos opostos.

Portanto, as três medianas se intersectam no baricentro G.

Exemplo 10 *Neste exemplo, usaremos as operações com vetores, para mostrar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.*

Solução: *Seja $ABDC$ um paralelogramo, veja a Figura 32. Como um paralelogramo tem lados opostos paralelos e de igual comprimento, então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

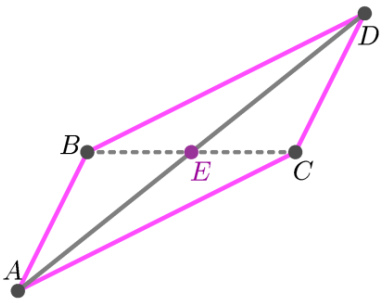


Fig. 32: Paralelogramo $ADBC$.

Denotemos E o ponto médio da diagonal AD. Isto significa que

$$|AE| = |ED| = \tfrac{1}{2}|AD|.$$

Além disso, os segmentos orientados AE, ED e AD têm mesmo sentido, portanto:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} . \qquad (3)$$

Subdivisão baricêntrica. Em Computação Gráfica é freqüente a modelagem de superfícies das mais diversas formas. Embora não pareça, as superfícies que visualizamos na tela de um computador, na televisão, no cinema ou num *videogame* são formadas por pequenos triângulos. Quanto menor o tamanho desses triângulos, mais lisa é a aparência da superfície. Assim, após feita uma primeira aproximação da superfície por meio de triângulos, são realizados vários refinamentos de modo a diminuir o tamanho dos triângulos. Uma importante técnica consiste em subdividir cada triângulo em seis triângulos acrescentando os pontos médios dos lados e os baricentros ajustados à forma da superfície. Na Figura 30 vemos o triângulo ABC dividido nos triângulos AGZ, ZGB, BGX, XGC, CGY e YGA. Esta subdivisão é a chamada *subdivisão baricêntrica* do triângulo ABC.

Devemos mostrar que E pertence à diagonal, isto é que B, E, C são colineares, e mostrar que E é o ponto médio BC . Logo basta chegarmos à relação $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Da definição da adição de vetores temos as igualdades:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}. \tag{5}$$

Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \tag{6}$$

Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA}$, podemos substituir essas relações em (5) e obter:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BA},$$

logo,

$$\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$

Substituindo essa relação em (6), concluímos:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

mostrando o afirmado.

Observação.

Você pode provar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio usando congruência de triângulos.

Resumo

Nesta aula definimos as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares. Analisamos as propriedades dessas operações e usamos a linguagem vetorial para resolver alguns problemas geométricos.

Exercícios

1. Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$, $E = (3, -2)$ e $F = (-4, -3)$ no plano cartesiano e efetue os seguintes cálculos:

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b. $2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$.

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$.

d. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$.

e. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

f. $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{ED} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DC})$.

2. Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, pontos do plano. Mostre que:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_1} = \overrightarrow{0} .$$

3. Sejam A, B e C pontos colineares no plano. Mostre que existe um escalar t, tal que $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$. Além disso, $t > 0$ quando AB e AC têm o mesmo sentido e $t < 0$ quando AB e AC têm sentidos opostos.

4. Sejam $A = (-1, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, 2)$ e $C = (2, 1)$.

a. Determine o baricentro do triângulo ABC usando a identidade (1).

b. Determine os pontos médios dos lados do triângulo ABC e mostre que a soma dos vetores representados pelas medianas do triângulo é igual a $\overrightarrow{0}$. Esta propriedade é válida em qualquer outro triângulo?

5. Determine os vértices B e C do triângulo ABC, sabendo que $A = (1, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 4)$ e que a origem é o seu baricentro.

6. Seja ABC um triângulo no plano e seja G o seu baricentro. Mostre que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AX} \quad , \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BY} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CZ} .$$

onde X, Y e Z são os pontos médios dos lados BC, AC e AB respectivamente.

7. Sejam $P = (1, 2)$, $Q = (-2, -2)$ e r a reta determinada por esses pontos.

Determine as coordenadas dos pontos que estão sobre r e cuja distância ao ponto Q é λ vezes a distância ao ponto P, onde $\lambda > 0$.

Indicação: Seja $R = (x, y)$ o ponto desejado. A condição do problema equivale a $|RQ| = \lambda |RP|$. Como os pontos P, Q e R são colineares, $\overrightarrow{RQ} = \pm\lambda\overrightarrow{RP}$.

8. Seja n um número natural maior ou igual a 3 e sejam $A_1\,,\ A_2\,,\ A_3\,,\ \ldots\,,\ A_n$ e O pontos do plano. Considere a região poligonal cujos lados são os n segmentos $A_1A_2\,,\ A_2A_3\,,\ \ldots\,,\ A_nA_1$. O *centro de massa* ou *centro de gravidade* da região poligonal é o ponto G dado por:

$$\overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots \overrightarrow{OA_n})\,.$$

Observe que, se $n = 3$, a região poligonal é um triângulo e o centro de gravidade é o seu baricentro.

As seguintes propriedades são válidas qualquer que seja $n \geq 3$. No entanto, suponha que $n = 5$.

a. Mostre que o centro de gravidade G não depende da escolha do ponto O.

Indicação: Proceda como no exemplo 6.

b. Mostre que o centro de gravidade satisfaz uma identidade similar à identidade (2) mostrada no exemplo 6.

Para saber mais...
Uma lâmina poligonal feita de um material homogêneo (isto é, a massa é distribuída uniformemente sobre a superfície) pode ser posta horizontalmente em equilíbrio sobre um prego, como mostramos na Figura 33. Basta colocar o centro de gravidade da superfície sobre o prego! Por esta razão, o centro de gravidade é também chamado *ponto de equilíbrio* da superfície. Tente fazer uma experiência que confirme este fato.

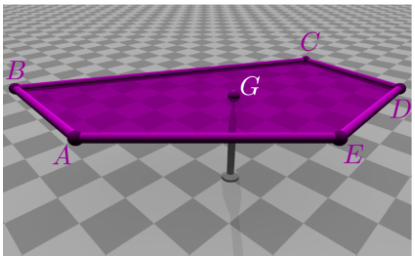


Fig. 33: Centro de gravidade.

Auto-avaliação

Se você compreendeu bem as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares e sabe efetuar essas operações usando coordenadas com respeito a um sistema cartesiano, então resolveu os exercícios de 1 a 7 sem dificuldade. O exercício 8 reafirma e generaliza os conceitos relativos à noção de baricentro. Caso ainda tenha dúvidas, revise o conteúdo da aula. Não esqueça que há tutores sempre dispostos a orientá-lo.

A Reta e a Dependência Linear

Objetivos

- Determinar a equação paramétrica de uma reta no plano.
- Compreender o paralelismo entre retas e vetores.
- Entender a noção de dependência linear entre dois vetores do plano.
- Determinar a equação cartesiana de uma reta a partir de sua equação paramétrica e vice-versa.
- Determinar a interseção de duas retas não paralelas no plano.

Começamos determinando, em termos da linguagem vetorial, as condições que um ponto P deve satisfazer para pertencer à reta r.

Se A e B são pontos distintos no plano, sabemos que há uma única reta r que os contém.

Segundo a definição da multiplicação de um vetor por um escalar, um ponto P pertence a r se, e somente se (Figura 34),

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}} \tag{7}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$, chamado *parâmetro* do ponto P. A equação (7) é uma *equação vetorial paramétrica* da reta r. Dizemos, também, que r *tem direção* $\overrightarrow{AB}$ e:

$$\boxed{r = \left\{ P \,|\, \overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} \,,\ \ t \in \mathbb{R} \right\}}$$

Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$, a equação (7) é dada por:

$$(x - a_1, y - a_2) = (t(b_1 - a_1), t(b_2 - a_2)) \,,$$

que equivale ao par de equações:

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}} \tag{8}$$

chamadas *equações paramétricas* da reta r.

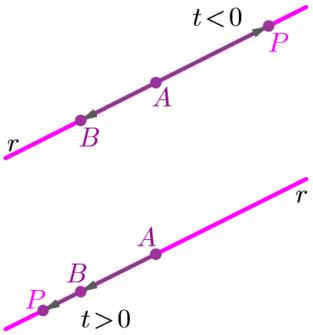


Fig. 34: Reta r e $A, B \in r$. Os segmentos AB e AP têm o mesmo sentido se $t > 0$ e sentidos contrários se $t < 0$.

Notação.
Em (8) colocamos o nome r da reta à frente e a especificação do parâmetro após as equações. Esta é uma prática comum na literatura que adotaremos.

Nas equações (7) e (8) devemos observar que $t > 0$ quando AP e AB têm o mesmo sentido e $t < 0$ quando AP e AB têm sentidos opostos (veja o Exercício 3, da Aula 2).

Exemplo 11 *Determinar a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (1, 2)$.*

Solução: *Como $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, 2 - 3) = (-1, -1)$, temos*

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff (x, y) = (2, 3) + t(-1, -1), \quad t \in \mathbb{R} \\ &\iff (x, y) = (2 - t, 3 - t), \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 12 *Sejam $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 2)$ e $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Verifiquemos que os pontos A, B, C e D são colineares e determinemos as equações paramétricas da reta r que os contém em termos de A e B e em termos de C e D.*

Solução: *Para verificarmos que os pontos dados são colineares, devemos determinar números c e d, tais que $\overrightarrow{AC} = c \cdot \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} = d \cdot \overrightarrow{AB}$.*

Em coordenadas, temos:

$$\overrightarrow{AC} = c \cdot \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 1 - (-1) = c(0 - (-1)) \\ 2 - 0 = c(1 - 0) \end{cases} \iff c = 2\,,$$

e

$$\overrightarrow{AD} = d \cdot \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} - (-1) = d(0 - (-1)) \\ \frac{1}{2} - 0 = d(1 - 0) \end{cases} \iff d = \tfrac{1}{2}.$$

Portanto, a reta r que passa por A e B também passa por C e D.

A equação vetorial paramétrica de r em termos de A e B é:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

onde $P = (x, y) \in r$ e t é o seu parâmetro. Em coordenadas, temos:

$$(x - (-1), y - 0) = \overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} = (t(0 - (-1)), t(1 - 0))\,,$$

Isto é, as equações paramétricas da reta r, em termos de A e B, são:

$$r : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

Como $C = (1,2) \in r$ e $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in r$, a equação de r é, também:

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CD}, \quad s \in \mathbb{R},$$

onde $P = (x,y) \in r$ e s é o parâmetro de P na reta.

Em coordenadas, temos:

$$(x-1, y-2) = \left(s\left(-\tfrac{1}{2} - 1\right), s\left(\tfrac{1}{2} - 2\right)\right).$$

Isto é, as equações paramétricas de r, em termos de C e D, são:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + 1 \\ y = -\frac{3}{2}s + 2 \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}. \qquad (10)$$

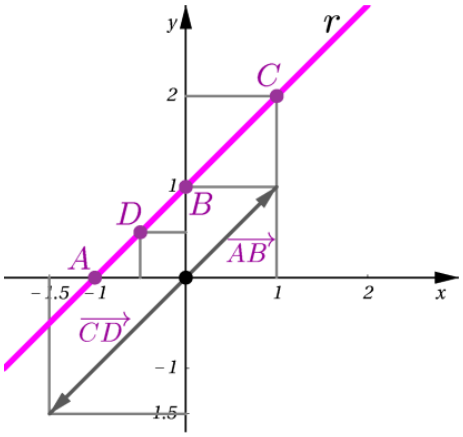


Fig. 35: Reta r e vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ na origem.

Importante!
Através do Exemplo 12 vemos que as equações paramétricas e os vetores direção de uma reta não são determinados de maneira única, e que o parâmetro de um ponto $P \in r$ depende da equação paramétrica considerada.

Observe que o ponto $P = (1,2)$ pertence à reta r. Em relação às equações paramétricas (9), o parâmetro do ponto P é $t = 2$. No entanto, com respeito às equações (10), o parâmetro do ponto P é $s = 0$.

Definição 6 *Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano. Se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{w}$.*

Observação.

- *O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer outro vetor. No entanto, nenhum vetor não-nulo é múltiplo do vetor $\overrightarrow{0}$.*

  De fato, se $\overrightarrow{v}$ é um vetor qualquer do plano, temos $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{v}$.

  Como $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, nenhum vetor não-nulo pode ser múltiplo de $\overrightarrow{0}$.

- *Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não-nulos, então $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{w}$ se, e somente se, $\overrightarrow{w}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.*

  Com efeito, se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$, então $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

- *Sejam A,B e C pontos distintos do plano. Então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ se, e somente se, A, B e C são colineares.*

  Note que $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AC}$ se, e somente se, existe um escalar $\lambda \neq 0$, tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, isto é, o ponto B satisfaz a equação vetorial paramétrica da reta que passa por A e C (λ é o parâmetro do ponto B).

Exemplo 13 *Consideremos os vetores* $\overrightarrow{u} = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,1)$ *e* $\overrightarrow{w} = (2,-1)$. *Mostremos que* $\overrightarrow{u}$ *não é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$, *mas sim de* $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

Solução: *De fato, se* $\overrightarrow{u}$ *fosse múltiplo de* $\overrightarrow{v}$ *teríamos* $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, *para algum escalar* λ, *isto é,* $(1,0) = \lambda(1,1) = (\lambda,\lambda)$.

Logo, teríamos $\lambda = 1$ *e* $\lambda = 0$, *o que é uma contradição.*

Portanto, $\overrightarrow{u}$ *não pode ser múltiplo de* $\overrightarrow{v}$.

Seja $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (1,1) + (2,-1) = (3,0)$.

Como $\overrightarrow{u} = (1,0) = \frac{1}{3}(3,0) = \frac{1}{3}\overrightarrow{u_1}$, *temos que* $\overrightarrow{u}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{u_1}$.

Definição 7 *Dizemos que um vetor não-nulo* $\overrightarrow{v}$ *é paralelo à reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \parallel r$, *se, quaisquer que sejam* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$.

Observação.

O vetor $\overrightarrow{v}$ *é paralelo à reta* r *se, e só se,* $\overrightarrow{v}$ *determina a direção de* r.

De fato, basta observar que se r tem equação $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, onde t é o parâmetro de P e $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{v}$ é também equação de r, onde $s = t\lambda$ é o parâmetro de P.

Seja r a reta que contém $A = (a_1, a_2)$ e é paralela a $\overrightarrow{v} = (a,b)$.

Fazendo uso da Proposição 2, da Aula 1, existe um único ponto $B \in r$, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

Logo, $P = (x,y) \in r$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

Em coordenadas, esta equação equivale a

$$(x - a_1, y - a_2) = (t \cdot a, t \cdot b)\,,\ t \in \mathbb{R},$$

ou seja, as *equações paramétricas* da reta r são dadas por:

$$r : \begin{cases} x = a_1 + t\,a \\ y = a_2 + t\,b \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Observação.

A partir das equações paramétricas (11) de uma reta r identificamos as coordenadas de um ponto $A \in r$ e de um vetor direção $\overrightarrow{v}$.

Mudança de parâmetro.
Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não-nulos e $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{v}$, então:

$$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{w}\,,$$

e

$$\overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{v}\,,$$

são equações da mesma reta. Na primeira, t é o parâmetro do ponto P e, na segunda, $s = t\lambda$ é o parâmetro do mesmo ponto. A segunda equação é dita uma *reparametrização* da primeira, sendo $s = t\lambda$ a *mudança de parâmetro*.

Andando nas retas.
As equações paramétricas (11) descrevem a reta r como uma trajetória retilínea percorrida com velocidade $\overrightarrow{v}$, partindo do ponto A. O parâmetro t de um ponto P mede o tempo necessário para chegar até esse ponto. Observe que a mesma reta pode ser percorrida de distintas maneiras.

Para isto, olhamos o lado direito das equações: o coeficiente de t na expressão de x é a primeira coordenada de $\overrightarrow{v}$, o coeficiente de t na expressão de y é a segunda coordenada de $\overrightarrow{v}$, a primeira coordenada de A é o termo a_1 na expressão de x que independe de t e, a segunda coordenada de A é o termo a_2 na expressão de y que independe de t.

Exemplo 14 *Determinar as equações paramétricas da reta r que contém o ponto $A = (1, 0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 1)$.*

Solução: *Basta substituir as coordenadas $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ de A e $a = -1$, $b = 1$ de $\overrightarrow{v}$, na equação (11):*

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \cdot (-1) \\ y = 0 + t \cdot 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

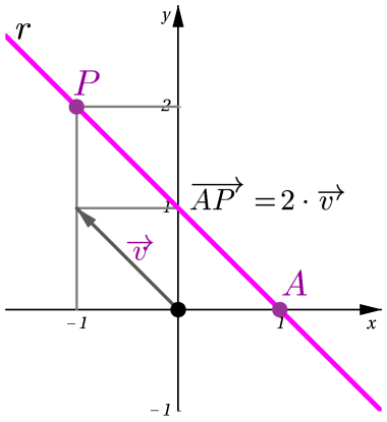


Fig. 36: Exemplo 14.

Na figura 36, vemos a reta r do Exemplo 14 e seu vetor direção $\overrightarrow{v}$ representado por um segmento na origem.

Observação.

A equação da reta r que contém o ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ é:

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

como $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, esta equação escreve-se na forma:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

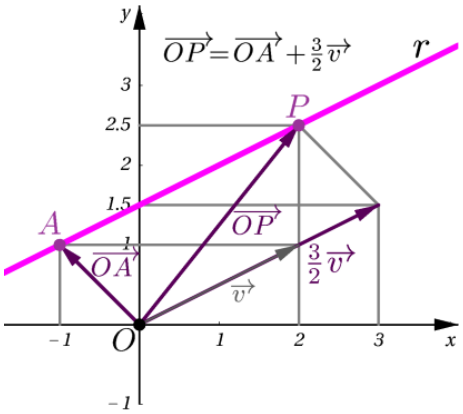


Fig. 37: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{v}$.

isto é, a equação da reta r é dada por (veja a Figura 27):

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{v}, \quad t \in \mathbb{R}} \qquad (12)$$

Como as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são as coordenadas do ponto P e as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ são as coordenadas do ponto A, a equação vetorial (12) corresponde às equações paramétricas (11).

A equação cartesiana e as equações paramétricas de uma reta.

Equação cartesiana da reta.
Seja $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ a equação cartesiana de uma reta r no plano.
- Se $\beta = 0$, r é a reta vertical $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$.
- Se $\beta \neq 0$, r é a reta de inclinação (ou coeficiente angular) $-\frac{\alpha}{\beta}$, passando pelo ponto $(0, -\frac{\gamma}{\beta})$.

No Módulo 2 do Pré-Cálculo, você estudou a reta a partir de sua *equação cartesiana*:

$$\boxed{\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0} \tag{13}$$

Vejamos, agora, como determinar as equações paramétricas da reta a partir de sua equação cartesiana e vice-versa.

Seja r a reta com equação cartesiana (13). Para obtermos as coordenadas de um ponto da reta r, atribuímos um valor à variável x e calculamos o valor da variável y usando a equação (13), ou atribuímos um valor a y e calculamos x a partir da equação (13).

Se a reta r não é vertical ($\beta \neq 0$), tomamos dois valores distintos x_1 e x_2 para x e usamos a equação (13), para calcular os valores correspondentes y_1 e y_2 de y. Com isto, determinamos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pertencentes à reta r. Conhecendo dois pontos de r, podemos escrever as suas equações paramétricas como fizemos anteriormente.

Se r é uma reta vertical ($\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$), a sua equação é $\alpha x + \gamma = 0$, isto é, $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$. Logo, se y_1 e y_2 são quaisquer dois números reais distintos, $A = (-\frac{\gamma}{\alpha}, y_1)$ e $B = (-\frac{\gamma}{\alpha}, y_2)$ pertencem à reta r.

Exemplo 15 *Determinemos equações paramétricas da reta r dada pela equação cartesiana:*

$$r \,:\, 2x - 3y + 12 = 0\,. \tag{14}$$

Solução: *Seja $x = 0$ na equação (14), temos $-3y + 12 = 0$, ou seja, $y = 4$. Logo, $A = (0, 4) \in r$.*

Similarmente, seja $y = 0$ na equação (14), temos $2x + 12 = 0$, ou seja, $x = -6$ e, portanto, $B = (-6, 0) \in r$.

Substituindo as coordenadas de A e B nas equações paramétricas (8), obtemos as equações paramétricas de r:

$$r : \begin{cases} x = 0 + t(-6 - 0) \\ y = 4 + t(0 - 4) \end{cases}, t \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{isto é,} \quad r : \begin{cases} x = -6t \\ y = 4 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Tomando pontos A e B distintos aos considerados acima, você pode obter outras equações paramétricas da mesma reta r.

Reciprocamente, suponhamos conhecidas as equações paramétricas da reta r:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad (15)$$

Note que, se $a = 0$, a reta r é vertical e a sua equação cartesiana é $x = x_0$. Se $a \neq 0$, a reta r não é vertical e, neste caso, obtemos a equação cartesiana de r colocando em evidência o parâmetro t nas equações (15):

$$t = \tfrac{1}{a}(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad t = \tfrac{1}{b}(y - y_0),$$

e, igualando estas expressões, obtemos $\frac{1}{a}(x - x_0) = \frac{1}{b}(y - y_0)$, ou seja:

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0,$$

que corresponde à equação (13), com $\alpha = b$, $\beta = -a$ e $\gamma = -bx_0 + ay_0$.

Exemplo 16 *Determinemos a equação cartesiana da reta r cujas equações paramétricas são:*

$$r: \begin{cases} x = -6t \\ y = 4 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solução: *Colocando em evidência o parâmetro t destas equações:*

$$t = -\frac{x}{6} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{4 - y}{4},$$

e, igualando estas expressões, $-\frac{x}{6} = \frac{4-y}{4}$, obtemos que a equação cartesiana de r é $2x - 3y + 12 = 0$.

Posição relativa de duas retas no plano.

Sabemos que duas retas r_1 e r_2 no plano podem ser paralelas, coincidentes ou concorrentes. Isto é, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, $r_1 = r_2$ ou $r_1 \cap r_2$ consiste de um único ponto. Conhecendo as equações cartesiana, vetorial ou paramétricas de duas retas no plano, vejamos como analisar a sua posição relativa.

Definição 8 *Dizemos que dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do plano são* linearmente dependentes *(ou abreviadamente, LD), se $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{w}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.*

Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são LD, isto é, $\overrightarrow{v}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{w}$ nem $\overrightarrow{w}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$, dizemos que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são linearmente independentes *(LI).*

Convenção.
Em todo o seguinte, usaremos a abreviação **LI** para significar *linearmente independente(s)* e a abreviação **LD** para significar *linearmente dependente(s)*.

Exemplo 17 **a.** *Como o vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor $\overrightarrow{v}$, os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{0}$ são LD.*

b. *Se $\overrightarrow{v} = (2,3)$, $\overrightarrow{w_1} = (1, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{w_2} = (4,6)$ e $\overrightarrow{w_3} = (1,1)$, então:*

- *$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w_1}$ são LD, pois $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{w_1}$.*
- *$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w_2}$ são LD, pois $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w_2}$.*
- *$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w_3}$ são LI. De fato. Suponha, por absurdo, que os vetores são LD. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{v} = \lambda w_3$, isto é, $(2,3) = (\lambda, \lambda)$. Igualando as coordenadas, temos $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$, o qual não é possível. Portanto, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w_3}$ são LI .*

Vejamos agora uma importante caracterização da dependência linear.

Determinantes de matrizes. Uma *matriz 2x2* é um arranjo de quatro números reais dispostos ordenadamente na forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A cada matriz associamos um número real chamado o seu *determinante*, que designamos por

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

e definimos da seguinte maneira:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Proposição 6 *Dois vetores $\overrightarrow{v} = (a,b)$ e $\overrightarrow{w} = (a',b')$ são LD se, e somente se,*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b = 0\,.$$

Equivalentemente, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0\,.$

Demonstração. Se $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD, pois $\overrightarrow{w} = 0 \cdot \overrightarrow{v}$ e, também, $ab' - a'b = 0$, pois $a' = b' = 0$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ e que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD, isto é, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Então $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ e:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b = \lambda a'b' - a'\lambda b' = 0\,.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\overrightarrow{w} \neq 0$ e $ab' - a'b = 0$. Devemos determinar $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\overrightarrow{v} = (a,b) = \lambda(a',b') = \lambda\overrightarrow{w}$, isto é, $a = \lambda a'$ e $b = \lambda b'$.

Se $a' = 0$, então $ab' - a'b = ab' = 0$. Como $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, temos $b' \neq 0$. Logo, $a = 0$ e $\lambda = \frac{b}{b'}$.

Se $a' \neq 0$, da igualdade $ab' - a'b = 0$, temos $\frac{ab'}{a'} = b$ e, portanto, $(a,b) = \frac{a}{a'}(a',b')$, isto é, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$, com $\lambda = \frac{a}{a'}$. □

A partir do conceito de dependência linear, vamos analisar a posição relativa de duas retas no plano mediante exemplos concretos que ilustram as técnicas gerais.

Exemplo 18 *Determinemos a posição relativa das retas r_1 e r_2 no plano, onde:*

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \textit{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -1 - s \\ y = 1 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Solução: *A reta r_1 reta passa pelo ponto $A_1 = (3, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (-2, 3)$. Similarmente, r_2 contém o ponto $A_2 = (-1, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (-1, 1)$.*

Como $\det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 = 1 \neq 0$*, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são LI. Logo, r_1 e r_2 são concorrentes. Podemos, portanto, determinar o ponto P do plano, tal que $r_1 \cap r_2 = \{P\}$.*

Igualando as coordenadas respectivas nas equações de r_1 e r_2, obtemos:

$$\begin{matrix} 3 - 2t & = -1 - s \\ 1 + 3t & = 1 + s \end{matrix}, \qquad \textit{isto é,} \qquad \begin{matrix} -2t + s & = -4 \\ 3t - s & = 0\,. \end{matrix}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $t = -4$ e $s = -12$. Substituindo o valor de t nas equações de r_1, ou o valor de s nas equações de r_2, obtemos $x = 11$ e $y = -11$. Portanto, as retas se intersectam no ponto $P = (11, -11)$.

Exemplo 19 *Determinemos a posição relativa das retas r_1 e r_2 no plano, onde:*

$$r_1 : x - 3y = 1 \qquad \textit{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solução: *A reta r_1 passa pelos pontos $A = (0, -\frac{1}{3})$ e $B = (1, 0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (1 - 0, 0 - (-\frac{1}{3})) = (1, \frac{1}{3})$. A reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (-1, 1)$.*

Como:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - \tfrac{1}{3} \cdot (-1) = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} \neq 0\,,$$

os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são LI. Logo, r_1 e r_2 são concorrentes.

Paralelismo.
Duas retas no plano que possuem vetores direção LD são paralelas se não têm pontos em comum e são coincidentes se possuem um ponto em comum.
Retas com vetores direção LI são, necessariamente, concorrentes.

Seja P o ponto de interseção das retas r_1 e r_2.

Então $P = (x, y) = (-1 - t, 1 + t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e:

$$1 = x - 3y = -1 - t - 3 - 3t\,.$$

Logo, $t = -\frac{5}{4}$.

Substituindo o valor obtido para t nas equações de r_2, temos: $x = \frac{1}{4}$ e $y = -\frac{1}{4}$.

Portanto, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, onde $P = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

Exemplo 20 *Determinemos a posição relativa das retas r_1 e r_2 no plano, onde:*

$$r_1 : \begin{cases} x = 5 - \sqrt{5}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \textit{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Solução: *A reta r_1 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (-\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ e a reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (2, -\frac{\sqrt{5}}{5})$.*

Como $\det \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \cdot (-\frac{\sqrt{5}}{5}) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 - 1 = 0$, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são LD. Logo, as retas r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes.

Seja $t = 0$ nas equações de r_1, vemos que $P = (5, \frac{1}{2}) \in r_1$.

Vamos verificar se $P \in r_2$. Caso afirmativo, as retas r_1 e r_2 não serão paralelas e sim coincidentes.

Procuremos $s \in \mathbb{R}$, tal que $5 = 2s$ e $\frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}s$. Da primeira identidade temos $s = \frac{5}{2}$. Substituímos este valor na segunda identidade para verificar se há compatibilidade: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$.

Logo, $s = \frac{5}{2}$ é o parâmetro do ponto $P = (5, \frac{1}{2}) \in r_2$.

Assim, r_1 e r_2 têm direções, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, paralelas e um ponto em comum sendo, portanto, coincidentes ($r_1 = r_2$).

Finalizamos esta aula com outra importante aplicação da noção de dependência linear.

Proposição 7 *Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores LI. Se $\overrightarrow{u}$ é um vetor arbitrário do plano, então existem números reais únicos λ e μ, tais que:*

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}\,. \tag{16}$$

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{v} = (a, b)$, $\overrightarrow{w} = (a', b')$ e $\overrightarrow{u} = (c_1, c_2)$. Procuramos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(c_1, c_2) = \lambda(a, b) + \mu(a', b'), \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} a\,\lambda + a'\,\mu &= c_1 \\ b\,\lambda + b'\,\mu &= c_2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema para λ e μ, obtemos os números procurados:

$$\lambda = \frac{c_1\,b' - c_2\,a'}{a\,b' - b\,a'}, \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{c_2\,a - c_1\,b}{a\,b' - b\,a'}.$$

Note que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = a\,b' - b\,a' \neq 0$, pois $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI. □

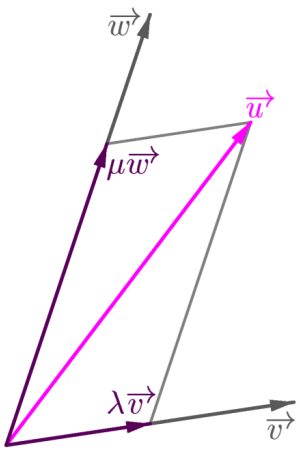


Fig. 38: $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$.

Nas condições da Proposição 7, dizemos que $\overrightarrow{u}$ é *combinação linear* dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Mostramos então, que todo vetor do plano se escreve, de maneira única, como combinação linear de dois vetores LI. Ou seja, *dois vetores LI geram todo o plano.* Por essa razão, dizemos, também, que o plano é um conjunto geométrico de *dimensão 2*.

Exemplo 21 *Verifiquemos que os vetores $\overrightarrow{v} = (1, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (-1, 2)$ são LI. Vejamos, também, como escrever o vetor $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ como combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.*

Solução: *Como* $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$, *os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.*

Devemos achar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tais que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$. Em coordenadas, esta equação equivale ao seguinte sistema nas variáveis λ e μ:

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda - 1 \cdot \mu = 3 \\ 1 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu = -1 \end{cases},$$

cujas soluções são $\lambda = \frac{3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)}{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} = \frac{5}{3}$ *e* $\mu = \frac{1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} = -\frac{4}{3}$.

Exemplo 22 *Seja $\mathcal{P}$ um paralelogramo $ABDC$ cujas diagonais estão sobre as retas:*

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = s + 2 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se $A = (1,1)$ e $AB \subset r$, onde r é uma reta paralela ao vetor $v = (2,1)$, determine os vértices B, C e D.

Solução: *Tomando $t = 0$ nas equações paramétricas de r_1, vemos que $A \in r_1$. Assim, r_1 é a reta que contém a diagonal AD.*

O ponto médio M das diagonais AD e BC é o ponto de interseção das retas r_1 e r_2. Para determinarmos o ponto M, procuramos os valores de s e t de modo que:

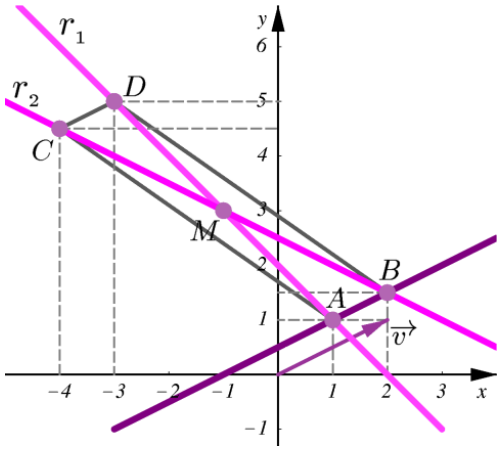


Fig. 39: Paralelogramo $\mathcal{P}$.

$$M = (t+1, -t+1) = (-2s+1, s+2)\,,$$

ou seja, $\begin{cases} t+1 = -2s+1 \\ -t+1 = s+2 \end{cases}$ *. Somando as equações, obtemos* $2 = -s+3$.

Logo, $s = 1$ *e* $M = (-1,3)$.

Seja $D = (d_1, d_2)$. *Como* $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM}$, *temos*

$$(d_1 - (-1), d_2 - 3) = ((-1) - 1, 3 - 1),$$

ou seja, $(d_1 + 1, d_2 - 3) = (-2, 2)$.

Portanto, $d_1 = -3$, $d_2 = 5$ *e* $D = (-3, 5)$.

Seja $B = (b_1, b_2)$. *Como* $AB \subset r$ *e* $r \parallel (2,1)$, *temos:* $\begin{cases} b_1 = 1 + 2\lambda \\ b_2 = 1 + \lambda \end{cases}$ *, para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Além disso, como $B \in r_2$, *temos* $\begin{cases} b_1 = -2s + 1 \\ b_2 = s + 2 \end{cases}$ *, para algum* $s \in \mathbb{R}$.

Logo, $\begin{cases} 1 + 2\lambda = -2s + 1 \\ 1 + \lambda = s + 2 \end{cases}$ *. Resolvendo este sistema, obtemos* $\lambda = \frac{1}{2}$.

Portanto $B = (1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$.

Finalmente, seja $C = (c_1, c_2)$.

Sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *temos* $(2 - 1, \frac{3}{2} - 1) = (-3 - c_1, 5 - c_2)$.

Portanto, $C = (-4, \frac{9}{2})$.

Resumo

Nesta aula vimos como determinar a equação paramétrica de uma reta no plano; abordamos as questões de paralelismo entre retas e vetores; vimos como passar da equação cartesiana de uma reta para as suas equações paramétricas e vice-versa. Estabelecemos a noção de dependência linear entre vetores do plano e aplicamos esses conceitos para determinar a posição relativa de duas retas no plano.

Exercícios

1. Determine as equações paramétricas e um vetor direção da reta r que passa pelos pontos A e B, onde:

a. $A = (-1, -1)$, $B = (2, -\frac{1}{2})$.
b. $A = (2, -\frac{3}{4})$, $B = (\frac{9}{4}, 1)$.
c. $A = (-4, 1)$, $B = (2, 0)$.
d. $A = (1, -1)$, $B = (-3, 1)$.

2. Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto P_0 e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$, onde:

a. $P_0 = (1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -\frac{1}{2})$.
b. $P_0 = (-2, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, \frac{9}{4})$.
c. $P_0 = (-1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{v} = (1, 0)$.
d. $P_0 = (1, -1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1)$.

3. Sejam A , B e O pontos do plano.

a. Mostre que um ponto P pertence ao segmento AB se, e somente se, existe $t \in [0, 1]$, tal que:

$$\overrightarrow{OP} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}. \qquad (17)$$

Observação: Verifique que a equação (17) não depende do ponto O. Portanto, o número t é determinado a partir de A, B e P.

b. Em particular, mostre que o ponto médio do segmento AB é obtido fazendo $t = \frac{1}{2}$ na equação (17).

c. Mostre que a equação (17) é uma equação vetorial paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B, quando consideramos o parâmetro t percorrendo todo o $\mathbb{R}$.

4. Determine a equação cartesiana da reta r, onde:

a. $r: \begin{cases} x = 2 - \frac{t}{2} \\ y = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $r: \begin{cases} x = -4t \\ y = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

5. Determine as equações paramétricas e um vetor paralelo à reta r, onde:

a. $r: 2x + y - 1 = 0\,,$ **b.** $r: x - 5 = 0\,,$

c. $r: 3x + y = 1$ **d.** $r: x - y = 3\,.$

6. Verifique se $\overrightarrow{v} \parallel r$, onde:

a. $\overrightarrow{v} = (-1, 2)\,,\ r\ :\ 2x - 4y + 1 = 0\,,$

b. $\overrightarrow{v} = (1, -\frac{1}{2})\,,\ r\ : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\overrightarrow{v} = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{3})\,,\ r\ : \begin{cases} x = -\frac{1}{5} + t \\ y = \frac{4}{3} - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d. $\overrightarrow{v} = (\frac{3}{5}, 1)\,,\ \overrightarrow{w} = (3, 5)\,,\ r = \{P \,|\, \overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{w},\ t \in \mathbb{R}\}\,.$

7. Determine se as retas r_1 e r_2 são paralelas, coincidentes ou concorrentes, determinando, no último caso, o ponto de interseção:

a. $r_1: 2x + y - 1 = 0\,,\ r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. $r_1: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2: x - 6y = 3\,,$

c. $r_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2: \begin{cases} x = 4 + 4s \\ y = 2 - 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

d. $r_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + \frac{3}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2: \begin{cases} x = 4s \\ y = 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}\,.$

8. Determine se os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI ou LD, onde:

a. $\overrightarrow{v} = (3,4)$, $\overrightarrow{w} = (-7, -\frac{28}{3})$,
b. $\overrightarrow{v} = (1,0)$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$,
c. $\overrightarrow{v} = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{3})$, $\overrightarrow{w} = (2, \frac{8}{15})$,
d. $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\overrightarrow{w} = (1,2)$.

9. Sejam $A = (3,2)$, $B = (-1,1)$, $C = (0,-2)$ pontos do plano.

a. Determine as equações paramétricas e as equações paramétricas das retas que contêm as medianas do triângulo ABC.

b. Determine o baricentro do triângulo ABC, achando o ponto de interseção das três retas do item anterior.

10. Verifique que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI, e escreva $\overrightarrow{u}$ como combinação linear desses vetores, onde:

a. $\overrightarrow{v} = (1,1)$, $\overrightarrow{w} = (1,2)$, $\overrightarrow{u} = (5,6)$,

b. $\overrightarrow{v} = (2,3)$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{5,4}$, $\overrightarrow{u} = (1, \frac{4}{5})$.

11. Sejam $\overrightarrow{v} = (1,2)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ vetores do plano, onde $B = (3,4)$. Determine o ponto A pertencente ao eixo X, de modo que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam LD.

12. Dois lados de um paralelogramo estão sobre as retas

$$r_1 : 8x + 3y = -1 \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e uma de suas diagonais pertence à reta

$$r : 3x + 2y = -3.$$

Ache as coordenadas de seus vértices.

13. Dadas as retas $r_1 : 2x - y = 0$ e $r_2 : 2x + y = 4$ e o ponto $P = (3,0)$, determine a reta que passa por P, intersecta r_1 em A e r_2 em B de tal modo que P seja o ponto médio do segmento AB.

(Sugestão: Escreva as equações paramétricas de r_1 e r_2).

14. Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABDC$ que tem a diagonal AD sobre a reta $r_1 : x - y = 1$, o lado AB sobre a reta $r_2 : 2x - y = 2$ e o lado BD paralelo ao vetor $v = (2,1)$. Determine os vértices A, B, C e D supondo que $|AD| = \sqrt{8}$ e D tem abscissa positiva.

Auto-avaliação

Se você resolveu os exercícios 1 a 3, então assimilou bem as técnicas estabelecidas para determinar as equações paramétricas de uma reta no plano. Os exercícios 4 e 5 avaliam se os métodos para obter as equações paramétricas a partir da equação cartesiana, e vice-versa, foram bem entendidos. Fazendo os exercícios 6 e 7, você verá se existe alguma dificuldade em entender o paralelismo em termos de vetores, e se a noção de dependência linear aplicada ao problema de determinar a posição relativa de duas retas no plano foi compreendida. Faça os exercícios 8, 9 e 10 para avaliar se entendeu bem os conceitos de dependência linear e combinação linear. Os exercícios de 11 a 14 avaliam os seus conhecimentos gerais sobre estas três primeiras aulas. Reveja o Exemplo 19 antes de resolver os exercícios 12, 13 e 14.

Se você entendeu bem os conceitos apresentados na aula, não precisa resolver todos os itens dos exercícios propostos, mas resolva pelo menos dois, para fixar os conceitos. Se tiver dificuldade reveja o conteúdo da aula, discuta com seus colegas ou consulte os tutores para não acumular dúvidas.

Produto Interno

Objetivos

- Definir as noções de ângulo entre dois vetores, a norma de um vetor e a operação de produto interno.
- Compreender as propriedades básicas da norma e do produto interno, assim como a relação entre o produto interno e o conceito de ângulo.
- Aplicar os conceitos de ângulo, da norma e do produto interno em diversas situações geométricas e relacionar a equação da reta com a noção de produto interno.

Nesta aula definiremos outra operação entre vetores, o *produto interno*. Para isso, introduzimos a noção de *ângulo entre dois vetores*.

Convenção.

Sejam O, P e Q pontos do plano e consideremos o ângulo $\widehat{POQ}$. *Convencionamos atribuir o sinal positivo à medida de $\widehat{POQ}$ quando esta for tomada no sentido anti-horário e o sinal negativo quando tomada no sentido horário*. No ângulo $\widehat{POQ}$ (veja a Figura 40) medimos, partindo da semi-reta que contém OP para a semi-reta que contém OQ.

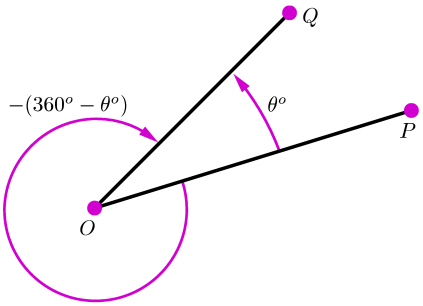


Fig. 40: $\widehat{POQ}$ medido de PO para QO.

Se tomamos o sentido anti-horário obtemos para $\widehat{POQ}$ medida positiva. Se tomarmos o sentido horário, a medida é negativa. Se a primeira medida for igual a θ^o então a segunda é $-(360^o - \theta^o)$.

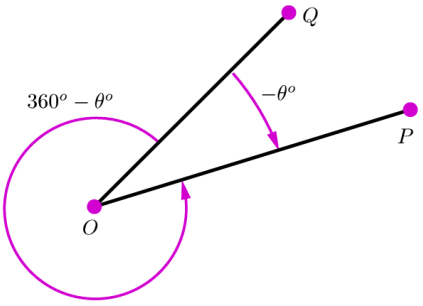


Fig. 41: $\widehat{POQ}$ medido de QO para PO.

Observe que podemos medir o ângulo $\widehat{POQ}$ partindo da semi-reta que contém OQ para a semi-reta que contém OP (veja a Figura 41). Desta forma, no sentido anti-horário a medida do ângulo é $-\theta^o$ e no sentido horário é $(360^o - \theta^o)$.

Sendo que $\cos\theta^o = \cos(360^o - \theta^o) = \cos(-\theta^o) = \cos(-(360^o - \theta^o))$,

Sobre a medida dos ângulos.

Lembre que um ângulo pode ser medido tanto em *graus* quanto em *radianos*. A medida de um ângulo em radianos, seguindo o sentido anti-horário, é igual ao comprimento do arco do círculo de raio 1 determinado por esse ângulo. Assim, para determinar a medida X em radianos que corresponde à medida θ^o, usamos a seguinte regra de proporção, sabendo que a medida de 360^o corresponde a 2π radianos:

$$\theta^o : X :: 360^o : 2\pi$$

Isto é, $X = \frac{2\pi\cdot\theta}{360} = \frac{\pi\cdot\theta}{180}$.

Similarmente, a medida de X radianos corresponde a θ^o, onde: $\theta = \frac{360\cdot X}{2\pi} = \frac{180\cdot X}{\pi}$.

convencionamos em atribuir ao ângulo $\widehat{POQ}$ a menor medida positiva. Por exemplo, ao ângulo $\widehat{POQ}$, mostrado nas Figuras 40 e 41, atribuímos a medida θ.

Ângulo entre segmentos orientados.

Consideremos dois segmentos orientados AB e CD. Sejam OP e OQ os únicos segmentos orientados com origem no ponto O que são equipolentes a AB e CD respectivamente. O *ângulo de AB para CD* é o ângulo $\widehat{POQ}$ com exigência de que sua medida seja tomada *de OP para OQ* (Figura 42).

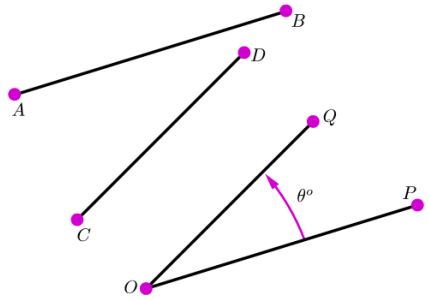


Fig. 42: Ângulo entre segmentos orientados.

Observação.

- Se um dos segmentos orientados AB ou CD for nulo, diremos que o ângulo entre eles é *nulo*.
- Observe que se $A'B'$ e $C'D'$ são equipolentes a AB e CD, respectivamente, então o ângulo de $A'B'$ para $C'D'$ e igual ao ângulo de AB para CD.

Definição 9 (Ângulo entre vetores) *Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano. Consideremos AB e CD segmentos orientados tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$. O ângulo de $\overrightarrow{v}$ para $\overrightarrow{w}$, denotado $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, é o ângulo de AB para CD.*

Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ for nulo, dizemos que o ângulo $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ é nulo.

Sabendo que o módulo de um segmento orientado é igual à distância entre as suas extremidades, definimos o tamanho ou *norma* de um vetor.

Definição 10 (Norma de um vetor) *Sejam $\overrightarrow{v}$ um vetor do plano e AB um segmento orientado tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. A norma, ou comprimento, do vetor $\overrightarrow{v}$, que designamos por $\|\overrightarrow{v}\|$ é o módulo do segmento AB:*

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = |AB| = d(A,B)}$$

Considerando um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas do

Ângulo bem definido. Note que a definição de $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ não depende dos representantes de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. De fato, sejam EF e GH tais que de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{GH}$. Como EF e GH são equipolentes a AB e CD, respectivamente, o ângulo de EF pra GH é igual ao ângulo de AB para CD.

A norma está bem definida. Se AB e CD são segmentos equipolentes, então $|AB| = |CD|$. Logo, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, temos $\|\overrightarrow{v}\| = |AB| = |CD|$. Isto é, $\|\overrightarrow{v}\|$ independe do segmento orientado escolhido como representante de $\overrightarrow{v}$.

plano com origem no ponto O e o ponto $P = (x, y)$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, temos:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = |OP| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Na seguinte proposição reunimos as principais propriedades da norma.

Lembre que...
Se r é um número real **não-negativo** a sua raiz quadrada é, por definição, o número real **não-negativo**, designado por $\sqrt{r}$, tal que $(\sqrt{r})^2 = r$.

Proposição 8 (Propriedades da norma de um vetor)

Sejam $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$;

2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{v}$ *é o vetor nulo;*

3. $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$;

4. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|$, *esta é a chamada* desigualdade triangular.

Demonstração.

1. Como a distância entre dois pontos do plano é sempre um número não-negativo, temos que se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então $\|\overrightarrow{v}\| = |AB| = d(A, B) \geq 0$.

2. Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, temos:

$$\|\overrightarrow{v}\| = |AB| = d(A, B) = 0 \iff A = B \iff \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\,.$$

3. Consideremos o vetor $\overrightarrow{v}$ em coordenadas: $\overrightarrow{v} = (x, y)$. Temos:

$$\begin{aligned} \|\lambda\overrightarrow{v}\| &= \|(\lambda x, \lambda y)\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{(\lambda)^2(x^2 + y^2)} \\ &= |\lambda|\sqrt{(x^2 + y^2)} = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|\,. \end{aligned}$$

4. A seguir, a desigualdade triangular não será utilizada. No entanto, por se tratar de uma importante propriedade da norma, apresentamos a sua demonstração no Apêndice B. □

Definição 11 (Vetor unitário)

Um vetor que tem norma igual a 1 é chamado unitário.

Exemplo 23

a. *Os vetores $\overrightarrow{v} = (-1, 0)$, e $\overrightarrow{w} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ são unitários.*

De fato, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$ *e* $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

Na prática...
Calculamos a norma de um vetor a partir da sua expressão em coordenadas. Como no exemplo ao lado.

b. *O vetor* $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *não é unitário, pois* $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$.

Observação.

Dado um vetor não-nulo do plano, sempre podemos determinar dois vetores unitários colineares a $\overrightarrow{v}$.

Com efeito, se $\overrightarrow{v} = (x, y)$ é um vetor não-nulo então $\|\overrightarrow{v}\|$ é um número real positivo.

Afirmamos que os vetores $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} = -\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ são unitários e colineares a $\overrightarrow{v}$.

De fato, u e w são colineares a v pois são múltiplos de v, eles são unitários, pois

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}\| &= \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right| \cdot \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\|\overrightarrow{v}\| = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|} = 1\,, \\
\|\overrightarrow{w}\| &= \left\|-\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right\| = \left|-\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right| \cdot \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\|\overrightarrow{v}\| = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|} = 1\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 24 *Calcular os vetores unitários paralelos ao vetor* $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$.

Solução: *A norma de* $\overrightarrow{v}$ *é* $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. *Logo, os vetores:*

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

e

$$\overrightarrow{w} = -\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

são unitários e colineares a $\overrightarrow{v}$.

Agora estamos em condições de definir o *produto interno* de dois vetores:

Definição 12 (Produto interno) *Sejam* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *vetores do plano. O produto interno de* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$*, denotado por* $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$*, é o número real:*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{v}\,,\, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\,\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}$$

Lembre que...
Na expressão que define o *produto interno*, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é o ângulo de $\overrightarrow{v}$ para $\overrightarrow{w}$.

Antes de estabelecer as propriedades do produto interno, vejamos o seu significado geométrico. Para isto, é necessário o seguinte conceito:

Definição 13 (Projeção ortogonal)

Sejam $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ vetores do plano representados por segmentos orientados com a mesma origem. Tracemos a reta que passa pelo ponto B e é perpendicular a reta que contém AC. Seja B' o ponto de interseção dessas duas retas.

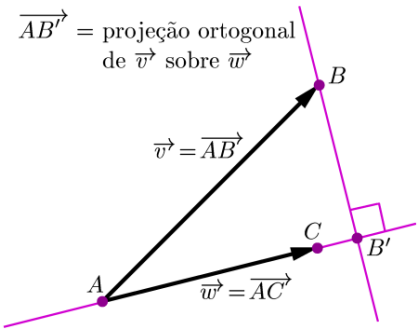


Fig. 43: Projeção ortogonal.

O vetor $\overrightarrow{AB'}$, que designamos por $pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$, é chamado a *projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$* (veja a Figura 43).

O produto interno está intimamente relacionado ao conceito geométrico de projeção ortogonal.

De fato, suponhamos que $\overrightarrow{w}$ seja um vetor unitário, isto é, $\|\overrightarrow{w}\| = 1$.

Tracemos o círculo de centro A e raio igual ao comprimento (norma) de $\overrightarrow{v}$. Segue, da trigonometria, que o comprimento do vetor $pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$ é igual ao produto do raio do círculo, $\|\overrightarrow{v}\|$, pelo módulo de $\cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ (veja a Figura 44), ou seja,

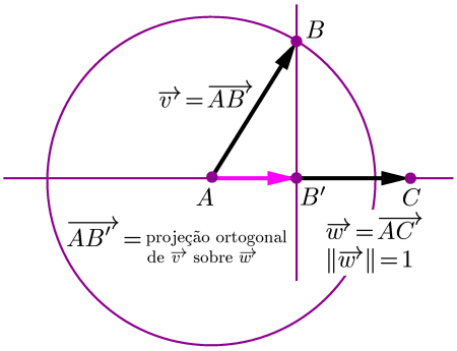


Fig. 44: Projeção ortogonal.

$$\|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{v}\| \cdot |\cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})| .$$

Como $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \cos(-(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})) = \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ e $\|\overrightarrow{w}\| = 1$, temos:

$$\|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}\| \underbrace{\|\overrightarrow{w}\|}_{=1} \cdot |\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = |\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle| .$$

Com isto, mostramos que: *se $\overrightarrow{w}$ é um vetor unitário, o módulo do produto interno de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$.*

Se o ângulo $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ (90^o), temos $\|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}\| = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$, pois $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \geq 0$, e se $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π, temos $\|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}\| = -\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$, pois $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \leq 0$.

Observe que...

Se $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ é o vetor nulo então $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. Note também, que se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são unitários, então $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Nesse sentido, as noções de ângulo e produto interno são essencialmente equivalentes.

Note, ainda, que para $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{2}$ os vetores são perpendiculares, portanto, a projeção ortogonal de um vetor sobre o outro é o vetor nulo.

Portanto, se $\overrightarrow{w}$ é um vetor unitário, a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$, que designamos por $pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$ é o vetor:

$$\boxed{pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v} = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{w}}$$

Na seguinte proposição, apresentamos as propriedades básicas do produto interno.

Proposição 9 (Propriedades do produto interno) *Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e para qualquer número real λ, valem as propriedades:*

1. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$ *, propriedade comutativa;*

2. $\lambda \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \lambda \overrightarrow{w} \rangle$*;*

3. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$ *, propriedade distributiva.*

Demonstração.

Propriedade 1: Já vimos que $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$. Segue deste fato e da propriedade comutativa do produto dos números reais, que

$$\|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{w}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, .$$

Logo,

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{w}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle \, .$$

Propriedade 2: Se $\lambda = 0$ a propriedade é facilmente verificada pois $\lambda \overrightarrow{v}$ e $\lambda \overrightarrow{w}$ são vetores nulos.

Consideremos o caso em que $\lambda > 0$.

Analisemos primeiro os módulos.

Como $\|\lambda \overrightarrow{v}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{v}\|$, para qualquer vetor $\overrightarrow{v}$, e λ é positivo, temos

$$\|\lambda \overrightarrow{v}\| = \lambda \|\overrightarrow{v}\| \;\text{ e }\; \|\lambda \overrightarrow{w}\| = \lambda \|\overrightarrow{w}\| \, .$$

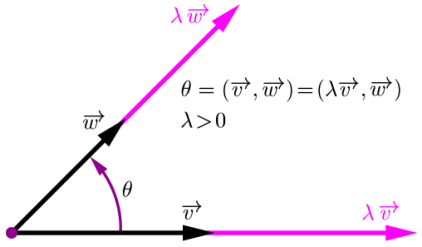


Fig. 45: Ângulos com $\lambda > 0$.

Analisemos, agora, os ângulos. Como λ é positivo, o vetor $\lambda \overrightarrow{v}$ tem o mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$ e $\lambda \overrightarrow{w}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{w}$.

Logo os ângulos $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, $(\lambda \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ e $(\overrightarrow{v}, \lambda \overrightarrow{w})$ têm a mesma medida (veja a Figura 45).

Portanto,

$$\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \cos(\lambda\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \cos(\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{w})\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle\lambda\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle &= \|\lambda\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(x\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\\ &= \lambda\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \lambda\langle\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle\,.\end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que

$$\langle\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{w}\rangle = \lambda\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle.$$

Consideremos agora o caso em que $\lambda < 0$.

Primeiro analisemos os módulos: como $\lambda < 0$, temos $|\lambda| = -\lambda$, assim:

$$\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\| = -\lambda\|\overrightarrow{v}\|\,,$$

e

$$\|\lambda\overrightarrow{w}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{w}\| = -\lambda\|\overrightarrow{w}\|\,.$$

Agora, analisemos os ângulos: como $\lambda < 0$, $\lambda\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$ têm sentidos opostos. Logo $\lambda\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w}$ também têm sentidos opostos.

Portanto, se o ângulo $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ mede θ, então o ângulo $(\lambda\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ mede $\pi+\theta$, veja a Figura 46.

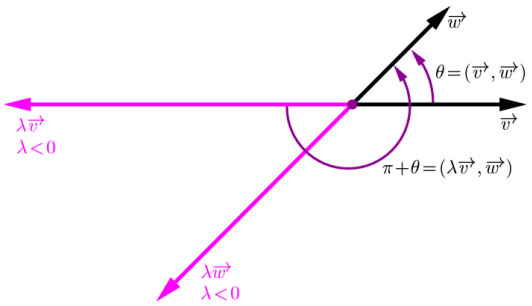


Fig. 46: Análise do ângulo com $\lambda < 0$.

Segue, das identidades trigonométricas, que

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta = -\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}\langle\lambda\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle &= \|\lambda\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\lambda\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\\ &= -\lambda\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|(-\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}))\\ &= \lambda\langle\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle\,.\end{aligned}$$

Propriedade 3: Para demonstrar a propriedade distributiva, precisamos da expressão do produto interno em coordenadas. Para obter essa expressão utilizaremos a *Lei dos cossenos* (veja a nota ao lado).

Identidades trigonométricas...
Se α e β são duas medidas de ângulos, então:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
e
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

Lei dos cossenos.
Se A, B e C são pontos distintos do plano, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ e $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$, então:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma\end{aligned}$$

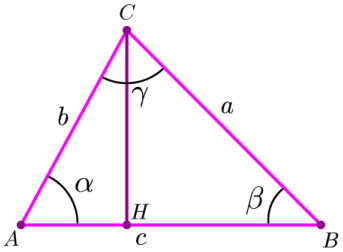


Fig. 47: Lei dos cossenos no triângulo ABC.

Nota importante.
A lei dos cossenos continua válida mesmo que os pontos A, B e C sejam colineares. Veja o Apêndice.

Proposição 10 (Expressão do produto interno em coordenadas)

Sejam $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$ *e* $\overrightarrow{w} = (x_2, y_2)$ *vetores do plano. Então:*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2} \tag{18}$$

Demonstração. Observe que a relação (18) é válida quando algum dos vetores é o vetor nulo. Portanto, consideremos apenas o caso em que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não-nulos (Figura 48).

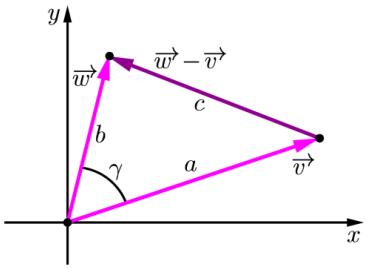


Fig. 48: Produto interno e lei dos cossenos.

Sejam $a = \|\overrightarrow{v}\|$, $b = \|\overrightarrow{w}\|$, $c = \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|$ e γ a medida do ângulo $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Usando a lei dos cossenos, temos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$.

Logo, $\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Como $\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2\,, \end{aligned} \tag{19}$$

e, também:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\langle \overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle\,. \end{aligned} \tag{20}$$

A fórmula (18) resulta igualando (19) e (20), e cancelando os termos comuns. □

Estamos agora em condições de demonstrar a propriedade distributiva do produto interno:

$$\langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\rangle + \langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle$$

Com respeito a um sistema ortogonal de coordenadas, sejam

$$u = (x_1, y_1)\,, \quad v = (x_2, y_2) \quad \text{e} \quad w = (x_3, y_3).$$

Usando as propriedades das operações em $\mathbb{R}$ e a fórmula 18, temos:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\rangle &= \langle (x_1, y_1)\,,\,(x_2 + x_3, y_2 + y_3)\rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) \\ &= \langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\rangle + \langle \overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\rangle\,. \end{aligned}$$

Com isto terminamos a prova da proposição 9. □

Observação.

• Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor qualquer do plano, então:

$$\boxed{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{v}\|^2}$$

De fato, como a medida do ângulo $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$ é 0 radianos (ou 0^o), temos $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \cos 0 = 1$ e

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\|^2 .$$

• Quando analisamos a representação geométrica do produto interno em termos da projeção ortogonal vimos que, se $\overrightarrow{w}$ é um vetor unitário, então a projeção ortogonal $pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$ do vetor $\overrightarrow{v}$ sobre o vetor $\overrightarrow{w}$ é

$$pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v} = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{w} .$$

Se o vetor $\overrightarrow{w}$ não é unitário, mas apenas não-nulo, consideramos o vetor $\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$ que é unitário, paralelo a $\overrightarrow{w}$ e com igual sentido. Definimos a *projeção de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$ como sendo a projeção de $\overrightarrow{v}$ sobre $\dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$*, que designamos por $pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$. Usando a Propriedade 2 do produto interno, temos:

$$\boxed{pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v} = \left\langle \overrightarrow{v}, \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} \right\rangle \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}}$$

Terminamos esta aula ilustrando a importância do produto interno com uma série de exemplos e considerações geométricas.

Exemplo 25 *Determinar o valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $\overrightarrow{v} = (a, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 3)$ tenham produto interno igual a 15. Achar, também, o cosseno do ângulo formado por esses vetores e a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$.*

Solução: *Usando a caracterização do produto interno em termos de coordenadas, temos:*

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle (a, 1), (2, 3) \rangle = a \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 2a + 3 .$$

Logo, $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 15$ se, e somente se, $2a + 3 = 15$. Portanto, $a = 6$ e $\overrightarrow{v} = (6, 1)$.

Da definição do produto interno, temos $\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \dfrac{\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|}$.

Como $\|\overrightarrow{v}\| = \|(6,1)\| = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{37}$ *e* $\|\overrightarrow{w}\| = \|(2,3)\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$*, temos:*

$$\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \frac{15}{\sqrt{37}\,\sqrt{13}}\,.$$

Finalmente, a projeção de $\overrightarrow{v}$ *sobre* $\overrightarrow{w}$ *é o vetor:*

$$pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v} = \frac{\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2}\,\overrightarrow{w} = \frac{15}{(\sqrt{13})^2}\,(2,3) = \left(\frac{30}{13},\frac{45}{13}\right)\,.$$

Exemplo 26 *Determinar os valores* $m \in \mathbb{R}$ *que fazem a projeção ortogonal do vetor* $\overrightarrow{v} = (m+1, m-1)$ *sobre o vetor* $\overrightarrow{w} = (m, 1-m)$ *ser unitária.*

Solução: *Como* $|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}| = \dfrac{|\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{w}\|}$*, temos :*

$$\begin{aligned}
|pr_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}| = 1 &\iff \frac{|\langle (m+1,m-1),(m,1-m)\rangle|}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}} = 1\\
&\iff |\langle (m+1,m-1),(m,1-m)\rangle| = \sqrt{m^2+(1-m)^2}\\
&\iff |m^2+m-m^2+2m-1| = \sqrt{m^2+(1-m)^2}\\
&\iff |3m-1| = \sqrt{m^2+(1-m)^2}\\
&\iff |3m-1|^2 = (\sqrt{m^2+(1-m)^2}\,)^2\\
&\iff 9m^2-6m+1 = m^2+1-2m+m^2\\
&\iff 7m^2-4m = 0\\
&\iff m = 0 \quad \textit{ou} \quad 7m-4=0\\
&\iff m = 0 \quad \textit{ou} \quad m = \frac{4}{7}\,.
\end{aligned}$$

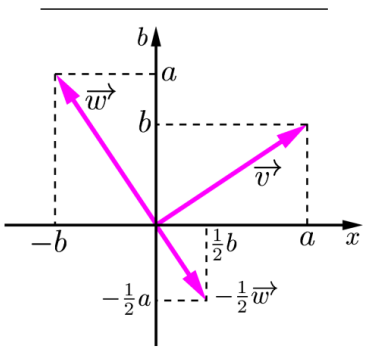


Fig. 49: Vetores ortogonais.

Definição 14 (Ortogonalidade de vetores) *Dois vetores* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *do plano são chamados* ortogonais*, ou* perpendiculares*, e escrevemos* $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$*, se o produto interno entre eles é nulo.*

Isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle = 0}$$

Como $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \, \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, concluímos que:

$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ ou $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$

A última alternativa significa que o ângulo entre $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é reto, isto é, a sua medida é 90^o (ou seja $\frac{\pi}{2}$ radianos).

Observação.

Seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor não-nulo. Então, *um vetor $\overrightarrow{w}$ é ortogonal a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{w} = (-\lambda b, \lambda a)$ para algum escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.*

De fato, um vetor $\overrightarrow{w} = (c, d)$ é ortogonal a $\overrightarrow{v} = (a, b)$ se, e somente se, $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd = 0$.

No entanto, na Aula 3, vimos que $\det \begin{pmatrix} c & d \\ -b & a \end{pmatrix} = ac + bd = 0$ se, e somente se, o vetor (c, d) é múltiplo do vetor $(-b, a)$. Isto é, se, e somente se, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $(c, d) = \lambda(-b, a) = (-\lambda b, \lambda a)$.

Exemplo 27 *Os vetores $\overrightarrow{v} = (\sqrt{2}, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (-2\sqrt{2}, 4)$ são ortogonais, pois:*

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \sqrt{2}(-2\sqrt{2}) + 1(4) = -4 + 4 = 0.$$

No entanto, se $\overrightarrow{u} = (1, 2)$, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são ortogonais. De fato:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1(\sqrt{2}) + 2(1) = \sqrt{2} + 2 \neq 0.$$

O conceito de ortogonalidade entre vetores, permite dar um significado geométrico aos coeficientes da equação cartesiana de uma reta.

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos da reta $r : ax + by = c$.

Então,

$$ax_1 + by_1 = c \qquad \text{e} \qquad ax_2 + by_2 = c\,.$$

Igualando os lados esquerdos dessas identidades, obtemos:

$$ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2\,.$$

Logo, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ e, portanto:

$$\langle \overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle (a, b), \overrightarrow{AB} \rangle = 0\,.$$

Isto é, $\overrightarrow{\eta} = (a, b)$ é ortogonal a qualquer vetor direção da reta r.

Este fato motiva a seguinte definição.

Definição 15 *Um vetor $\overrightarrow{v}$ é dito* normal, ortogonal *ou* perpendicular *a uma reta r, se ele for ortogonal a qualquer vetor direção da reta r.*

Pelo visto anteriormente, temos:

$\overrightarrow{\eta} = (a, b)$ é um vetor normal à reta $r : ax + by = c$.

Exemplo 28 *Seja $A = (1, -3)$ um ponto do plano. Determinar a equação cartesiana da reta r que passa por A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (-4, 5)$.*

Solução: *A equação cartesiana de r é da forma $-4x + 5y = c$.*

Como A pertence a r temos $-4(1) + 5(-3) = c$. Isto é, $c = -19$.

Portanto, a equação de r é $-4x + 5y = -19$.

Exemplo 29 *Dar as equações paramétricas da reta $r : 3x - y + 2 = 0$.*

Solução: *Da equação cartesiana de r obtemos que $\overrightarrow{\eta} = (3, -1)$ é um vetor normal a r.*

Logo o vetor $\overrightarrow{\delta} = (-(-1), 3) = (1, 3)$, que é perpendicular a $\overrightarrow{\eta}$, é um vetor direção de r.

Além disso, observe que o ponto $A = (0, 2)$ pertence a r.

Portanto, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 3 \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \textit{Isto é,} \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Compare com as técnicas desenvolvidas na Aula 3.

Exemplo 30 *Determinar a equação cartesiana da reta r, onde:*

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solução: *A partir da forma das equações paramétricas, vemos que r é a reta que passa pelo ponto $A = (2, 1)$ com direção $\overrightarrow{\delta} = (-3, 1)$.*

Logo, o vetor $\overrightarrow{\eta} = (-1, -3)$ é um vetor normal a r.

Portanto, a equação cartesiana de r é da forma $(-1)x + (-3)y = c$.

Para determinarmos o valor de c, substituímos as coordenadas do ponto A na identidade $(-1)x + (-3)y = c$:

$$(-1)(2) + (-3)(1) = c,$$

ou seja $c = -5$ *e a equação cartesiana de* r *é* $-x - 3y = -5$*, ou seja, multiplicando por* -1*:*

$$r : x + 3y = 5\,.$$

Exemplo 31 *Seja* $A = (1, -3)$*. Dar a equação cartesiana da reta* r *que contém* A *e é perpendicular à reta* s *de equações paramétricas:*

$$s : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

Solução: *Das equações paramétricas de* s *obtemos um vetor direção* $\overrightarrow{\delta} = (-3, 1)$*. Esse vetor é perpendicular às retas perpendiculares a* s*.*

Assim, a reta r *que procuramos deve ter a sua equação cartesiana na forma* $-3x + y = c$*, onde o valor de* c *é determinado substituindo as coordenadas do ponto* A*:* $-3(1) + (-3) = c$*, isto é,* $c = -6$*.*

Portanto, a equação cartesiana de r *é:*

$$r : -3x + y = -6\,.$$

A noção geométrica de ângulo entre duas retas do plano é também reformulada analiticamente a partir do produto interno, veja:

Definição 16 (Ângulo entre duas retas do plano) *Sejam* r *e* s *retas do plano e sejam* $\overrightarrow{v}$*,* $\overrightarrow{w}$ *vetores não-nulos paralelos a* r *e* s *respectivamente. Definimos o* ângulo entre r e s *como sendo o ângulo de medida* θ *com* $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ *radianos (ou seja, entre* 0^o *e* 90^o*), tal que:*

$$\cos\theta = |\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\|}$$

Isto é, *o ângulo entre duas retas é o menor ângulo positivo por elas determinado*.

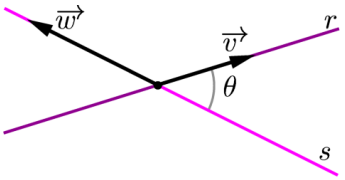


Fig. 50: Ângulo entre r e s.

Observe que...
Duas retas são perpendiculares se o ângulo entre elas é reto ($\frac{\pi}{2}$ radianos, ou seja 90^o).

Exemplo 32 *Determinemos o cosseno do ângulo entre as retas* r *e* s *dadas por:*

$$r : 3x - 4y = 1 \quad \textit{e} \quad s : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Solução: *Da equação cartesiana de* r *vemos que* $\overrightarrow{\eta} = (3, -4) \perp r$*.*

Logo, $\overrightarrow{v} = (-(-4), 3) = (4, 3)$*, que é perpendicular a* $\overrightarrow{\eta}$*, é um vetor direção de* r*.*

Das equações de s *vemos que* $\overrightarrow{w} = (2, -1)$ *é um vetor direção de* s*.*

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,, \\ \|\overrightarrow{w}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}\,, \\ \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= 4(2) + 3(-1) = 8 - 3 = 5\,. \end{aligned}$$

Portanto, o cosseno da medida θ *do ângulo entre* r *e* s *é*

$$\cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Definição 17 (Mediatriz de um segmento) *Seja* AB *um segmento no plano e seja* M *o seu ponto médio. A reta* r *que é perpendicular à reta que contém* A *e* B *e passa pelo ponto* M *é chamada a* mediatriz *de* AB*.*

Exemplo 33 *Determinar a equação cartesiana da mediatriz* r *do segmento* AB*, onde* $A = (2, 3)$ *e* $B = (5, 4)$*.*

Solução: *Como o vetor* $\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 4 - 3) = (3, 1)$ *é perpendicular à mediatriz do segmento* AB*, a equação da mediatriz é*

$$r \,:\, 3x + y = c.$$

Já que o ponto médio $M = \frac{1}{2}(2 + 5, 3 + 4) = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$ *do segmento* AB *pertence à reta* r*, temos:* $3 \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = c$*. Isto é,* $c = 4 \cdot \frac{7}{2} = 14$*.*

Portanto, a equação cartesiana da mediatriz é

$$r: \; 3x + y = 14\,.$$

Exemplo 34 *Determinar as equações das retas que passam pelo ponto* $(2, -1)$ *formando um ângulo de* 45^o *com a reta* $r \,:\, 2x - 3y + 7 = 0$*.*

Solução: *Seja* $\overrightarrow{v} = (a, b)$ *o vetor direção de uma das retas procuradas.*

O vetor $(2, -3)$ *é perpendicular a* r*, logo* $(3, 2)$ *é um vetor direção de* r*.*

Pela definição do ângulo entre duas retas, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o = \frac{\langle (a, b), (3, 2) \rangle}{\|(a, b)\|\,\|(3, 2\|)} = \frac{3a + 2b}{\|(a, b)\|\,\|(3, 2)\|}\,,$$

logo,

$$\sqrt{2}\,\|(a,b)\|\,\|(3,2)\| = 2(3a+2b)\,.$$

Tomando quadrados em ambos os lados dessa igualdade, obtemos:

$$2(a^2+b^2)(3^2+2^2) = 4(3a+2b)^2\,,$$

e, efetuando os produtos, temos:

$$13a^2+13b^2 = 18a^2+24\,a\,b+8b^2\,.$$

Agrupando os termos nesta igualdade, obtemos

$$5a^2-5b^2+24\,a\,b = 0\,.$$

Isto é,

$$5a^2+24\,a\,b = 5b^2\,,$$

ou seja,

$$a^2+\frac{24}{5}\,a\,b = b^2\,.$$

Completando o quadrado, temos:

$$a^2+\frac{24}{5}\,a\,b+\frac{12^2}{5^2}b^2 = b^2+\frac{12^2}{5^2}b^2\,,$$

ou seja,

$$\left(a+\frac{12}{5}\,b\right)^2 = \frac{169}{25}\,b^2 = \left(\frac{13}{5}\,b\right)^2\,.$$

Portanto,

$$a+\frac{12}{5}\,b = \frac{13}{5}\,b \qquad \textit{ou} \qquad a+\frac{12}{5}\,b = -\frac{13}{5}\,b\,.$$

Isto é, $a=\frac{1}{5}\,b$ *ou* $a=-5\,b$*. Logo, os vetores direção das retas procuradas são da forma* $\left(\frac{1}{5}b,b\right)$ *ou* $(-5b,b)$*.*

Assim, fazendo $b=5$ *no primeiro vetor e* $b=1$ *no segundo, obtemos os vetores direção* $(1,5)$ *e* $(-5,1)$*, que são mutuamente perpendiculares.*

Logo, as duas retas possíveis são da forma:

$$x+5y = c_1 \qquad \textit{ou} \qquad -5x+y = c_2\,.$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas sabendo que as retas passam pelo ponto $(2,-1)$:

$$c_1 = 2 + 5(-1) = -3 \qquad \textit{e} \qquad c_2 = -5(2) + (-1) = -11\,.$$

Portanto, as retas procuradas têm equações cartesianas:

$$x + 5y = -3 \qquad \textit{e} \qquad -5x + y = -11\,.$$

Exemplo 35 *Determinar o ponto P' simétrico ao ponto $P = (4,1)$ com respeito à reta $r : 2x - y = 2$.*

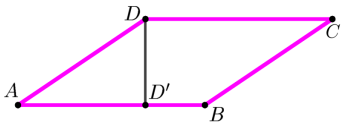


Fig. 51: Exemplo 35.

Solução: *Para obtermos o ponto P' traçamos a reta ℓ perpendicular à reta r que passa por P. Essa reta intersecta r em um ponto Q. O ponto P' procurado é o ponto tal que Q é o ponto médio de PP'. Isto é, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.*

Como o vetor $(2,-1)$ é perpendicular à reta r, então ele é um vetor direção da reta ℓ.

Portanto, $(1,2)$ é perpendicular à reta ℓ e a sua equação cartesiana tem a forma $\ell : x + 2y = c$, onde o número c é obtido substituindo, na equação de s, as coordenadas de P: $c = 4 + 2(1) = 6$. Logo, $\ell : x + 2y = 6$.

Para obter o ponto Q resolvemos o sistema dado pelas equações das retas r e ℓ:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}.$$

e obtemos $Q = (2,2)$.

Da condição $\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PQ}$, calculamos as coordenadas de $P' = (x,y)$: $(x-2, y-2) = (2-4, 2-1)$. Logo: $P' = (0,3)$.

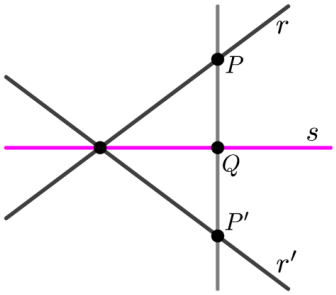


Fig. 52: A reta r' é simétrica à reta r em relação à reta s.

Observação.

Um problema geométrico interessante é o seguinte: dadas as retas r e s, determinar a reta r', simétrica à reta r em relação a s (veja a Figura 52). A reta r' é obtida da seguinte forma: seja $P \in r$ tal que $P \notin s$. Como no Exemplo 35, tomamos o ponto P' simétrico de P em relação à reta s.

- Se r e s não são paralelas, r' é a reta que passa por P' e pelo ponto de interseção de r e s.
- Se r e s são paralelas, então r' é a reta que passa por P' e tem a direção de r.

Exemplo 36 *Determinar os pontos C e B de modo que a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta $r : x + 3y = 6$ seja o segmento CD, onde $A = (1, 1)$, $D = (3, 1)$ e AB é um segmento contido numa reta paralela ao vetor $(2, 1)$.*

Solução: *Como $AB \subset s$, onde s é uma reta paralela ao vetor $(2, 1)$, temos que:*

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(2, 1) = (1 + 2\lambda, 1 + \lambda)\text{, para algum } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

A reta s' que é perpendicular à reta r e passa por A tem por equação cartesiana:

$$s' : 3x - y = 2 \quad \text{(Verifique!).}$$

Então s' intersecta r no ponto $C = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ (você já sabe que para determinar o ponto C basta resolver o sistema dado pelas equações de r e s').

Similarmente, seja ℓ a reta perpendicular à reta r que passa por D:

$$\ell : 3x - y = 8.$$

Como D é a projeção ortogonal do ponto B sobre a reta r, e ℓ é perpendicular à reta r, então $B \in \ell$. Portanto, as coordenadas de $B = (1+2\lambda, 1+\lambda)$ satisfazem a equação de ℓ:

$$\ell : 3(1 + 2\lambda) - (1 + \lambda) = 8 \Rightarrow 5\lambda + 2 = 8 \Rightarrow \lambda = \tfrac{6}{5}\,.$$

Logo $B = (1 + 2 \cdot \frac{6}{5}, 1 + \frac{6}{5}) = (\frac{17}{5}, \frac{11}{5})$.

Resumo

Nesta aula est a belecemos a noção de produto interno entre dois vetores do plano. Para isto foi necessário reest a belecer a noção de ângulo entre segmentos e definir o conceito de norma ou comprimento de um vetor. Vimos as propriedades da norma e do produto interno, interpretamos geometricamente o produto interno por meio da projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Obtivemos as expressões da norma em coordenadas e aplicamos esses conceitos em diversas situações geométricas.

Exercícios

1. Verifique que os pontos $(2, 5)$, $(8, -1)$ e $(-2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

2. Determine a equação cartesiana da reta:

a. paralela à reta $2x + 5y = 1$ que passa pelo ponto $(1, 2)$.

b. perpendicular à reta $y = 3x + 1$ que passa pelo ponto $(-3, 1)$.

c. perpendicular à reta $x = 3$ que passa pelo ponto $(2, 0)$.

3. Sejam $A = (-1, 2)$, $B = (1, 3)$ e $C = (0, -4)$ pontos do plano. Determine a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$.

Indicação: Lembre que a bissetriz de um ângulo é a reta que divide em dois outros ângulos de medidas iguais.

Considere os pontos B' na semi-reta AB e C' na semi-reta AC tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB'}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC'}$ sejam unitários. Observe que o vetor $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ é a direção da reta desejada.

4. Determine a reta simétrica à reta r em relação à reta s, onde:

a. $r : 4x - y = 3$ e $s : 2x - y = -1$.

b. $r : 2x - 3y = 1$, e $s : 2x - 3y = 2$.

5. Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P = (1, 1)$ e formam, cada uma, um ângulo de 30^o com a reta $r : x - 3y = 1$.

6. Dados os pontos $A = (1, 0)$, $B = (2, 4)$, $C = (2, 1)$ e a reta $r : 3x - 2y = 4$, determine $D \in r$ tal que o vetor $\overrightarrow{CD}$ seja a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{AB}$ sobre r.

7. Seja r a mediatriz do segmento AB, onde $A = (5, 3)$ e $B = (1, -1)$. Determine pontos $C, D \in r$ de modo que $ACBD$ seja um quadrado.

8. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta $x - 2y = 1$ seja o segmento CD, onde $C = (1, 0)$, $D = (3, 1)$, $A = (0, a)$ e $B = (1, b)$.

9. Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABCD$, cujas diagonais são perpendiculares e se cortam no ponto $M = (2, 2)$. Se $A = (1, 1)$ e o comprimento de lado AB é igual a $\sqrt{10}$, determine os outros vértices de $\mathcal{P}$.

10. A hipotenusa de um triângulo retângulo ABC está sobre a reta $2x + 3y = 5$. O vértice A do ângulo reto é o ponto $(1, -1)$ e o vértice B tem abscissa -2. Determine as coordenadas dos vértices B e C.

11. Seja BB' um segmento que contém o segmento BA, onde $A = (1, 1)$ é o ponto médio de BB' e $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 1)$. Se a projeção ortogonal de B sobre a reta $r : x + 3y = 5$ é o ponto $C = (2, 1)$, determine as coordenadas do ponto B'.

12. Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABCD$, com o lado AB sobre a reta r e uma das diagonais sobre a reta s, onde:

$$r : x + 2y = 1 \qquad \text{e} \qquad s : x + y = 2\,.$$

Se o ponto médio da diagonal AC é o ponto $M = (1, 1)$ e as diagonais são perpendiculares, determine os vértices e a área de $\mathcal{P}$.

Auto-avaliação

Os exercícios acima avaliam se você assimilou todos os conceitos apresentados nesta aula. Em cada um desses exercícios, os conceitos de produto interno, norma, perpendicularidade e medida de ângulos são manipulados de forma unificada. Caso tenha dificuldade ao resolvê-los, volte e reveja os conceitos apresentados. Lembre-se que os tutores podem ajudá-lo. Não esqueça de trocar idéias com os seus colegas.

Apêndice A. Lei dos cossenos

Nesta aula usamos a Lei dos cossenos para obter a expressão do produto interno em termos de coordenadas. Apenas para complementar a nossa exposição, lembramos aqui os detalhes sobre esse importante resultado:

Proposição. (Lei dos cossenos)

Sejam A, B e C pontos distintos do plano. Denotemos $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ e $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$. Então:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \end{aligned}$$

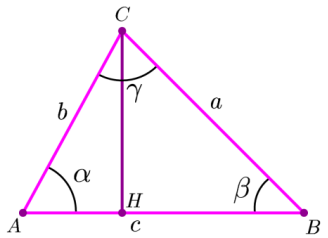


Fig. 53: Lei dos cossenos no triângulo ABC, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

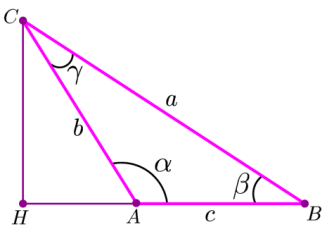


Fig. 54: Lei dos cossenos no triângulo ABC, $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$.

Demonstração. Consideremos separadamente o caso em que os pontos não são colineares e o caso em que os pontos são colineares.

Caso 1. Os pontos A, B e C não são colineares.

Traçando a altura CH em relação ao lado AB e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo HBC, temos $a^2 = |BH|^2 + |CH|^2$.

Observe que, se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, como na Figura 53, então:

$|AH| = b\cos\alpha$, $|CH| = b\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e $|BH| = c - |AH| = c - b\cos\alpha$.

Logo,

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

As outras relações são obtidas traçando as outras alturas.

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, então: $|AH| = b\,|\cos(\pi - \alpha)|$, $|CH| = b\,|\mathrm{sen}(\pi - \alpha)|$ e $|BH| = c + |AH|$.

O resto dos cálculos segue como no caso em que $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Caso 2. Os pontos A, B e C são colineares.

De fato, sejam $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$.

Suponhamos que B esteja entre A e C (veja a Figura 55).

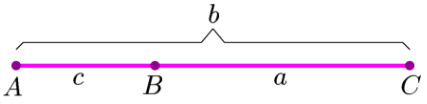


Fig. 55: Lei dos cossenos: A, B e C colineares.

Então,

- o ângulo α entre AB e AC é nulo, $\cos\alpha = 1$, $a = b - c$ e temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

- o ângulo β entre BA e BC é π, $\cos\beta = -1$, $b = a + c$ e temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2\,a\,b = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,.$$

- o ângulo γ entre CA e CB é nulo, $\cos\gamma = 1$, $c = b - a$ e temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma\,.$$

O caso em que A está entre B e C e o caso em que C está entre A e B são analisados de maneira similar. □

Apêndice B. A desigualdade triangular

Neste apêndice vamos demonstrar a *desigualdade triangular* anunciada na propriedade 4, da Proposição 8:

Para quaisquer vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do plano, temos:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|}$$

Antes de demonstrarmos a desigualdade, observe que se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores do plano, então:

$$\boxed{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle| \leq \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|}$$

Com efeito, sabemos que o cosseno de um ângulo qualquer é um número real pertencente ao intervalo $[-1,1]$, logo $|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})| \leq 1$ e temos:

$$|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle| = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\,|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})| \leq \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\,1 = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\,.$$

Demonstração da desigualdade triangular.

Como a norma de um vetor é um número não negativo, vemos que a desigualdade triangular é equivalente à seguinte desigualdade:

$$\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 \leq (\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|)^2\,.$$

Para demonstrar esta desigualdade, desenvolvemos o lado direito usando a propriedade distributiva do produto interno e as observações acima:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 &= \langle \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle + 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle + \|\overrightarrow{w}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{w}\|^2 \\
&= (\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|)^2\,,
\end{aligned}$$

demonstrando assim a desigualdade triangular. □.

Desigualdade triangular.
A interpretação geométrica da desigualdade triangular é que, num triângulo qualquer, *a soma dos comprimentos de dois lados é sempre maior que o comprimento do terceiro lado.*
Observe que, representando os comprimentos de dois dos lados de um triângulo por meio das normas dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, o terceiro lado é representado pela norma do vetor $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

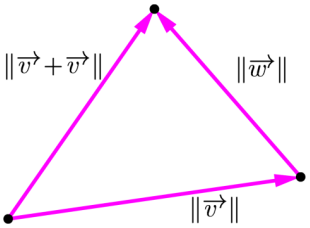


Fig. 56: Desigualdade triangular.

Lembre que...
Se a e b são números reais não negativos, então a desigualdade $a \leq b$ equivale à desigualdade $a^2 \leq b^2$ pois a função $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, é crescente.

Produto interno - Aplicações

Objetivos

- Calcular áreas de paralelogramos e triângulos.
- Calcular a distância de um ponto a uma reta e entre duas retas.
- Determinar as bissetrizes de duas retas concorrentes.

Nesta aula vamos usar o produto interno e a norma para calcular áreas de paralelogramos e triângulos e calcular distâncias entre pontos e retas e entre retas paralelas. Afinal, todas as situações geométricas no plano que envolvem a determinação de distâncias e ângulos no plano, podem ser analisadas em termos de produtos internos de vetores.

Áreas de paralelogramos e triângulos.

Sabemos que a área de um paralelogramo $ABCD$ é o produto da medida de um dos seus lados pela altura em relação a esse lado. No paralelogramo da Figura 57, DD' é a altura em relação ao lado AB, logo:

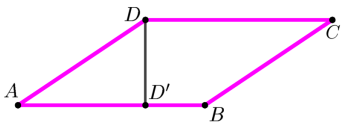


Fig. 57: Paralelogramo ABCD.

Lembre que...
Um *paralelogramo* é um quadrilátero que tem lados opostos paralelos.
Você pode verificar que isso implica que os lados opostos são congruentes.

$$\text{Área de } ABCD = |AB| \cdot |DD'| \,.$$

Se $\alpha = \widehat{D'AD}$, segue da trigonometria que $|DD'| = |AD|\,|\operatorname{sen}\alpha|$ e substituindo expressão da área, obtemos:

$$\text{Área de } ABCD = |AB| \cdot |AD| \cdot |\operatorname{sen}\alpha|.$$

Para expressar essa área em termos do produto interno, consideremos os vetores não-nulos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. Então,

$$|AB| = \|\overrightarrow{v}\| \,, \quad |AD| = \|\overrightarrow{w}\| \,,$$

e

$$|\operatorname{sen}\alpha| = |\operatorname{sen}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| \,,$$

onde $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é o ângulo de $\overrightarrow{v}$ para $\overrightarrow{w}$. Substituindo na expressão da área, temos:

$$\text{Área de } ABCD = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot |\operatorname{sen}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| \,. \qquad (21)$$

Lembre que...
A relação $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ é válida qualquer que seja o ângulo θ. Dessa relação, obtemos $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - cos^2\theta$. Logo, $|\operatorname{sen}\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta}$, para todo θ.

Como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, temos $\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \dfrac{\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle}{\|\overrightarrow{v}\|\cdot\|\overrightarrow{w}\|}$.

Além disso, sabemos que $\operatorname{sen}^2(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 1 - \cos^2(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Logo,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})| &= \left(1-\cos^2(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{\langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2|\overrightarrow{w}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\|\overrightarrow{v}\|^2|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2|\overrightarrow{w}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|}. \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na identidade (21), temos:

$$\begin{aligned} \text{Área de } ABCD &= \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|\frac{\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|} \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle^2}. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$, $\|\overrightarrow{v}\| = |AB|$ e $\|\overrightarrow{w}\| = |AD|$:

$$\text{Área de } ABCD = \sqrt{|AB|^2|AD|^2 - \langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle^2} \qquad (22)$$

Exemplo 37 *Sejam os pontos $A = (0,-1)$, $B = (3,0)$, $C = (1,2)$ e $D = (-2,1)$. Mostrar que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo e calculemos sua área.*

Solução: *Para mostrar que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, basta verificar que seus lados opostos são paralelos. Isso equivale a mostrar que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares e que os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ também são colineares.*

$$\overrightarrow{AB} = (3-0, 0-(-1)) = (3,1), \quad \overrightarrow{CD} = (-2-1, 1-2) = (-3,-1),$$
$$\overrightarrow{AD} = (-2-0, 1-(-1)) = (-2,2), \quad \overrightarrow{BC} = (1-3, 2-0) = (-2,2).$$

Dessas expressões vemos que $\overrightarrow{AB}$ é colinear a $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AD}$ é colinear a $\overrightarrow{BC}$.

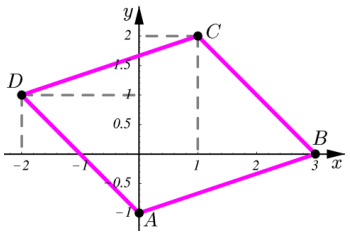


Fig. 58: Exemplo 37.

Para determinar a área de $ABCD$ calculamos:

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\,, \quad |AD| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}\,,$$
$$\langle \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AD}\,\rangle = \langle (3,1), (-2,2)\rangle = 3 \times (-2) + 1 \times 2 = -6 + 2 = -4.$$

Substituindo esses valores na fórmula (22), obtemos:

$$\begin{aligned} \textit{Área de } ABCD &= \sqrt{|AB|^2|AD|^2 - \langle \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AD}\,\rangle^2} = \sqrt{10 \times 8 - (-4)^2} \\ &= \sqrt{80 - 16} = \sqrt{64} = 8 \ \textit{unidades de área.} \end{aligned}$$

Consideremos agora um triângulo ABC. Sabemos que sua área é a metade do produto do comprimento de um dos lados pela altura em relação a esse lado (Figura 58). Portanto, se AB é o lado considerado e CC' é a altura, então:

$$\text{Área de } ABC = \tfrac{1}{2}|AB| \cdot |CC'|\,.$$

Sendo $|AB| \cdot |CC'|$ a área do paralelogramo $ABA'C$ (Figura 59), onde A' é o ponto de interseção da reta paralela ao segmento AC que passa por B com a reta paralela e AB que passa por C, obtemos:

$$\boxed{\text{Área de } ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{|AB|^2|AC|^2 - \langle \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}\,\rangle^2}} \qquad (23)$$

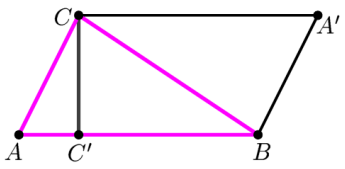


Fig. 59: Triângulo ABC e paralelogramo $ABA'C$.

Distância de um ponto a uma reta.

Seja r uma reta e P um ponto do plano. A *distância de P a r*, que denotamos $d(P,r)$ é assim definida: a reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r, intersecta r num único ponto P_0. A distância de P a r é a distância de P a P_0, isto é (veja a Figura 60):

$$d(P,r) = |PP_0|\,.$$

Note que se $Q \in r$, $Q \neq P_0$, então a distância de P a Q é maior que a distância de P a P_0, pois no triângulo PP_0Q, o lado PQ é oposto ao ângulo reto, sendo, portanto, o maior dos lados desse triângulo.

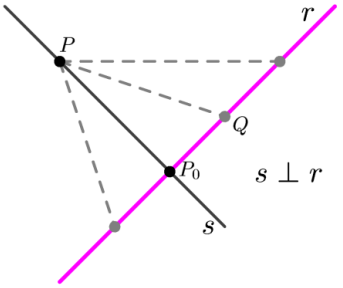


Fig. 60: Distância de P a r.

Lembre que...

Dados dois lados de um triângulo, o maior lado é o oposto ao maior ângulo.

Observação.

$P \in r \Rightarrow d(P,r) = 0$, pois $P_0 = P$ e $d(P,r) = |PP_0| = |PP| = 0\,.$

Vejamos agora como calcular a distância de um ponto $P = (x_1, y_1)$ a uma reta $r:\ ax + by = c$.

Da Aula 4, sabemos que $\eta = (a,b)$ é um vetor normal (perpendicular) à reta r.

Portanto, a reta s que passa por P e é perpendicular a r tem equações paramétricas:

$$s: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $\{P_0\} = r \cap s$, o ponto P_0 é um ponto de s.

Logo, existe um número real t_0, tal que $P_0 = (x_1 + at_0, y_1 + bt_0)$.

Pela definição da distância de um ponto a uma reta, temos:

$$\begin{aligned} d(P,r) &= |PP_0| = \sqrt{(x_1 + at_0 - x_1)^2 + (y_1 + bt_0 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{a^2t_0^2 + b^2t_0^2} = |t_0|\sqrt{a^2 + b^2}\,. \end{aligned}$$

Resta encontrarmos o valor de t_0.

Como $P_0 \in r$, as suas coordenadas satisfazem a equação de r:

$$a(x_1 + at_0) + b(y_1 + bt_0) = c\,.$$

Desenvolvendo essa igualdade, obtemos o valor de t_0:

$$\begin{aligned} ax_1 + a^2t_0 + by + b^2t_0 = c \quad &\Rightarrow \quad t_0(a^2 + b^2) = c - ax_1 - by_1 \\ &\Rightarrow \quad t_0 = \frac{c - ax_1 - by_1}{a^2 + b^2} = \frac{-(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}\,. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor de t_0 na equação (24) da distância de P a r:

$$\begin{aligned} d(P,r) &= |t_0|\sqrt{a^2 + b^2} = \left|\frac{-(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}\right| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \end{aligned}$$

Na proposição 11...
Preste muita atenção à forma da equação da reta. Obviamente, a distância do ponto $P = (x_1, y_1)$ à reta $r: ax + by + d = 0$ é dada por

$$d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Destacamos o resultado obtido da seguinte maneira:

Proposição 11 *A distância do ponto $P = (x_1, y_1)$ à reta $r: ax + by = c$ é igual a*

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \qquad (24)$$

Exemplo 38 *Determinemos a distância do ponto $P = (-4, -2)$ à reta r de equações paramétricas:*

$$r : \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

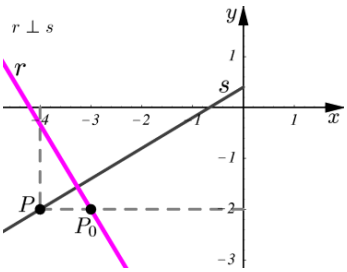


Fig. 61: Exemplo 38

Solução: *Para usar a equação (24), devemos conhecer a equação cartesiana da reta r. Colocando em evidência o parâmetro t em cada uma das equações paramétricas:*

$$x = -3 + 5t \Rightarrow t = \frac{x+3}{5}, \qquad y = -2 + 3t \Rightarrow t = \frac{y+2}{3}.$$

e igualando as expressões de t, obtemos:

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{3}.$$

Logo, a equação cartesiana de r é

$$r : 3x - 5y = 1.$$

Nessa equação cartesiana identificamos $a = 3$, $b = -5$, e $c = 1$.

Substituindo esses dados na relação (24), junto com as coordenadas $x_1 = -4$ e $y_1 = -2$ do ponto P, obtemos a distância de P a r (em unidades de comprimento):

$$d(P, r) = \frac{|3(-4) - 5(-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Como aplicação do conceito de distância de um ponto a uma reta, veremos como determinar as *bissetrizes* entre duas retas concorrentes.

Definição 18 *Uma reta r é chamada uma* bissetriz *de duas retas concorrentes r_1 e r_2, se os ângulos de r a r_1 e de r a r_2 são iguais. Veja a Figura 62.*

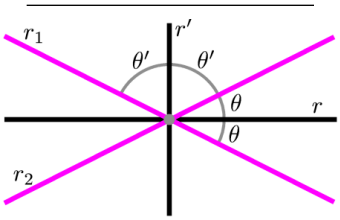


Fig. 62: Bissetrizes de r_1 e r_2.

Primeiramente, vamos caracterizar uma bissetriz em termos de distância:

Proposição 12 *Uma reta r é uma bissetriz das retas r_1 e r_2 se, e somente se, os pontos de r são eqüidistantes das retas r_1 e r_2.*

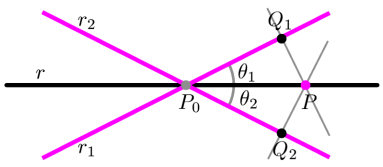


Fig. 63: Bissetriz de r_1 e r_2.

Demonstração. Suponhamos que r é uma bissetriz das retas r_1 e r_2 que se cortam no ponto P_0 e seja $P \in r$ um ponto arbitrário.

A reta perpendicular a r_1 que passa por P intersecta r_1 no ponto Q_1 e a reta perpendicular a r_2 que passa por P intersecta r_2 no ponto Q_2, como mostramos na Figura 63.

Consideramos os triângulos retângulos P_0Q_1P e P_0Q_2P.

Como r é bissetriz de r_1 e r_2, os ângulos PP_0Q_1 e PP_0Q_2 têm a mesma medida e, como os ângulos P_0Q_1P e P_0Q_2P são retos, concluímos que os ângulos P_0PQ_1 e P_0PQ_2 têm, também, a mesma medida.

Portanto, os triângulos P_0Q_1P e P_0Q_2P são congruentes, pois têm o lado P_0P em comum (critério de congruência "ALA": ângulo-lado-ângulo). Em particular, as medidas $d(P, r_1) = |PQ_1|$ e $d(P, r_2) = |PQ_2|$ são iguais.

Como $P \in r$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que os pontos da bissetriz r são eqüidistantes de r_1 e r_2.

Reciprocamente, vejamos que se P é um ponto eqüidistante de r_1 e r_2, então a reta r que passa por P e P_0 é uma bissetriz de r_1 e r_2.

A nossa hipótese equivale a $|PQ_1| = |PQ_2|$ (ver Figura 63).

Como os triângulos P_0Q_1P e P_0Q_2P têm o lado P_0P em comum, obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, que os lados P_0Q_1 e P_0Q_2 têm a mesma medida e portanto os triângulos são congruentes.

Logo, os ângulos Q_1P_0P e Q_2P_0P têm a mesma medida. Isto é, a reta r é bissetriz de r_1 e r_2. □

Exemplo 39 *Verifiquemos que as retas $r_1 : 3x + 4y = 1$ e $r_2 : y = -3$ são concorrentes e determinemos as suas bissetrizes.*

Solução: *As retas r_1 e r_2 são concorrentes pois o determinante da matriz cujas filas são os vetores normais dessas retas, é diferente de zero (lembre que isso implica que os vetores normais são LI, ou seja, não são paralelos):*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 4 \times 0 = 3 \neq 0\,.$$

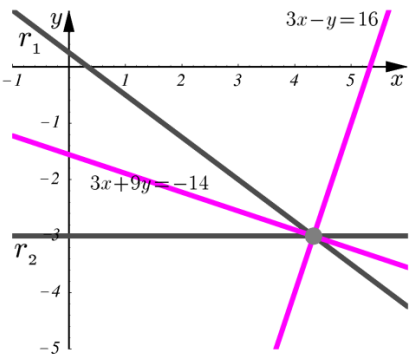


Fig. 64: Exemplo 39.

Para determinar as bissetrizes, tomamos um ponto arbitrário $P = (x, y)$ *do plano, tal que* $d(P, r_1) = d(P, r_2)$*. Calculando as distâncias de* P *a* r_1 *e* r_2 *usando a fórmula (24), obtemos:*

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|y + 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}},$$

ou seja, $\frac{|3x + 4y - 1|}{5} = |y + 3|$, *ou ainda* $|3x + 4y - 1| = 5|y + 3|$.

Eliminando os valores absolutos, a última identidade equivale a:

$$3x + 4y - 1 = 5y + 15 \quad \textit{ou} \quad 3x + 4y - 1 = -5y - 15,$$

obtendo assim duas possíveis equações para a bissetriz r*:*

$$r : 3x - y = 16 \quad \textit{ou} \quad r : 3x + 9y = -14.$$

Observe que as duas bissetrizes são perpendiculares, pois, calculando o produto interno dos vetores normais, temos:

$$\langle (3, -1), (3, 9) \rangle = 3 \times 3 + (-1) \times 9 = 0.$$

Veja, na Figura 64, as retas r_1 *e* r_2 *junto com as suas bissetrizes.*

Distância entre duas retas paralelas ou coincidentes.

Sabemos duas retas r e s no plano podem estar em três possíveis posições, a saber, as retas r e s podem ser:

- *coincidentes*, quando determinam o mesmo conjunto de pontos no plano,
- *concorrentes*, quando se intersectam em um único ponto,
- *paralelas*, quando não se intersectam.

Definimos a distância entre as duas retas paralelas ou coincidentes da seguinte maneira:

Definição 19 *Sejam* r *e* s *duas retas no plano que são paralelas ou coincidentes.*

- *Se* r *e* s *são coincidentes, dizemos que a distância entre elas, que denotamos* $d(r, s)$*, é igual a zero.*
- *Se* r *e* s *são paralelas, a distância* $d(r, s)$ *é a distância de um ponto qualquer de* r *a* s*.*

$$\boxed{d(r, s) = d(P, s), \text{ sendo } P \text{ um ponto qualquer de } r \text{ e } r \parallel s}$$

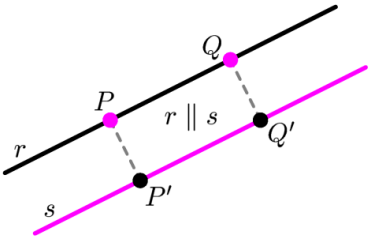


Fig. 65: Distância de r e s.

A distância de r a s. Na Figura 65 você pode usar congruência de triângulos para verificar que $d(P,P') = d(Q,Q')$. Por exemplo, verifique que os triângulos $PP'Q'$ e $QQ'P'$ são congruentes. Portanto, $d(P,s) = d(Q,s)$ quaisquer que sejam os pontos $P, Q \in r$. Logo, o cálculo da distância de r a s independe da escolha do ponto P na reta r. Dito em outras palavras, a distância entre duas retas paralelas ou coincidentes está *bem definida*.

Na Figura 65 mostramos duas retas paralelas r e s. Na reta r escolhemos dois pontos P e Q. A reta perpendicular a r (e portanto a s) que passa pelo ponto P, intersecta s num único ponto P'. Analogamente, a reta perpendicular a r que passa pelo ponto Q intersecta s num único ponto Q'. Você pode usar congruência de triângulos para verificar que $|PP'| = |QQ'|$. Isto é, $d(P,s) = d(Q,s)$. Logo, a distância entre duas retas está bem definida.

Além disso, trocando os papéis de r e s nas considerações acima, vemos que dá no mesmo medir a distância de r a s ou de s a r:

$$d(r,s) = d(P,s) = d(P,P') = d(P',r) = d(s,r)\,.$$

Exemplo 40

Determinemos a distância entre as retas r e s dadas por:

$$r : 3x - 6y = 2 \qquad \textit{e} \qquad s : 2x - 4y = -5$$

Solução: *Note que as retas r e s são paralelas, pois os seus vetores normais $(3,-6)$ e $(2,-4)$ são paralelos.*

De fato, $(2,-4) = \frac{2}{3}(3,-6)$ (Figura 66).

Determinamos a distância de r a s escolhendo um ponto P na r e calculando a sua distância à reta s.

Tomando $x = 0$ na equação de r obtemos $y = -\frac{1}{3}$. Logo, o ponto $P = (0, -\frac{1}{3})$ pertence à reta r. Usando a fórmula (24):

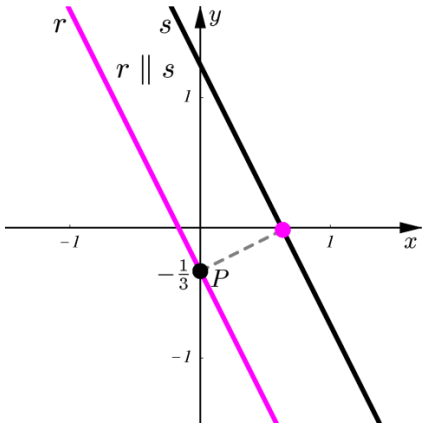


Fig. 66: Exemplo 40.

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|2(0) - 4(-\frac{1}{3}) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{4}{3} + 5}{\sqrt{4+16}} = \frac{\frac{19}{3}}{\sqrt{20}} = \frac{\frac{19}{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{19\sqrt{5}}{30}\,,$$

em unidades de comprimento.

Resumo

Nesta aula vimos como usar o produto interno para calcular áreas de paralelogramos e triângulos, a distância de um ponto a uma reta, a distância entre duas retas paralelas e as bissetrizes de duas retas concorrentes.

Exercícios

1. Em cada um dos itens abaixo, ache o ponto D de modo que $ABCD$ seja um paralelogramo e calcule a sua área.

a. $A = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$, $C = (4, 2)$.

b. $A = (2, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, 2)$.

c. $A = (0, 1)$, $B = (0, -1)$, $C = (5, 2)$.

d. $A = (2, 3)$, $B = (2, -3)$, $C = (3, 2)$.

2. Determine a distância do ponto P à reta r, onde:

a. $P = (\frac{-3}{5}, 2)$, $\quad r : x = 4$.

b. $P = (1, -1)$, $\quad r : 3x - 2y = 0$.

c. $P = (3, 2)$, $\quad r : x + 4y = -3$.

d. $P = (3, -1)$, $\quad r : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

e. $P = (0, -2)$, $\quad r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Verifique que o quadrilátero $ABCD$, $A = (-2, 2)$, $B = (3, -3)$, $C = (3, 0)$ e $D = (1, 2)$, é um trapézio isósceles e calcule sua área usando o produto interno.

4. Determine se as retas r e r' são concorrentes ou não, caso afirmativo, ache as bissetrizes.

a. $r : 3x + y = 1$, $\quad r' : y = 3 - 2x$.

b. $r : x = y + 1$, $\quad r' : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. $r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad r' : \begin{cases} x = s \\ y = -s - 1 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

5. Determine se as retas r e s são paralelas ou não, caso afirmativo, calcule a distância entre elas.

a. $r : 4x - y = -1\,, \quad s : y = 4x - 3\,.$

b. $r : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad s : \begin{cases} x = 6 - 3u \\ y = 2u - 1 \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}\,.$

c. $r : 4x + 2y = 3\,, \quad s : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 2t\,. \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$

d. $r : y = 3 - 2x\,, \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 6t\,. \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$

Auto-avaliação

Se você resolveu os exercícios, você fixou as técnicas desenvolvidas na aula e sabe utilizar o produto interno para determinar áreas e calcular distâncias de pontos a retas e entre retas. Fixe bem a noção de bissetriz resolvendo, em particular, o Exercício 4. Não acumule dúvidas, reveja o conteúdo da aula e peça ajuda aos tutores.

Produto interno - Aplicações (continuação)

Objetivos

- Calcular a distância de um ponto a um círculo e de uma reta a um círculo.
- Determinar retas tangentes a um círculo.
- Entender a posição relativa entre dois círculos e calcular a distância entre eles.

Nesta aula, continuamos a aplicar as técnicas para determinar distâncias, obtidas através do produto interno, para analisar a posição relativa de pontos, retas e círculos com respeito a círculos. Além disso, veremos como determinar as tangentes a um círculo que passam por um ponto dado. Para isso, apresentamos as noções básicas sobre o círculo no plano incluíndo: a determinação da sua equação; a introdução dos conceitos de retas tangente e normal num ponto pertencente ao círculo; o esboço do gráfico do círculo a partir da sua equação e a identificação de pontos interiores e exteriores a um círculo dado.

Preliminares sobre círculos

Sejam C um ponto no plano e r um número real positivo. O *círculo* Γ de centro C e *raio* $r > 0$ é o *lugar geométrico* dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual a r:

$$\Gamma = \{P \,|\, d(P, C) = r\}$$

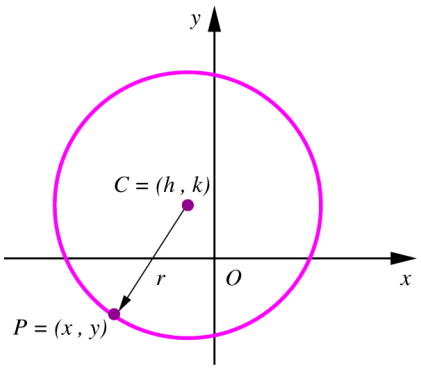


Fig. 67: Círculo de centro C e raio r.

Sobre círculos ...
O conteúdo preliminar que apresentamos sobre círculos foi extraído de *Pré-Cálculo: Módulo 2, Curvas Planas* de J. Delgado Gómez e M. L. Torres Villela, Ed. CECIERJ/CEDERJ.

O símbolo Γ
é a maiúscula da letra grega γ, que se lê "gama".

Note que...
os dois pontos do círculo Γ, situados sobre uma reta passando pelo centro C, estão a uma distância $2r$. Estes pontos são ditos *diametralmente opostos*. O *diâmetro* do círculo é o valor $2r$.

Determinemos a equação que caracteriza os pontos do círculo Γ de centro C e raio $r > 0$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto de Γ, representado pelas suas coordenadas em relação a um sistema de coordenadas cartesianas fixado. Então, se $C = (h, k)$, temos

$$P \in \Gamma \iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r\,.$$

Portanto, o círculo Γ de centro $C = (h, k)$ e raio r, tem equação

$$\boxed{\Gamma : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

A equação do círculo Γ ao lado é sua *equação canônica*.

Essa equação se escreve, desenvolvendo os quadrados, na forma

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0\,,$$

ou seja, a equação do círculo Γ se escreve na chamada *forma normal*:

$$\boxed{\Gamma : x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0}$$

onde $C = -2h$, $D = -2k$ e $F = h^2 + k^2 - r^2$. No entanto, como veremos mais adiante, nem toda equação que tem essa forma representa um círculo no plano.

O *gráfico* do círculo Γ é o conjunto

$$\boxed{\mathrm{Graf}(\Gamma) = \{(x, y) \,|\, (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}}$$

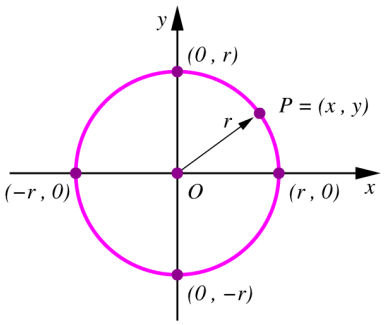


Fig. 68: Círculo de centro $(0, 0)$ e raio r. Exemplo 41

Exemplo 41 *A equação do círculo de centro $C = (0, 0)$ e raio r é*

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

Observe que os pontos $(r, 0)$, $(-r, 0)$, $(0, r)$ e $(0, -r)$ são pontos deste círculo. A figura 68 ilustra o gráfico deste círculo.

Exemplo 42 *A equação $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ representa um círculo de centro $C = (-3, 2)$ e raio $r = \sqrt{5}$.*

Exemplo 43 *A equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ é de um círculo.*

De fato, reescrevemos esta equação como:

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) - 11 = 0 &\iff \\
(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) - 11 = 0 &\iff \\
((x+2)^2 - 4) + ((y-1)^2 - 1) - 11 = 0 &\iff \\
(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16 &\iff \\
(x - (-2))^2 + (y-1)^2 = 4^2.&
\end{aligned}$$

A primeira equivalência $\Longrightarrow$ foi obtida completando os quadrados dos polinômios nas variáveis x e y.

Portanto, o centro do círculo é $C = (-2, 1)$ e o raio é $r = 4$.

Exemplo 44 *Que subconjuntos do plano representam as equações*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0 \quad \textit{e} \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0 \textit{?}$$

Veremos que estes conjuntos não são círculos.

De fato, as duas equações diferem da equação do exemplo anterior apenas no termo independente de x e y, isto é, a constante.

Procedendo de maneira análoga ao exemplo anterior, completamos os quadrados nas duas equações, olhando para os polinômios nas variáveis x e y:

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 5 = 0 &\iff \\
(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 5 = 0 &\iff \\
((x+2)^2 - 4) + ((y-1)^2 - 1) + 5 = 0 &\iff \\
(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0\,,&
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 6 = 0 &\iff \\
(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 6 = 0 &\iff \\
((x+2)^2 - 4) + ((y-1)^2 - 1) + 6 = 0 &\iff \\
(x+2)^2 + (y-1)^2 = -1\,.&
\end{aligned}$$

Como a soma de quadrados de números reais é sempre um número real maior ou igual a zero, temos que a única solução da primeira equação é $x + 2 = 0$ e $y - 1 = 0$. Entretanto, não há solução, em pares de números reais, para a segunda equação.

Logo, apenas o ponto $(-2, 1)$ é solução da primeira equação e não há solução em pares (x, y) de números reais, para a segunda equação, isto é, o conjunto solução da segunda equação é o conjunto vazio.

Cuidado!

Como acabamos de verificar, a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ nem sempre representa um círculo, ela pode representar um único ponto ou o conjunto vazio.

Para determinar o subconjunto do plano que esta equação representa, completamos os quadrados, repetindo o que foi feito no exemplo

anterior:

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2+ax+by+c=0 \\
\iff & \left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)+c=0 \\
\iff & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0 \\
\iff & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \\
\iff & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}.
\end{aligned}$$

Agora, podemos responder à pergunta. Qual o subconjunto do plano

$$\Gamma=\{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2+ax+by+c=0\,\}?$$

$$\Gamma=\begin{cases}
\text{o ponto } P=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right), & \text{se } a^2+b^2-4c=0 \\
\text{o círculo de centro } C \text{ e raio } r, & \text{se } a^2+b^2-4c>0 \\
\text{o conjunto vazio,} & \text{se } a^2+b^2-4c<0.
\end{cases}$$

No segundo caso, o círculo Γ tem:

$$\text{centro } C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \text{raio } r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}.$$

Em cada ponto P de um círculo, considere a reta n que passa pelo centro C e pelo ponto P. Esta reta é dita *normal* ao círculo no ponto P.

A reta t que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta n é chamada *tangente* ao círculo no ponto P.

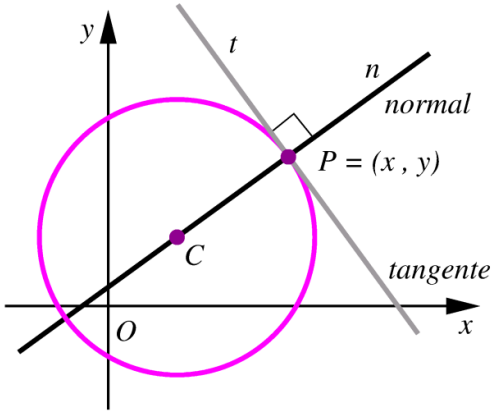


Fig. 69: Tangente e normal ao círculo em P.

Exemplo 45 *Determinemos as equações das retas horizontais e tangentes ao círculo de centro $C=(-2,2)$ e raio $r=3$.*

A equação deste círculo é

$$(x-(-2))^2+(y-2)^2=9\,, \qquad \textit{isto é} \qquad (x+2)^2+(y-2)^2=9\,.$$

As retas tangentes horizontais são perpendiculares à reta vertical s que passa pelo centro $C=(-2,2)$.

A equação da reta s é $x=-2$. Para determinar a interseção do círculo com a reta s, substituímos a equação de s na equação do círculo, ou seja, fazemos $x=-2$ na equação do círculo:

$$\begin{aligned}(-2+2)^2+(y-2)^2=9 &\iff (y-2)^2=9\,, \textit{ extraindo a raiz quadrada,}\\ &\iff |y-2|=3\\ &\iff y-2=3 \ \textit{ ou }\ y-2=-3\\ &\iff y=5 \ \textit{ ou }\ y=-1\,.\end{aligned}$$

Portanto, os pontos do círculo que estão na reta s são $(-2,5)$ e $(-2,-1)$.

As retas tangentes ao círculo passando por estes pontos são horizontais e têm equações $y=5$ e $y=-1$.

Exemplo 46 *Fixemos o círculo Γ de centro $C=(1,2)$ e raio 3, cuja equação é*

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9\,.$$

Os pontos $P=(a,b)$ tais que $(a-1)^2+(b-2)^2\neq 9$ não estão no círculo Γ. Por exemplo, os pontos $A=(-1,3)$ e $B=(2,5)$ têm esta propriedade, pois:

$$(a-1)^2+(b-2)^2=\begin{cases}5, \ \textit{se} \quad (a,b)=(-1,3)\\ 10, \ \textit{se} \quad (a,b)=(2,5).\end{cases}$$

Faça um desenho de Γ e observe que A está na região do plano limitada por Γ e que B está na região do plano exterior ao círculo Γ (região ilimitada).

Os pontos $P=(a,b)$ tais que $(a-1)^2+(b-2)^2<9$ são ditos pontos interiores ao círculo Γ. Por outro lado, os pontos $P=(a,b)$ tais que $(a-1)^2+(b-2)^2>9$ são ditos pontos exteriores ao círculo Γ.

Em geral, se a equação de um círculo é

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

e $P = (x_0, y_0)$ é um ponto do plano, então

- P está no interior do círculo $\iff$ $(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 < r^2$.
- P está no círculo $\iff$ $(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 = r^2$.
- P está no exterior do círculo $\iff$ $(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 > r^2$.

Exemplo 47

Na figura ao lado, esboçamos o gráfico do círculo de centro $C = (-2, 1)$ e raio $r = \frac{5}{2}$, cuja equação é

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \tfrac{25}{4}.$$

O ponto $A = (-2, 3)$ está no interior do círculo e o ponto $B = (1, 2)$ está no exterior do círculo.

Dê outros exemplos de pontos situados no interior e exterior deste círculo.

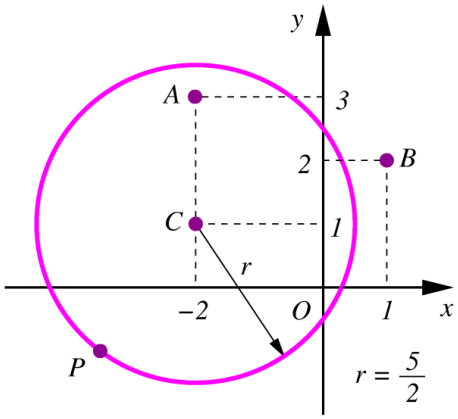


Fig. 70: Círculo de centro $(-2, 1)$ e raio $\frac{5}{2}$.

Resumindo: O círculo Γ de centro no ponto P_0 e raio r divide o plano em três subconjuntos disjuntos (Figura 71):

- O *conjunto dos pontos de* Γ.
- O *conjunto de pontos interiores a* Γ (ou abreviadamente, o *interior* de Γ) que consiste dos pontos P do plano, tais que $d(P, P_0) < r$.
- O *conjunto de pontos exteriores a* Γ (ou simplesmente, o *exterior* de Γ) que consiste dos pontos P do plano, tais que $d(P, P_0) > r$.

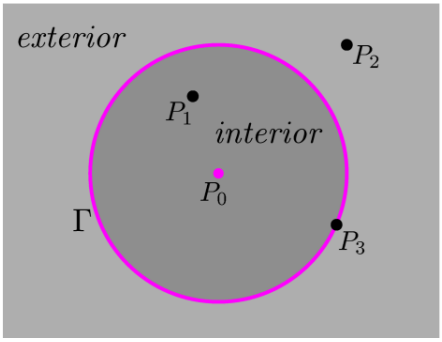


Fig. 71: P_1 é ponto interior a Γ; P_2 é ponto exterior a Γ; $P_3 \in \Gamma$.

Distância de um ponto a um círculo.

A *distância de um ponto P do plano ao círculo Γ*, que designamos por $d(P, \Gamma)$ é por definição a menor das distâncias de P aos pontos de Γ.

Assim, se $P \in \Gamma$, então $d(P, \Gamma) = 0$ e, se $P = P_0$, então $d(P, \Gamma) = r$.

Se P é um ponto do plano que não pertence a Γ e é diferente do centro P_0, então a semi-reta com origem em P_0 que passa por P inter-

secta o círculo Γ num único ponto Q. Usando congruência de triângulos, mostraremos que $d(P,\Gamma) = d(P,Q)$.

Para isso, devemos verificar que qualquer outro ponto Q' de Γ distinto de Q, satisfaz $|PQ'| > |PQ|$.

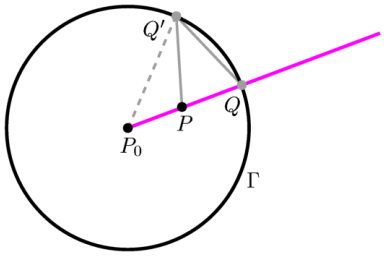


Fig. 72: P é interior a Γ.

Suponhamos que P seja um ponto interior a Γ distinto do centro. Então, o triângulo P_0QQ' é isósceles e portanto $\widehat{P_0QQ'} = \widehat{P_0Q'Q}$ (Figura 72). Além disso, no triângulo PQQ', temos:

$$\widehat{PQ'Q} < \widehat{P_0Q'Q} = \widehat{P_0QQ'} = \widehat{PQQ'}\,.$$

Logo, o ângulo oposto a PQ é menor que o ângulo oposto a PQ'.

Portanto $|PQ| < |PQ'|$.

Suponhamos agora que P seja um ponto exterior a Γ. Como o triângulo P_0QQ' é isósceles (Figura 73), $\widehat{P_0QQ'}$ é um ângulo agudo. Logo, $\widehat{PQQ'}$ é um ângulo obtuso e, portanto, $\widehat{PQ'Q}$ é um ângulo agudo.

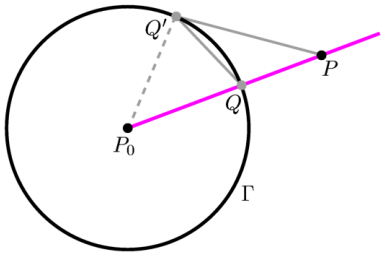


Fig. 73: P é exterior a Γ.

Assim, o ângulo oposto a PQ é menor que o ângulo oposto a PQ' e, portanto, $|PQ| < |PQ'|$.

Desta maneira, vemos que para determinar $d(P,\Gamma)$, sendo $P \neq P_0$, basta determinar $d(P,Q) = |PQ|$. Isto é feito da seguinte maneira:

- Se P é um ponto interior a Γ (Figura 72):

$$d(P,\Gamma) = r - d(P,P_0) = r - |P_0P|\,.$$

- Se P é um ponto de Γ, então $d(P,\Gamma) = 0$.
- Se P é um ponto exterior a Γ (Figura 73):

$$d(P,\Gamma) = d(P,P_0) - r = |P_0P| - r\,.$$

Assim, qualquer que seja a posição relativa de P com respeito a Γ, temos:

$$\boxed{d(P,\Gamma) = |\,r - d(P_0,P)\,| = |\,r - |P_0P|\,|} \qquad (25)$$

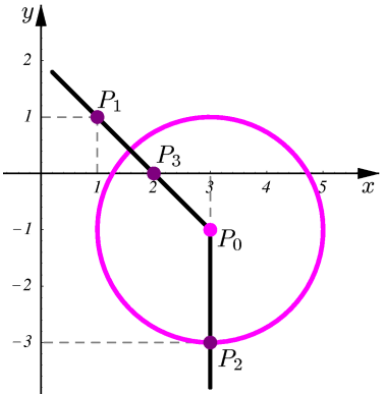


Fig. 74: Exemplo 48 .

Exemplo 48 *Seja Γ o círculo de equação $(x-3)^2+(y+1)^2=4$. Determinemos a posição relativa dos pontos $P_1=(1,1)$, $P_2=(3,-3)$ e $P_3=(2,0)$ com respeito ao círculo Γ e calculemos as suas distâncias a Γ. Veja a Figura 74.*

Solução: *O círculo Γ tem o seu centro no ponto $P_0=(3,-1)$ e raio $r=2$. Para determinar a posição relativa dos pontos com respeito a Γ, devemos calcular a sua distância ao centro P_0:*

a. $d(P_0,P_1)=|P_0P_1|=\sqrt{(1-3)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}>2=r$, *logo P_1 é um ponto exterior a Γ. Usando a equação (25):*

$$d(P_1,\Gamma)=|\,2-|P_0P_1|\,|=|\,2-2\sqrt{2}\,|=2(\sqrt{2}-1)\,.$$

b. $d(P_0,P_2)=|P_0P_2|=\sqrt{(3-3)^2+(-3-(-1))^2}=\sqrt{0+4}=2=r$, *logo P_2 é um ponto de Γ. Portanto $d(P_2,\Gamma)=0$.*

c. $d(P_0,P_3)=|P_0P_3|=\sqrt{(2-3)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}<2=r$, *logo P_3 é um ponto interior a Γ. Usando a equação (25), temos:*

$$d(P_3,\Gamma)=|\,2-|P_0P_3|\,|=|\,2-\sqrt{2}\,|=2-\sqrt{2}\,.$$

Sobre a figura 75

Para mostrar que $d(Q,s)<d(Q',s)$, observe que, no quadrilátero $QPP'Q'$, os ângulos $\widehat{QPP'}$ e $\widehat{PP'Q'}$ são retos, enquanto $\widehat{Q'QP}$ é obtuso, pois o triângulo $QQ'P_0$ é isósceles (verifique!). Isso implica que $QPP'Q'$ não é um paralelogramo e que $|QP|<|Q'P'|$.

Distância de uma reta a um círculo.

Seja Γ o círculo de centro P_0 e raio r. Sabemos que uma reta s pode ou não intersectar o círculo Γ.

A *distância da reta s ao círculo Γ*, que designamos por $d(s,\Gamma)$, é definida como sendo a menor das distâncias dos pontos de Γ à reta s.

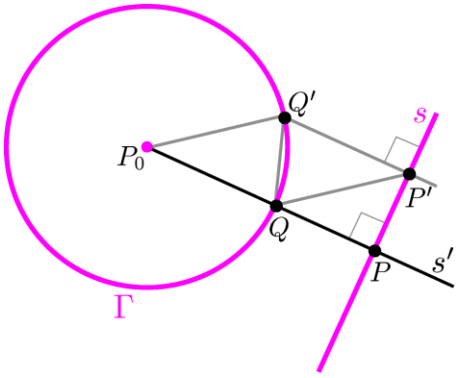


Fig. 75: $d(s,\Gamma)=d(P,Q)=d(P_0,s)-r$.

Assim, se $s\cap\Gamma\neq\varnothing$, então $d(s,\Gamma)=0$.

Para verificar se s e Γ se intersectam ou não, basta determinar a distância do centro P_0 do círculo à reta s:

- Se $d(P_0,s)\leq r$, então $s\cap\Gamma\neq\varnothing$.
- Se $d(P_0,s)>r$, então $s\cap\Gamma=\varnothing$.

Usando seus conhecimentos de Geometria Elementar, você pode verificar que, se $s\cap\Gamma=\varnothing$ e Q é o ponto onde a reta perpendicular a s que passa por P_0 intersecta Γ, então a distância de s a Γ é a distância de Q a s. Isto é, se Q' é outro ponto qualquer de Γ, diferente de Q, então $d(Q',s)>d(Q,s)$ (veja a Figura 75).

Na prática, se $s \cap \Gamma = \varnothing$, a distância de s a Γ é obtida da seguinte maneira:

Calculamos a distância do centro P_0 à reta s (que você já sabe como calcular) e subtraímos a medida do raio (Figura 75). Ou seja,

$$s \cap \Gamma = \varnothing \Rightarrow d(s,\Gamma) = d(P_0,s) - r$$

Portanto, se a reta s tem equação cartesiana $ax + by = c$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, obtemos:

$$d(s,\Gamma) = d(P_0,s) - r = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} - r$$

Exemplo 49 *Sejam s reta de equação cartesiana $3x - 4y = -7$ e Γ o círculo de equação $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$. Calculemos $d(s,\Gamma)$.*

Solução: *Primeiro precisamos obter as coordenadas do centro P_0 e o raio r do círculo Γ.*

Para tanto, devemos escrever a equação de Γ na forma canônica:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

Vejamos: $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} .$$

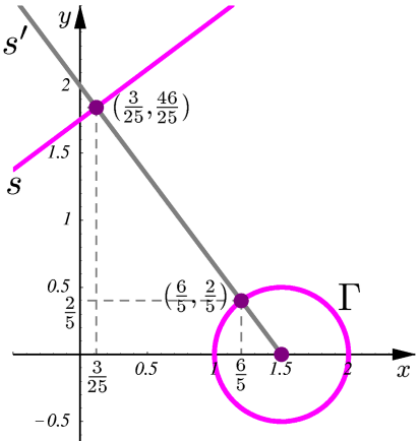


Fig. 76: Exemplo 49.

Assim, Γ é o círculo de centro $P_0 = (\frac{3}{2}, 0)$ e raio $r = \frac{1}{2}$. Logo,

$$d(P_0,s) = \frac{\left|3 \cdot \frac{3}{2} - 4(0) - (-7)\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{9}{2} + \frac{14}{2}}{5} = \frac{23}{10} .$$

Portanto, a distância de s a Γ (em unidades de comprimento) é:

$$d(r,\Gamma) = d(P_0,s) - r = \frac{23}{10} - \frac{1}{2} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} .$$

De volta às retas tangentes a um círculo.

Sabemos que a equação canônica do círculo Γ de centro P_0 e raio r é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto exterior a Γ.

Lembre que...

Uma reta r é *tangente* ao círculo Γ, se $r \cap \Gamma$ consiste de um único ponto, denominado *ponto de tangência*. A propriedade fundamental de uma reta tangente a um círculo é que ela é perpendicular à reta que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de tangência (reta normal a Γ).

Determinemos as equações das retas tangentes a Γ passando pelo ponto P.

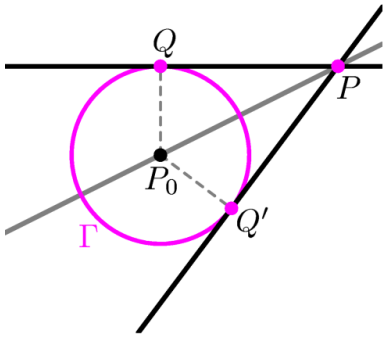


Fig. 77: Tangentes a Γ.

Na Figura 77 vemos que sempre é possível traçar duas retas tangentes a Γ passando pelo ponto P. Para determinar essas retas, precisamos determinar os pontos Q e Q' onde elas são tangentes ao círculo Γ.

Uma reta r passando por P é tangente ao círculo Γ no ponto $Q \in \Gamma$ se, e somente se, $Q \in r$ e r é perpendicular à reta que passa por Q e pelo centro P_0 de Γ. Isto é, os vetores diretores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P_0Q}$ dessas retas, devem ser perpendiculares:

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle = 0\,.$$

Observando que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$ (veja a Figura 77), a identidade anterior se escreve:

$$0 = \langle \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle + \langle \overrightarrow{P_0Q}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle\,.$$

Como $Q \in \Gamma$, temos $\langle \overrightarrow{P_0Q}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle = \|\overrightarrow{P_0Q}\|^2 = d(Q, P_0)^2 = r^2$. Logo:

$$r^2 + \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle = 0\,,$$

e sendo que $-\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P}$, obtemos:

$$\langle \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle = r^2\,.$$

Substituindo nessa identidade as coordenadas $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x, y)$, obtemos:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2\,.$$

Além disso, como o ponto Q pertence ao círculo Γ, as coordenadas (x, y) de Q devem satisfazer também a equação de Γ:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,.$$

Assim, para determinarmos as coordenadas do ponto $Q = (x, y)$ devemos resolver o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases} \tag{26}$$

Esse sistema possui duas soluções $Q = (x, y)$ e $Q' = (x', y')$. Isso significa que há duas retas tangentes a Γ passando pelo ponto P: a reta r que contém P e Q, e a reta r' que contém P e Q' (veja a Figura 77).

Exemplo 50 *Determinemos as retas tangentes ao círculo* $\Gamma : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$ *que passam pelo ponto* $P = (6, 2)$.

Solução: *Substituindo as coordenadas do centro* $P_0 = (x_0, y_0) = (3, 1)$ *de* Γ *e do ponto* $P = (x_1, y_1) = (6, 2)$ *no sistema (26), obtemos:*

$$\begin{cases} (6-3)(x-3) + (2-1)(y-1) = 2 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}, \text{ isto é } \begin{cases} 3(x-3) + y - 1 = 2 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}.$$

Da primeira equação, temos $y - 1 = 2 - 3(x-3) = -3x + 11$ *e substituindo na segunda equação:*

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (-3x+11)^2 = 2 &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 66x + 121 = 2 \\ &\Rightarrow 10x^2 - 72x + 128 = 0 \\ &\Rightarrow 5x^2 - 36x + 64 = 0\,. \end{aligned}$$

As soluções desta última equação são $x = 4$, *e* $x' = \frac{16}{5}$. *Substituindo esses valores na expressão* $y = -3x + 12$, *encontramos os respectivos valores de* y*:*

$x = 4 \Rightarrow y = -3(4) + 12 = 0$, *logo* $Q = (4, 0)$*;*

$x' = \frac{16}{5} \Rightarrow y' = -3 \cdot \frac{16}{5} + 12 = \frac{-48+60}{5} = \frac{12}{5}$, *logo* $Q' = (\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$.

Deixamos você verificar que a reta r_1 *tangente a* Γ *que passa por* P *e* Q *tem equação*

$$r_1 : x - y = 4$$

e que a reta r_2 *tangente a* Γ *que passa por* P *e* Q' *tem equação (veja a Figura 78)*

$$r_2 : 7y - x = 20.$$

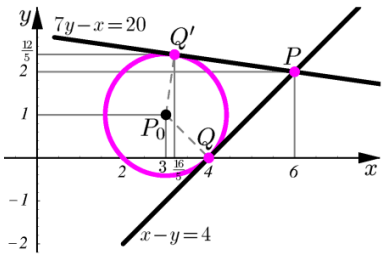


Fig. 78: Exemplo 50.

Além disso, comprove também que a reta que passa pelo ponto P *e pelo centro* P_0 *de* Γ *é uma bissetriz das retas tangentes* r_1 *e* r_2.

Distância entre círculos.

A distância e a posição relativa entre dois círculos podem ser analisadas usando outros recursos da Geometria plana. No entanto, é muito importante que você saiba efetuar a análise no contexto do cálculo de distâncias derivado da noção de produto interno.

Lembre que...

O *interior de um círculo* Γ de centro P e raio r é o conjunto dos pontos Q do plano, tais que $d(P,Q) < r$. Analogamente, o exterior de Γ consiste dos pontos Q do plano, tais que $d(P,Q) > r$. Finalmente, o círculo Γ consiste dos pontos que ficam na fronteira entre o interior e o exterior, isto é, consiste dos pontos Q, tais que $d(P,Q) = r$.

Começamos considerando dois círculos Γ_1 e Γ_2 de centros P_1, P_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente. Pode acontecer que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ ou que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. No segundo caso dizemos que a *distância entre* Γ_1 *e* Γ_2, que denotamos por $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$, é igual a zero.

Estudemos o caso em que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Sejam Ω_1 o interior de Γ_1 e Ω_2 o interior de Γ_2, respectivamente e analisemos, separadamente, as possíveis posições relativas entre Γ_1 e Γ_2:

a. $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ (note que o caso $\Gamma_1 \subset \Omega_2$ é analisado de maneira similar).

b. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ (isto é, os interiores de Γ_1 e Γ_2 não têm pontos em comum).

Caso a. $\Gamma_2 \subset \Omega_1$.

Neste caso, existem ainda as seguintes possibilidades:

Caso a1. $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ **e** $P_1 \in \Gamma_2 \cup \Omega_2$.

Consideremos a semi-reta ℓ com origem em P_1 passando por P_2.

Observe que pode acontecer que $P_1 = P_2$ (círculos concêntricos) em cujo caso consideramos uma semi-reta qualquer com origem em P_1.

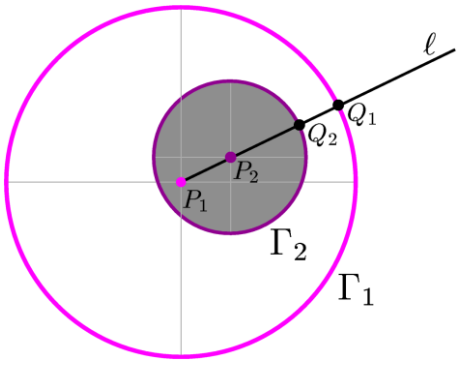


Fig. 79: $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ e $P_1 \in \Gamma_2 \cup \Omega_2$.

A semi-reta ℓ (mesmo no caso dos círculos serem concêntricos) intersecta Γ_1 em um único ponto Q_1 e Γ_2 em um ponto Q_2 diferente de P_1. Você pode verificar, usando Geometria Elementar, que Q_2 é o ponto de Γ_2 que está mais próximo de Γ_1.

Definimos então a *distância de* Γ_1 *a* Γ_2, que designamos por $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$ da seguinte maneira:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |Q_1Q_2| = |P_1Q_1| - |P_1Q_2| = r_1 - |P_1Q_2|\,.$$

Como $|P_1Q_2| = |P_1P_2| + |P_2Q_2|$, temos:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = r_1 - |P_1Q_2| = r_1 - |P_1P_2| - |P_2Q_2| = r_1 - |P_1P_2| - r_2\,.$$

Logo

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = r_1 - r_2 - |P_1P_2|\,,$$

onde r_1 é o raio do círculo maior Γ_1 e r_2 é o raio do círculo menor Γ_2.

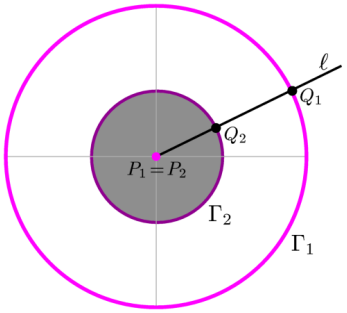


Fig. 80: Círculos concêntricos.

Como o caso em que $\Gamma_1 \subset \Omega_2$ e $P_2 \in \Omega_1$ é analisado de forma análoga, trocando o índice 1 por 2, obtemos

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = r_2 - r_1 - |P_2P_1|\,,$$

onde r_2 é o raio do círculo maior e r_1 é o raio do círculo menor.

Portanto, se um círculo está contido no interior do outro e o centro do círculo maior está contido no interior ou sobre o círculo menor, temos:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |r_2 - r_1| - |P_1P_2|\,.$$

Com esta fórmula calculamos ainda a distância de Γ_1 a Γ_2 quando os círculos são concêntricos (Figura 80), pois, nesse caso, $P_1 = P_2$ e $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |r_2 - r_1|$.

Caso a2. $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ e $P_1 \notin \Gamma_2 \cup \Omega_2$.

Neste caso, a semi-reta ℓ com origem em P_1 e que passa por P_2, intersecta o círculo Γ_2 em dois pontos Q_2 e Q_2', pertencentes a um diâmetro de Γ_2. Isto é, pontos de Γ_2 que são diametralmente opostos.

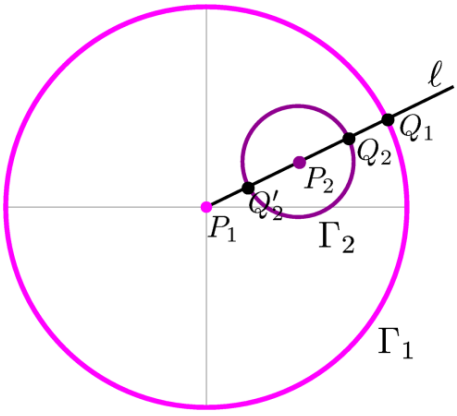


Fig. 81: $\Gamma_2 \subset \Omega_1$ e $P_1 \notin \Gamma_2 \cup \Omega_2$.

Escolhemos os nomes dos pontos Q_2 e Q_2' de modo que $|P_1Q_2'| < |P_1Q_2|$.

Assim, Q_2 é o ponto de Γ_2 que está mais próximo de Γ_1.

Logo, a distância de Γ_1 a Γ_2 é:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |Q_1Q_2| = |P_1Q_1| - |P_1Q_2| = |P_1Q_1| - (|P_1P_2| + |P_2Q_2|)\,.$$

Como

$$|P_1Q_1| = r_1\,, \quad \text{e} \quad |P_2Q_2| = r_2\,,$$

obtemos:

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = r_1 - |P_1P_2| - r_2 = r_1 - r_2 - |P_1P_2|\,.$$

Analogamente, se $\Gamma_1 \subset \Omega_2$ e $P_2 \notin \Omega_1$, obtemos

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = r_2 - r_1 - |P_2P_1|\,.$$

Resumimos a análise dos casos **a1.** e **a2.** da seguinte maneira:

Proposição 13 *Sejam Γ_1 e Γ_2 os círculos de centros P_1 e P_2 e raios r_1 e r_2 respectivamente. Suponhamos que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ e que Γ_1 está contido no interior de Γ_2 ou Γ_2 está contido no interior de Γ_1. Então, a distância de Γ_1 a Γ_2 é:*

$$\boxed{d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |r_2 - r_1| - |P_1P_2|} \tag{27}$$

Caso b. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Consideremos o segmento P_1P_2 ligando os centros de Γ_1 e Γ_2. Como $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, o segmento P_1P_2 intersecta Γ_1 num ponto que designamos Q_1 e também intersecta Γ_2 num ponto que designamos Q_2.

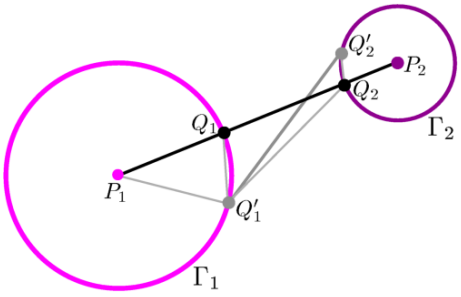


Fig. 82: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \varnothing$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.

Usando Geometria Elementar podemos mostrar que o ponto Q_1 é o ponto de Γ_1 que está mais próximo de Γ_2 e que o ponto Q_2 é o ponto de Γ_2 que está mais próximo de Γ_1 e que quaisquer que sejam os pontos $Q_1' \in \Gamma_1$ e $Q_2' \in \Gamma_2$, com $Q_1 \neq Q_1'$ ou $Q_2 \neq Q_2'$, tem-se $|Q_1Q_2| < |Q_1'Q_2'|$ (veja a Figura 82).

Portanto, $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = d(Q_1, Q_2) = |Q_1Q_2|$.

Como $|Q_1Q_2| = |P_1P_2| - |P_1Q_1| - |P_2Q_2| = |P_1P_2| - r_1 - r_2$, obtemos:

Proposição 14 *Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos de centros P_1 e P_2, raios r_1 e r_2 e interiores Ω_1 e Ω_2 respectivamente. Suponhamos que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Então:*

$$\boxed{d(\Gamma_1, \Gamma_2) = |P_1P_2| - (r_1 + r_2)} \tag{28}$$

Exemplo 51 *Sejam Γ_1 o círculo de equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ e Γ_2 o círculo de equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 36$. Mostremos que Γ_1 e Γ_2 não se intersectam e calculemos $d(\Gamma_1, \Gamma_2)$.*

Solução: *Para mostrar que Γ_1 e Γ_2 não se intersectam devemos mostrar que o sistema abaixo não tem solução:*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 36\,. \end{cases}$$

Suponhamos, pelo absurdo, que o sistema tenha solução e procuremos por ela.

Uma maneira simples de resolver esse sistema é evitar desenvolver os quadrados imediatamente e reescrever a segunda equação de forma que possamos utilizar melhor a primeira. Observe:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2+(y-1)^2=36 &\iff (\underbrace{x-1}+3)^2+(\underbrace{y+2}-3)^2=36\\
&\iff \underbrace{(x-1)^2}+6(x-1)+9+\underbrace{(y+2)^2}-6(y+2)+9=36\\
&\iff \mathbf{2}+6(x-1)+9-6(y+2)+9=36\\
&\iff 6(x-1)-6(y+2)=16\\
&\iff 3(x-1)-3(y+2)=8\\
&\iff 3(x-1)=3y+14\,,
\end{aligned}$$

de onde obtemos x *em função de* y*:* $x=\dfrac{3y+17}{3}$.

Substituindo essa expressão obtida para x *na primeira equação do sistema, temos:*

$$\begin{aligned}
(\frac{3y+17}{3}-1)^2+(y+2)^2=2 &\Rightarrow (\frac{3y+14}{3})^2+(y+2)^2=2\\
&\Rightarrow \frac{(3y+14)^2}{9}+(y+2)^2=2\\
&\Rightarrow (3y+14)^2+9(y+2)^2=18\\
&\Rightarrow 9y^2+60y+107=0\,.
\end{aligned}$$

Essa equação não tem raízes reais, pois o seu discriminante é:

$$\Delta=3600-4\times 9\times 107=36(100-107)<0\,.$$

Isso mostra que círculos Γ_1 *e* Γ_2 *não se intersectam.*

Para calcular $d(\Gamma_1,\Gamma_2)$*, determinamos a distância entre os centros* $P_1=(1,-2)$ *de* Γ_1 *(cujo raio é* $r_1=\sqrt{2}$*) e* $P_2=(-2,1)$ *de* Γ_2 *(cujo raio é* $r_2=6$*):*

$$|P_1P_2|=\sqrt{(-2-1)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\,.$$

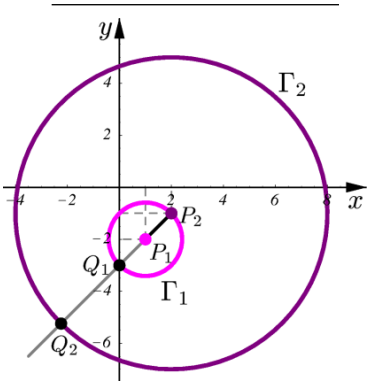


Fig. 83: Exemplo 51

Como a distância de P_1 *a* P_2 *é menor que a soma dos raios* $r_1+r_2=6+\sqrt{2}$*, estamos na situação do Caso a. Calculamos a distância de* Γ_1 *a* Γ_2*, em unidades de comprimento, usando a fórmula (27):*

$$d(\Gamma_1,\Gamma_2)=|r_2-r_1|-|P_1P_2|=6-\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6-4\sqrt{2}\,.$$

Resumo

Nesta aula vimos como aplicar a noção de produto interno (via o cálculo de normas), para determinar a distância de um ponto, uma reta ou um círculo a um círculo e as tangentes a um círculo passando por um ponto dado.

Exercícios

1. Determine a distância do ponto P ao círculo Γ, onde:

a. $P = (1,1)\,, \quad \Gamma : x^2 + (y-2)^2 = 4\,.$

b. $P = (-10,1)\,, \quad \Gamma : (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9\,.$

c. $P = (0,0)\,, \quad \Gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4\,.$

d. $P = (-1,-1)\,, \quad \Gamma : x^2 + y^2 = 16\,.$

e. $P = (-7,1)\,, \quad \Gamma : x^2 + y^2 - 5y + \frac{13}{4} = 0\,.$

2. Calcule a distância da reta r ao círculo Γ, onde:

a. $r : x - \sqrt{3}y = -2\,, \quad \Gamma : (x-7)^2 + (y+1)^2 = 3\,.$

b. $r : y = 2x - 1\,, \quad \Gamma : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4\,.$

c. $r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \Gamma : (x-7)^2 + (y+1)^2 = 3\,.$

d. $r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R},, \quad \Gamma : x^2 + y^2 - 14x + 2y = 12\,.$

3. Dê as equações das retas tangentes ao círculo Γ que passam pelo ponto P, onde:

a. $\Gamma : (x-7)^2 + (y+1)^2 = 3\,, \quad P = (-3,-2).$

b. $\Gamma : x^2 + (y-1)^2 = 4\,, \quad P = (5,1).$

c. $\Gamma : (x-1)^2 + y^2 = 3\,, \quad P = (6,0).$

4. Calcule a distância entre os círculos Γ_1 e Γ_2, onde:

a. $\Gamma_1 : (x-5)^2 + (y-1)^2 = 36$ e $\Gamma_2 : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 1\,.$

b. $\Gamma_1 : x^2 + (y-1)^2 = 64$ e $\Gamma_2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4\,.$

c. $\Gamma_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y+3)^2 = 1$.

d. $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ e $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6(x+y) + 14 = 0$.

5. Considere os círculos:

$\Gamma_1 : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 17$ e $\Gamma_2 : (x+2)^2 + y^2 = 9$.

a. Verifique que os círculos Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

b. Calcule a distância entre os pontos de interseção dos círculos Γ_1, Γ_2.

c. Determine a distância dos pontos de interseção à reta que passa pelos centros de Γ_1 e Γ_2.

6. Determine a posição relativa dos círculos Γ_1 e Γ_2, onde:

a. $\Gamma_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $\Gamma_2 : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 4$.

b. $\Gamma_1 : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ e $\Gamma_2 : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 4$.

c. $\Gamma_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $\Gamma_2 : (x+1)^2 + (y-7)^2 = 4$.

d. $\Gamma_1 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $\Gamma_2 : (x+1)^2 + (y-7)^2 = 4$.

Auto-avaliação

Os exercícios têm por objetivo fixar as técnicas apresentadas na aula. Você deverá resolvê-los todos e, se tiver ainda alguma dificuldade, reveja o conteúdo da aula ou procure ajuda dos tutores. Não esqueça de trocar idéias com seus colegas.

Simetrias e simetrias das cônicas

Objetivos

- Estudar as simetrias em relação a um ponto e em relação a uma reta.
- Estudar as simetrias das cônicas no plano.
- Entender as cônicas degeneradas.

IMPORTANTE
Nas próximas aulas deste Módulo, assumimos os conceitos fundamentais sobre as curvas cônicas, apresentados no Pré-Cálculo, já conhecidos.

Lembremos que as curvas cônicas são assim denominadas por serem obtidas pela interseção de um plano com um *duplo cone circular reto* (Figura 84). Nas ilustrações abaixo, mostramos algumas curvas cônicas: o *círculo*, a *elipse*, a *parábola* e a *hipérbole*:

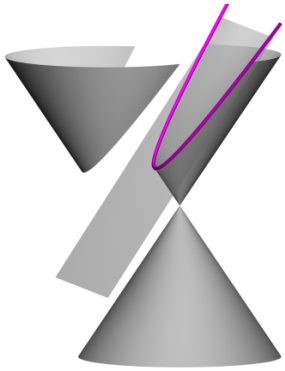


Fig. 85: Círculo.

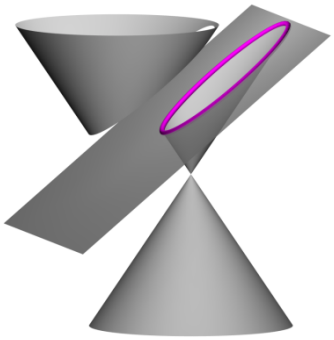


Fig. 86: Elipse.

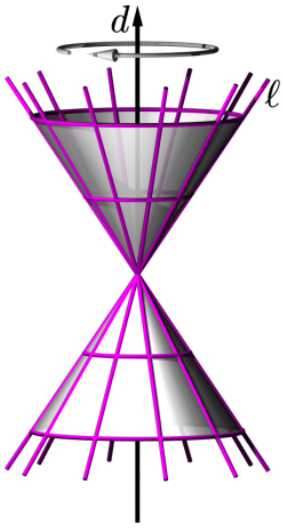


Fig. 84: Cone circular reto. O *duplo cone circular reto* é a superfície descrita por uma reta ℓ chamada *geratriz*, ao girar mantendo um ângulo constante, em torno de outra reta d, chamada *diretriz* do cone duplo, e com a qual tem um ponto em comum, chamado *vértice do cone*. Cortando esse cone duplo por planos, obtemos as *curvas cônicas*.

Nos seus escritos, o matemático grego *Pappus de Alexandria* (290-350), atribuiu ao geômetra grego *Aristeu "o Ancião"* (370-300 a.C.) o crédito de ter publicado o primeiro tratado sobre as *seções cônicas*, referindo-se aos *Cinco livros sobre seções cônicas* de Aristeu, nos quais foi apresentado um estudo cuidadoso das curvas cônicas e as suas propriedades.

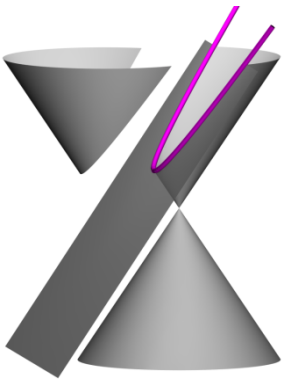


Fig. 87: Parábola.

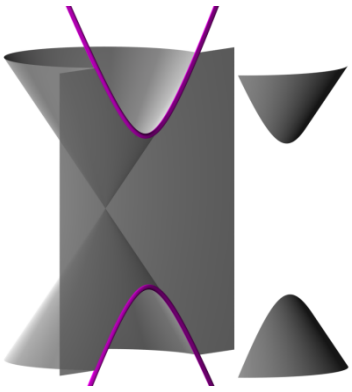


Fig. 88: Hipérbole.

Para saber mais ...
Sobre *Aristeu "o Ancião"*, veja:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Aristaeus.html
e sobre *Menaecmus*, veja:
http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Menaechmus.html

Apolônio de Perga
262 - 190 a.C.
Nasceu em Ionia, Grécia (hoje Turquia) e faleceu em Alexandria, Egito, onde passou a maior parte da sua vida. Embora a sua formação fosse em Astronomia, escreveu sobre vários tópicos matemáticos, sendo *Seções Cônicas* o mais famoso deles. A obra original consistia de oito livros, dos quais apenas sete são conhecidos. Os primeiros quatro chegaram à Europa numa tradução grega e os outros três numa tradução árabe do século IX. Apolônio resumiu nos primeiros três livros, toda a teoria desenvolvida por Aristeu e Euclides, dedicando os cinco livros restantes à pesquisa original sobre as propriedades das seções cônicas. Veja:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Apollonius.html

Segundo Pappus, o matemático grego *Euclides de Alexandria* (325-265 a.C.), contemporâneo de Aristeu, conhecia muito bem os cinco livros sobre as curvas cônicas e evitou aprofundar-se sobre esse assunto na sua obra *Os elementos*, de modo a obrigar os leitores interessados a consultar a obra original de Aristeu. Duzentos anos mais tarde, o astrônomo e matemático grego *Apolônio de Perga* (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados de Aristeu e de Euclides nos oito livros da sua obra *Seções Cônicas*. No entanto, a História indica que as cônicas foram descobertas pelo matemático grego *Menaecmus* (380-320 a.C. aproximadamente) quando estudava como resolver os três problemas famosos da Geometria grega: a triseção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Segundo o historiador Proclus, Menaecmus nasceu em Alopeconnesus, na Ásia Menor (o que hoje é a Turquia), foi aluno de Eudóxio na academia de Platão.

Menaecmus foi o primeiro em mostrar que as elipses, parábolas e hipérboles são obtidas cortando um cone com um plano não paralelo à sua base. Mesmo assim, pensava-se que os nomes dessas curvas foram inventados por Apolônio, porém traduções de antigos escritos árabes indicam a existência desses nomes em épocas anteriores a Apolônio.

Notação. *Designaremos por OXY um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas de origem O e eixos coordenados OX e OY.*

As *equações canônicas* das curvas cônicas no sistema de coordenadas OXY são:

• Elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, com $a>0$ e $b>0$. Se $a=b$ então a elipse é o círculo de raio a.

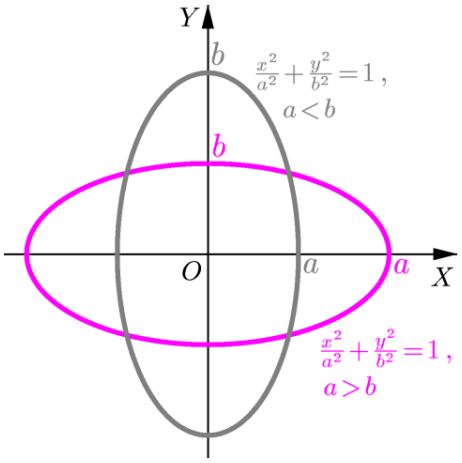


Fig. 89: Elipse.

- Hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, com $a > 0$ e $b > 0$.
- Parábola: $x^2 = ky$ ou $y^2 = kx$, com $k \neq 0$.

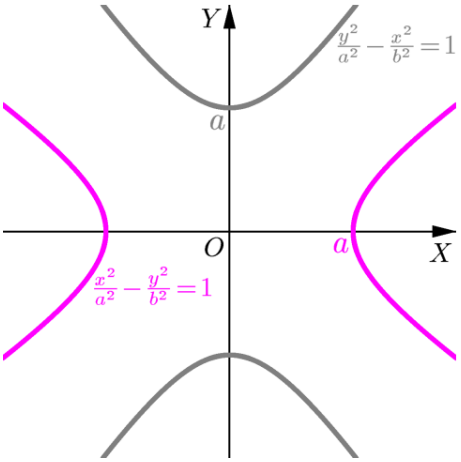


Fig. 90: Hipérbole.

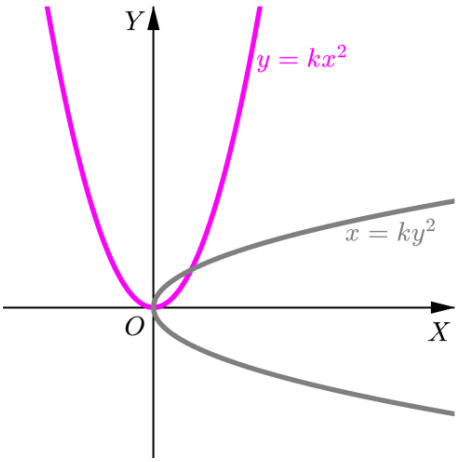


Fig. 91: Parábola.

Simetrias.

Um fato importante é que as equações das cônicas e, portanto, as curvas cônicas que elas representam, são *invariantes* por determinadas transformações do plano denominadas *simetrias*.

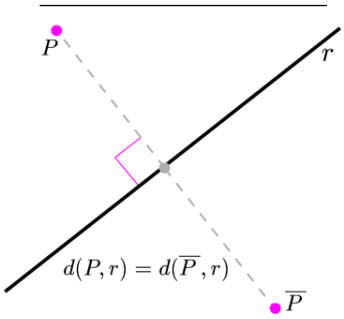


Fig. 92: Simetria relativa a r.

Definição 20 (Simetria em relação a uma reta) *Seja r uma reta no plano. O simétrico de um ponto P do plano em relação à reta r, é o ponto $\overline{P}$ sobre a perpendicular a r que passa por P e cuja a distância a r é a mesma que a distância de P a r (Figura 92).*

Observe que no plano cartesiano, o simétrico de um ponto $P = (x_1, y_1)$ em relação ao eixo OX é o ponto $Q = (x_1, -y_1)$ e o simétrico em relação ao eixo OY é o ponto $S = (-x_1, y_1)$.

Similarmente, $S = (-x_1, y_1)$ é o simétrico de $R = (-x_1, -y_1)$ com respeito ao eixo OX e $Q = (x_1, -y_1)$ é o simétrico de R com respeito ao eixo OY. Veja a Figura 93.

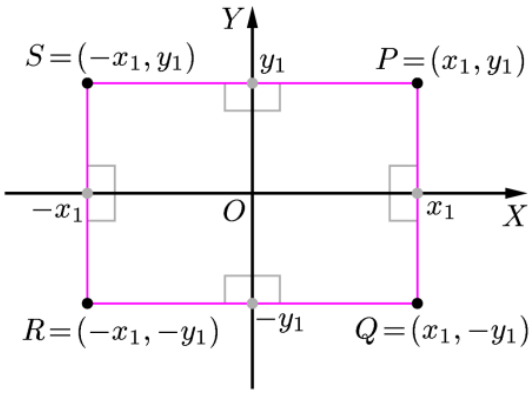


Fig. 93: Simetria em relação aos eixos.

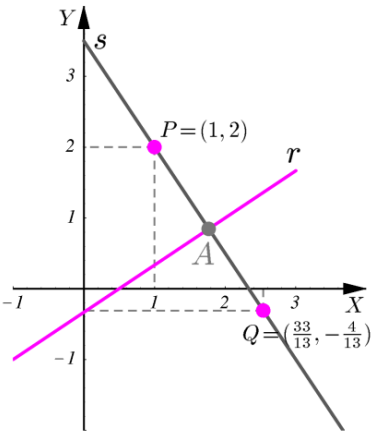


Fig. 94: Exemplo 52.

Note que ...

Na figura acima, o ponto Q é o *simétrico* de P em relação à reta r e também o ponto P é o simétrico do ponto Q em relação à mesma reta. Portanto, vemos que a simetria em relação a uma reta é uma *relação simétrica*.

Exemplo 52 *Determinemos o ponto Q simétrico ao ponto $P = (1, 2)$ em relação à reta $r : 2x - 3y = 1$.*

Solução: *Devemos determinar a reta s perpendicular a r passando pelo ponto P e a distância de P a r.*

O ponto Q procurado, será o ponto da reta s, tal que:

$$Q \neq P \quad \text{e} \quad d(Q, r) = d(P, r).$$

O vetor normal de r é $\overrightarrow{n} = (2, -3)$. Esse vetor é um vetor direção da reta s. Assim, as equações paramétricas de s são:

$$s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t + 2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $d(P, r) = \dfrac{|2 \times 1 - 3 \times 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$, devemos determinar os pontos da reta s cuja distância à reta r é $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$.

Substituindo as coordenadas dos pontos de s na fórmula da distância a r e igualando a $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$, devemos achar os valores do parâmetro t, tais que:

$$\frac{|2(2t + 1) - 3(-3t + 2) - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

isto é, $\dfrac{|13t - 5|}{\sqrt{13}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$. Ou seja, $|13t - 5| = 5$.

Resolvendo a equação obtemos $t = 0$ ou $t = \frac{10}{13}$.

Substituindo o valor $t = 0$ nas equações de s, obtemos o ponto P e substituindo o valor $t = \frac{10}{13}$, obtemos o ponto $Q = (\frac{33}{13}, -\frac{4}{13})$ (veja a Figura 94).

O ponto $Q = (\frac{33}{13}, -\frac{4}{13})$ é o simétrico a $P = (1, 2)$ com respeito à reta r.

Em geral, o cálculo das coordenadas do ponto $Q = (x, y)$ simétrico do ponto $P = (x_1, y_1)$ é dado na seguinte proposição:

Proposição 15 *Sejam $P = (x_1, y_1)$ um ponto e r uma reta de equação $ax + by = c$. Se $Q = (x, y)$ é o simétrico de P em relação a r então:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(2ac + (b^2 - a^2)x_1 - 2aby_1) \\ y = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(2bc + (a^2 - b^2)y_1 - 2abx_1)\,. \end{cases} \tag{29}$$

Demonstração. Para determinarmos Q precisamos encontrar as equações que suas coordenadas devem satisfazer.

Sejam M o ponto médio do segmento PQ e $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ um vetor direção de r (lembre que o $\overrightarrow{\eta} = (a, b)$ é direção normal a r). Então o ponto Q é tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{cases} M \text{ é um ponto da reta } r; \\ \text{o segmento } PQ \text{ é perpendicular a } r, \text{ isto é, } \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = 0. \end{cases}$$

A primeira condição nos diz que as coordenadas de $M = (\frac{x_1+x}{2}, \frac{y_1+y}{2})$ têm que satisfazer a equação de r, ou seja, $a(\frac{x_1+x}{2}) + b(\frac{y_1+y}{2}) = c$. De onde tiramos a primeira equação, pois:

$$\begin{aligned} a(\tfrac{x_1+x}{2}) + b(\tfrac{y_1+y}{2}) = c &\iff a(x_1 + x) + b(y_1 + y) = 2c \\ &\iff ax + by = 2c - ax_1 - by_1. \end{aligned}$$

Da segunda relação extraímos a segunda equação, de fato:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 &\iff \langle (x - x_1, y - y_1), (-b, a) \rangle = 0 \\ &\iff -b(x - x_1) + a(y - y_1) = 0 \\ &\iff -bx + ay = -bx_1 + ay_1. \end{aligned}$$

Logo, as condições dadas inicialmente equivalem às equações obtidas, e, portanto, para determinar as coordenadas de Q basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 2c - ax_1 - by_1 \\ -bx + ay = -bx_1 + ay_1. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$ e somando as equações obtidas chegamos a

$$x = \frac{1}{a^2 + b^2}(2ac + (b^2 - a^2)x_1 - 2aby_1)\,.$$

Multiplicando a primeira equação por b, a segunda por a e somando as equações obtidas chegamos a

$$y = \frac{1}{a^2 + b^2}(2bc + (a^2 - b^2)y_1 - 2abx_1)\,.$$

Assim a proposição está demonstrada. □

Observação.

Note que o simétrico de P é o próprio P se, e somente se, $P \in r$.

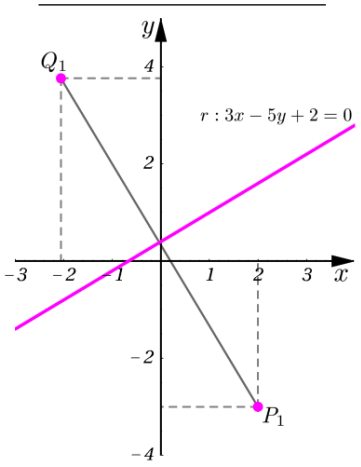


Fig. 95: Exemplo 53.

Exemplo 53 *Seja r a reta de equação $3x - 5y + 2 = 0$. Determinemos os simétricos dos pontos $P_0 = (6, 4)$ e $P_1 = (2, -3)$ em relação à reta r.*

Solução: *O simétrico de P_0 é o próprio P_0, pois P_0 é ponto de r (suas coordenadas satisfazem a equação de r).*

Como P_1 não é ponto de r aplicamos a proposição.

Para isso, é importante identificar bem os elementos da equação.

Vejamos: $a = 3$, $b = -5$ e $c = -2$ (observe que na prova da proposição a equação de r é dada por $ax + by = c$).

Obtemos então: $a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = -16$, e $b^2 - a^2 = 16$.

Logo, as coordenadas do ponto Q_1 são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{34}(2(3)(-2) + 16(2) - 2(3)(-5)(-3)) = -\frac{35}{17} \\ y &= \frac{1}{34}(2(-5)(-2) - 16(-3) - 2(3)(-5)(2)) = \frac{64}{17}. \end{aligned}$$

O ponto $Q_1 = (-\frac{35}{17}, \frac{64}{17})$ é o simétrico de P_1 em relação a r.

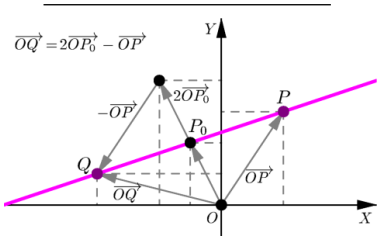


Fig. 96: Simetria relativa a P_0.

O ponto Q simétrico a P em relação ao ponto P_0, é o vértice do paralelogramo $OPRQ$, onde $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OP_0}$. De fato, $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP}$

Definição 21 (Simetria em relação a um ponto) *Seja P_0 um ponto fixado no plano e seja P um ponto do plano distinto de P_0. O simétrico do ponto P em relação ao ponto P_0 é o ponto Q que pertence à reta r que passa por P_0 e P, que é diferente de P e, tal que: $d(P_0, Q) = d(P_0, P)$. Esta definição equivale a P_0 ser o ponto médio do segmento PQ.*

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x_1, y_1)$, da condição de P_0 ser ponto médio de PQ obtemos as coordenadas de $Q = (x, y)$, pois:

$$\left(\frac{x + x_1}{2}, \frac{y + y_1}{2}\right) = (x_0, y_0) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x + x_1) = x_0 \\ \frac{1}{2}(y + y_1) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2x_0 - x_1 \\ y = 2y_0 - y_1. \end{cases} \quad (30)$$

Note que se P_0 é a origem do sistema de coordenadas, então, o simétrico do ponto $P = (x_1, y_1)$ é $Q = (-x_1, -y_1)$.

Exemplo 54 *Se $P_0 = O = (0,0)$ é a origem do sistema de coordenadas e r é uma reta que passa pela origem, verifiquemos que o simétrico de cada ponto de r pertence a r.*

Solução: *Seja r uma reta que passa pela origem dada pelas equações paramétricas:*

$$r : \begin{cases} x = tx_1 \\ y = ty_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (tx_1, ty_1) \in r$. O simétrico de P com respeito à origem é o ponto $Q = (-tx_1, -ty_1) \in r$

Observe que o ponto Q é obtido, também, pela relação (30)*, pois as coordenadas de Q são:*

$$\begin{cases} x = 2(0) - tx_1 = -tx_1 \\ y = 2(0) - ty_1 = -ty_1. \end{cases}$$

Isso mostra que $Q = (-tx_1, -ty_1)$ pertence a r (veja a Figura 97).

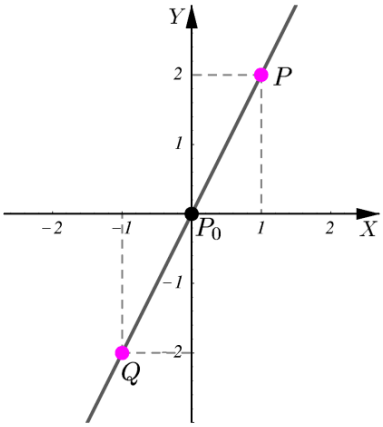


Fig. 97: O ponto P e o seu simétrico Q em relação à origem.

Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 22 *Uma figura geométrica plana é chamada* invariante por uma simetria do plano *se o simétrico de qualquer ponto da figura pertence também à figura.*

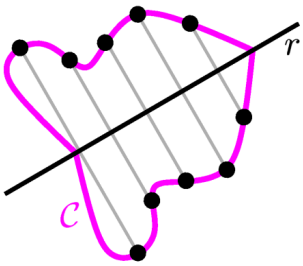


Fig. 98: Curva simétrica com respeito à reta r.

Na definição acima, o termo *figura plana* significa um conjunto qualquer de pontos do plano.

Por exemplo, na Figura 98, vemos uma curva $\mathcal{C}$ que é simétrica com respeito uma reta r, o simétrico de todo ponto de $\mathcal{C}$ é também um ponto de $\mathcal{C}$.

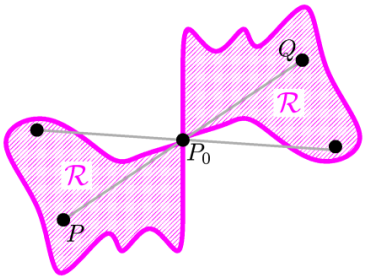


Fig. 99: Região $\mathcal{R}$ simétrica com respeito a P_0.

Analogamente, na Figura 99, vemos uma região $\mathcal{R}$ do plano que é simétrica com respeito ao ponto P_0, pois o simétrico de qualquer ponto P pertencente a $\mathcal{R}$ em relação ao ponto P_0 é também um ponto de $\mathcal{R}$.

Uma propriedade interessante das simetrias em relação a retas e pontos, é que elas levam retas em retas. Isto é, se aplicarmos sobre todos os pontos de uma reta uma simetria (em relação a um ponto ou a uma outra reta), obtemos uma nova reta.

Vamos verificar essas propriedades nas Proposições 16 e 17.

Proposição 16 *Seja r a reta de equação $ax + by = c$. O simétrico de uma reta s em relação à reta r é também uma reta.*

Demonstração. Suponhamos que a reta s tenha as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t)$ um ponto qualquer de r, então as coordenadas do seu simétrico $Q = (x, y)$ são dadas pelas relações (29):

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a^2+b^2}(2ac + (b^2 - a^2)(x_0 + v_1 t) - 2ab(y_0 + v_2 t)) \\ y = \dfrac{1}{a^2+b^2}(2bc + (a^2 - b^2)(y_0 + v_2 t) - 2ab(x_0 + v_1 t)). \end{cases}$$

Logo, o conjunto dos pontos simétricos aos pontos de r é o conjunto dos pontos cujas coordenadas são da forma:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2ac + (b^2 - a^2)x_0 - 2aby_0}{a^2+b^2} + \dfrac{2ac + (b^2 - a^2)v_1 - 2abv_2}{a^2+b^2}\, t \\ y = \dfrac{2bc + (a^2 - b^2)y_0 - 2abx_0}{a^2+b^2} + \dfrac{2bc + (a^2 - b^2)v_2 - 2abv_1}{a^2+b^2}\, t\,, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Essas são as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto:

$$\left(\frac{2ac + (b^2 - a^2)x_0 - 2aby_0}{a^2+b^2}, \frac{2bc + (a^2 - b^2)y_0 - 2abx_0}{a^2+b^2} \right)$$

e é paralela ao vetor:

$$\left(\frac{2ac + (b^2 - a^2)v_1 - 2abv_2}{a^2+b^2}, \frac{2bc + (a^2 - b^2)v_2 - 2abv_1}{a^2+b^2} \right).$$

Exemplo 55 *Seja a reta $r : x - 2y = 0$. Determinemos o simétrico da reta $s : 2x + y - 2 = 0$ em relação à reta r.*

Solução: *Observe que a reta r é perpendicular à reta s, pois os seus vetores direção são perpendiculares. Logo, o simétrico da reta s em relação à reta r é a própria reta s.*

Esse fato pode ser ainda verificado fazendo uso dos resultados acima descritos.

Com efeito, pela Proposição 16 sabemos que o simétrico da reta s em relação à reta r é uma reta s'.

Para determinar a reta s', devemos achar os simétricos de dois pontos quaisquer de s, com respeito a r.

Os simétricos dos pontos $P_1 = (0,2)$ e $P_2 = (1,0)$ de s são, respectivamente, os pontos $Q_1 = \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $Q_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Podemos verificar que a equação da reta s' que passa por Q_1 e Q_2 é $2x + y - 2 = 0$, que é a própria reta s.

Proposição 17 *O simétrico de uma reta s em relação a um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é uma reta.*

Demonstração. Seja s a reta de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_1 + v_1 t \\ y = y_1 + v_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (x_1 + v_1 t, y_1 + v_2 t)$ um ponto qualquer de r.

As coordenadas do ponto $Q = (x, y)$ simétrico ao ponto P em relação a P_0 são obtidas das relações (30):

$$\begin{cases} x = 2x_0 - (x_1 + v_1 t) \\ y = 2y_0 - (y_1 + v_2 t). \end{cases}$$

Logo, o conjunto dos pontos simétricos aos pontos de r é o conjunto dos pontos cujas coordenadas são da forma:

$$\begin{cases} x = 2x_0 - x_1 - v_1 t \\ y = 2y_0 - y_1 - v_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

que são as equações paramétricas da reta paralela ao vetor (v_1, v_2) que passa pelo ponto $(2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1)$. □

Observação:
Na demonstração da Proposição 17, vemos que duas retas simétricas com respeito a um ponto são paralelas.

Exemplo 56 *Determinemos o simétrico da reta* $s: 2x + y - 2 = 0$ *em relação a* $P_0 = (-2, 1)$.

Solução: *Pela proposição anterior sabemos que o simétrico de* s *é uma reta. Logo, basta encontrarmos o simétrico de dois pontos de* s.

Usando as relações (30) *vemos que os simétricos dos pontos* $P_1 = (0, 2)$ *e* $P_2 = (1, 0)$ *de* s *são, respectivamente,* $Q_1 = (-4, 0)$ *e* $Q_2 = (-5, 2)$. *A equação da reta que passa por esses pontos é* $2x + y + 8 = 0$.

Simetrias das cônicas.

Sabemos que um ponto P do plano pertence a uma cônica $\mathcal{C}$ se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de $\mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é simétrica com respeito a um ponto P_0 ou com respeito a uma reta r se, e somente se, *as coordenadas do simétrico de cada ponto de* $\mathcal{C}$ (com respeito ao ponto P_0 ou com respeito à reta r) *também satisfazem a equação de* $\mathcal{C}$.

A princípio fazemos a análise da simetria para as equações das cônicas na forma canônica.

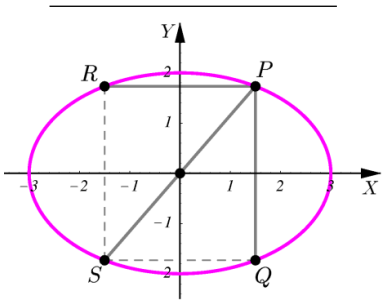


Fig. 100: Simetrias da elipse.

Proposição 18 (Simetrias das elipses e hipérboles) *As elipses e as hipérboles são invariantes por simetrias em relação aos seus eixos (no caso da equação canônica, esses eixos são os eixos coordenados) e também são invariantes por simetria em relação ao seu centro (no caso da equação canônica, o centro é a origem).*

Demonstração. Seja $P = (x, y)$ um ponto da elipse $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, então as coordenadas de P satisfazem a equação de $\mathcal{E}$.

Como os simétricos de P em relação aos eixos coordenados OX e OY são $Q = (x, -y)$ e $R = (-x, y)$, respectivamente, e como $(-x)^2 = x^2$ e $(-y)^2 = y^2$, vemos que as coordenadas de Q e de R satisfazem a equação de $\mathcal{E}$.

Além disso, o simétrico de P em relação à origem é $S = (-x, -y)$. Logo, as coordenadas de S também satisfazem a equação da elipse $\mathcal{E}$. Veja a Figura 100.

O mesmo argumento mostra a proposição para as hipérboles, pois

a equação canônica dessas cônicas é dada, também, em termos dos quadrados das coordenadas dos seus pontos. Veja a Figura 101 □

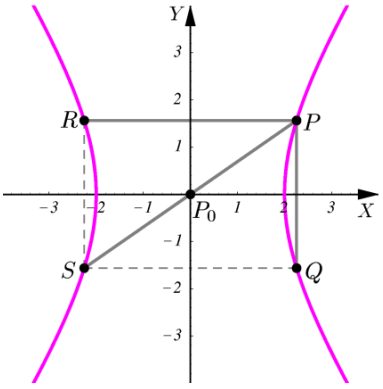


Fig. 101: As simetrias da hipérbole.

Proposição 19 (Simetrias das parábolas) *Uma parábola é invariante por simetria em relação à reta que contém seu vértice e seu foco (no caso da equação na forma canônica essa reta pode ser o eixo OX ou o eixo OY).*

Demonstração. Consideremos a parábola $\mathcal{P} : x^2 = ky$. A reta que contém o vértice e o foco de $\mathcal{P}$ (reta focal de $\mathcal{P}$) é o eixo OY. Sabemos que o simétrico de um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ em relação ao eixo OY é o ponto $R = (-x, y)$.

Como $(-x)^2 = x^2$, e $P \in \mathcal{P}$, temos que $(-x)^2 = ky$.

Logo $R = (-x, y) \in \mathcal{P}$ e portanto $\mathcal{P}$ é invariante pela simetria em relação ao seu eixo focal (eixo OY). Por outro lado, a reta focal da parábola $\mathcal{P}' : y^2 = kx$ é o eixo OX. Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}'$, o seu simétrico em relação ao eixo OX é $Q = (x, -y)$, que também satisfaz a equação. Logo $\mathcal{P}'$ é invariante pela simetria em relação ao seu eixo focal. □

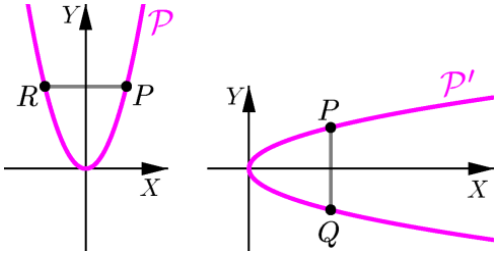


Fig. 102: Simetria das parábolas.

Muitas vezes a equação de uma cônica não é apresentada na forma canônica. Na verdade, as cônicas aparecem como o conjunto de soluções de uma *equação geral do segundo grau* da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (31)$$

com A, B, C não simultaneamente nulos. Os valores A, B, C, D, E, F são chamados *os coeficientes da equação*.

Faremos o estudo dessas equações por etapas, introduzindo conceitos que auxiliarão na determinação do conjunto de soluções e na identificação da cônica.

Sabemos que há equações do segundo grau em que o conjunto de soluções consiste de duas retas ou de apenas um ponto ou é o conjunto vazio. Vejamos:

Lembre que...

Para determinar o *grau de uma equação algébrica* tomamos cada termo da equação e somamos os valores dos expoentes das variáveis que nele aparecem. O valor encontrado é o *grau do termo*. O grau da equação é o maior dentre os graus dos seus termos. Na equação (31), os termos Ax^2, Bxy e Cy^2 são de grau 2 e como os outros termos que aparecem são de grau 1 ou zero, concluímos que a equação (31) é de grau 2.
Além disso, note que se $A = B = C = 0$ então a equação não é do segundo grau.

Definição 23 (Cônicas degeneradas) *Uma cônica degenerada é uma equação do segundo grau a duas variáveis em que o conjunto de soluções reais é vazio ou não é uma elipse, nem uma hipérbole e nem uma parábola.*

Lugar geométrico
O conjunto formado pelos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem uma equação algébrica nas variáveis x e y é chamado *lugar geométrico*. Essa expressão é oriunda da palavra *loci*, já usada por Aristeu e os geômetras que lhe precederam nas suas investigações sobre as seções cônicas.

Exemplo 57 *Verifiquemos não existem números reais x e y, tais que $(x-1)^2 + (y+4)^2 = -1$. Isto é, o conjunto solução dessa identidade é o conjunto vazio.*

Solução: *De fato, a soma dos quadrados de dois números reais é sempre um número real não-negativo. Portanto essa equação do segundo grau representa uma cônica degenerada, o conjunto vazio.*

Exemplo 58 *Verifiquemos que a equação:*

$$\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 0\,,$$

tem por solução um único ponto e portanto, o lugar geométrico que ela representa consiste de um ponto só.

Lembre que...
A soma $a^2 + b^2$ dos quadrados de dois números reais a e b é igual a zero se, e somente se, cada um dos números a e b é igual a zero.

Solução: *Reescrevendo a equação como soma de dois quadrados, temos:*

$$\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0\,.$$

O ponto (x, y) satisfaz essa equação se, e somente se:

$$x + 5 = 0 \qquad \textbf{e} \qquad y - 1 = 0\,.$$

Isto é, $x = -5$ e $y = 1$. Logo, o conjunto das soluções da equação proposta consiste apenas do ponto $(-5, 1)$.

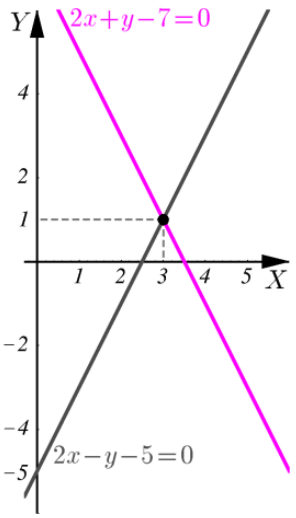


Fig. 103: Exemplo 59.

Exemplo 59 *O lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação de segundo grau $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)2}{16} = 0$, é formado por duas retas concorrentes.*

Solução: *A equação dada se escreve como diferença de dois quadrados:*

$$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{4}\right)^2 = 0\,,$$

que equivale ao produto:

$$\left(\frac{x-3}{2} + \frac{y-1}{4}\right)\left(\frac{x-3}{2} - \frac{y-1}{4}\right) = 0.$$

Desta identidade vemos que:

$$\frac{x-3}{2}+\frac{y-1}{4}=0 \quad \textit{ou} \quad \frac{x-3}{2}-\frac{y-1}{4}=0.$$

A primeira identidade equivale à equação $2x+y-7=0$ *e a segunda equivale à equação* $2x-y-5=0$*. Essas equações representam retas no plano. Verifique, você mesmo que essas retas se intersectam no ponto* $(3,1)$ *(Figura 103).*

Exemplo 60 *O lugar geométrico da equação* $(y-2)^2=3$ *consiste de duas retas paralelas.*

Solução: *De fato, da equação temos as possibilidades (veja a Figura 104):*

$$y-2=+\sqrt{3} \quad \textit{ou} \quad y-2=-\sqrt{3}\,,$$

que são as retas paralelas:

$$y=2+\sqrt{3} \quad ou \quad y=2-\sqrt{3}\,.$$

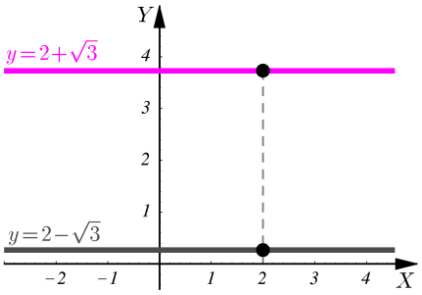


Fig. 104: Exemplo 60.

Exemplo 61 *O lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação* $\frac{(x-3)^2}{8}=0$ *consiste de uma reta (isto é, duas retas coincidentes).*

Solução: *Com efeito, temos:*

$$\frac{(x-3)^2}{8}=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0\,,$$

que é a equação de uma reta vertical. Veja a Figura 105.

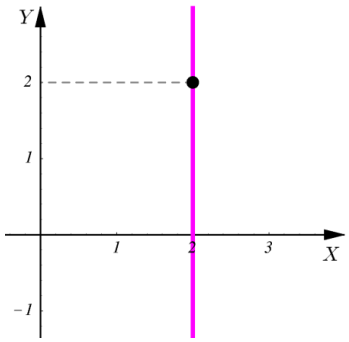


Fig. 105: Exemplo 61.

Exemplo 62 *O lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação:*

$$\frac{(x-3)^2}{8}=-3\,,$$

é o conjunto vazio.

Solução: *Observe que a equação não tem solução real, pois não existe número real cujo quadrado seja negativo.*

Classificação das cônicas degeneradas.

Vamos resumir as nossas considerações e exemplos sobre as cônicas degeneradas no seguinte esquema:

Esquema de classificação das cônicas degeneradas. $\Longrightarrow$

Cônica	Equação	Lugar geométrico	Exemplo
Elipse degenerada	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\lambda$	$\varnothing$, se $\lambda<0$ $\{(x_0,y_0)\}$, se $\lambda=0$	57 58
Hipérbole degenerada	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$	Retas concorrentes: $r_1: bx+ay-bx_0-ax_0=0$ $r_2: bx-ay-bx_0+ay_0=0$ com $r_1\cap r_2=\{(x_0,y_0)\}$	59
Parábola degenerada	(A) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\mu$ ou (B) $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\mu$	(A) reta $x=x_0$, se $\mu=0$; paralelas $x=x_0+a\sqrt{\mu}$, $x=x_0-a\sqrt{\mu}$, se $\mu>0$; $\varnothing$ se $\mu<0$ (B) reta $y=y_0$, se $\mu=0$; paralelas $y=y_0+a\sqrt{\mu}$, $y=y_0-a\sqrt{\mu}$, se $\mu>0$; $\varnothing$ se $\mu<0$	60 61 62

Resumo

Nesta aula aprendemos a noção de simetria em relação a um ponto e a uma reta. Revisamos o conceito de curva cônica e analisamos suas simetrias. Além disso, estudamos e classificamos as cônicas degeneradas a partir de exemplos concretos.

Exercícios

1. Sejam as retas $r: 2x+3y+6=0$, $s: 6x-4y+2=0$ e os pontos $P_1=(-1,1)$, $P_2=(0-2)$.

a. Determine os pontos simétricos Q_1 e Q_2, aos pontos P_1 e P_2, respectivamente, em relação à reta r.

b. Determine os pontos simétricos R_1 e R_2, aos pontos P_1 e P_2, respectivamente, em relação à reta s.

c. Encontre os pontos simétricos M_1 e M_2, aos pontos Q_1 e Q_2, respectivamente, em relação à reta s.

d. Encontre o ponto de interseção das retas r e s. Denote esse ponto P_0. Ache os pontos T_1 e T_2 simétricos aos pontos P_1 e P_2,

respectivamente, em relação ao ponto P_0.

Compare com os pontos obtidos no item c.

2. Seja a reta $r: x - 5y + 1 = 0$.

a. Determine o simétrico da reta $s: x - y + 1 = 0$ em relação a r.

b. Considere o triângulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (-1, 4)$, $C = (3, 1)$. Encontre a figura geométrica correspondente ao simétrico desse triângulo em relação à r. A figura obtida é um triângulo?

Em caso afirmativo, os triângulos são congruentes?

3. Determine o simétrico da reta $x - 2y + 4 = 0$ em relação ao ponto de interseção das retas $x - y = 0$ e $2x - y = 3$.

4. Verifique que o círculo de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é invariante pela simetria em relação a qualquer reta que passe pela origem.

5. Verifique que as cônicas abaixo são invariantes pelas seguintes simetrias: em relação à reta $x = x_0$, em relação à reta $y = y_0$ e em relação ao ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.

a. $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

b. $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

6. Conclua que, se uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é invariante por simetria em relação à reta bissetriz do primeiro quadrante então a elipse é, de fato, um círculo.

7. Seja a equação $A(x - a)^2 + B(y - b)^2 = \lambda$. Identifique as cônicas abaixo incluindo os casos degenerados.

Nos casos degenerados, descreva o conjunto solução da equação.

a. $A > 0,\ B > 0,\ \lambda = 0$;
b. $A > 0,\ B < 0,\ \lambda = 0$;
c. $A > 0,\ B > 0,\ \lambda = A$;
d. $A < 0,\ B > 0,\ \lambda = 0$;
e. $A < 0,\ B > 0,\ \lambda = B$;
f. $A = 0,\ B > 0,\ \lambda = 0$.

Auto-avaliação

Se você resolveu os exercícios de 1 a 6, você entendeu bem o conceito de simetria em relação à uma reta e simetria em relação a um ponto. Resolvendo o exercício 7 você faz um trabalho de fixação do conceito de cônicas degeneradas e do conjunto de pontos do plano que essas equações definem. Caso tenha alguma dificuldade, releia a aula e tente novamente resolver os exercícios.

Cônicas - Translação de sistemas de coordenadas

Objetivos

- Entender a mudança de coordenadas pela translação do sistema cartesiano.
- Identificar uma cônica transladada a partir da sua equação geral.
- Construir cônicas com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Nesta aula estudaremos as equações de segundo grau

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{32}$$

Isto é, equações da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $B = 0$.

A identificação do lugar geométrico representado pela equação (32) é feita *transladando o sistema de coordenadas*.

Definição 24 (Translação do sistema de coordenadas) *Dados um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas OXY do plano e um ponto O', a translação de OXY para o ponto O' é a construção de um novo sistema cartesiano ortogonal de coordenadas $O'X'Y'$ traçando paralelas aos eixos do sistema OXY, passando pelo ponto O', preservando a orientação e a unidade de medida. O ponto O', onde se intersectam os novos eixos $O'X'$ e $O'Y'$, é a origem do novo sistema de coordenadas.*

O sistema $O'X'Y'$ assim construído é chamado *o transladado do sistema OXY para o ponto P_0* (veja a Figura 106).

Seja P um ponto do plano. Designamos por (x, y) as coordenadas de P com respeito ao sistema OXY e por (x', y') as coordenadas de P com respeito ao sistema transladado $O'X'Y'$.

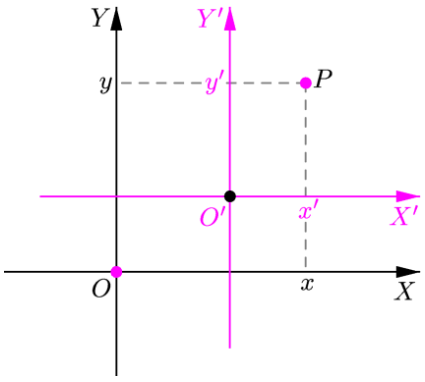


Fig. 106: Translação do sistema OXY para o sistema $O'X'Y'$.

Naturalmente surge a seguinte questão:

como são relacionadas as coordenadas (x, y) e (x', y') do ponto P dado?

Mudança de coordenadas entre sistemas transladados.

Seja P um ponto do plano, designamos $P = (x, y)$ então as suas coordenadas no sistema OXY são , e as suas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são $P = (x', y')$.

Tracemos por P retas r, s paralelas aos eixos coordenados OX e OY, respectivamente. Lembre que OX é paralelo a $O'X'$ e OY é paralelo a $O'Y'$ (Figura 107).

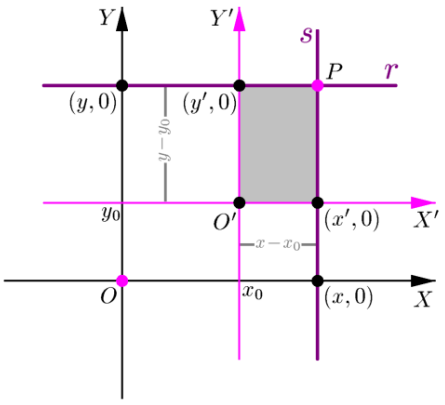


Fig. 107: Mudança de coordenadas.

Segue, da definição de sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, que a reta r intersecta o eixo OY no ponto de coordenadas $(0, y)$ e o eixo $O'Y'$ no ponto de coordenadas $(0, y')$, enquanto que a reta s intersecta o eixo OX no ponto $(x, 0)$ e o eixo $O'X'$ no ponto $(x', 0)$. Na Figura 107 vemos que:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{33}$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas da origem O' no sistema OXY.

Observação.

As *relações de mudança de coordenadas* (33) independem da posição da origem O' e da posição relativa do ponto P.

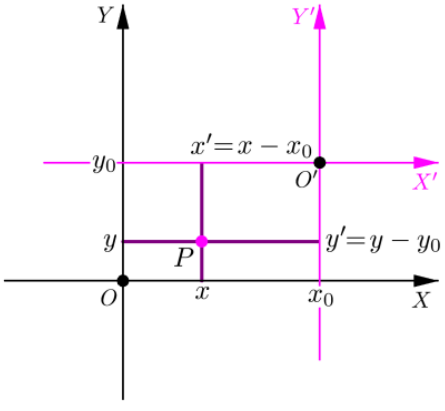


Fig. 108: As relações (33) independem das posições relativas dos pontos.

De fato, na Figura 108 mostramos um sistema transladado $O'X'Y'$ e o ponto P no seu terceiro quadrante. Neste caso, observamos que os números $x - x_0$ e $y - y_0$ são negativos e que as equações

(33) continuam sendo as equações de mudança de coordenadas. O mesmo acontece independentemente do quadrante em que O' esteja com respeito ao sistema OXY. Verifique!

Notação.
Daqui em diante, quando desejarmos fazer menção explícita ao sistema de coordenadas com respeito ao qual estejam sendo consideradas as coordenadas de um ponto, escreveremos essas coordenadas colocando o sistema de coordenadas como sub-índice. Por exemplo, $P = (a, b)_{O'X'Y'}$ indica que o ponto P tem coordenadas (a, b) com respeito ao sistema de coordenadas $O'X'Y'$.

Exemplo 63 *Sejam dois sistemas cartesianos ortogonais de coordenadas OXY e $O'X'Y'$, onde $O' = (-2, 3)_{OXY}$. Consideremos o ponto $P = (5, -1)_{O'X'Y'}$ e a reta r de equação $2x' - y' + 1 = 0$ com respeito ao sistema $O'X'Y'$.*

Determinemos as coordenadas de P no sistema OXY e a equação de r no sistema OXY.

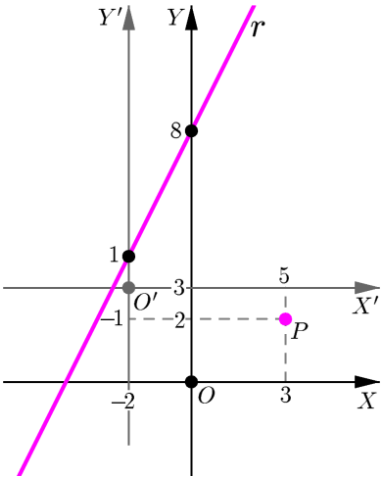


Fig. 109: Exemplo 63.

Solução: *O sistema $O'X'Y'$ é obtido transladando o sistema OXY até o ponto $O' = (x_0, y_0) = (-2, 3)$.*

Usando a segunda das relações (33)*, temos:*

$$\begin{cases} x = x' + x_0 = 5 + (-2) = 3 \\ y = y' + y_0 = -1 + 3 = 2 \end{cases} .$$

Assim, $P = (3, 2)_{OXY}$.

Para determinar a equação de r no sistema OXY substituímos as coordenadas x' e y' da primeira das relações (33)*:*

$$\begin{cases} x' = x - x_0 = x - (-2) = x + 2 \\ y' = y - y_0 = y - 3 \end{cases} ,$$

na equação $r : 2x' - y' + 1 = 0$ e obtemos $r : 2(x + 2) - (y - 3) + 1 = 0$.

Simplificando obtemos a equação de r no sistema OXY:

$$r : 2x - y + 8 = 0 .$$

Exemplo 64 **Cônicas transladadas.** *Se $O' = (x_0, y_0)$ é um ponto do plano, as equações abaixo representam curvas cônicas:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,, \tag{34}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \textit{e} \quad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,, \tag{35}$$

$$(x-x_0)^2 = k(y-y_0) \quad \textit{e} \quad (y-y_0)^2 = k(x-x_0)\,. \tag{36}$$

Verifiquemos que a equação (34) *representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos OX e OY com centro no ponto O' (Figura 110), que as equações* (35) *representam hipérboles com centro no ponto O' e eixos paralelos aos eixos OX e OY (Figura 111) e que as equações* (36) *representam parábolas de vértice no ponto O' e eixo focal paralelo aos eixos coordenados (Figura 112).*

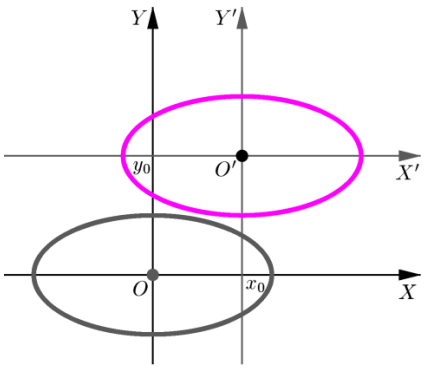


Fig. 110: Elipse.

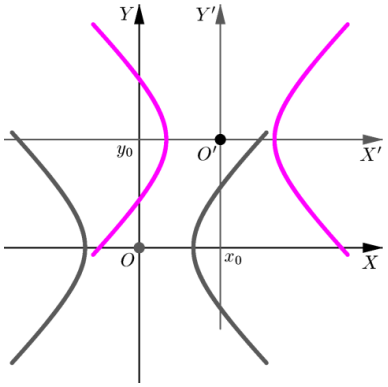


Fig. 111: Hipérbole.

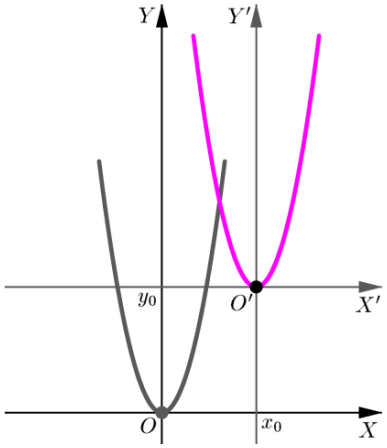


Fig. 112: Parábolas.

Solução: *Seja $O'X'Y'$ o sistema ortogonal de coordenadas obtido transladando o sistema de coordenadas OXY para o ponto $O' = (x_0, y_0)$.*

Substituindo a primeira das relações (33) *em* (34), (35) *e* (36), *obtemos as equações dessas cônicas com respeito ao sistema $O'X'Y'$ na forma canônica:*

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1\,, \qquad (x')^2 = ky' \quad \textit{e} \quad (y')^2 = kx'\,,$$

que são as equações canônicas da elipse, hipérbole e parábolas, respectivamente, no sistema $O'X'Y'$ com origem O'.

Conhecendo as translações estamos prontos para o estudo da equação geral do segundo grau no caso particular em que $B = 0$, equação (32):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

A análise dessa equação leva às cônicas estudadas no Módulo 2, do Pré-Cálculo. Essas cônicas são obtidas a partir da equação acima completando os quadrados.

Para isso consideramos separadamente os casos:

Caso i) $A \neq 0$ e $C \neq 0$,
Caso ii) $A = 0$ ou $C = 0$.

Caso i) $A \neq 0$ e $C \neq 0$.

Neste caso, reescrevemos a equação (32) na forma:

$$A(x^2 + \tfrac{D}{A}x) + C(y^2 + \tfrac{E}{C}y) + F = 0\,,$$

completando os quadrados dentro dos parênteses, obtemos:

$$A(x^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{D^2}{4A^2}) + C(y^2 + \tfrac{E}{C}y + \tfrac{E^2}{4C^2}) + F = \tfrac{D^2}{4A} + \tfrac{E^2}{4C}\,,$$

se denotamos $\lambda = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$, a equação fica assim:

$$A\left(x^2 + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2 = \lambda\,. \tag{37}$$

Caso ii) $A = 0$ ou $C = 0$.

Suponhamos que $A \neq 0$ e $C = 0$.

Neste caso, a equação (32) é:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Completando o quadrado na variável x, temos:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 &\iff A(x^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{D^2}{4A^2}) + Ey + F - \tfrac{D^2}{4A} = 0 \\ &\iff A(x + \tfrac{D}{2A})^2 + Ey = \tfrac{D^2}{4A} - F\,. \end{aligned}$$

O símbolo μ
É uma letra do alfabeto grego e lê-se "mi"

Denotando $\mu = \frac{D^2}{4A} - F$ a equação fica assim:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -Ey + \mu\,. \tag{38}$$

No caso $C \neq 0$ e $A = 0$, uma análise similar nos leva à equação:

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx + \mu\,, \tag{39}$$

onde $\mu = \frac{E^2}{4C} - F$.

Você percebeu que, em ambos os casos **i)** e **ii)**, obtivemos expressões que parecem equações de elipses, hipérboles ou parábolas transladadas?

Volte!
E reveja o esquema de classificação das cônicas degeneradas no final da aula anterior.

Cuidado!

A identificação da equação (37) ou (38) depende dos sinais dos coeficientes A, C, D, e E, pois em alguns casos podemos obter cônicas degeneradas! Reduzindo essas equações um pouco mais, em cada caso particular, você pode identificar exatamente de que cônica se trata.

Exemplo 65 *Mostrar que a equação* $2x^2-4x+5y-3=0$ *é a equação de uma parábola transladada. Vamos determinar o sistema de coordenadas* $O'X'Y'$ *no qual a equação da parábola é expressa na forma canônica, assim como a equação da diretriz da parábola em ambos os sistemas.*

Solução: *Como a equação apresenta apenas um termo do segundo grau, a curva candidata é uma parábola.*

Completando os quadrados na equação obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2-4x+5y-3=0 &\Rightarrow 2(x^2-2x)+5y-3=0\\ &\Rightarrow 2(x^2-2x+1)+5y-3-2=0\\ &\Rightarrow 2(x-1)^2=-5y+5\\ &\Rightarrow 2(x-1)^2=-5(y-1)\,, \end{aligned}$$

que corresponde a uma parábola transladada.

Consideremos o sistema de coordenadas $O'X'Y'$ *obtido transladando o sistema* OXY *até o ponto* $O'=(1,1)$. *A relação entre as coordenadas desses sistemas é dada por:*

$$\begin{cases} x'=x-1\\ y'=y-1\,. \end{cases}$$

Substituindo na equação

$$2(x-1)^2=-5(y-1)\,,$$

obtemos

$$2(x')^2=-5y'\,,$$

que equivale à equação:

$$(x')^2=-\frac{5}{2}y'\,.$$

Sabemos que a equação canônica da parábola nas coordenadas x' e y' se escreve na forma $(x')^2 = -4py'$, sendo a reta horizontal $y' = p$ a sua diretriz.

Fazendo $-4p = -\frac{5}{2}$ obtemos $p = \frac{5}{8}$. Logo, a equação da diretriz da parábola $(x')^2 = -\frac{5}{2}y'$ é a reta $y' = \frac{5}{8}$.

Para obter a equação da diretriz no sistema OXY recorremos novamente às relações entre as coordenadas, $y - 1 = \frac{5}{8}$, ou seja, $y = \frac{13}{8}$.

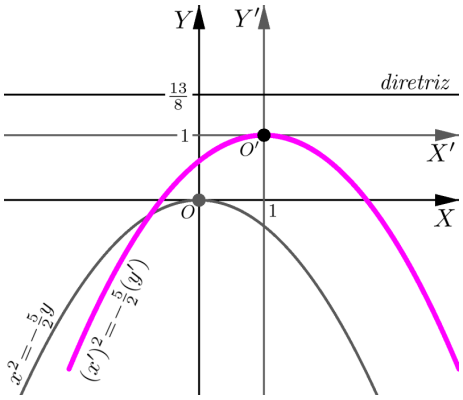


Fig. 113: Parábola $2x^2 - 4x + 5y - 3 = 0$.

Exemplo 66 *Identificar a equação $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y + 12 = 0$.*

Solução: *Como os coeficientes dos termos do segundo grau são positivos, a curva candidata é uma elipse.*

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned}
& (x^2 - 6x) + 3(y^2 + 2y) + 12 = 0 \\
\Rightarrow\ & (x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 2y + 1) + 12 - 9 - 3 = 0 \\
\Rightarrow\ & (x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 2y + 1) = 0 \\
\Rightarrow\ & (x-3)^2 + 3(y+1)^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & (x-3)^2 = 0 \quad \textit{e} \quad 3(y+1)^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & x = 3 \quad \textit{e} \quad y = -1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, o lugar geométrico descrito pela equação consiste apenas do ponto $(3, -1)$.

Exemplo 67 *Mostrar que a equação $4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 23 = 0$ representa uma hipérbole transladada.*

Determinar também o sistema de coordenadas $O'X'Y'$ no qual a equação é expressa na forma canônica assim como as equações de suas assíntotas em ambos os sistemas.

Solução: *Como os termos de segundo grau têm sinais contrários, a curva candidata é de fato uma hipérbole.*

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 23 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4(x^2 - 6x) - 16\left(y^2 + \frac{24}{16}y\right) + 23 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4(x^2 - 6x + 9) - 16\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}\right) + 23 - 36 + 9 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4(x-3)^2 - 16\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 4\,. \end{aligned}$$

Dividindo por 4 *a última equação, obtemos:*

$$(x-3)^2 - \frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1\,,$$

que é a equação de uma hipérbole transladada cujo eixo focal é paralelo ao eixo x *(veja a Figura 114).*

Consideremos o sistema de coordenadas $O'X'Y'$ *obtido transladando o sistema* OXY*, até o ponto* $O' = \left(3, -\frac{3}{4}\right)_{OXY}$.

A relação entre as coordenadas dos sistemas OXY *e* $O'X'Y'$ *é dada por:*

$$x' = x - 3 \quad \textbf{e} \quad y' = y + \frac{3}{4}\,.$$

Substituindo na equação da hipérbole transladada, obtemos a equação na forma canônica:

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{1/4} = 1\,.$$

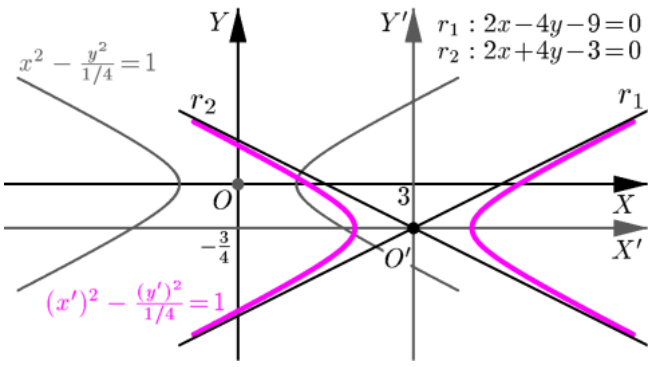


Fig. 114: Hipérbole $4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 23 = 0$.

Sabemos que $\dfrac{(x')^2}{a^2} - \dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$ *representa a hipérbole com assíntotas* $y' = \dfrac{b}{a}x'$ *e* $y' = -\dfrac{b}{a}x'$. *Como* $a^2 = 1$ *e* $b^2 = \dfrac{1}{4}$, *obtemos as equações das assíntotas no sistema* $O'X'Y'$:

$$y' = \frac{1}{2}x' \quad \textit{e} \quad y' = -\frac{1}{2}x'.$$

Para obter as equações das assíntotas no sistema OXY, *recorremos novamente às relações entre as coordenadas substituindo-as nas equações das retas obtidas acima:*

$$y + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}(x-3) \quad \textit{e} \quad y + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}(x-3)\,.$$

Assim, as equações das assíntotas no sistema OXY *são as retas (Figura 114):*

$$2x - 4y - 9 = 0 \quad \textit{e} \quad 2x + 4y - 3 = 0\,.$$

Podemos resumir a nossa análise, classificando a equação (32) no esquema a seguir. Nesse esquema usamos condições sobre os sinais dos coeficientes da equação expressas mediante produtos.

Assim, por exemplo, escrever $AC > 0$ significa que A e C têm o mesmo sinal, ambos positivos ou ambos negativos. Enquanto que escrever $AC < 0$, significa que A e C têm sinais contrários, ou seja, A é positivo e C negativo ou vice-versa.

Classificação da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$AC > 0$ $\lambda = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$	$A\lambda > 0$	elipse com reta focal paralela a um dos eixos
	$\lambda = 0$	um ponto
	$A\lambda < 0$	conjunto vazio
$AC < 0$ $\lambda = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$	$A\lambda \neq 0$	hipérbole com reta focal paralela a um dos eixos
	$\lambda = 0$	par de retas concorrentes
$A \neq 0\,,\ C = 0$ $\mu = \frac{D^2}{4A} - F$	$AE < 0$	parábola com reta focal paralela ao eixo OY
	$AE > 0$	conjunto vazio
	$E = 0$	uma reta se $A\mu \geq 0$ ou o conjunto vazio se $A\mu < 0$
$A = 0\,,\ C \neq 0$ $\mu = \frac{D^2}{4C} - F$	$CD < 0$	parábola com reta focal paralela ao eixo OX
	$CD > 0$	conjunto vazio
	$D = 0$	uma reta se $C\mu \geq 0$ ou o conjunto vazio se $C\mu < 0$

⟸ Esquema de classificação das cônicas no caso $B = 0$.

Sabemos que a *excentricidade* da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ é o número real $e=\frac{c}{a}$; onde c é o valor positivo, tal que os focos da elipse são $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

De fato, na dedução da equação da elipse vemos que $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Em particular, $c<a$. Logo, $e=\frac{c}{a}<1$. Dessa forma, *a elipse é caracterizada por ter a sua excentricidade menor que* 1.

O círculo é caracterizado por ter excentricidade igual a 1. No entanto, a parábola não tem excentricidade definida.

Analogamente, a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tem sua excentricidade dada por: $e=\frac{c}{a}$; onde c é o valor positivo, tal que os focos da hipérbole são $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

De fato, na dedução da equação da hipérbole, $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Em particular, $a<c$. Logo, $e=\frac{c}{a}>1$. Então, *a hipérbole é caracterizada por ter a sua excentricidade maior que* 1.

Lembre que conhecendo a excentricidade e algum outro elemento da cônica (coordenadas do foco, distância do vértice ao centro da cônica, equações das assíntotas etc.) podemos obter sua equação.

Além disso, o conhecimento da excentricidade já nos diz de que tipo é a cônica.

Exemplo 68 *Determinar a equação da cônica que tem excentricidade* $e=\frac{1}{2}$, *centro no ponto* $P_0=(1,\sqrt{3})$ *e focos sobre a reta* $x=1$ *a uma distância de* $\sqrt{3}$ *do centro.*

Solução: *Como a excentricidade é menor que* 1, *a cônica é uma elipse. Em relação ao sistema de coordenadas* $O'X'Y'$ *obtido da translação de* OXY *para o ponto* $O'=P_0$, *a equação da elipse é*

$$\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1\,,\qquad \text{com } a\geq b.$$

Como $c=\sqrt{3}$ *e* $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, *temos*

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{a}=\frac{1}{2}=e\Rightarrow a=2\sqrt{3}\Rightarrow a^2=12\,.$$

Também, sendo $c^2=a^2-b^2$, *temos* $b^2=a^2-c^2=12-3=9$.

Logo, a equação da elipse no sistema $O'X'Y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{12} = 1\,.$$

Usando as relações de mudança de coordenadas entre sistemas transladados, $x' = x - 1$ e $y' = y - \sqrt{3}$, obtemos a equação da elipse no sistema OXY :

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-\sqrt{3})^2}{12} = 1\,.$$

Nota final.

• Achamos mais ilustrativo apresentar alguns exemplos, em vez de fazer uma análise geral dos coeficientes da equação (32). É possível identificar uma cônica apenas analisando os coeficientes da equação geral do segundo grau.

Contudo, você deve sempre lembrar que:

Qualquer equação do segundo grau do tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

representa uma cônica transladada (incluindo os casos degenerados) e sua redução à forma canônica é obtida completando os quadrados.

Resumo

Nesta aula vimos que uma equação do segundo grau da forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ representa uma cônica transladada, incluindo os casos degenerados, e que a sua forma canônica com respeito a um novo sistema de coordenadas $O'X'Y'$ é obtida completando os quadrados na equação. Além disso, vimos que é possível determinar a equação de uma elipse ou de uma hipérbole conhecendo sua excentricidade e um outro elemento que a caracterize.

Exercícios

1. Sejam OXY e $O'X'Y$, sistemas de coordenadas, onde $O'X'Y'$ é o transladado de OXY para o ponto $(-2,5)_{OXY}$. Consideremos as cônicas com as seguintes equações no sistema $O'X'Y'$:

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{9} = 1\,, \qquad \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1\,, \qquad (y')^2 = 6(x').$$

i. Dê as equações dessas cônicas no sistema OXY.

ii. Dê as coordenadas no sistema OXY dos focos de cada uma dessas cônicas.

2. Reduza as seguinte equações à forma canônica exibindo as mudanças de sistemas de coordenadas. Para o caso de parábola dê a equação de sua diretriz no sistema OXY e para o caso de hipérbole dê as equações de suas assíntotas.

a. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

b. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

c. $10y^2 + 8x - 30y - 9 = 0$;

d. $x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$.

3. Em cada item, determine a equação da cônica a partir das informações dadas:

a. $e = 5\sqrt{2}$, a distância entre os focos: 6 unidades, equação da reta que contém os focos: $x = 2$, centro: $P_0 = (2, 1)$.

b. $e = \frac{1}{4}$, centro: $P_0 = (-1, 3)$, equação da reta que contém os focos: $y = 3$, distância de um foco ao centro: 4 unidades.

c. $e = \frac{4}{3}$, focos: $F_1 = (2, 5)$ e $F_2 = (-4, 5)$.

d. $e = \frac{1}{2}$, centro: $P_0 = (-1, -2)$, foco: $F_1 = (-1, 1)$.

Auto-avaliação

Resolvendo os Exercícios 1 e 2 você fixou as relações entre sistemas de coordenadas transladados e a redução por quadrados perfeitos. Resolvendo o Exercício 3 você reviu a noção de excentricidade.

Caso tenha encontrado dificuldades, releia a aula e os exemplos com atenção, e depois volte aos exercícios. Permanecendo com dúvidas, procure orientação com os tutores.

Cônicas - Rotação de sistemas de coordenadas

Objetivos

- Entender mudanças de coordenadas por rotações.
- Identificar uma cônica rotacionada a partir da sua equação geral.
- Identificar uma cônica arbitrária e reduzi-la a sua forma canônica.

Nesta aula completamos a análise das equações do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{40}$$

Resta-nos apenas estudar a influência do termo Bxy na posição da cônica no plano.

Veremos que uma equação da forma (40), com $B \neq 0$, é colocada na forma canônica *girando e transladando o sistema de coordenadas*.

Rotação e mudança de coordenadas entre sistemas rotacionados.

Antes de entrarmos na análise das equações da forma (40), apresentamos a noção de *rotação de sistemas de coordenadas*.

Definição 25 (Rotação do sistema de coordenadas) *A rotação de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas OXY por um ângulo θ é a construção de um novo sistema $O'X'Y'$ cujos eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são obtidos girando os eixos OX e OY, respectivamente, do ângulo θ em torno da origem O. A rotação é realizada no sentido anti-horário se θ for positivo e no sentido horário, se θ for negativo (Figura 115).*

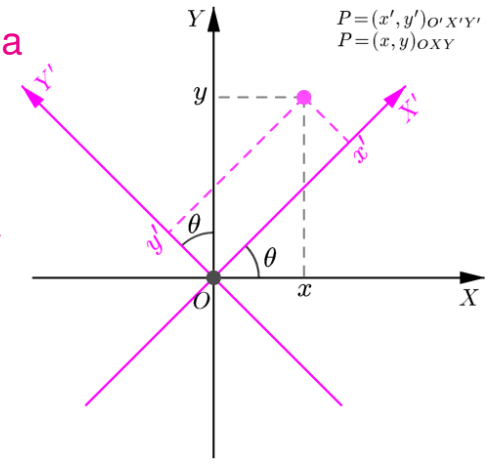


Fig. 115: Rotação do sistema de coordenadas.

A origem O' do novo sistema é a mesma do sistema original, o ponto O. Embora as origens sejam as mesmas, utilizamos notações distintas.

Dizemos que o sistema $O'X'Y'$ é o *rotacionado* do sistema OXY de θ.

Como os eixos OX e OY foram rotacionados de θ, os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são também ortogonais. Portanto, $O'X'Y'$ é um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas.

Relações de mudança de coordenadas entre sistemas rotacionados.

Seja $O'X'Y'$ o sistema ortogonal de coordenadas obtido rotacionando o sistema de coordenadas OXY de um ângulo θ.

Seja P um ponto do plano cujas coordenadas em relação ao sistema OXY são $P = (x, y)_{OXY}$ e, em relação ao sistema $O'X'Y'$ são $P = (x', y')_{O'X'Y'}$. Veja a Figura 116.

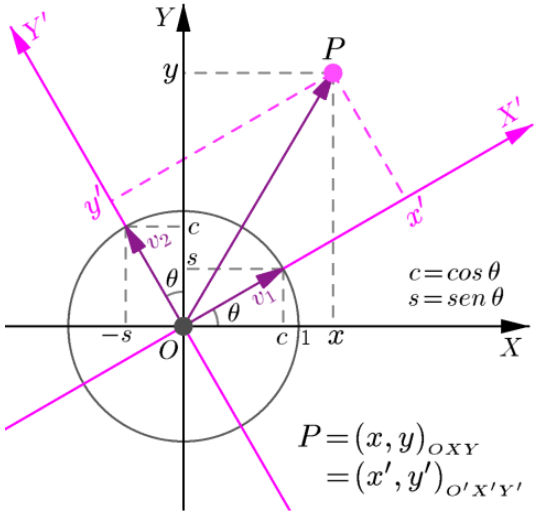


Fig. 116: Ponto P em OXY e em $O'X'Y'$.

Para determinarmos a relação entre as coordenadas (x, y) e (x', y') começamos observando que:

- o vetor $\overrightarrow{v_1} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)_{OXY}$ é um vetor unitário na direção positiva do eixo OX',
- o vetor $\overrightarrow{v_2} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)_{OXY}$ é um vetor unitário na direção positiva do eixo OY',
- os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são perpendiculares: $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$.

Logo, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ (ou as coordenadas do ponto P) com respeito ao sistema $O'X'Y'$ são os números x' e y', tais que:

$$pr_{\overrightarrow{v_1}}(\overrightarrow{OP}) = x' \cdot \overrightarrow{v_1} \qquad \text{e} \qquad pr_{\overrightarrow{v_2}}(\overrightarrow{OP}) = y' \cdot \overrightarrow{v_2}\,.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} x' &= \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \langle (x, y), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \rangle \\ y' &= \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \langle (x, y), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \rangle \end{aligned}$$

de onde obtemos as relações de mudança de variáveis:

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} x' &=& x \cdot \cos\theta &+& y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y' &=& -x \cdot \operatorname{sen}\theta &+& y \cdot \cos\theta \end{array}} \qquad (41)$$

Reciprocamente, suponhamos que o sistema $O'X'Y'$ foi obtido rotacionando o sistema OXY de θ.

Como obter o sistema OXY a partir do sistema $O'X'Y'$?

Sendo que o sistema $O'X'Y'$ foi obtido girando o sistema OXY de θ, o sistema OXY deve ser obtido girando o sistema $O'X'Y'$ de $-\theta$. Note que, neste caso, o rotacionado é o sistema OXY e o sistema fixo é o sistema $O'X'Y'$. Portanto, as relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos(-\theta) + y' \cdot \operatorname{sen}(-\theta) \\ y &= -x' \cdot \operatorname{sen}(-\theta) + y' \cdot \cos(-\theta) \end{aligned}$$

e como $\cos\theta$ é uma função par e $\operatorname{sen}\theta$ é uma função ímpar, obtemos a mudança de coordenadas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta \end{aligned}} \qquad (42)$$

Assim, se $O'X'Y'$ é um sistema de coordenadas obtido girando o sistema OXY de um ângulo θ, podemos usar as relações (41) e (42) para obter as coordenadas dos pontos do plano em relação ao sistema $O'X'Y'$ conhecendo as coordenadas em relação ao sistema OXY e reciprocamente, *desde que sejam conhecidos o seno e o cosseno do ângulo de rotação !*

Exemplo 69 *Seja $O'X'Y'$ o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas obtido da rotação de 30^o do sistema XOY.*

Seja P o ponto do plano com coordenadas $P = (-1, 3)_{OXY}$ e seja r a reta de equação $x' - 2y' + 2 = 0$, no sistema $O'X'Y'$. Veja a Figura 117.

Determinemos as coordenadas de P no sistema $O'X'Y'$ e a equação de r no sistema OXY.

Solução: *Primeiro devemos obter a expressão da mudança de coordenadas usando as relações* (41)*:*

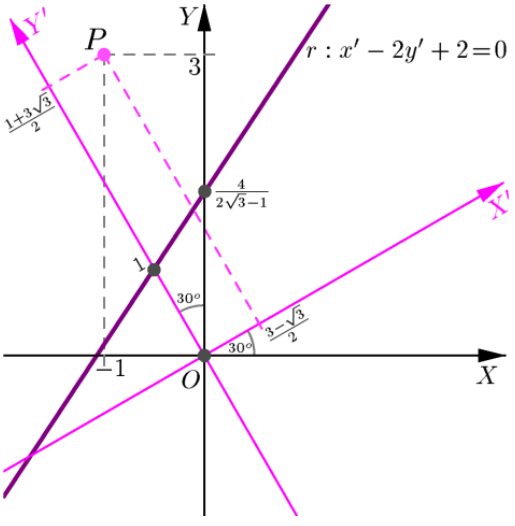


Fig. 117: Exemplo 69.

$$\begin{cases} x' = x\cos(30^o) + y\,\mathrm{sen}(30^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}y \\ y' = -x\,\mathrm{sen}(30^o) + y\cos(30^o) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\,. \end{cases}$$

Substituindo os valores das coordenadas $x = -1$ e $y = 3$ de P, obtemos:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-1) + \dfrac{1}{2}(3) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ y' = -\dfrac{1}{2}(-1) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(3) = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Ou seja, $P = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)_{O'X'Y'}$.

Fazemos também a substituição de x' e y' na equação de r:

$$\begin{aligned} x' - 2y' + 2 = 0 &\iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}y\right) - 2\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + 2 = 0 \\ &\iff \sqrt{3}\,x + y + 2x - 2\sqrt{3}y + 4 = 0 \\ &\iff (2+\sqrt{3})x + (1-2\sqrt{3})y + 4 = 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, a equação de r no sistema OXY é $(2+\sqrt{3})x+(1-2\sqrt{3})y+4=0$.

Exemplo 70 *Consideremos o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas $O'X'Y'$, obtido por uma rotação do sistema OXY, tal que o eixo $O'X'$ seja a reta que passa pela origem e é paralela à reta $2x-3y+6=0$.*

Seja P ponto do plano com coordenadas $P = (-4,1)_{O'X'Y'}$.

Determinar as coordenadas de P no sistema OXY.

Solução: *A primeira pergunta que surge é:*

como determinar o ângulo de rotação θ?

Na verdade, como foi dito anteriormente, **não** *precisamos do valor do ângulo de rotação θ, mas sim dos valores $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$.*

O eixo $O'X'$ e a reta $2x-3y+6=0$ têm a mesma inclinação, pois são paralelos. Reescrevendo a equação da reta na forma $y = \dfrac{2}{3}\,x + 2$, temos $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{2}{3}$.

Assim, os valores de $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$ são obtidos resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{3} \\ \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1\,. \end{cases}$$

Da primeira identidade, obtemos $\cos\theta = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta$, *e substituindo na segunda identidade resulta:* $\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, *que equivale a:*

$$\frac{13}{4}\operatorname{sen}^2\theta = 1 \iff (\operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{4}{13} \iff |\operatorname{sen}\theta| = \frac{2}{\sqrt{13}}\,.$$

Como a tangente de θ *é positiva, o cosseno de* θ *e o seno de* θ *têm o mesmo sinal. Nesse caso, convencionamos tomar sempre o sinal positivo que corresponde a* θ *positivo (quando os sinais de* $\cos\theta$ *e* $\operatorname{sen}\theta$ *forem contrários, tomamos o cosseno positivo e o seno negativo).*

Então: $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ *e* $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

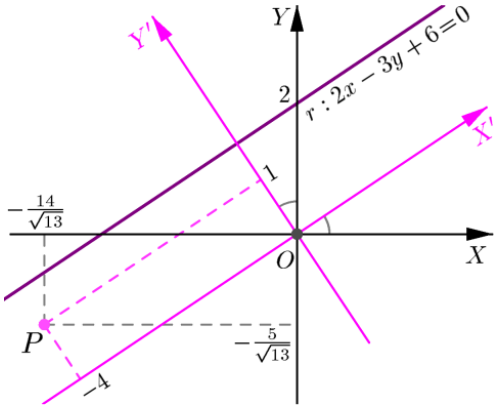


Fig. 118: Exemplo 70.

Substituindo os valores de $\cos\theta$ *e* $\operatorname{sen}\theta$ *nas relações* (42), *obtemos:*

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\theta - y'\cdot\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y' \\ y = x'\cdot\operatorname{sen}\theta + y'\cdot\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'\,. \end{cases}$$

Substituindo as coordenadas $x' = -4$ *e* $y' = 1$ *de* P, *obtemos as coordenadas* x *e* y *de* P *no sistema* OXY:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}(-4) - \frac{2}{\sqrt{13}}(1) = -\frac{14}{\sqrt{13}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}(-4) + \frac{3}{\sqrt{13}}(1) = -\frac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow P = \left(-\frac{14}{\sqrt{13}}, -\frac{5}{\sqrt{13}}\right)_{OXY}\,.$$

Antes de passarmos para a identificação de equações do segundo grau com termo xy façamos algumas comparações de equações de cônicas entre sistemas de coordenadas rotacionados.

Sejam OXY e $O'X'Y'$ sistemas cartesianos ortogonais de coordenadas em que $O'X'Y'$ é obtido girando o sistema OXY de θ.

Consideremos, por exemplo, a hipérbole $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$, no sistema $O'X'Y'$.

Como é a equação dessa hipérbole no sistema OXY?

Substituindo x' e y' das expressões da mudança de coordenadas (41) na equação da hipérbole, temos:

$$\begin{aligned}\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1 &\iff \frac{(x\cos\theta+y\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{a^2}-\frac{(-x\,\mathrm{sen}\,\theta+y\cos\theta)^2}{b^2}=1\\ &\iff \frac{(\cos^2\theta\,x^2+2\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\theta\,xy+\mathrm{sen}^2\,\theta\,x^2)}{a^2}\\ &\quad -\frac{(\mathrm{sen}^2\,\theta\,x^2-2\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\theta\,xy+\cos^2\theta\,x^2)}{b^2}=1\\ &\iff (b^2\cos^2\theta-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,)x^2+2(a^2+b^2)\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\theta\,xy\\ &\quad +(b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta-a^2\cos^2\theta\,)y^2=a^2b^2\,. \qquad (43)\end{aligned}$$

Observe que agora apareceu um termo com o produto xy !

Como $a^2+b^2>0$, o coeficiente $2(a^2+b^2)\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\theta$ de xy em (43) é igual a zero se, e somente se, $\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\theta=0$. Ou seja se, e somente se, $\cos\theta=0$ ou $\mathrm{sen}\,\theta=0$.

Se $\cos\theta=0$, então $\theta=90^o$ e $\mathrm{sen}\,\theta=1$ ou $\theta=-90^o$ e $\mathrm{sen}\,\theta=-1$. Em qualquer caso $\mathrm{sen}^2\,\theta=1$ e a equação (43) fica reduzida a (Figura 119):

$$-a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2\,.$$

Dividindo essa equação por a^2b^2, obtemos $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, ou seja:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\,.$$

Na figura 119
Temos $\cos\theta=0$ e $\mathrm{sen}\,\theta=1$. Veja como o sistema $O'X'Y'$ obtido pela rotação do sistema OXY de 90^o tem os seus eixos superpostos aos eixos do sistema OXY. Veja a figura 119 de frente ao eixo OX.

Na figura 120
Temos $\mathrm{sen}\,\theta=0$ e $\cos\theta=-1$. O sistema $O'X'Y'$ obtido pela rotação do sistema OXY de 180^o tem os seus eixos superpostos aos eixos do sistema OXY, porém com orientações contrárias. Veja a figura 120 de cabeça para baixo.

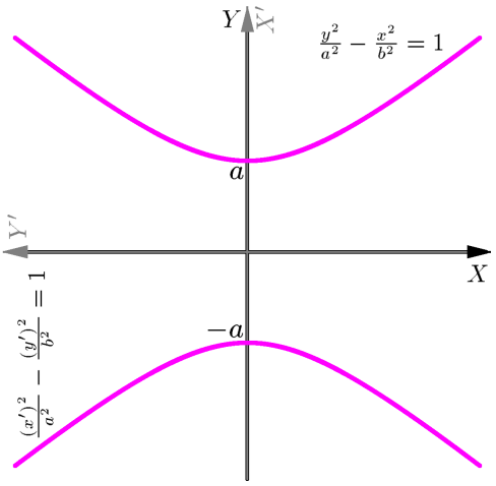


Fig. 119: $\cos\theta=0$ e $\mathrm{sen}\,\theta=1$.

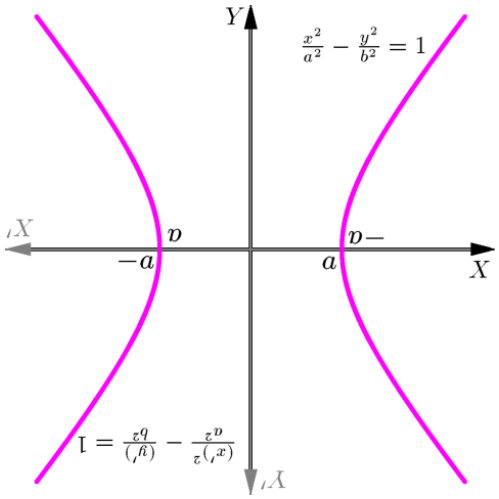


Fig. 120: $\cos\theta=-1$ e $\mathrm{sen}\,\theta=0$.

Analogamente, se $\mathrm{sen}\,\theta=0$, então $\theta=0^o$ e $\cos\theta=1$ ou $\theta=180^o$ e $\cos\theta=-1$. Em qualquer caso $\cos^2\theta=1$ e ao substituir na equação (43), obtemos a equação $b^2x^2-a^2y^2=1$, que equivale a (Figura 120):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Assim, no primeiro caso, a rotação é de 90^o (ou de -90^o) e no segundo a rotação é de 0^o (ou de 180^o). Portanto, os eixos rotacionados $O'X'$ e $O'Y'$ ficam superpostos aos eixos originais OY e OX respectivamente, embora com orientação contrária. Isto faz com que as equações nos dois sistemas apareçam na forma canônica.

Concluímos então que, fora esses casos particulares, quando a relação entre os sistemas de coordenadas é de uma rotação, sempre deverá aparecer o termo xy na equação da cônica.

Essa análise é útil para raciocinarmos de forma inversa: dada a equação de uma cônica em relação ao sistema OXY, determinar os eixos $O'X'Y'$ perante os quais a cônica estará apresentada na sua forma canônica. Para ilustrar o procedimento vamos analisar com cuidado o seguinte exemplo.

Exemplo 71 *Consideremos a equação*

$$13x^2 + 18xy + 37y^2 - 40 = 0\,. \tag{44}$$

Sendo que nessa equação aparece termo xy, deve existir um sistema de coordenadas $O'X'Y'$, rotacionado de OXY, com respeito ao qual a equação apareça na sua forma reduzida (canônica).

Como encontrar o sistema $O'X'Y'$ desejado?

Solução: *Denotemos θ o ângulo de rotação procurado (lembre que para determinar o sistema só precisamos do cosseno e do seno desse ângulo).*

As coordenadas no sistema OXY são dadas a partir das coordenadas em relação ao sistema $O'X'Y'$ mediante as relações (42)*. Substituindo essas relações de mudança de coordenadas na equação* (44)*, obtemos:*

$$\begin{aligned} 13(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 \;&+\; 18(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\,cos\theta) \\ &+\; 37(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 - 40 = 0\,. \end{aligned}$$

Desenvolvendo essa equação e agrupando os termos comuns, temos:

$$\begin{aligned} &(13\cos^2\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 37\operatorname{sen}^2\theta)(x')^2 \\ &+ (-26\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 18\cos^2\theta - 18\operatorname{sen}^2\theta + 74\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x'y' \\ &+ (13\operatorname{sen}^2\theta - 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 37\cos^2\theta)(y')^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Agora impomos a θ a condição que precisamos: θ tem que ser o ângulo tal que a equação acima fique sem o termo $x'y'$. Isto é, o coeficiente de $x'y'$ deve ser igual a zero. Portanto, a condição sobre θ é:

$$-26\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 18\cos^2\theta - 18\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 74\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 0\,.$$

Simplificando, temos:

$$3\cos^2\theta - 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 0\,.$$

Para resolver essa identidade em relação a $\cos\theta$ e a $\mathrm{sen}\,\theta$, observemos que $\cos\theta \neq 0$ pois, como vimos anteriormente, se $\cos\theta = 0$ a equação não teria o termo xy. Dividindo essa identidade por $\cos^2\theta$, obtemos:

$$3 - 3\,\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} + 8\,\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 0\,.$$

Note que...
No procedimento ao lado desejamos achar os valores de $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$.

Designando $u = \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, substituindo na equação, reordenando os termos e multiplicando por (-1), chegamos à equação do segundo grau:

$$3\,u^2 - 8u - 3 = 0\,.$$

Resolvendo, obtemos $u = \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{8 \pm 10}{6}$. Lembre que convencionamos tomar sempre o valor positivo para $\mathrm{tg}\,\theta$ (que corresponde a um ângulo θ entre 0^o e 90^o). Assim, $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{18}{6} = 3$.

Note que...
Resolver as equações (46) e (47) com respeito às incógnitas $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ equivale a determinar um par de números positivos tais que a soma dos seus quadrados é igual a 1 e o seu quociente é 3.

Sabendo o valor da tangente de θ obtemos os valores do cosseno e do seno, conforme fizemos no exemplo 70, a partir das identidades:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 3, \tag{46}$$

$$\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1\,. \tag{47}$$

Verifique ...
Use uma máquina de calcular para verificar que $\theta = \mathrm{arcsen}\,\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 71,56^o$.

As soluções são $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Substituindo esses valores nas relações (42), vemos que a mudança de coordenadas que devemos fazer para levar a cônica (44) à sua forma canônica com respeito ao novo sistema $O'X'Y'$, é dada por:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y', \end{cases}$$

De fato, substituindo essas relações nos coeficientes da equação (45), obtemos:

- *coeficiente de* $(x')^2$*:*

$$\begin{aligned} 13\cos^2\theta + 18\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 37\,\mathrm{sen}^2\,\theta &= 13(\tfrac{1}{\sqrt{10}})^2 + 18(\tfrac{3}{\sqrt{10}})(\tfrac{1}{\sqrt{10}}) + 37(\tfrac{3}{\sqrt{10}})^2 \\ &= \frac{400}{10} = 40\,. \end{aligned}$$

- *coeficiente de* $x'y'$*:*

$$3cos^2\theta - 3sen^2\theta + 8sen\theta cos\theta = 3(\tfrac{1}{\sqrt{10}})^2 - 3(\tfrac{3}{\sqrt{10}})^2 + 8(\tfrac{3}{\sqrt{10}})(\tfrac{1}{\sqrt{10}}) = 0\,,$$

valor que já era esperado.

- *coeficiente de* $(y')^2$*:*

$$\begin{aligned} 13\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 18\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 37\cos^2\theta &= 13(\tfrac{3}{\sqrt{10}})^2 - 18(\tfrac{3}{\sqrt{10}})(\tfrac{1}{\sqrt{10}}) + 37(\tfrac{1}{\sqrt{10}})^2 \\ &= \tfrac{100}{10} = 10\,. \end{aligned}$$

Assim, a equação (45) *fica na forma:*

$$40(x')^2 + 10(y')^2 - 40 = 0\,,$$

isto é, na forma:

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{4} = 1\,,$$

que é a equação canônica de uma elipse no sistema $O'X'Y'$ *(Figura 121).*

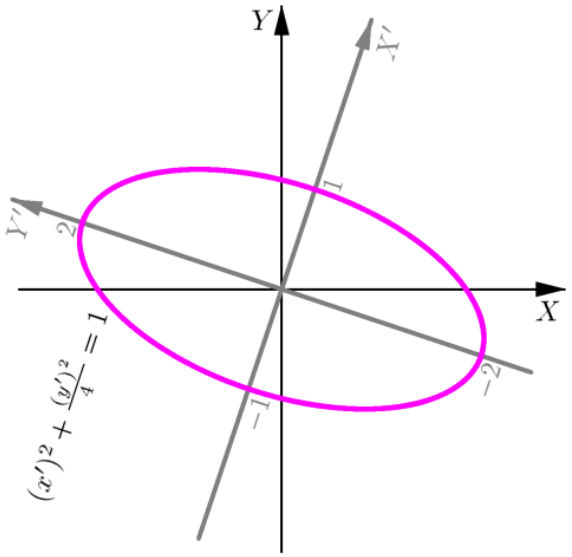


Fig. 121: $13x^2 + 18xy + 37y^2 - 40 = 0\,.$

O exemplo acima ilustra o procedimento geral a ser seguido para reduzir uma equação do segundo grau da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ à sua forma canônica. Isto é feito por meio de uma mudança do sistema de coordenadas, obtida girando o sistema OXY, de modo que os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ do sistema rotacionado $O'X'Y'$ coincidam com os eixos da cônica.

O procedimento para reduzir a equação geral de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

à sua forma canônica é feito em duas etapas. Primeiramente rotacionamos o sistema OXY para um sistema $O'X'Y'$ de modo que, nas novas coordenadas, a equação fique sem o termo em xy. Uma vez feito isso, transladamos o sistema $O'X'Y'$ até um ponto O'' de modo que a equação no sistema transladado $O''X''Y''$ não apresente os termos de primeiro grau. No seguinte exemplo ilustramos como isso é feito.

Exemplo 72 *Vamos reduzir a equação:*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 16x + 16y + 16 = 0\,. \tag{48}$$

Neste ponto ...
Observe que o nosso primeiro objetivo é determinar os valores de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ de modo que ao mudar as variáveis x, y para as variáveis x', y', na equação (48) conforme as relações ao lado, a equação resultante não tenha o termo $x'y'$.

à sua forma canônica.

Solução: *Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, procuremos o sistema de coordenadas $O'X'Y'$, rotacionado de OXY de modo que, nesse novo sistema, a equação não tenha termo $x'y'$. Novamente fazemos a mudança de variáveis:*

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

na equação 48. Observe que a condição sobre $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ é que na equação transformada não apareça o termo em $x'y'$.

Observe que, na mudança de variáveis, aparece o termo em $x'y'$ apenas nos termos de segundo grau x^2, y^2 e xy. Assim, isolamos esses termos da equação, fazemos a substituição e obtemos o coeficiente de $x'y'$:

$$\begin{aligned}
3x^2 \longrightarrow\quad & 3(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 = 3(x')^2\cos^2\theta - 6x'y'\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 3(y')^2\operatorname{sen}^2\theta]\,. \\
10xy \longrightarrow\quad & 10(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) \\
& = 10(x')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 10(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)x'y' - 10(y')^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,. \\
3y^2 \longrightarrow\quad & 3(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta)^2 = 3(x')^2\cos^2\theta + 6x'y'\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 3(y')^2\operatorname{sen}^2\theta\,.
\end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de $x'y'$ é:

$$-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 10(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 10(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\,.$$

Esse coeficiente é igual a zero se, e somente se, $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0$.

Logo, os valores $\cos\theta$ *e* $\operatorname{sen}\theta$ *são obtidos resolvendo o sistema:*

$$\begin{cases} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \\ \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\cos\theta| = |\operatorname{sen}\theta| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Isto é, $\cos\theta = \pm\operatorname{sen}\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Considerando* $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *(que corresponde a* $\theta = 45^o$*), obtemos as relações de mudança de coordenadas:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'\,. \end{cases}$$

Substituindo essas relações na equação (48)*, temos:*

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 16 = 0\,.$$

Simplificando, obtemos a equação:

$$8(x')^2 - 2(y')^2 + 16\sqrt{2}x' + 16 = 0\,.$$

Completando os quadrados, como na aula anterior, chegamos a:

$$(x' + \sqrt{2})^2 - \frac{(y')^2}{4} = 0\,,$$

que representa uma hipérbole degenerada, cujo gráfico são duas retas concorrentes e tem por equação canônica:

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{4} = 0\,,$$

com respeito ao sistema $O''X''Y''$ *obtido transladando o sistema* $O'X'Y'$ *até* $O'' = (-\sqrt{2}, 0)_{O'X'Y'}$ *(Figura 122).*

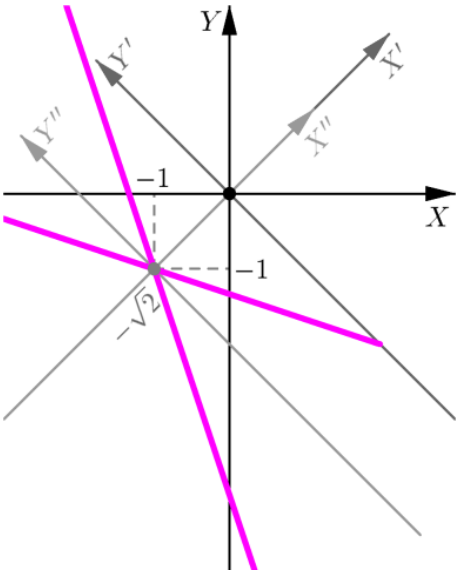


Fig. 122: Gráfico da cônica (48) .

Lembre que ...

Convencionamos tomar o valor positivo para $\operatorname{sen}\theta$. Na situação ao lado não importa o sinal de $\cos\theta$, pois as duas possíveis escolhas diferem por uma rotação de 90^o, fazendo coincidir, em ambos os casos, os eixos da cônica com direções paralelas aos eixos $O'X'$ e $O'Y'$. Na situação ao lado, a escolha implicaria em tomar $\theta = 45^o$ ou $\theta = 135^o$, mas a forma geral da cônica obtida finalmente terá as variáveis x' e y' intercambiadas, pois, tomando $\theta = 135^o$, o sistema de coordenadas terá os eixos rotacionados de 90^o em relação ao sistema obtido na escolha $\theta = 45^o$.

Mesmo sabendo como reduzir uma equação do segundo grau nas variáveis x e y à sua forma canônica, em muitas situações é fundamental identificar se a cônica é uma elipse ou uma hipérbole ou uma parábola, mesmo antes de efetuar a redução à forma canônica. Para isso devemos caracterizar os elementos-chave que nos permitem identificar o lugar geométrico a partir da equação geral.

Definição 26 (Indicador de uma equação do segundo grau) *O* indicador *da equação do segundo grau:*

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é o número:

$$I(\mathcal{C}) = 4 \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = 4\left(AC - \frac{B^2}{4}\right) = 4AC - B^2 .$$

Na seguinte proposição mostramos um resultado importante que nos permite efetuar a identificação de uma cônica a partir da sua equação geral, calculando apenas o seu indicador.

Proposição 20 *O indicador é invariante por rotação.*

Isto é, se a equação

$$\mathcal{C}' : A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

é obtida a partir da equação

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por meio de uma rotação do sistema de coordenadas, então:

$$I(\mathcal{C}) = 4AC - B^2 = 4A'C' - (B'^2) = I(\mathcal{C}') .$$

A demonstração da proposição, feita no apêndice, consiste em calcular o indicador $I(C')$ após fazer a mudança de variáveis na equação $\mathcal{C}$ segundo as relações (42).

Vejamos agora como esse resultado nos auxilia na identificação da cônica.

Já sabemos que dada uma equação do segundo grau:

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

podemos determinar um sistema de coordenadas $O'X'Y$, no qual a equação tem a forma:

$$\mathcal{C}' : A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0\,,$$

com $B' = 0$. Pela Proposição 20, obtemos:

$$I(\mathcal{C}) = 4AC - B^2 = 4A'C' = I(\mathcal{C}')\,. \tag{49}$$

Mas, na aula anterior, já classificamos as equações do tipo:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0\,,$$

através da observação dos coeficientes A' e C':

- A' e C' com mesmo sinal ($A'C' > 0$) $\Rightarrow$ $\mathcal{C}'$ é uma elipse,
- A' e C' com sinal contrário ($A'C' < 0$) $\Rightarrow$ $\mathcal{C}'$ é uma hipérbole,
- $A' = 0$ e $C' \neq 0$ ou $A' \neq 0$ e $C' = 0$ ($A'C' = 0$) $\Rightarrow$ $\mathcal{C}'$ é uma parábola,

incluindo os casos degenerados em cada alternativa.

Portanto, da igualdade dos indicadores (49), concluímos:

Classificação da equação geral de segundo grau.
Dada a equação:

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

e designando $I(\mathcal{C}) = 4AC - B^2$, temos:

- $I(\mathcal{C}) > 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ é uma elipse *(equação de tipo elíptico)*,
- $I(\mathcal{C}) < 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ é uma hipérbole *(equação de tipo hiperbólico)*,
- $I(\mathcal{C}) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ é uma parábola *(equação de tipo parabólico)*,

incluindo os casos degenerados em cada alternativa.

Exemplo 73

Identifiquemos a cônica $\mathcal{C}$ dada pela equação:

$$\mathcal{C} : 4xy - 3y^2 + x = 0\,, \tag{50}$$

e determinemos o sistema de coordenadas no qual a sua equação é apresentada na forma canônica.

Reveja...
Os critérios da Aula 8 para identificar uma cônica que não contém o termo xy.

NOTA IMPORTANTE !
Em alguns livros sobre Geometria Analítica, o indicador é definido por:

$$\begin{aligned} I &= -4\det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \\ &= B^2 - 4AC\,. \end{aligned}$$

Com isso, a cônica é:
- uma elipse, se $I < 0$;
- uma parábola, se $I = 0$;
- uma hipérbole, se $I > 0$;

No entanto, essa não é uma convenção padrão e nós achamos mais natural definir o indicador de modo que as elipses fiquem com indicador positivo e as hipérboles com indicador negativo. É questão de preferência.

Solução: *Os coeficientes dos termos do segundo grau são* $A = 0$, $B = 4$ *e* $C = -3$. *Logo, o indicador da equação é:*

$$I(\mathcal{C}) = 4AC - B^2 = 4 \times 0 \times (-3) - (-4)^2 = -16 < 0\,.$$

Portanto, a cônica é uma hipérbole e a equação é do tipo hiperbólico.

Determinemos agora um sistema de coordenadas $O'X'Y'$, *rotacionado de* OXY, *para reduzir a equação dada, eliminando o termo em* xy.

Considerando a mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\,. \end{cases}$$

determinemos o coeficiente de $x'y'$, *que só aparece nos termos de segundo grau na equação de* $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} 4xy &= 4(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) \\ &= 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(x')^2 + 4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\,x'y' - 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(y')^2)\,, \\ -3y^2 &= -3(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 \\ &= -3\operatorname{sen}^2\theta\,(x')^2 - 6\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,x'y' - 3\cos^2\theta\,(y')^2\,. \end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de $x'y'$ *é:*

$$4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta - 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,.$$

Então, devemos determinar os valores de $\cos\theta$ *e* $\operatorname{sen}\theta$ *para que esse coeficiente seja igual a zero, isto é, devemos resolver a equação:*

$$4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta - 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0\,.$$

Dividindo essa equação por $-2\cos^2\theta$, *temos:*

$$2\operatorname{tg}^2\theta + 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0\,.$$

de onde obtemos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{4}\left(-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}\right) = \frac{1}{4}(-3 \pm 5)\,.$$

Isto é, $\operatorname{tg}\theta = -2$ *ou* $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{2}$.

Seguindo a nossa convenção, escolhemos o valor positivo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\,,$$

ou seja $2\operatorname{sen}\theta - cos\theta = 0$.

Do sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta &= 0 \\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \end{aligned}$$

obtemos (seguindo a convenção de tomar o seno positivo) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *e* $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Com isso, a mudança de coordenadas que devemos fazer é dada por:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'\,. \end{cases}$$

Substituindo na equação (50)*, agrupando os termos comuns e simplificando, obtemos a equação da cônica* $\mathcal{C}$ *no sistema rotacionado* $O'X'Y'$*:*

$$(x')^2 - 4(y')^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' = 0\,.$$

Completando os quadrados e simplificando, obtemos:

$$\frac{\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} - \frac{\left(y' + \frac{\sqrt{5}}{40}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2} = 1\,,$$

que é a equação da hipérbole de centro no ponto $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{40}\right)$*, eixo focal paralelo ao eixo* $O'X'$ *e com* $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ *e* $b = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

A translação do sistema $O'X'Y'$ *para o sistema* $O''X''Y''$ *com origem no centro da cônica é dada pela mudança de coordenadas:*

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{40}\,. \end{cases}$$

Com essa translação do sistema de coordenadas, a equação da cônica fica na sua forma canônica em relação ao sistema $O''X''Y''$ (Figura 123):

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2} = 1\,,$$

Mais ainda, note que as assíntotas dessa hipérbole têm equações:

$$y'' = \frac{1}{2}x'' \quad \textit{e} \quad y'' = -\frac{1}{2}x''\,.$$

Para obtermos as equações correspondentes no sistema OXY temos que fazer duas mudanças de coordenadas, a primeira, do sistema $O''X''Y''$ para o sistema $O'X'Y'$ por meio de uma translação:

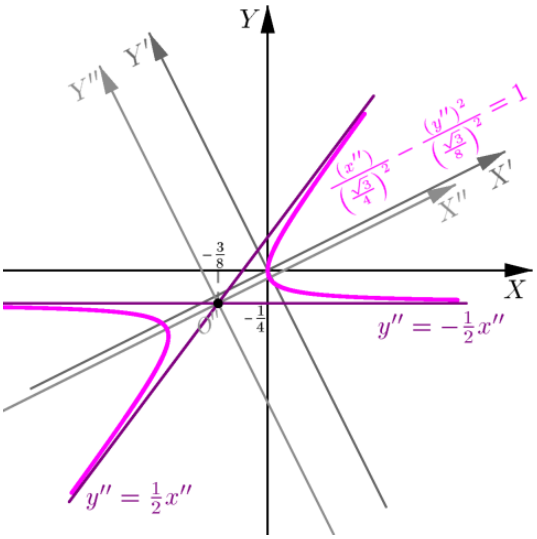


Fig. 123: $4xy - 3y^2 + x = 0\,.$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2}x'' \iff y' + \frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{1}{2}(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}) \\ y'' &= -\frac{1}{2}x'' \iff y' + \frac{\sqrt{5}}{40} = -\frac{1}{2}(x' + \frac{\sqrt{5}}{5})\,. \end{aligned}$$

Na segunda, mudamos do sistema $O'X'Y'$ para o sistema OXY, por meio de uma rotação:

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

Fazendo essa mudança de variáveis nas equações das assíntotas:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{\sqrt{5}}{40} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{\sqrt{5}}{40} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\,, \end{aligned}$$

e simplificando, chegamos a:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} \qquad \textit{e} \qquad y = -\frac{1}{4}\,.$$

Resumo

Nesta aula você viu que as mudanças de coordenadas por rotações eliminam o termo xy da equação de uma cônica; aprendeu a identificar uma cônica a partir dos seus coeficientes, usando o seu indicador, e aprendeu a usar os resultados da aula em conjunção com a mudança de variável por translação, apresentada na aula anterior, para reduzir uma cônica arbitrária a sua forma canônica.

Exercícios

1. Para cada equação abaixo, dê o candidato a lugar geométrico dos pontos que a satisfazem.

No caso em que o candidato seja uma parábola, faça a redução da equação exibindo as mudanças de coordenadas.

a. $9x^2 - 16y^2 - 54x + 32y - 79 = 0$;

b. $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$;

c. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 150x - 200y + 625 = 0$.

2. Seja $\mathcal{C}$ o círculo de equação $x^2 + y^2 = r^2$. Mostre que sua equação é invariante por rotações, isto é, se tomamos um sistema de coordenadas $O'X'Y'$, rotacionado de OXY de um ângulo θ, então a equação do círculo nesse novo sistema é $(x')^2 + (y')^2 = r^2$.

3. Seja $\mathcal{C}$ o círculo de equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Verifique que $\mathcal{C}$ é invariante por simetria em relação a qualquer reta que passe pelo centro(a, b).

Sugestão: Use a expressão da Proposição 16 da Aula 7 para fazer a simetria de um ponto do círculo em relação à reta e mostre que esse ponto continua a pertencer ao círculo.

4. Faça a redução à forma canônica de cada equação abaixo, identificando a cônica.

Determine, conforme o caso, vértices, assíntotas, diretrizes, tanto no sistema em que foi obtida a equação reduzida quanto no sistema OXY.

a. $4xy - 3y^2 - 36 = 0$;

b. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

c. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

d. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$;

5. Na Figura 124, o centro e os vértices da hipérbole estão sobre a reta diagonal $y = x$ do plano e têm coordenadas: $(3,3)$, $(2,2)$ e $(4,4)$, respectivamente e as assíntotas são as retas $x = 3$ e $y = 3$.

Dê a equação da hipérbole no sistema OXY.

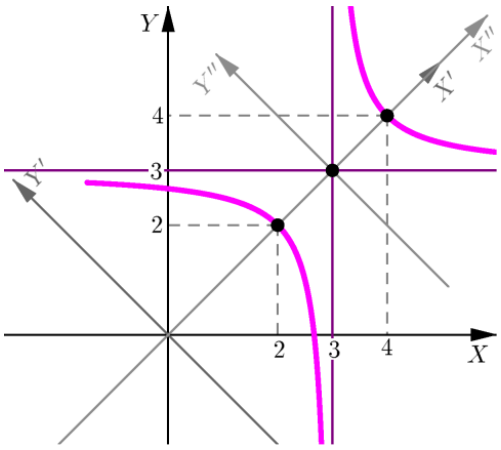


Fig. 124: Exercício **5.**

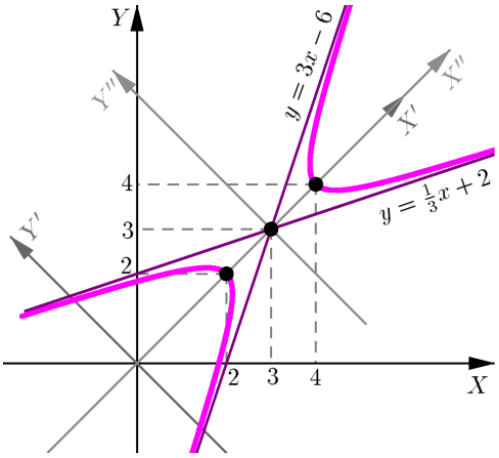


Fig. 125: Exercício **6.**

6. Na Figura 125, a hipérbole tem os mesmos vértices e centro que a hipérbole do exercício anterior e as assíntotas são as retas $x - 3y + 6 = 0$ e $3x - y - 6 = 0$.

Dê a equação da hipérbole no sistema OXY.

7. Seja a equação $7x^2 - 48xy - 7y^2 - 25t = 0$, onde $t \in \mathbb{R}$.

a. Dê os valores de t para os quais a equação se torna a equação de uma cônica degenerada.

b. Tome um valor $a > 0$. Compare as equações reduzidas para $t = a$ e $t = -a$. O que as curvas soluções têm em comum?

8. Classifique, em função do parâmetro k, a cônica :

$$x^2 + 2kx + 2ky^2 = 2k + 1\,,$$

determinando também, quando possível, a equação da reta focal.

Sugestão: O problema consiste em identificar os valores do parâmetro k para os quais a equação representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Devem ser analisados os casos degenerados. Use o indicador.

9. Considere a equação:

$$mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + 6y - 6 = 0\,.$$

a. Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que a equação acima seja do tipo parabólico.

b. Verifique que a equação com o valor m, encontrado no item anterior, representa um par de retas paralelas, ou seja, é uma parábola degenerada. Determine a equação dessas retas no sistema OXY.

10. Seja a família de curvas:

$$x^2 + 2\lambda x + (\lambda - 2)y^2 + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

a. Classifique essa família em função do parâmetro λ;

b. Determine para que valores de λ, a cônica acima é degenerada.

ATENÇÃO!
Os cálculos a serem feitos para reduzir uma cônica à sua forma canônica são laboriosos e devem ser realizados com extremo cuidado para evitar enganos. Na disciplina de Álgebra Linear será desenvolvido um método matricial para reduzir uma cônica à sua forma canônica com cálculos mais simples. Até lá, você deve ter bastante familiaridade com os métodos apresentados nesta aula.

Auto-avaliação

Você entendeu bem como rotacionar um sistema de eixos coordenados? Ficou claro que, para fazer a mudança de variáveis por rotações é fundamental determinar o cosseno e o seno do ângulo de rotação? Você não deve ter dificuldade em resolver os exercícios propostos. Com eles você irá adquirir mais soltura nos cálculos. Caso tenha alguma dificuldade, reveja os assuntos apresentados na aula e analise os exemplos cuidadosamente.

Apêndice. Invariância do indicador perante rotações

Neste apêndice vamos demonstrar a Proposição 20.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ a cônica de equação:

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Consideremos a mudança de coordenadas dada pelas relações:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta\,. \end{cases}$$

Substituindo essas relações na equação de $\mathcal{C}$ chegamos novamente a uma equação do segundo grau:

$$A'(x')^2 + B'(x')(y') + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0\,,$$

em que os coeficientes A', B' e C' são:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C\,\mathrm{sen}^2\theta\,,\\ B' &= 2(A-C)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\,,\\ C' &= A\,\mathrm{sen}^2\theta - B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C\cos^2\theta\,. \end{aligned}$$

O indicador dessa nova equação é $4A'C' - (B')^2$, onde:

$$\begin{aligned} 4A'C' = {} & 4(A^2 - B^2 + C^2)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + 4(BC - AB)\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\\ & +4(AB - BC)\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta + 4AC\cos^4\theta + 4AC\,\mathrm{sen}^4\theta\,.\\ (B')^2 = {} & 4(A^2 - 2AC + C^2)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + 4(BC - AB)\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\\ & +4(AB - BC)\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta + B^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)^2\,. \end{aligned}$$

Calculando $4A'C' - (B')^2$, temos:

$$\begin{aligned} 4A'C' - (B')^2 = {} & -4B^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + 4AC(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\theta)\\ & +8AC\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta - B^2\cos^4\theta + 2B^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\\ & -B^2\,\mathrm{sen}^4\theta\\ = {} & 2(4AC - B^2)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + (4AC - B^2)(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\theta)\\ = {} & (4AC - B^2)(cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)^2\\ = {} & 4AC - B^2\,. \end{aligned}$$

Portanto, $4A'C' - (B')^2 = 4AC - B^2$. $\square$

Regiões e inequações no plano

Objetivos

- Resolver inequações do segundo grau.
- Analisar sistemas envolvendo inequações do primeiro e segundo graus.
- Resolver inequações modulares a duas variáveis.
- Analisar sistemas envolvendo inequações do primeiro grau, do segundo grau e modulares.

O conhecimento das curvas representadas por equações gerais do primeiro e segundo graus é um passo importante para determinar regiões do plano delimitadas por tais curvas. Uma região no plano delimitada por tais curvas consiste do conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem uma ou várias inequações algébricas. Como veremos a seguir.

Regiões do plano e inequações.

Você já percebeu que retas e cônicas dividem o plano em regiões?

Definição 27 *Dizemos que uma região do plano é* conexa *se ela não é a união de duas ou mais regiões disjuntas (Figura 126).*

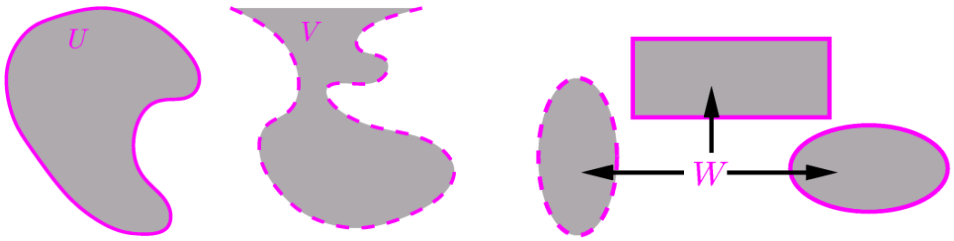


Fig. 126: Cada uma das regiões U e V são conexas, enquanto que a região W não é conexa.

Regiões conexas.
Dizer que uma região é conexa significa que ela é formada de uma peça só, como cada uma das figuras U e V ao lado. Enquanto que a região W é formada por três partes.

Convenção. Daqui por diante, usaremos o termo *região* para nos referir a uma *região conexa*.

Observe que uma reta divide o plano em duas regiões, enquanto que o número de regiões determinadas por uma cônica pode variar.

Primeiramente, consideremos as cônicas não degeneradas:

- Uma elipse divide o plano em duas regiões: a região interior, que contém seus focos, e a exterior;

• Uma hipérbole divide o plano em três regiões: uma que contém um dos focos, outra que contém o outro foco e a região que contém suas assíntotas;

• Uma parábola divide o plano em duas regiões: uma que contém o foco e a outra que contém a diretriz.

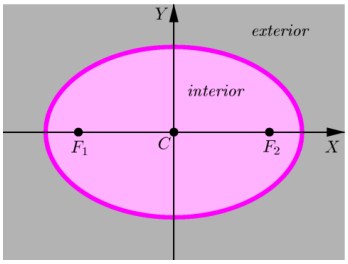


Fig. 127: Elipse.

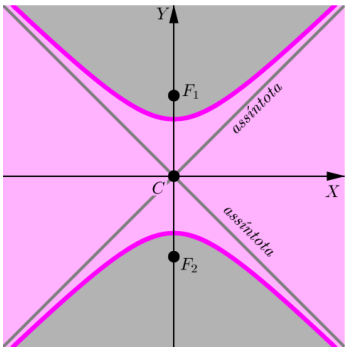


Fig. 128: Hipérbole.

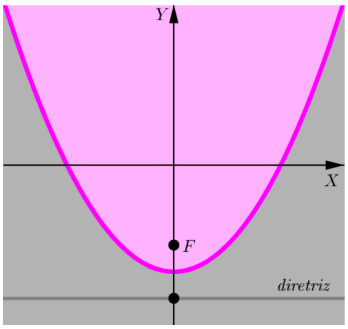


Fig. 129: Parábola.

Figura 131: O gráfico da hipérbole degenerada definida pela equação: $x^2 - y^2 = 0$, consiste de duas retas concorrentes. O plano fica dividido nas quatro regiões mostradas na figura.

Figura 132: Neste gráfico mostramos a parábola degenerada: $x^2 + x - 2 = 0$, cujo gráfico consiste de duas retas paralelas que dividem o plano em três regiões.

Figura 133: Neste gráfico mostramos a parábola degenerada: $y^2 = 0$, que divide o plano em duas regiões.

Se olharmos as cônicas degeneradas encontramos outras situações.

• Uma elipse degenerada não divide o plano, pois neste caso os possíveis lugares geométricos são o conjunto vazio $\varnothing$, ou um único ponto;

• Uma hipérbole degenerada, cujo gráfico são duas retas concorrentes, divide o plano em quatro regiões;

• Uma parábola degenerada divide o plano em três regiões, se o seu gráfico consistir de duas retas paralelas, e divide o plano em duas regiões, quando seu gráfico for apenas uma reta (duas retas coincidentes).

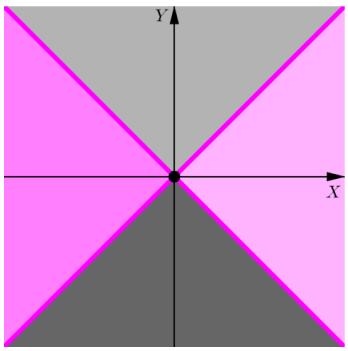


Fig. 131: Hipérbole degenerada.

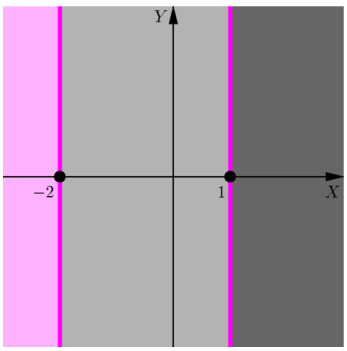


Fig. 132: Parábola degenerada.

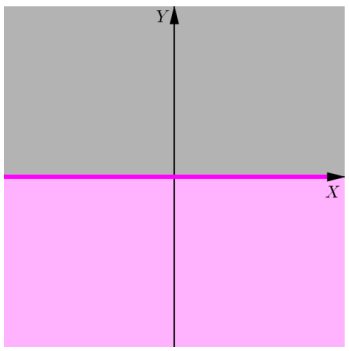


Fig. 133: Parábola degenerada.

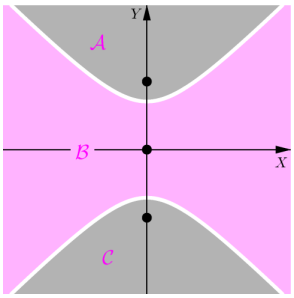


Fig. 130: Regiões $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ desconectadas.

Observe que, se retiramos do plano o conjunto dos pontos de uma cônica não degenerada, então as regiões que ela determina ficam desconectadas umas das outras. O mesmo acontece se retirarmos do plano uma reta (Figura 130).

Designemos por π o plano e por π^* o plano do qual retiramos o conjunto dos pontos da cônica ou reta, conforme o caso, por exemplo, na Figura 130, o conjunto $\pi^* = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é o que resta do plano após retirarmos os pontos de uma hipérbole.

Sabemos que as retas e cônicas são lugares geométricos formados por conjuntos de pontos que satisfazem uma equação dada. No caso das retas, a equação é

$$Ax + By + C = 0$$

e, no caso das cônicas, a equação é a equação geral do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Portanto, as regiões de π^* determinadas por uma reta satisfazem a inequação

$$Ax + By + C > 0$$

ou a inequação

$$Ax + By + C < 0$$

e as regiões determinadas por uma cônica satisfazem a inequação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F > 0$$

ou a inequação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F < 0\,.$$

Resumindo:

Observação importante.
Dada uma equação algébrica do primeiro ou segundo graus, os pontos de cada região de π^* por ela determinada, satisfaz apenas uma das desigualdades:

$$\begin{array}{ll} Ax + By + C > 0\,, & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F > 0\,, \\ Ax + By + C < 0\,, & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F < 0\,. \end{array} \qquad (51)$$

Pense! Você já observou esse fato nos círculos! Num círculo de raio r, os pontos da região que contém o centro, denominada *região interior*,

estão a uma distância do centro menor que r e os pontos da região que não contém o centro, denominada *região exterior*, estão a uma distância do centro maior que r.

Esta situação pode ser descrita usando uma inequação:

Se o círculo tem equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, então a região interior é formada pelo conjunto de pontos tais que:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\,.$$

Elevando ao quadrado, obtemos que os pontos da região interior satisfazem a inequação:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\,.$$

Enquanto que os pontos da região exterior satisfazem a inequação:

$$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2\,.$$

Analogamente, a região obtida fazendo a união da região interior com o círculo, consiste dos pontos cujas coordenadas (x,y) satisfazem a inequação:

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\,,$$

e a união da região exterior com o círculo consiste dos pontos cujas coordenadas satisfazem a inequação:

$$(x-a)^2+(y-b)^2\geq r^2\,.$$

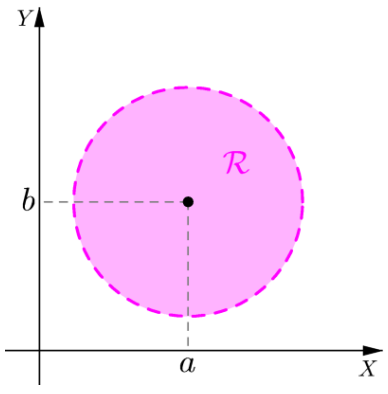


Fig. 134: $\mathcal{R}:(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

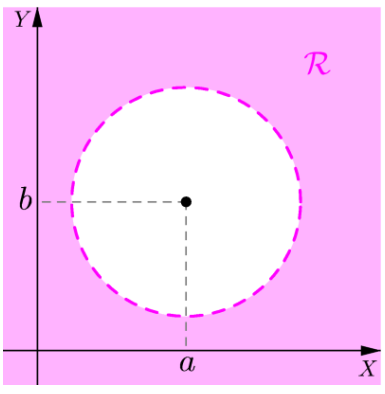


Fig. 135: $\mathcal{R}:(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$.

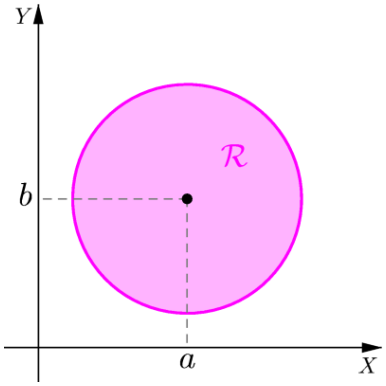


Fig. 136: $\mathcal{R} : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$.

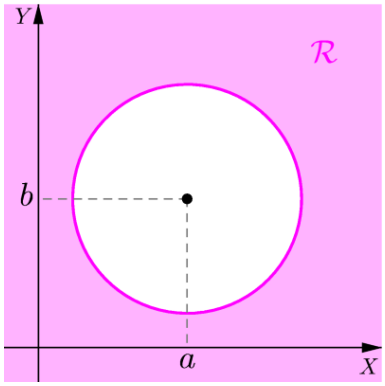


Fig. 137: $\mathcal{R} : (x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$.

Assim, para descobrirmos a inequação que é satisfeita pelo conjunto de pontos de uma região dada, basta testar a condição (inequação) que a define apenas em um ponto da mesma, pois todos os outros pontos dessa região satisfazem a mesma inequação.

Exemplo 74 *Determinemos a região $\mathcal{R}$ do plano formada pelos pontos que satisfazem a inequação:*

$$y^2 + x + 3y > 0\,.$$

Solução: *O primeiro passo é fazer a redução do lado esquerdo da inequação, tomando o devido cuidado com a desigualdade:*

$$\begin{aligned} y^2 + x + 3y > 0 \quad &\Rightarrow \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + x > \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{9}{4}\right) > 0\,. \end{aligned}$$

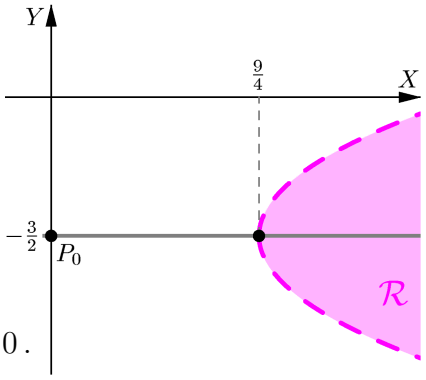


Fig. 138: Região $\mathcal{R} : y^2 + x + 3y > 0$.

O segundo passo é identificar a curva que satisfaz a equação:

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{9}{4}\right) = 0\,.$$

Vemos que é a equação de uma parábola (não degenerada). Portanto, a curva divide o plano em duas regiões. As coordenadas do vértice são $(9/4, -3/2)$ e a equação da reta que contém o foco (reta focal) é $y = -3/2$. Agora, basta escolher dois pontos da reta focal que estejam em regiões diferentes e testar.

Substituindo as coordenadas do ponto $P_0 = (0, -3/2)$ no primeiro membro da inequação (isto é, $y^2 + x + 3y$), obtemos:

$$(-3/2)^2 + 0 + 3(-3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4 < 0$$

Como o resultado é menor que zero, a desigualdade proposta não é satisfeita pelas coordenadas de P_0.

Pelo fato de só haver duas regiões, vemos que a região $\mathcal{R}$ que satisfaz a desigualdade proposta é a região que não contém o ponto P_0 (Figura 138).

Exemplo 75 *Determinemos a região $\mathcal{R}$ do plano formada pelos pontos que satisfazem a inequação:*

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0\,.$$

Solução: *Observe que na inequação não aparece a variável y. Isso significa que se um valor x_0 satisfaz a inequação, então, os pontos $P = (x_0, y)$ também a satisfazem, qualquer que seja o valor de y.*

Fatorando, vemos que a inequação equivale a $(x-2)(x-1) \leq 0$.

De forma análoga ao exercício anterior, vemos que o lugar geométrico determinado pela equação $(x-2)(x-1) = 0$ consiste das retas $x = 2$ e $x = 1$.

Essas retas dividem o plano em três regiões e os pontos $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(3,0)$ estão em regiões distintas.

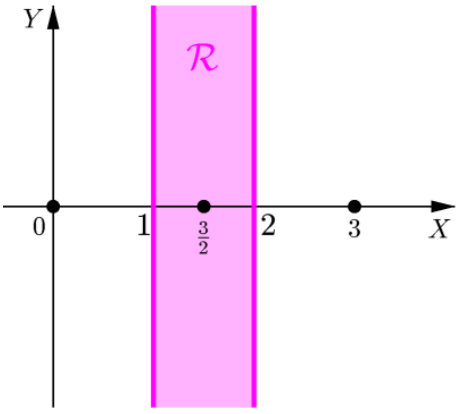


Fig. 139: Região $\mathcal{R}$: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Testemos esses pontos no primeiro membro da inequação proposta:

Para $(0,0)$, temos: $(0)^2 - 3(0) + 2 = 2$.

Para $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, temos: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$.

Para $(3,0)$, temos: $(-3)^2 - 3(-3) + 2 = 20$.

Assim, a região que satisfaz a inequação é a região entre as retas, incluindo as retas, que contém o ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (Figura 139).

Exemplo 76 *Seja a hipérbole* $\mathcal{H}: \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$

Determinemos a desigualdade que é satisfeita pelo conjunto de pontos de cada região delimitada por $\mathcal{H}$.

Solução: *Basta identificar um ponto de cada região e substituir suas coordenadas no lado esquerdo da equação de* $\mathcal{H}$. *Sabemos que o ponto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *é o centro de* $\mathcal{H}$, *que* $y = y_0$ *é a reta que contém os focos* $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ *e* $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, *onde* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

E que os pontos P_0, F_1 *e* F_2 *estão em regiões diferentes (Figura 140).*

Substituindo as coordenadas desses pontos no primeiro membro da inequação, temos:

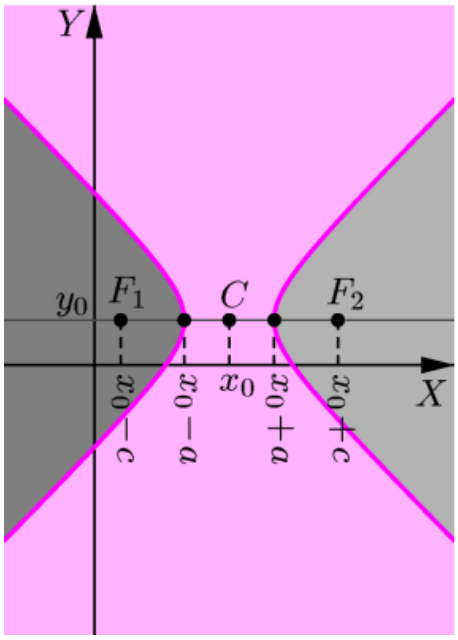


Fig. 140: Regiões limitadas por $\mathcal{H}$.

Para P_0: $\dfrac{(x_0 - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y_0 - y_0)^2}{b^2} = 0 < 1$;

Para F_1: $\dfrac{(x_0 + c - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y_0 - y_0)^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} > 1$;

Para F_2: *também obtemos* $1 + \dfrac{b^2}{a^2} > 1$.

Portanto, as coordenadas dos pontos da região que contém o centro P_0 *satisfazem:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} < 1\,,$$

e as coordenadas dos pontos das regiões que contêm F_1 *e* F_2 *satisfazem:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} > 1\,.$$

Sistemas de inequações.

Definição 28 (Sistema de inequações no plano.) *Um* sistema de inequações no plano *é um conjunto de duas ou mais inequações. Sua solução é o conjunto de pontos do plano que satisfazem simultaneamente cada inequação do sistema.*

Assim, para resolver um sistema de inequações, encontramos a(s) região(ões) determinada(s) por cada inequação, pois a solução do sistema é a intersecção dessas regiões. No seguinte analisaremos apenas sistemas de inequações de primeiro e segundo graus. Veja os seguintes exemplos.

Exemplo 77 *Esbocemos a região do plano determinada pelo sistema:*

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 9 \\ x^2+y-3>0\,. \end{cases}$$

Solução:

Primeira etapa: *Identificamos a equação correspondente a cada inequação do sistema. Em nosso caso, as equações são:*

$$x^2+y^2=9 \quad \textit{e} \quad x^2+y-3=0\,.$$

A primeira é a equação de um círculo centrado na origem e raio 3*, e a segunda, a equação de uma parábola.*

Segunda etapa: *Determinamos a solução de cada inequação. Já sabemos que a inequação* $x^2+y^2 \leq 9$ *corresponde a união do círculo com seu interior* $\mathcal{R}_1$*. Para identificar a região* $\mathcal{R}_2$ *da inequação* $x^2+y-3>0$*, testamos o ponto* $(0,0)$*. Substituindo suas coordenadas no primeiro membro da desigualdade, obtemos* -3*, logo* $(0,0)$ *não satisfaz a desigualdade.*

Como a parábola determina apenas duas regiões, então a região que satisfaz a inequação é aquela que não contém $(0,0)$.

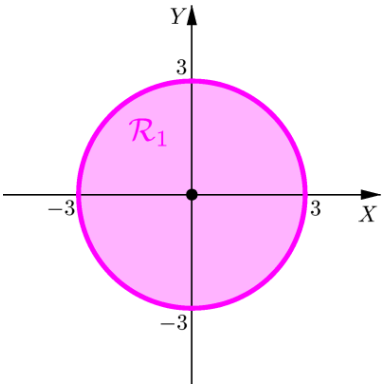


Fig. 141: Solução de $x^2+y^2 \leq 9$.

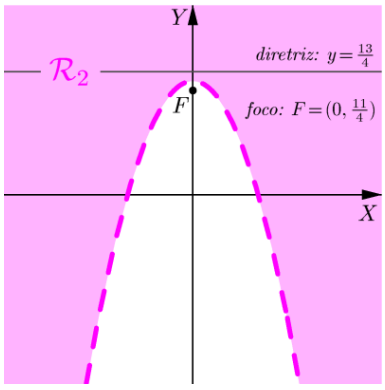


Fig. 142: Solução de $x^2+y-3>0$.

Convenção. Quando uma curva faz parte de uma determinada região, usamos uma linha cheia para desenhá-la; quando não, usamos linha pontilhada.

Terceira etapa: *Esboçamos cada região em sistemas de coordenadas separados (Figuras 141 e 142).*

Quarta etapa: *Esboçamos as regiões em um só sistema de coordenadas, exibindo a região definida pelo sistema.*

Como a solução é o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem todas as equações do sistema, então a região procurada é a intersecção das regiões das Figuras 141 e 142.

Para esboçar corretamente a região procurada, devemos determinar os pontos de intersecção das curvas que a delimitam.

Isto é, devemos resolver o sistema:

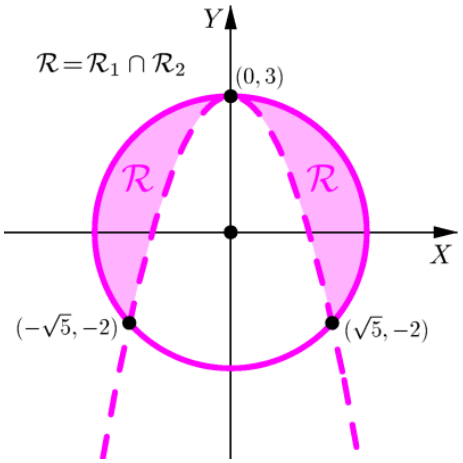


Fig. 143: $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y-3=0\,. \end{cases}$$

Da primeira equação, temos $x^2 = 9 - y^2$. *E, substituindo na segunda equação,*

$$9-y^2+y-3=0 \iff y^2-y-6=0 \iff y=3 \text{ ou } y=-2\,.$$

Logo,

$$y=3 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0\,, \text{ de onde obtemos o ponto } (0,3)\,.$$

$$y=-2 \Rightarrow x^2=9-(-2)^2 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{5} \text{ ou } x=-\sqrt{5}\,,$$

de onde obtemos os pontos $(-\sqrt{5},-2)$ *e* $(\sqrt{5},-2)$.

Com esses dados, esboçamos na Figura 143 a solução do sistema proposto.

Exemplo 78 *Esbocemos a região do plano determinada pelo sistema:*

$$\begin{cases} x-y+1\geq 0 \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}\geq 1 \\ x\leq 0 \end{cases}$$

Solução: *Sigamos as etapas apresentadas no exemplo anterior.*

As equações correspondentes à primeira e à segunda inequações são:

$$\text{a reta } x-y+1=0\,, \quad \text{e} \quad \text{a elipse } \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\,,$$

respectivamente.

Testemos o ponto $(0,0)$ *para determinar a região da primeira inequação.*

Como $(0,0)$ *satisfaz a primeira inequação, então a região que ela determina é o semi-plano mostrado na Figura 144.*

Note que $(0,0)$ *não satisfaz a segunda inequação.*

Logo, a região que satisfaz a segunda inequação é a região exterior à elipse (Figura 145).

A região determinada pela terceira inequação é o semi-plano que consiste dos pontos (x,y)*, com* $x\leq 0$*, mostrada na Figura 146.*

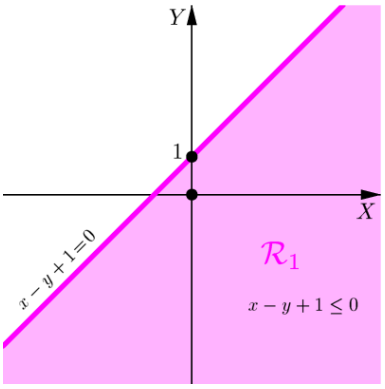


Fig. 144: Região $x-y+1\geq 0$.

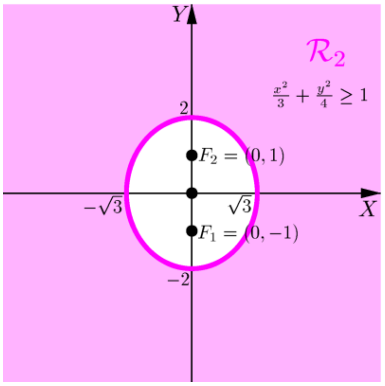


Fig. 145: Região $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\geq 1$.

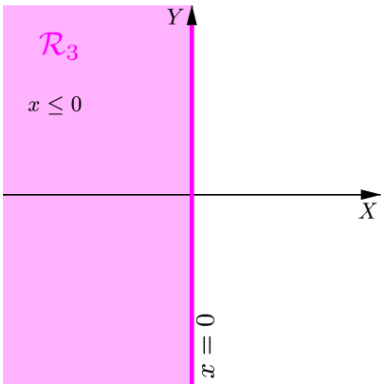


Fig. 146: Região $x\leq 0$.

Para determinar a região solução do sistema proposto, determinemos os pontos de intersecção das curvas que formam o seu contorno.

Para tanto, resolvemos os seguintes sistemas, que representam intersecções das curvas duas a duas:

$$\text{(a)}\begin{cases} x-y+1=0 \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \quad ; \text{(b)}\begin{cases} x-y+1=0 \\ x=0 \end{cases} \quad ; \text{(c)}\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

As soluções para o sistema (a) são os pontos $\left(\dfrac{-3+6\sqrt{2}}{7},\dfrac{4+6\sqrt{2}}{7}\right)$ *e* $\left(\dfrac{-3-6\sqrt{2}}{7},\dfrac{4-6\sqrt{2}}{7}\right)$*. Para o sistema (b) encontramos o ponto* $(0,1)$ *e para o sistema (c), os pontos* $(0,2)$ *e* $(0,-2)$*.*

Talvez não seja necessário determinar todos esses pontos, mas é importante saber quais são as intersecções possíveis das curvas do contorno da região.

Com essa informação, vemos que a região $\mathcal{R}$, solução do sistema proposto (Figura 147), é dada pela intersecção das regiões $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 .$$

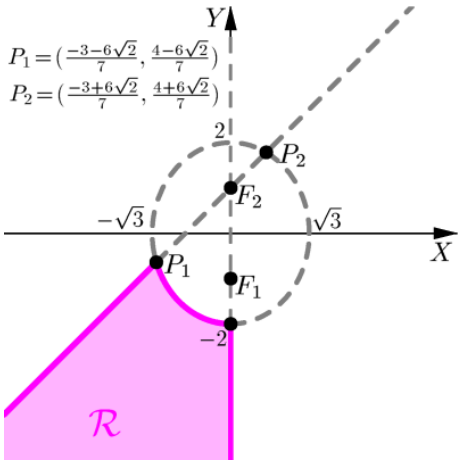


Fig. 147: Exemplo 78.

Exemplo 79 *Esbocemos a região do plano determinada pelo sistema:*

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Solução: *Observe que a região que satisfaz a primeira inequação e a região que satisfaz a segunda é exatamente o oposto do encontrado nas duas primeiras inequações do sistema do Exemplo 78.*

Portanto, a região que satisfaz simultaneamente essas duas inequações é uma parte da região do interior da elipse mostrada na Figura 148.

No entanto, a região que satisfaz a terceira inequação é o semi-plano à direita da reta $x = 3$, e essa região não intersecta o interior da elipse, logo o conjunto solução desse sistema, e portanto, do sistema proposto, é o conjunto vazio!

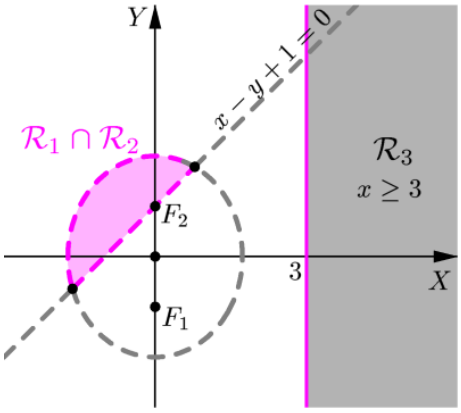


Fig. 148: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 = \varnothing$.

Inequações modulares.

As inequações que envolvem módulos de expressões de primeiro e segundo graus são chamadas *inequações modulares*. Essas inequações também dividem o plano em regiões.

As inequações $x^2 - 4x + |x-4| \geq 0$ e $|x+y+4| + 3x - y < 0$, são exemplos de inequações modulares.

Exemplo 80 *Determinar a região do plano definida pela inequação:*

$$x^2 - 4x + |x-4| \geq 0\,.$$

Solução: *Observe que a variável y não aparece na inequação. Isto significa que, se (x_0, y_0) é um ponto do plano cujas coordenadas satisfazem a inequação proposta, então todos os pontos (x_0, y) também a satisfazem, qualquer que seja o valor de y.*

O primeiro a fazer é eliminar o sinal de módulo. Para isso, lembre que

$$\begin{aligned} |x-4| &= x-4 \iff x-4 \geq 0 \iff x \geq 4\,; \\ \text{e} & \\ |x-4| &= -(x-4) \iff x-4 < 0 \iff x < 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, a inequação proposta é dividida em dois sistemas de inequações:

$$\text{(a)} \begin{cases} x^2 - 4x + x - 4 \geq 0 \\ x \geq 4\,, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{(b)} \begin{cases} x^2 - 4x - x + 4 \geq 0 \\ x < 4. \end{cases}$$

Que, simplificando, correspondem aos sistemas:

$$\text{(a)} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x \geq 4\,, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{(b)} \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x < 4\,, \end{cases}$$

e a solução procurada é a união das regiões $\mathcal{R}_{(a)}$ e $\mathcal{R}_{(b)}$ determinadas por esses sistemas.

Resolução do sistema (a): A equação $x^2 - 3x - 4 = 0$ tem por soluções $x = -1$ e $x = 4$, que representam retas verticais no plano, pois y é arbitrário. Essas retas dividem o plano em três regiões.

A primeira desigualdade do sistema (a) é verificada pelos pontos à esquerda da reta $x = -1$ e pelos pontos à direita da reta $x = 4$, incluíndo ambas as retas.

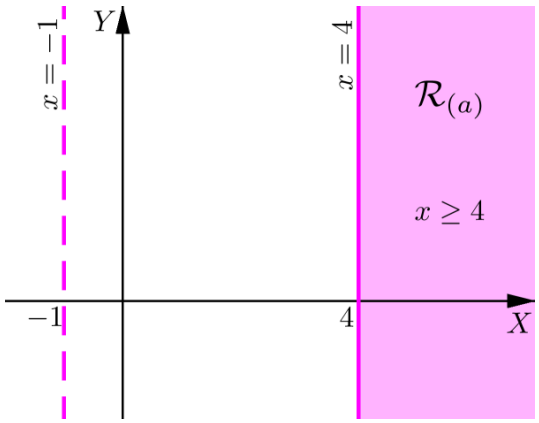


Fig. 149: $\mathcal{R}$: solução do sistema (a).

A segunda desigualdade do sistema (a) se satisfaz somente na região que está à direita da reta $x = 4$, incluindo a própria reta. Portanto, a região solução do sistema (a) consiste dos pontos à direita da reta $x = 4$, incluíndo os pontos dessa reta.

Resolução do sistema (b): A equação $x^2-5x+4 = 0$ tem por soluções $x = 1$ e $x = 4$.

A primeira desigualdade do sistema (b) é satisfeita fora da região limitada pelas retas $x = 1$ e $x = 4$, incluindo os pontos das retas.

A segunda desigualdade do sistema (b) é satisfeita na região à esquerda da reta $x = 4$.

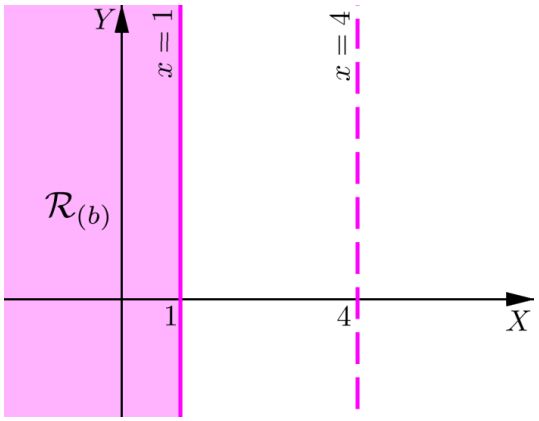


Fig. 150: $\mathcal{R}$: solução do sistema (a).

Logo o sistema (b) tem por conjunto solução o semi-plano à esquerda da reta $x = 1$, incluindo essa reta.

A solução do sistema proposto é a união $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(a)} \cup \mathcal{R}_{(b)}$ das regiões soluções de (a) e (b), como mostramos na Figura 151.

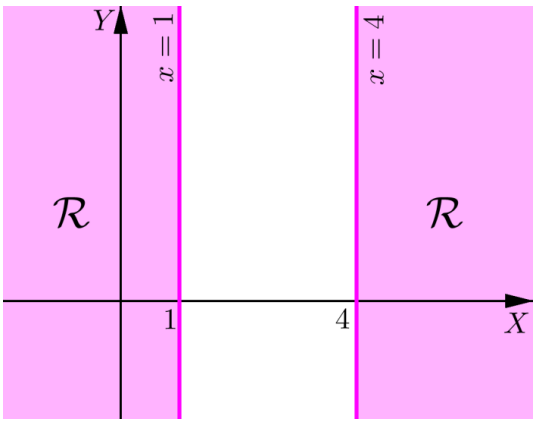


Fig. 151: $\mathcal{R} : x^2 - 4x + |x - 4| \geq 0$.

Exemplo 81 *Determinar a região do plano definida pela inequação*

$$|x + y + 4| + 3x - y < 0\,.$$

Solução: *Como*

$$|x + y + 4| = \begin{cases} x + y + 4\,, & \text{se } x + y + 4 \geq 0 \\ -(x + y + 4) & \text{se } x + y + 4 < 0\,, \end{cases}$$

a inequação proposta é dividida em dois sistemas de inequações:

$$\text{(a)}\ \begin{cases} x+y+4+3x-y<0 \\ x+y+4\geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{(b)}\ \begin{cases} -x-y-4+3x-y<0 \\ x+y+4<0. \end{cases}$$

Ou seja, simplificando:

$$\text{(a)}\ \begin{cases} x+1<0 \\ x+y+4\geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{(b)}\ \begin{cases} x-y-2<0 \\ x+y+4<0. \end{cases}$$

A região $\mathcal{R}$, solução da inequação proposta, é igual à união das regiões $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ determinadas por esses sistemas, respectivamente. Isto é, $\mathcal{R}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$.

Solução do sistema (a): As retas $x+1=0$ e $x+y+4=0$ são concorrentes e se intersectam no ponto $(-1,-3)$ dividindo o plano em quatro regiões. A região $\mathcal{A}$, solução do sistema (a), é a região que contém o ponto $(-2,0)$ (que satisfaz as duas inequações do sistema (a)).

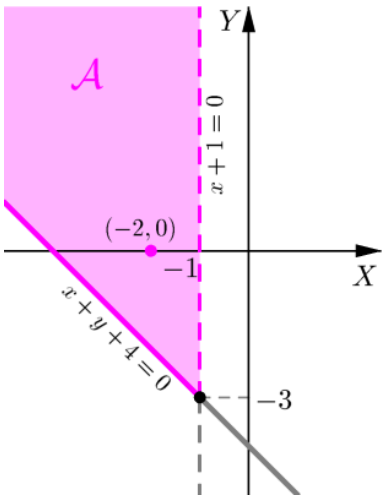


Fig. 152: Região $\mathcal{A}$, solução do sistema (a).

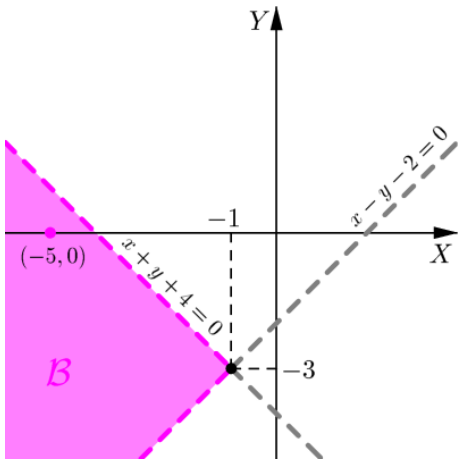


Fig. 153: Região $\mathcal{B}$, solução do sistema (b).

Solução do sistema (b): As retas $x-y-2=0$ e $x+y+4=0$ se intersectam no ponto $(-1,-3)$ dividindo o plano em quatro regiões. A região $\mathcal{B}$, solução do sistema (b), é aquela que contém o ponto $(-5,0)$ (que satisfaz as duas inequações do sistema (b)).

A solução da inequação proposta é a região $\mathcal{R}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ da Figura 154.

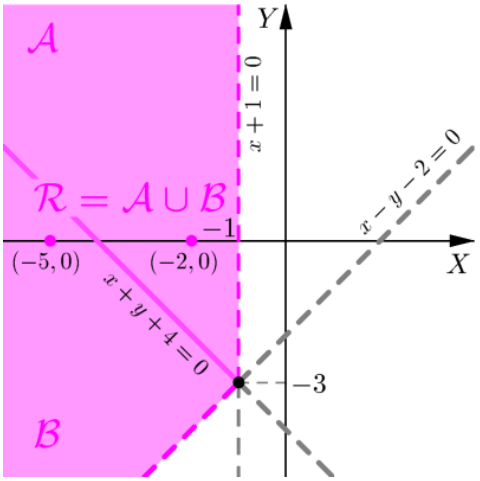


Fig. 154: Solução de $|x+y+4|+3x-y<0$.

Para resolver inequações envolvendo produtos e quocientes de expressões do primeiro e segundo grau (com ou sem módulos), é importante saber resolver sistemas de inequações. Veja o último exemplo.

Exemplo 82 *Determinar o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a inequação:*

$$(|x| - 2)(4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10) < 0\,.$$

Solução: *A desigualdade proposta significa que os fatores envolvidos nos parênteses devem ter sinais contrários. Portanto,* a solução da inequação proposta é a união das regiões determinadas pelos sistemas (a) e (b):

$$\textit{(a)}\ \begin{cases} |x| - 2 < 0 \\ 4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\textit{(b)}\ \begin{cases} |x| - 2 > 0 \\ 4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10 < 0\,. \end{cases}$$

Primeiramente, observamos que a equação $4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10 = 0$, *associada à segunda inequação de ambos os sistemas, se reduz à sua forma canônica:*

$$\frac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 = 0\,.$$

Portanto, os sistemas (a) e (b) acima são equivalentes aos sistemas:

$$\textit{(a')}\ \begin{cases} |x| < 2 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \textit{(b')}\ \begin{cases} |x| > 2 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 < 0\,. \end{cases}$$

O conjunto solução da equação $|x| = 2$, *associada às primeiras desigualdades dos sistemas, é formado pelas retas* $x = 2$ *e* $x = -2$ *(Figura 156) que dividem o plano em três regiões:*

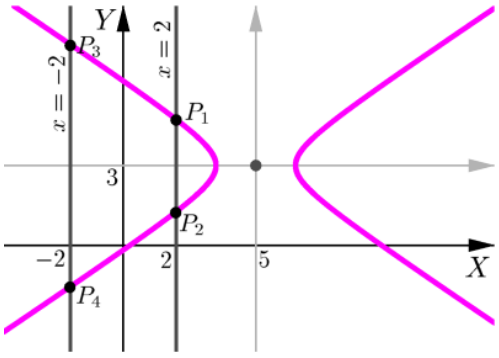


Fig. 156: Retas e hipérbole.

- *A região entre as retas, que contém a origem, consiste dos pontos tais que* $|x| < 2$.
- *A região à direita da reta* $x = 2$, *cujos pontos satisfazem* $|x| > 2$.
- *A região à esquerda da reta* $x = -2$, *cujos pontos satisfazem* $|x| > 2$.

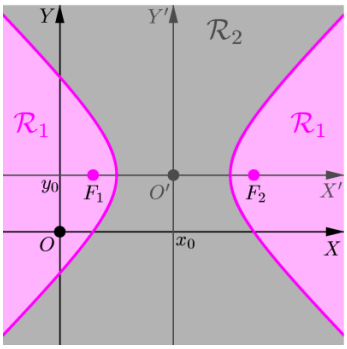


Fig. 155: Hipérbole.

Na Figura acima, mostramos as regiões determinadas pela hipérbole

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - 1 = 0.$

O sinal da expressão do lado esquerdo da equação é:
positivo (> 0) nas regiões $\mathcal{R}_1$ que contêm os focos.
negativo (< 0) na região $\mathcal{R}_2$ que contém o centro e as assíntotas.

Na Figura 156 mostramos as curvas envolvidas nos sistemas (a') e (b'):
A hipérbole:

$\frac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 = 0\,,$

e as retas:
$x = 2$ e $x = -2\,.$

As soluções dos sistemas (a') e (b') são uniões de regiões cujos contornos são partes dessas curvas.

Para determinar com exatidão esses conjuntos, devemos achar os pontos onde as retas intersectam a hipérbole. Para tal, devemos resolver os sistemas:

$$\text{(A)}\ \begin{cases} x = 2 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{(B)}\ \begin{cases} x = -2 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9/4} - (y-3)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Substituindo $x = 2$ *na segunda equação do sistema (A) e resolvendo a equação quadrática resultante na variável* y*, obtemos* $y_1 = 3 + \sqrt{3}$ *e* $y_2 = 3 - \sqrt{3}$.

Portanto, a reta $x = 2$ *intersecta a hipérbole nos pontos* $P_1 = (2, 3 + \sqrt{3})$ *e* $P_2 = (2, 3 - \sqrt{3})$. *Veja a Figura 156.*

Substituindo agora $x = -2$ *na segunda equação do sistema (B) e resolvendo a equação quadrática resultante na variável* y*, obtemos*

$$y_3 = 3 + \frac{\sqrt{187}}{3} \approx 7,56 \qquad \textit{e} \qquad y_4 = 3 - \frac{\sqrt{187}}{3} \approx -1,56\,.$$

Isto é, a reta $x = -2$ *intersecta a hipérbole nos pontos*

$$P_3 = \left(-2, 3 + \frac{\sqrt{187}}{3}\right) \qquad \textit{e} \qquad P_4 = \left(-2, \frac{\sqrt{187}}{3}\right)\,.$$

Veja a Figura 156.

Com esses elementos, vamos descrever separadamente os conjuntos solução dos sistemas (a') e (b').

Solução do sistema (a'):

O conjunto $\mathcal{R}_1$*, solução do sistema (a'), consiste dos pontos da região entre as retas* $x = 2$ *e* $x = -2$ *(excluindo as retas) e que também pertencem às regiões determinadas pela hipérbole que não contém o seu centro (regiões que contêm os focos, isto é, às regiões focais), veja a Figura 157.*

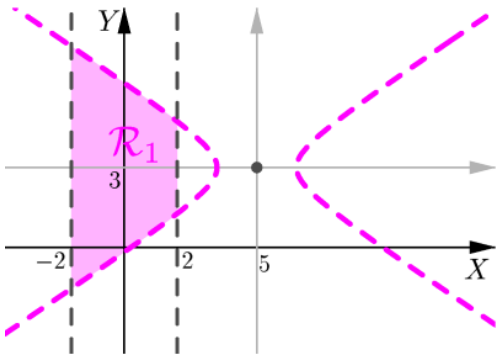


Fig. 157: $\mathcal{R}_1$ *solução do sistema (a).*

Solução do sistema (b'):

O conjunto $\mathcal{R}_2$, solução do sistema (b'), consiste dos pontos que estão à direita da reta $x = 2$, ou à esquerda da reta $x = -2$ (excluindo as retas), que também pertencem à região determinada pela hipérbole que contém o seu centro (excluindo a hipérbole), veja a Figura 158.

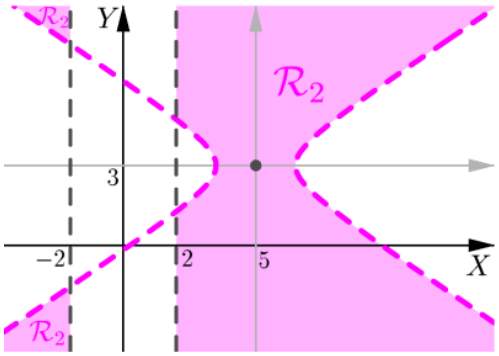


Fig. 158: $\mathcal{R}_2$ solução do sistema (b).

Finalmente, a solução da inequação proposta é a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

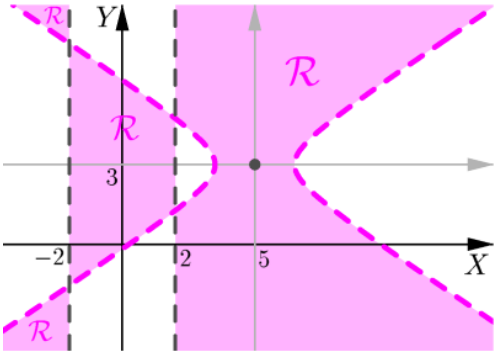


Fig. 159: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ solução da desigualdade $(|x| - 2)(4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10) < 0$.

Resumo

Nesta aula vimos como determinar regiões do plano a partir de inequações envolvendo expressões do primeiro e segundo graus.

Aprendemos, também, a determinar a região solução de sistemas de inequações e de inequações envolvendo módulos de expressões do primeiro e segundo graus.

Exercícios

1. Para cada sistema abaixo, faça um esboço do conjunto solução.

a. $\begin{cases} xy \geq 2 \\ x^2 - y^2 < 1 \, . \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2x \, . \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2x + 4y - 1 \\ x^2 \geq y^2 + 6x - 4y - 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2. Determine os possíveis valores da constante a, para os quais o conjunto solução da inequação abaixo contenha a reta $y = 0$.

$$x^2 - 2x + y + a > 0\,.$$

3. Para cada sistema de inequações abaixo esboce detalhadamente a região do plano por ele definida.

a. $\begin{cases} |x+y| \leq 2 \\ |x-y| < 2 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} |x| \geq y+1 \\ x^2+y^2 < 1 \\ x > y \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} x \leq y+1 \\ x \geq -y \\ x^2+y^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 7 < 0 \\ 9x^2 + y^2 - 36x + 4y + 31 < 0 \\ |y+6| > 2 \end{cases}$; **e.** $\begin{cases} x - 2y \geq 2 \\ x + y \leq -1 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \\ y \geq -2\,. \end{cases}$

Sugestão para o sistema **e.**: faça primeiro a intersecção das regiões determinadas pelas inequações de primeiro grau (as equações correspondentes são retas) e depois faça a intersecção com o círculo, equação correspondente da terceira inequação do sistema.

4. Para cada inequação, esboce detalhadamente a região do plano por ela dada.

a. $(x - y - 1)(y - x - 2) \leq 0\,.$

b. $(9x^2 + y^2 - 36x + 27)(x^2 - 4x + y + 4) > 0\,.$

c. $(|x| - 4)(4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145) < 0\,.$

Auto-avaliação

Resolvendo os Exercícios 1 e 2 fixou as técnicas para determinar regiões delimitadas por retas e cônicas, além de intersecções entre essas regiões. Resolvendo os Exercícios 3 e 4 adquiriu habilidade para desmembrar sistemas envolvendo inequações modulares, e analisar uma inequação dada por produtos de expressões por meio de sistemas de inequações. Em caso de dificuldade, releia a aula com atenção, volte aos exercícios e, se achar necessário, procure os tutores.

Coordenadas polares

Objetivos

- Definir as coordenadas polares no plano.
- Deduzir as relações de mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas e vice-versa.
- Obter as equações de retas e círculos em coordenadas polares.
- Determinar a equação polar das cônicas.

Nesta aula veremos que há outra maneira de expressar a posição de um ponto no plano, distinta da forma cartesiana. Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito simples em relação a um referencial não cartesiano.

Considere um plano sem qualquer sistema de coordenadas. Escolha um ponto O nesse plano e uma semi-reta OA.

Seja P um ponto do plano distinto de O. Denote ρ a distância de P a O, e seja θ a medida do ângulo da semi-reta OA para a semi-reta OP.

O ponto P tem sua posição bem determinada em relação ao ponto O e à semi-reta OA a partir dos valores ρ e θ.

Você acabou de construir um *sistema de coordenadas polares no plano*, cuja definição damos a seguir.

Lembre que ...
Convencionamos que a medida do ângulo tomada de OA para OP no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

Definição 29 (Sistema de coordenadas polares)

Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ no plano consiste de um ponto O, denominado pólo, de uma semi-reta OA, com origem em O, denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de O a um ponto qualquer do plano.

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são dois valores ρ e θ, sendo ρ a distância de P a O e θ a medida do ângulo do eixo polar para a semi-reta OP. Escrevemos então (Figura 160):

$$P = (\rho, \theta)$$

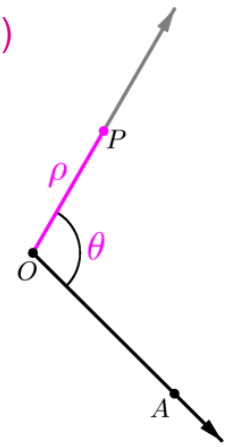


Fig. 160: Coordenadas polares.

Notação.
Quando outros sistemas de coordenadas forem considerados, escrevemos as coordenadas polares, como: $P = (\rho, \theta)_{O\rho\theta}$.

A História da Matemática indica que o sistema de coordenadas polares foi utilizado pela primeira vez pelo matemático suíço *Jacob Bernoulli* por volta de 1691, sendo assim, o primeiro sistema de coordenadas que apareceu na Matemática depois dos sistemas cartesianos. Contudo, em fevereiro de 1949, *Charles B. Boyer* publicou uma nota na revista *The American Mathematical Montly* segundo a qual o crédito da descoberta das coordenadas polares deve ser atribuído a *Isaac Newton*.

Jacob Bernoulli
Em algums livros o matemático *Jacob Bernoulli* é chamado *Jaques Bernoulli*. Nas próximas aulas veremos mais sobre a vida de Jacob Bernoulli.

Observação.

- A primeira coordenada polar, ρ, de um ponto distinto do pólo é sempre maior que zero, pois representa a distância do ponto ao pólo.
- Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido.
- Podemos também usar a medida radianos para os ângulos. Por exemplo, o ponto $P = (2, 30^o)$ pode ser escrito $P = (2, \pi/6)$.
- De acordo com a construção acima, as medidas θ e $\theta + 2\kappa\pi$ estão associadas ao mesmo ângulo, para todo $\kappa \in \mathbb{Z}$. Isto é, a diferença entre θ e $\theta + 2\kappa\pi$ é de κ voltas no sentido anti-horário, se κ é positivo, e no sentido horário, se κ é negativo. Portanto, as coordenadas polares (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2\kappa\pi)$ representam o mesmo ponto no plano.

Exemplo 83 *Nos sistemas de coordenadas polares $O\rho\theta$, mostrados na Figura 161, localizamos os seguintes pontos:*

$P_1 = (1, 0^o)$, $P_2 = (2, \pi)$, $P_3 = (5/4, -45^o)$, $P_4 = (5/4, 315^o)$ *e* $P_5 = (\pi, \pi/2)$.

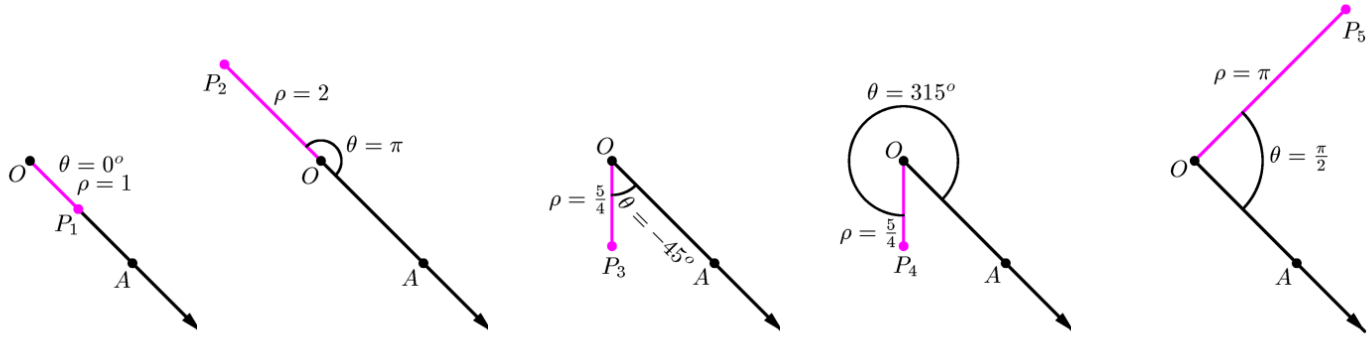


Fig. 161: Pontos $P_1, \ldots, P_5$.

Exemplo 84 *Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determinemos os pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação $\rho = 3$.*

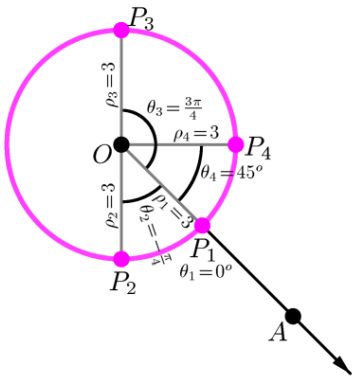


Fig. 162: Pontos com $\rho = 3$.

Solução: *Como na equação só figura a variável ρ, a outra, θ, é arbitrária.*

Isto significa que a equação só estabelece condição sobre a distância do ponto ao eixo polar, não importando a medida do ângulo.

Portanto, os pontos do plano que satisfazem a equação são aqueles cuja distância ao pólo O é igual a 3.

Logo, o conjunto solução é o círculo de centro O e raio 3 (Figura 162).

Equação polar de uma reta.

Exemplo 85 *Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determinemos o conjunto dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação $\theta = \frac{\pi}{4}$.*

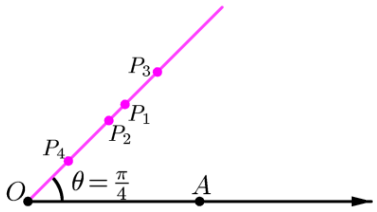


Fig. 163: Pontos do plano que satisfazem a equação polar $\theta = \pi/4$.

Solução: *Novamente, como na equação só figura uma variável, a outra é arbitrária. Logo, um ponto P do plano satisfaz a equação se o ângulo do eixo polar para a semi-reta OP é $\pi/4$. Portanto, o conjunto solução é a semi-reta OP (Figura 163).*

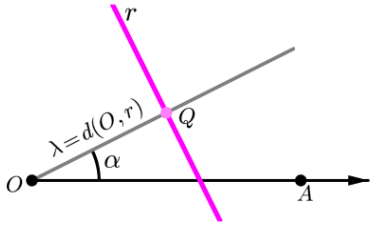


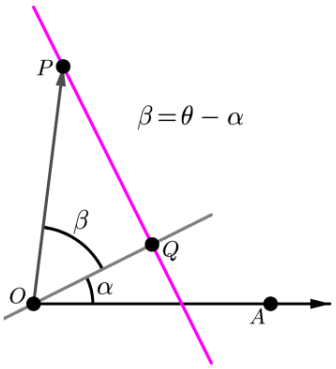
Fig. 164: Reta no sistema $O\rho\theta$.

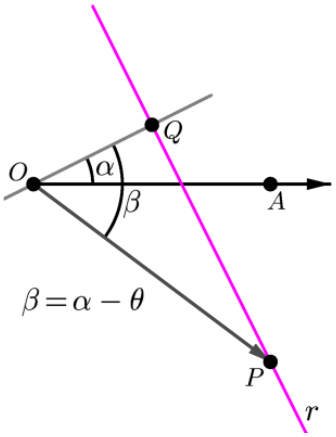
Vejamos como obter a equação polar de uma reta r, conhecendo:

- A distância da reta ao pólo: $d(O, r)$.
- O ângulo que o eixo polar OA forma com a semi-reta que tem origem no pólo e é perpendicular à reta r.

Proposição 21 *Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Sejam r uma reta, λ a distância de r ao pólo e α o ângulo que o eixo polar forma com a semi-reta de origem no pólo que é perpendicular a r (Figura 164). Então, um ponto P de coordenadas polares (ρ, θ) pertence a r se, e somente se:*

$$\rho\cos(\theta - \alpha) = \lambda \qquad (52)$$





Nas figuras acima, a medida do ângulo β é tomada de OP para OQ, a medida do ângulo α é tomada de OA para OQ e a medida do ângulo θ é tomada de OA para OP.

Equação polar da reta.
A equação (52) é a *equação polar da reta*. Nessa equação α e λ são dados, e as variáveis são ρ e θ.

Demonstração. Seja Q o ponto de interseção de r com a perpendicular a r contendo o pólo.

Sabemos que: *$P = (\rho, \theta)$ pertence a reta r se, e somente se, a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre o vetor $\overrightarrow{OQ}$, coincide com $\overrightarrow{OQ}$*, isto é:

$$P \in r \iff pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}\,.$$

Seja $\beta = \widehat{POQ}$. Note que $\beta = \theta - \alpha$ ou $\beta = \alpha - \theta$, dependendo da posição do ponto P (veja a Figura 165).

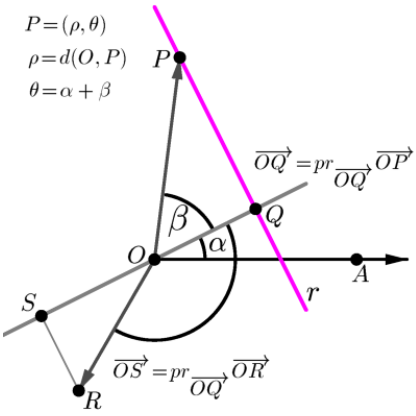


Fig. 165: $P \in r$ e $R \notin r$.

Como

$$|\overrightarrow{OP}| = \rho\,,\ \cos\beta = \cos(\theta - \alpha) = \cos(\alpha - \theta)$$

e:

$$pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|\,\|\overrightarrow{OQ}\|\,\cos\beta}{\|\overrightarrow{OQ}\|^2}\,\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|(\cos\beta)\,\overrightarrow{OQ}\,,$$

concluímos:

$$\begin{aligned} pr_{\overrightarrow{OQ}}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} &\iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta\,\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} \\ &\iff \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta = 1 \\ &\iff |\overrightarrow{OP}|\cos\beta = \lambda \iff \rho\cos(\theta - \alpha) = \lambda\,. \ \square \end{aligned}$$

Exemplo 86 *Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. A equação polar da reta r cuja distância ao pólo é igual a 2 e, tal que o ângulo que a semi-reta perpendicular a r, com origem no pólo, forma com o eixo polar tem medida $\pi/3$, é:*

$$r : \rho\,\cos(\theta - \pi/3) = 2\,.$$

Observação.

Note que a equação polar de uma reta no plano depende da escolha do sistema polar (pólo e eixo polar).

Isto é, uma equação como a equação (52) pode representar retas distintas com respeito a sistemas polares diferentes.

Para saber mais...
Reveja a discussão sobre *sistemas referenciais* na Aula 1, Fisica I.

Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas OXY, tal que o eixo polar seja o semi-eixo positivo OX e o eixo OY seja obtido rotacionando OX de 90^o no sentido anti-horário. Admitamos a mesma unidade de medida nos dois sistemas (Figura 166).

Seja $P \neq O$ um ponto no plano com $P = (\rho, \theta)$, no sistema $O\rho\theta$, e $P = (x, y)$, no sistema OXY. As relações entre essas coordenadas são assim obtidas:

Traçamos por P retas r, s perpendiculares aos eixos coordenados OX e OY, respectivamente. Sejam $P_1 = (x, 0)$ o ponto onde r intersecta OX, e seja P_2 o ponto onde s intersecta OY. Então, no triângulo retângulo OP_1P, a medida $|OP_1| = |x|$ é o comprimento do lado adjacente ao ângulo θ e $|OP_2| = |y| = |PP_1|$ é o comprimento do lado oposto ao ângulo θ. Segundo a Trigonometria, para qualquer quadrante em que esteja o ponto P, temos:

$$\boxed{x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta} \tag{53}$$

Dessas relações, obtemos:

$$x^2 = \rho^2 \cos^2\theta\,,\ y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta\,,$$

de onde concluímos:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}} \tag{54}$$

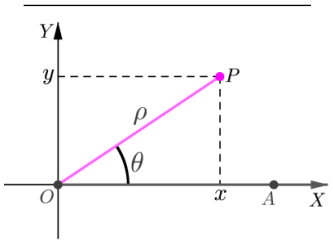


Fig. 166: Sistemas de coordenadas; polar $O\rho\theta$ e cartesiano OXY.

De fato, para obter a primeira relação basta observar que:

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2\,,$$

o que implica $\rho = |\rho| = \sqrt{x^2+y^2}$, pois $\rho > 0$. As duas relações seguintes são substituições diretas da expressão de ρ.

Convenção: *Daqui em diante, sempre que fizermos referência a um sistema polar $O\rho\theta$ e um sistema cartesiano OXY, no mesmo contexto, admitiremos que o semi-eixo OX positivo é o eixo polar, caso este último não tenha sido definido explicitamente.*

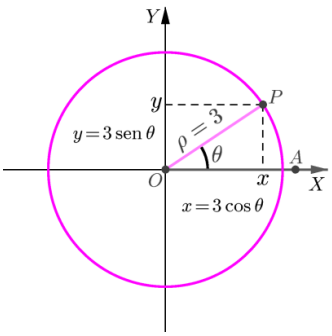


Fig. 167: Círculo $\rho = 3$.

Exemplo 87 *Determinemos a equação no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, do lugar geométrico definido pela equação polar $\rho = 3$.*

Solução: *Substituindo a relação $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, temos:*

$$\rho = 3 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 3 \iff x^2+y^2 = 9\,.$$

Portanto, a equação $\rho = 3$ corresponde à equação cartesiana do círculo centrado na origem e de raio 3 (Figura 167).

Exemplo 88 *Determinemos a equação no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, do lugar geométrico definido pela equação polar $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.*

Solução: *Substituindo a relação $\dfrac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\theta$ na equação dada, obtemos:*

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \iff \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\mathrm{sen}((3\pi)/4)}{\cos((3\pi)/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1\,.$$

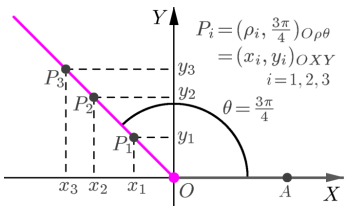


Fig. 168: Semi-reta $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Portanto a equação correspondente no sistema cartesiano de coordenadas é $\dfrac{y}{x} = -1$. Isto é, $y = -x$ (Figura 168).

Logo, a equação $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ corresponde, nas coordenadas OXY, ao sistema:

$$\begin{cases} y = -x\,, \\ x \leq 0\,. \end{cases}$$

Exemplo 89 *Seja r a reta de equação polar $\rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$. Determinemos a equação correspondente no sistema cartesiano OXY.*

Solução: *Usando a identidade:*

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\,,$$

temos:

$$\rho\,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \iff \rho\,\cos\theta\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,.$$

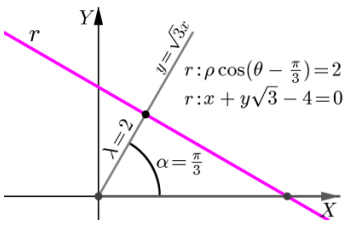


Fig. 169: Reta de equação polar: $\rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$ e equação cartesiana: $x + y\sqrt{3} - 4 = 0$.

Das relações:

$$x = \rho\,\cos\theta\,,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,,\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

obtemos:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,,$$

ou seja (Figura 169):

$$x + y\sqrt{3} - 4 = 0\,.$$

As relações entre os sistemas de coordenadas nos auxiliam na identificação de algumas curvas, veja o seguinte exemplo.

Exemplo 90 *Seja $a > 0$. Determinemos os pontos do plano que satisfazem a equação $\rho = 2\,a\cos\theta$.*

Utilizando as relações (54) *para obter a equação correspondente no sistema cartesiano, temos (Figura 170):*

$$\rho = 2\,a\cos\theta \iff \sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = 2ax\,.$$

Completando os quadrados na última equação, obtemos:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2\,,$$

que é a equação do círculo de centro $(a,0)$ e raio a.

Similarmente, a equação $\rho = 2\,b\,\mathrm{sen}\,\theta$, corresponde ao círculo de centro $(0,b)$ e raio b. Verifique!

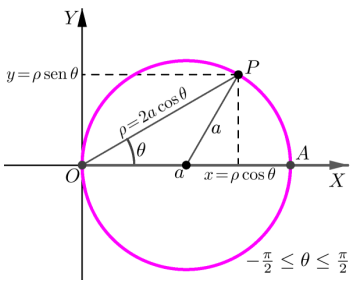


Fig. 170: $\rho = 2\,a\,\cos\theta$. Note que, para descrever o círculo completo, o ângulo θ deve variar entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, pois, sendo $\rho \geq 0$ e $a > 0$, devemos ter $cos\theta \geq 0$. O ponto A indicado na figura acima corresponde a $\theta = 0$, $\rho = 2a$.

O círculo em coordenadas polares.

Em geral, o círculo no plano é caracterizado em termos de coordenadas polares, de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 22 *Sejam $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano, $P_0 = (\rho_0, \theta_0)_{O\rho\theta}$ ponto desse plano e r um valor positivo.*

Então o conjunto dos pontos $P = (\rho,\theta)_{O\rho\theta}$ que pertencem ao círculo de centro P_0 e raio r satisfazem a seguinte equação em coordenadas polares:

$$\boxed{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta+\theta_0) = r^2}$$

Demonstração. Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas OXY, tal que o eixo OX positivo coincida com o eixo polar e o eixo OY seja obtido rotacionando o eixo OX de 90^o no sentido anti-horário.

No sistema OXY, temos:

$$P_0 = (\rho_0\cos\theta_0, \rho_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)_{OXY} \quad \text{e} \quad P = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)_{OXY}\,.$$

Sabemos que o círculo de centro P_0 e raio r é o conjunto que consiste dos pontos do plano cuja distância a P_0 é igual a r.

Então:

$$\begin{aligned} d(P,P_0)=r &\iff \sqrt{(\rho\cos\theta-\rho_0\cos\theta_0)^2+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta-\rho_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0)^2}=r \\ &\iff \rho^2\cos^2\theta+\rho_0^2\cos^2\theta_0-2\rho_0\,\rho\cos\theta_0\cos\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &\quad +\rho_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_0-2\rho_0\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta=r^2 \\ &\iff \rho^2\,(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta)+\rho_0^2\,(\cos^2\theta_0+\mathrm{sen}^2\,\theta_0) \\ &\quad -2\,\rho_0\,\rho\,(\cos\theta_0\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta)=r^2 \\ &\iff \rho^2+\rho_0^2-2\,\rho_0\,\rho\,\cos(\theta+\theta_0)=r^2\,. \quad \square \end{aligned}$$

Note que...

No desenvolvimento ao lado, calculamos a expressão da distância entre dois pontos em termos de coordenadas polares. Isto é, se $P_0=(\rho_0,\theta_0)$ e $P_1=(\rho_1,\theta_1)$, então:

$d(P_0,P_1)=\sqrt{\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos(\theta_0+\theta_1)}$

Equação polar das cônicas.

Para determinar as equações polares das cônicas, lembramos que:

Uma *seção cônica* é o lugar geométrico dos pontos que se movimentam no plano de forma que a sua distância a um ponto dado (chamado *foco*) é um múltiplo fixo da sua distância a uma reta dada (denominada *diretriz* associada ao foco). Isto é, um ponto F, uma reta ℓ e uma constante $e>0$ (denominada *excentricidade*) determinam a cônica:

$$\mathcal{C}=\{\,P\,|\,d(P,F)=e\cdot d(P,\ell)\,\}$$

Segundo a excentricidade e, a cônica $\mathcal{C}$ é:

• uma parábola $\iff e=1$ • uma elipse $\iff e<1$ • uma hipérbole $\iff e>1$.

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica de excentricidade $e>0$. Consideremos um sistema de coordenadas polares em que um foco F da cônica é a origem O e o eixo polar é paralelo à reta focal da cônica, como vemos nas figuras acima.

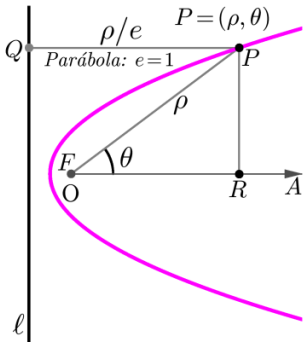


Fig. 171: Parábola.

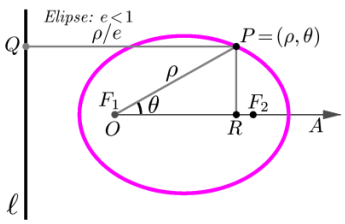


Fig. 172: Elipse.

Designamos por ℓ a diretriz associada ao foco F e seja $h=d(F,\ell)$.

Segundo a caracterização de $\mathcal{C}$ dada acima, temos:

$$P=(\rho,\theta)\in\mathcal{C}\iff d(P,F)=e\,d(P,\ell)\iff\rho=e\,d(P,\ell)\,.$$

Das figuras acima, você pode ver que temos dois casos a considerar:

Caso A. Se ℓ não intersecta o eixo polar, então: $d(P,\ell)=h+\rho\cos\theta$.

Neste caso, temos que $P=(\rho,\theta)\in\mathcal{C}$ se, e somente se:

$\rho = e(h + \rho\cos\theta)$, isto é: $\rho = \dfrac{eh}{1 - e\cos\theta}$.

Caso B. Se ℓ intersecta o eixo polar, então: $d(P,\ell) = h - \rho\cos\theta$.

Neste caso, temos que $P = (\rho,\theta) \in \mathcal{C}$ se, e somente se:

$$\rho = e(h - \rho\cos\theta)\,, \text{ isto é: } \rho = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}\,.$$

Nessas equações vemos que, se $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$, então $\rho = eh$. Esse valor de ρ é a metade do comprimento da corda da cônica, que é paralela à diretriz e contém o foco F. Tal corda é chamada *latus rectum* da cônica. Conseqüentemente, o valor eh que aparece nas equações anteriores corresponde à metade do comprimento do latus rectum da cônica, isto é, ao comprimento do *semi-latus rectum*.

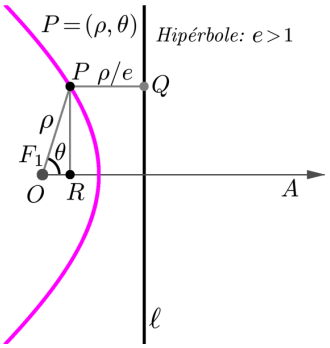


Fig. 173: Hipérbole.

Resumindo as conclusões anteriores, temos:

Equação polar das cônicas.

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica com excentricidade $e > 0$, um foco no ponto F e semi-latus rectum de comprimento λ. Com respeito ao sistema polar de coordenadas $O\rho\theta$ com o eixo polar sendo o eixo focal de $\mathcal{C}$ e $O = F$, a equação de $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C} : \rho = \frac{\lambda}{1 \pm e\cos\theta}\,. \qquad (55)$$

A distância do foco F à sua diretriz associada ℓ é $\dfrac{\lambda}{e}$ (Figura 174).

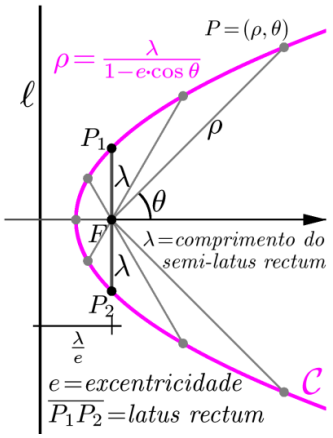


Fig. 174: $\mathcal{C} : \rho = \frac{\lambda}{1-e\cdot\cos\theta}$.

Sinal na equação polar (55)...

No denominador da equação polar (55) tomamos o sinal positivo ($+$) se a diretriz ℓ intersecta o eixo polar, e o sinal negativo ($-$) se ℓ não intersecta o eixo polar.

Exemplo 91 *Identificar a cônica $\mathcal{C}$ de equação polar $\rho = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$.*

Determinar também as coordenadas polares do centro e dos vértices, assim como os comprimentos dos eixos e do latus rectum.

Solução: *Começamos por escrever a equação de $\mathcal{C}$ na forma* (55)*, multiplicando o numerador e o denominador da equação polar por $\frac{1}{3}$:*

$$\mathcal{C} : \rho = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\cos\theta}\,.$$

A partir dessa equação, obtemos que o comprimento do semi-latus rectum é $\lambda = \frac{2}{3}$ e que a excentricidade de $\mathcal{C}$ é $e = \frac{1}{3}$. Como $e < 1$, $\mathcal{C}$ é uma elipse.

Em particular, o comprimento do latus rectum é $2\lambda = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Como o eixo polar está sobre a reta focal, vamos determinar os vértices, o centro e o outro foco de $\mathcal{C}$ *(lembre que um foco é a origem do sistema de coordenadas polares). Como o sinal que aparece no denominador da equação é negativo, a diretriz correspondente ao foco* O *(origem do sistema polar* $O\rho\theta$*) não intersecta o eixo polar. Portanto, estamos na situação mostrada na Figura 175.*

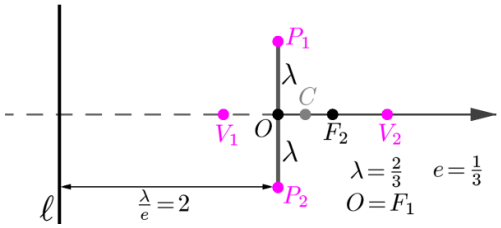


Fig. 175: Posição dos focos latus rectum e diretriz na cônica $\mathcal{C}: \frac{2}{3-2\cos\theta}$.

Fazendo $\theta = 0$ *na equação de* $\mathcal{C}$*, obtemos* $\rho = 1$*. Logo, segundo o esquema ilustrado na Figura 175, o ponto* $V_2 = (1,0)_{O\rho\theta}$ *é um vértice da elipse.*

Para obter o outro vértice, fazemos $\theta = \pi$ *na equação de* $\mathcal{C}$ *e obtemos* $\rho = \frac{1}{2}$*. Portanto,* $V_1 = (\frac{1}{2}, \pi)_{O\rho\theta}$ *é o outro vértice de* $\mathcal{C}$*.*

Agora podemos calcular a distância entre os vértices: $2a = d(V_1, V_2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$*, de onde concluímos que* $a = \frac{3}{4}$ *é a medida do semi-eixo maior da elipse.*

Como $e = \dfrac{c}{a}$*, obtemos* $c = e\,a = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$*. Portanto, o centro* C *da elipse* $\mathcal{C}$ *tem coordenadas polares* $C = (c,0)_{O\rho\theta} = (\frac{1}{4}, 0)_{O\rho\theta}$.

Conhecendo o centro C *e a distância do centro aos focos* $d(C, F_1) = d(C, F_2) = d(C, O) = \frac{1}{4}$*, obtemos as coordenadas polares do outro foco:*

$$F_2 = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}, 0)_{O\rho\theta} = (\tfrac{1}{2}, 0)_{O\rho\theta}\,.$$

Finalmente, conhecendo a medida do semi-eixo maior $a = \frac{3}{4}$ *e a distância do centro aos focos* $c = \frac{1}{4}$*, calculamos a medida do semi-eixo menor* b*, usando a relação* $c^2 = a^2 - b^2$ *:*

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{1}{4})^2} = \sqrt{\tfrac{8}{16}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Logo, a medida do eixo menor da elipse é $2b = \sqrt{2}$.

Consideremos agora o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXY, onde O é a origem do sistema polar $O\rho\theta$, o semi-eixo OX positivo coincide com o eixo polar e o semi-eixo OY positivo é obtido girando de 90^o o semi-eixo OX positivo.

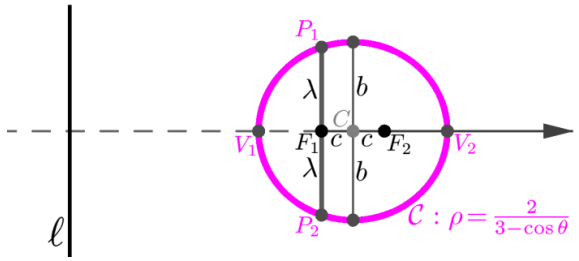


Fig. 176: Elipse $\mathcal{C}$ no sistema $O\rho\theta$.

Então, as coordenadas do centro C de $\mathcal{C}$ são $C = (\frac{1}{4}, 0)_{O\rho\theta} = (\frac{1}{4}, 0)_{OXY}$ e conhecendo as medidas dos semi-eixos $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtemos a equação canônica de $\mathcal{C}$ com respeito ao sistema OXY:

$$\mathcal{C}: \frac{(x-\frac{1}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1\,.$$

Exemplo 92 *Determinemos uma equação polar da cônica $\mathcal{C}$ dada pela equação cartesiana:*

$$-7x^2 + 50xy - 7y^2 + 114x - 78y - 423 = 0\,.$$

Solução: *Conforme vimos na Aula 10, colocamos a cônica na forma canônica:*

$$\frac{(y'')^2}{16} - \frac{(x'')^2}{9} = 1\,. \qquad (56)$$

Para obter a forma canônica (56) ao lado, rotacionamos o sistema OXY de -45^o para obter o sistema $O'X'Y'$ e depois transladamos esse sistema até o ponto $O'' = (1,-2)_{OXY}$.

A partir dessa equação, vemos que a cônica é uma hipérbole cujo eixo focal é o eixo y'', com $a = 4$, $b = 3$ e, conseqüentemente, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$.

Com esses dados obtemos as seguintes informações:

- *a excentricidade da hipérbole é $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$;*
- *a distância de cada vértice ao respectivo foco é $c - a = 5 - 4 = 1$;*
- *a distância de cada vértice à sua respectiva diretriz é: $\frac{c-a}{e} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$;*
- *a distância de cada foco à sua respectiva diretriz é: $h = (c-a) + \frac{c-a}{e} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$;*
- *o comprimento do semi-latus rectum é: $\lambda = h \cdot e = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$.*

Lembre que ...

O valor da excentricidade e e das distâncias a, b e c não mudam quando rotacionamos e transladamos o sistema de coordenadas. Portanto, esses valores podem ser determinados a partir da equação canônica da cônica.

Portanto, a equação polar com respeito ao sistema que tem por origem um dos focos e cujo eixo focal não intersecta a diretriz correspondente é:

$$\rho = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\theta} \qquad \textit{ou seja,} \qquad \rho = \frac{9}{4 - 5\cos\theta}\,.$$

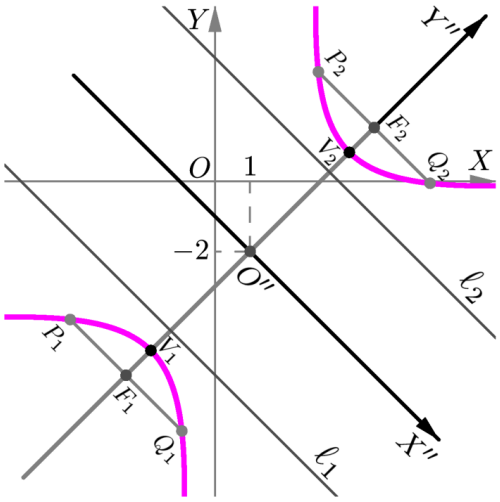


Fig. 177: Hipérbole $-7x^2 + 50xy - 7y^2 + 114x - 78y - 423 = 0$.

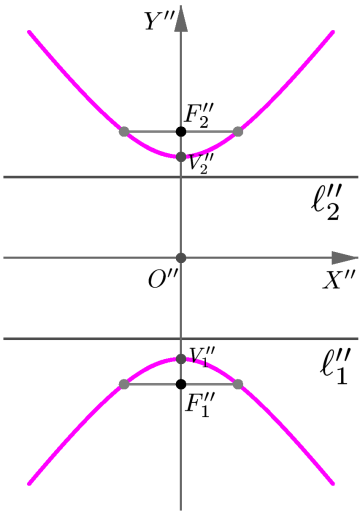


Fig. 178: Hipérbole $\frac{(y'')^2}{16} - \frac{(x'')^2}{9} = 1$.

Na Figura 177 mostramos a nossa hipérbole na posição natural e na Figura 178 mostramos a hipérbole apenas com respeito ao sistema rotacionado e transladado.

A equação polar obtida é a equação com respeito ao sistema de coordenadas polares em que a origem é, por exemplo, o foco F_2 e o eixo focal é a semi-reta F_2Y''.

Note que a mesma equação é obtida se consideramos o sistema de coordenadas polares em que a origem é o foco F_1 e o eixo focal é a semi-reta de origem F_1 que não intersecta a diretriz ℓ_1.

Também, a equação polar com respeito ao sistema que tem por origem um dos focos e cujo eixo focal intersecta a diretriz correspondente é:

$$\rho = \frac{9}{4 + 5\cos\theta}\,.$$

Resumo

Nesta aula definimos as coordenadas polares no plano. Deduzimos as relações de mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas e vice-versa, e obtivemos as equações de retas e círculos em termos de coordenadas polares. Finalmente, determinamos a equação

polar das cônicas. No Apêndice você pode ver também outras curvas interessantes, as espirais, cujas equações são apresentadas naturalmente em termos de coordenadas polares.

Exercícios

1. Use as relações de mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares para obter a equação polar correspondente a cada equação cartesiana dada.

a. $x^2 - y^2 = 1$;
b. $xy + 2x = 0$;
c. $2x - y + 1 = 0$;
d. $x^2 = \frac{y^2}{4}$.

2. Use as relações de mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas para obter a equação cartesiana correspondente a cada equação polar dada. Identifique o conjunto de pontos do plano definido em cada caso.

a. $\sec^2\theta - \mathrm{tg}^2\,\theta = 1$; **b.** $2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta = \rho$; **c.** $\rho\,\sec\theta = \mathrm{tg}\,\theta$.

3. Sejam a, b números reais não simultaneamente nulos e seja $c > 0$. Considere a equação polar: $\rho + 2\,a\,\cos\theta + 2\,b\,\mathrm{sen}\,\theta = c$.

a. Verifique que a equação dada é a equação de um círculo $\mathcal{C}$.

b. Dê as coordenadas cartesianas do centro de $\mathcal{C}$ e determine a medida de seu raio.

4. Determine a equação polar do círculo de centro P_0 e raio r, onde:

a. $P_0 = (2, \frac{\pi}{3})_{O\rho\theta}$ e $r = 2$,

b. $P_0 = (3, \pi)_{O\rho\theta}$ e $r = 1$,

c. $P_0 = (\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})_{O\rho\theta}$ e $r = 2$.

5. Dê a equação cartesiana dos círculos do exercício anterior.

6. Em cada caso, identifique a cônica $\mathcal{C}$, determine o comprimento do latus rectum, dos eixos, a posição dos focos, vértices e da diretriz. Determine a equação cartesiana de $\mathcal{C}$ e faça um esboço da curva no plano.

a. $\mathcal{C} : \rho = \frac{3}{2-4\cos\theta}$,
b. $\mathcal{C} : \rho = \frac{3}{2(1-cos\theta)}$,
c. $\mathcal{C} : \rho = \frac{2}{4+\cos\theta}$,
d. $\mathcal{C} : \rho(2+5\cos\theta) = 1$,
e. $\mathcal{C} : 3\rho\cos\theta = 2 - 2\rho$.

7. Em cada item, determine uma equação polar para a cônica $\mathcal{C}$, determinando o comprimento do semi-latus rectum e faça um esboço da curva no plano.

a. $\mathcal{C} : 3x^2 + 2y - 1$,
b. $\mathcal{C} : x^2 + 6y^2 - 3y = 4$,
c. $\mathcal{C} : 2xy + x - 1 = 0$,
d. $\mathcal{C} : xy + x + y = 0$.

Auto-avaliação

Resolvendo os Exercícios de 1 a 6 você fixou a mecânica da mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas e vice-versa. Para resolver o Exercício 7 você deverá entender bem as propriedades das cônicas em coordenadas cartesianas e polares, mesmo quando o seu centro não está na origem (reveja a Aula 9). Se tiver alguma dificuldade, reveja o conteúdo da aula e procure orientação no seu pólo.

Apêndice. Espirais

Na Figura 179 mostramos a imagem do fóssil de um ser marinho do período Devoniano (era Paleozóica), com aproximadamente 300 milhões de anos, chamado *Amonita*. Na Figura 180 podemos ver um vegetal raro que prolifera na ilha do Havaí, a *Samambaia Havaiana*, e na Figura 181 temos a imagem de um caracol.

O que essas fotografias têm em comum?

Fig. 179: Amonita.

Fig. 180: Samambaia havaiana.

Fig. 181: Caracol.

Não é necessário ser muito observador para perceber que nas três imagens acima aparecem *formas espirais*. A natureza na Terra, assim

como no Universo em geral, está repleta de formas espirais.

De fato, desde a antigüidade o ser humano observa o céu e as estrelas. O astrônomo persa *Abd-al-Rahman Al-Sufi* descobriu a *Galáxia de Andrômeda* (Figura 182) por volta de 905 d.C., chamando-a de *pequena nuvem*. Essa galáxia é a mais próxima da nossa, a *Via Láctea* e, mesmo estando a uma distância de 9,6 milhões de anos-luz, é visível a olho nu. Os astrônomos denominam a galáxia de Andrômeda de NGC224.

Fig. 182: Andrômeda (NGC224).

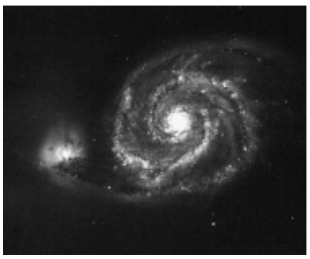


Fig. 183: Galáxia NGC5194.

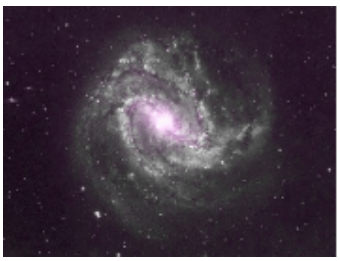


Fig. 184: Galáxia NGC5236.

Ano-luz...
É a distância que a luz percorre em um ano (365 dias). Sabendo que a luz viaja a uma velocidade de 300.000 quilômetros por segundo, e que o ano tem aproximadamente $31.536.000$ segundos, um ano-luz equivale a $9,46$ trilhões de quilômetros.

Os avanços tecnológicos da nossa civilização deram origem a sofisticados equipamentos e modernos telescópios que permitem observar regiões do espaço, muito além da nossa galáxia, descobrindo outras das mais diversas formas, entre elas, galáxias com estruturas espirais como as da Via Láctea e da galáxia de Andrômeda. Veja, por exemplo, as imagens da Galáxia Espiral NGC 5194 (Figura 183) a 37 milhões de anos-luz de distância e da galáxia espiral NGC 5236 a 15 milhões de anos luz (Figura 184).

O estudo matemático das curvas espirais teve início, na História da Matemática, com o livro *Sobre espirais* de *Arquimedes de Siracusa* (287-212 a.C.).

Nesse livro, Arquimedes define um tipo particular de espirais, hoje chamadas *espirais de Arquimedes*, e descreve detalhadamente as suas propriedades geométricas.

Outros tipos de espirais foram estudados ao longo da História. Um deles aparece entre os estudos do matemático suíço *Jacob Bernoulli* (1654-1705) sobre a *espiral logarítmica*.

Bernoulli considerava essa espiral uma forma maravilhosa, e chegou a denominá-la *spira mirabilis*. Ele descobriu, como veremos adiante, que essa espiral mantém a sua forma perante rotações ou mudanças de

escala (essa última propriedade se denomina *auto-similaridade*) em torno do seu centro. Bernoulli, fascinado por essa espiral, determinou que na lápide do seu túmulo fosse gravada a frase *Eadem mutata resurgo*, que significa *após transformado, ressurgirei o mesmo*.

I. A espiral de Arquimedes.

Esta espiral foi estudada detalhadamente por Arquimedes, por volta de 225 a.C.

Num sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$, a espiral de Arquimedes é o lugar geométrico dos pontos $P = (\rho, \theta)_{O\rho\theta}$ do plano, cuja distância ρ ao pólo O (raio polar) é um múltiplo fixo do ângulo polar θ (ângulo do eixo polar para OP).

Isto é, um ponto P pertence à espiral se, e somente se, as suas coordenadas polares ρ e θ satisfazem a equação (Figuras 185 e 186):

$$\boxed{\rho = a \cdot \theta} \qquad \text{(Espiral de Arquimedes)} \qquad (57)$$

Observe que, o ponto da espiral de Arquimedes com coordenada polar angular $\theta = 0$ é o pólo O, e que a espiral intersecta o eixo polar nos pontos cuja coordenada polar angular é múltiplo natural de 2π. Isto é, se $\mathcal{E} : \rho = a\,\theta$ é uma espiral e OA o eixo polar, então:

$$\mathcal{E} \cap OA = \{(2\,a\,k\pi, 2\,k\,\pi)_{O\rho\theta} \,|\, k \in \mathbb{N}\}\,.$$

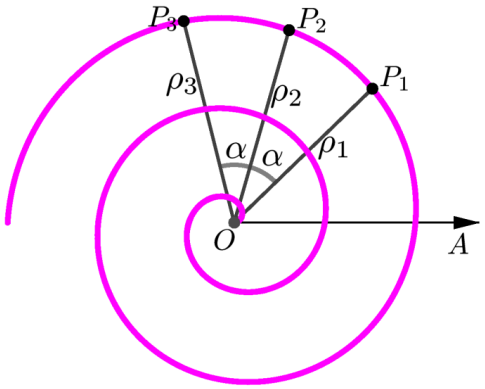


Fig. 187: Espiral de Arquimedes.

Numa espiral, três pontos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$, $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$ e $P_3 = (\rho_3, \theta_3)$ são chamados *consecutivos* se existe um ângulo α, tal que $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$ e $\theta_3 = \theta_2 + \alpha$ (note que α pode ser positivo ou negativo).

Na Figura 187 mostramos uma espiral de Arquimedes $\mathcal{E} : \rho = a\theta$ com três pontos consecutivos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$, $P_2 = (\rho_2, \theta_2) = (\rho_2, \theta_1 + \alpha)$ e $P_3 = (\rho_3, \theta_3) = (\rho_3, \theta_1 + 2\alpha)$.

Como $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}$, temos:

$$\rho_1 = a\theta\,, \qquad \rho_2 = a\theta + a\alpha\,, \qquad \rho_3 = a\theta + 2a\alpha\,.$$

Resumindo, temos:

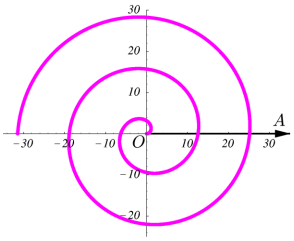


Fig. 185: $\rho = 2\,\theta$

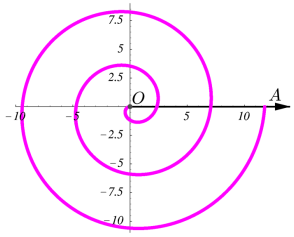
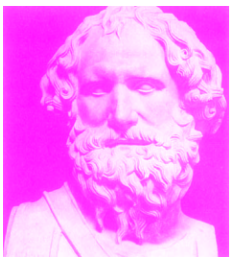


Fig. 186: $\rho = -\frac{3}{4}\,\theta$



Arquimedes de Siracusa
287 - 212 a.C.
Siracusa, Itália

Considerado um dos grandes matemáticos da antigüidade, tinha fascinação pela Geometria, escreveu diversos tratados sobre Matemática e Mecânica. Foi também inventor de máquinas e armas de guerra usadas pelo rei Heron II contra os romanos. As suas descobertas matemáticas para o cálculo de volumes foram a pedra fundamental para o desenvolvimento do Cálculo Integral. Na sua obra *Sobre Espirais*, Arquimedes estudou minuciosamente as propriedades das espirais $\rho = a\theta$. Veja: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html`

Caracterização geométrica da espiral de Arquimedes.

Se $P_1 = (\rho_1, \theta_1)_{O\rho\theta}$, $P_2 = (\rho_2, \theta_2)_{O\rho\theta}$ e $P_3 = (\rho_3, \theta_3)_{O\rho\theta}$ são pontos consecutivos numa espiral de Arquimedes, então o raio ρ_2 é a média aritmética dos raios adjacentes ρ_1 e ρ_3, isto é:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2}\,.$$

Note que ...

A propriedade geométrica ao lado significa que os raios ρ_1, ρ_2, ρ_3 estão numa progressão aritmética. De fato, conforme a notação utilizada, temos:

$\rho_2 = \rho_1 + a\,\alpha$

$\rho_3 = \rho_2 + a\,\alpha$

assim, ρ_1, ρ_2 e ρ_3 estão numa progressão aritmética de razão $a\,\alpha$.

Hoje-em-dia, a espiral de Arquimedes é usada na fabricação de *excêntricos mecânicos*, peças cujo bordo é formado por dois arcos: um arco espiral de Arquimedes $\rho = a\,\theta$, $0 < \theta < \pi$, junto com a sua reflexão com relação à reta que contém o eixo polar.

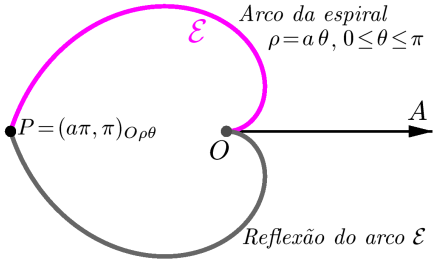


Fig. 188: Excêntrico formado por dois arcos de espirais de Arquimedes.

Quando o excêntrico gira em torno do pólo O, o ponto P de interseção com o eixo polar se desloca sobre o eixo polar para frente e para trás. Desta forma, movimento circular é transformado em movimento retilíneo. Veja as Figuras 189, 190, 191 e 192:

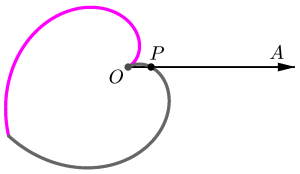


Fig. 189: Rotação de $\frac{\pi}{6}$.

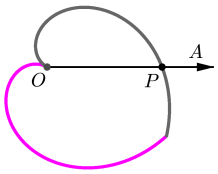


Fig. 190: Rotação de $\frac{5\pi}{6}$.

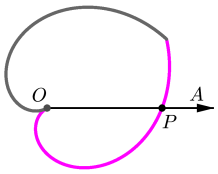


Fig. 191: Rotação de $\frac{5\pi}{6}$.

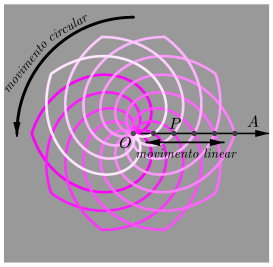


Fig. 192: A rotação do excêntrico transforma o movimento circular em movimento retilíneo.

II. A espiral logarítmica ou espiral equiangular.

Uma *espiral logarítmica* ou *equiangular* é uma curva cuja reta tangente em cada ponto P faz um ângulo constante com a reta que passa por P e pelo pólo O do sistema de coordenadas polares.

As espirais logarítmicas foram descobertas e estudadas pela primeira vez em detalhes por *René Descartes* em 1638, mas as propriedades de auto-similaridade foram estudadas nos trabalhos de *Jacob Bernoulli* (1654-1705). A *espiral logarítmica* é também chamada *espiral de crescimento* e se caracteriza da seguinte maneira:

Caracterização geométrica da espiral logarítmica.
Três pontos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)_{O\rho\theta}$, $P_2 = (\rho_2, \theta_2)_{O\rho\theta}$ e $P_3 = (\rho_3, \theta_3)_{O\rho\theta}$ são pontos consecutivos numa espiral logarítmica se, e somente se, o logaritmo natural do raio ρ_2 é a média aritmética dos logaritmos naturais dos raios adjacentes ρ_1 e ρ_3, isto é:

$$\ln \rho_2 = \frac{\ln \rho_1 + \ln \rho_3}{2}\,.$$

Usando as propriedades da função logaritmo (veja a Aula 40, do Módulo 4, do Pré-Cálculo), a identidade do destaque acima pode ser escrita de maneira equivalente como:

$$\ln \rho_2 = \tfrac{1}{2}\ln(\rho_1\rho_3) = \ln(\rho_1\rho_3)^{1/2} = \ln\left(\sqrt{\rho_1\rho_3}\right).$$

Isto é, tomando exponenciais na identidade, obtemos:

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1\rho_3}\,.$$

Esta identidade significa que *o raio polar ρ_2, do ponto P_2, é a* média geométrica *dos raios polares ρ_1 e ρ_3 dos pontos adjacentes P_1 e P_3.*

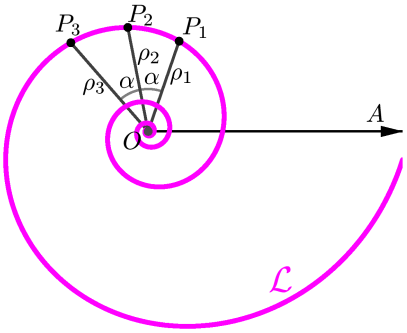


Fig. 193: Espiral logarítmica.

Além disso, do destaque acima, vemos que um ponto $P = (\rho, \theta)$ pertence à espiral logarítmica $\mathcal{L}$ se, e somente se, o ponto $P' = (\ln \rho, \theta)$ pertence a uma espiral de Arquimedes associada. Isto é, existe uma constante $a > 0$, tal que:

$$P = (\rho, \theta) \in \mathcal{L} \iff \ln \rho = a\theta\,.$$

Isto é, a equação da espiral logarítmica é:

$$\boxed{\rho = e^{a\theta}} \qquad \text{(Espiral logarítmica)} \qquad (58)$$

A espiral logarítmica encantou o matemático suíço *Jacob Bernoulli* pela sua propriedade de *auto-similaridade*.

Esta propriedade significa que a espiral não muda o seu aspecto perante mudanças de escala. Pense, por exemplo que você vê a espiral perto do pólo a olho nu, depois com óculos, depois com uma lente de aumento e finalmente com um microscópio, não importa quão perto ou

longe você veja a espiral, ela sempre vai aparecer com o mesmo aspecto. Nas Figuras 194, 195, 196 e 197 mostramos a espiral $\rho = e^{\frac{1}{5}\theta}$ em escalas diferentes.

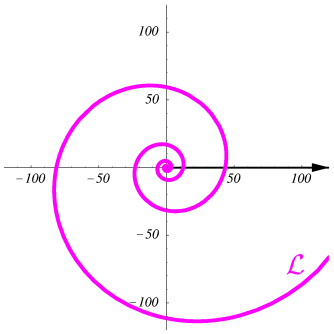


Fig. 194: $\rho = e^{\frac{1}{5}\theta}$.

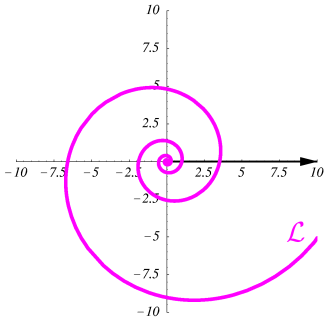


Fig. 195: $\rho = e^{\frac{1}{5}\theta}$.

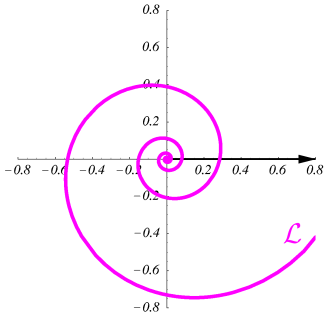


Fig. 196: $\rho = e^{\frac{1}{5}\theta}$.

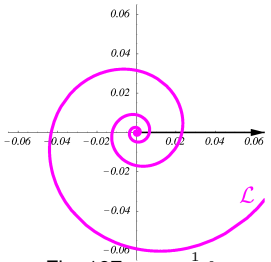


Fig. 197: $\rho = e^{\frac{1}{5}\theta}$.

Mais ainda, Bernoulli observou que um giro na espiral tem o mesmo efeito que uma mudança de escala.

Para verificarmos isso, primeiro observamos que uma rotação da espiral por um ângulo φ no sentido horário, equivale a somar φ à variável θ na equação (58), dando lugar à espiral:

$$\rho = e^{a(\theta+\varphi)} = e^{a\theta+a\varphi} = e^{a\theta}e^{a\varphi}.$$

Isto é, a espiral obtida após a rotação é a mesma ampliada ou reduzida a uma escala de fator $e^{a\varphi}$. Na Figura 198, mostramos as espirais $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, onde

$$\mathcal{L} : \rho = e^{\frac{1}{5}\theta} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}' : \rho = e^{\frac{1}{5}\frac{\pi}{3}}e^{\frac{1}{5}\theta}.$$

Isto é, $\mathcal{L}'$ é obtida girando $\mathcal{L}$ de $\frac{\pi}{3}$ no sentido horário. Nessas espirais, temos

$$|OQ| = e^{\frac{1}{5}\frac{\pi}{3}}|OP|.$$

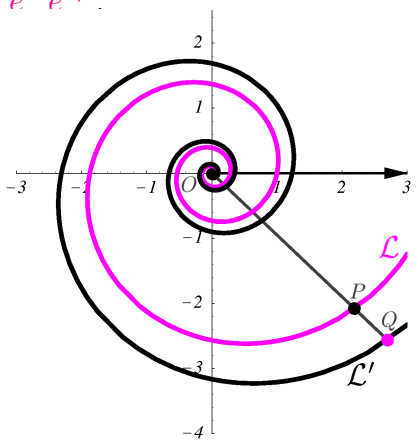


Fig. 198: Rotação e mudança de escala.

Outra maneira de perceber a relação entre a auto-similaridade e a invariância da espiral logarítmica perante rotações, consiste em analisar pontos consecutivos. Voltando à Figura 193, vemos que os triângulos OP_1P_2 e OP_2P_3 são semelhantes por um fator de escala igual a $e^{-a\alpha}$, pois o triângulo OP_2P_3 é obtido aplicando uma rotação de ângulo α, no sentido anti-horário, ao triângulo OP_1P_2 e depois uma mudança de escala.

III. Outras espirais.

Há ainda muitas outras espirais que não iremos considerar, como a *espiral de Lituus*, estudada por *Roger Cotes* em 1722, cuja forma é a da samambaia havaiana (Figura 180):

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \qquad \text{(Espiral de Lituus)}$$

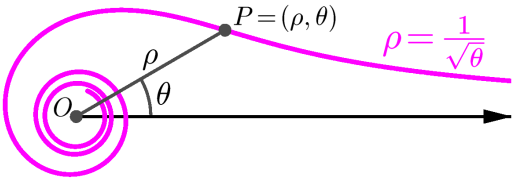


Fig. 199: Lituus $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.

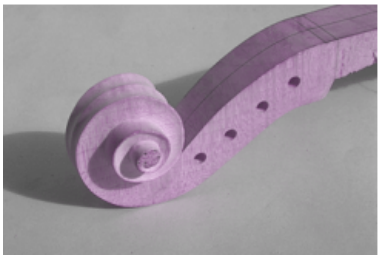


Fig. 200: Braço de violino.

Da forma da equação da espiral de Lituus, vemos que quando o ângulo θ se aproxima de 0, o raio polar ρ tende a ser muito grande, e que quando o ângulo polar θ é muito grande, o raio polar se aproxima de zero e, portanto, o ponto correspondente fica muito próximo do pólo (Figura 199).

A espiral de Lituus tem inspirado muitas manifestações da arte como podemos ver no braço de um antigo violino (Figura 200).

Para saber mais ...

Se você ficou motivado com esta pequena introdução às curvas espirais, procure mais informações nos seguintes endereços:

`http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir`

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves`

Equações paramétricas das cônicas

Objetivo

- Obter as equações paramétricas das cônicas.

Curvas planas...
São curvas contidas num plano.

Estudando as retas no plano, você viu que a reta s, determinada pelos pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, se expressa por meio das seguintes equações paramétricas:

$$s : \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que essas equações expressam os valores das coordenadas cartesianas x e y dos pontos da reta s, *em função de apenas uma variável*, a variável t, denominada *parâmetro*.

Curvas retas ou retas curvas?
As retas no plano são um tipo particular de curvas planas, descritas por equações cartesianas, paramétricas e polares.

As retas não são as únicas curvas planas para as quais podemos obter equações paramétricas. Vejamos:

Exemplo 93 *Determinemos equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$, cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 = 9$.*

Solução: *Seja $P = (x, y)$ um ponto do círculo e denotemos $P_0 = (3, 0)$ o ponto de interseção do círculo com o semi-eixo positivo OX. Seja t a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{P_0OP}$ (tomada no sentido anti-horário), onde O é a origem do sistema cartesiano de coordenadas. Observe que t é o comprimento do arco do círculo $x^2 + y^2 = 1$, determinado por $\widehat{P_0OP}$ (veja a Figura 201).*

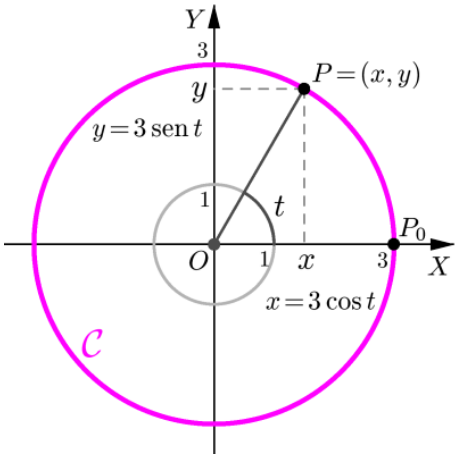


Fig. 201: Círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$.

Como o triângulo OP_0P é retângulo, as expressões das coordenadas x e y, em função do parâmetro t, são:

$$x = 3\cos t \qquad \text{e} \qquad y = 3\,\text{sen}\, t\,.$$

Fazendo os valores de t percorrerem o intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos do círculo.

Se quisermos, podemos considerar t percorrendo todos os valores reais. Isto implica realizar um número infinito de voltas sobre o círculo. Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Observe que, para qualquer valor real $a \neq 0$, as equações:

$$x = 3\cos(at) \qquad \textit{e} \qquad y = 3\,\mathrm{sen}(at)\,, \textit{ com } t \in \mathbb{R}\,,$$

também são equações paramétricas para o círculo $\mathcal{C}$, pois:

$$x^2 + y^2 = (3\cos(at))^2 + (3\,\mathrm{sen}(at))^2 = 9(\cos^2(at) + \mathrm{sen}^2(at)) = 9\,.$$

Note que, conforme t percorre todos os valores de $\mathbb{R}$, o ponto $P = (x, y)$ percorre todos os pontos do círculo. Por outro lado, as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \; t \in [0, \pi]\,,$$

satisfazem a equação do círculo, mas definem apenas o semi-círculo de $P_0 = (3, 0)$ a $P_1 = (-3, 0)$ percorrido no sentido anti-horário (veja a Figura 202).

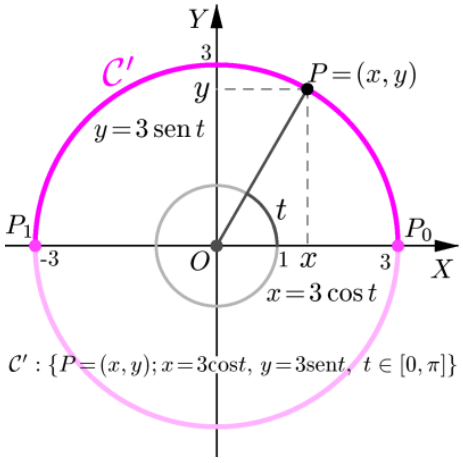


Fig. 202: Semicírculo $\mathcal{C}'$.

Curvas planas ...

Existem muitas curvas planas maravilhosas mas, às vezes, determinar suas equações paramétricas requer muito cuidado e paciência. Nesta aula vamos obter as equações paramétricas de algumas dessas curvas planas. Fazendo isso, você irá fixar diversos conceitos geométricos já aprendidos.

I. Elipses.

Na Aula 22, do Módulo 2, do Pré-Cálculo, você aprendeu o procedimento geométrico para traçar a elipse

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seja $P = (x, y) \in \mathcal{E}$. Tracemos os círculos $\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 = a^2$, $\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 = b^2$ e as retas r e s, passando pelo ponto P, perpendiculares aos eixos OX e OY, respectivamente.

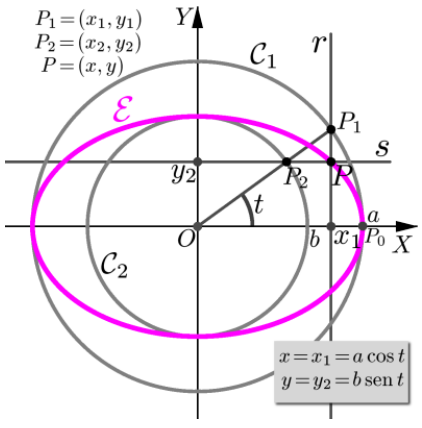


Fig. 203: Elipse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Seja $P_1 = (x_1, y_1)$ um ponto de $r \cap \mathcal{C}_1$ e seja $P_2 = (x_2, y_2)$ um ponto

de $s \cap \mathcal{C}_2$, como na Figura 203. Note que $x_1 = x$ e $y_2 = y$ sem importar o quadrante em que os pontos P_1 e P_2 estejam.

Pelo visto na Aula 22, do Módulo 2 do Pré-Cálculo, os pontos P_1 e P_2 podem ser escolhidos alinhados com O.

Seja $P_0 = (a, 0)$ o ponto onde o círculo $\mathcal{C}_1$ intersecta o semi-eixo positivo OX e seja t a medida (em radianos) do ângulo $\widehat{P_0OP_1}$, tomada no sentido anti-horário.

Como $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{C}_1$ e $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{C}_2$, temos $x_1 = a\cos t$ e $y_2 = b\,\mathrm{sen}\,t$. Como $x = x_1$ e $y = y_2$, as equações paramétricas de $\mathcal{E}$ são:

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

⟸ Equações paramétricas da elipse
$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Caso $\mathcal{E}: \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ seja uma elipse transladada, então suas equações paramétricas são obtidas transladando a equação anterior para o ponto (x_0, y_0):

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

⟸ Equações paramétricas da elipse transladada:
$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Para verificar isto, basta substituir as expressões de x e y dessas equações paramétricas, na equação cartesiana de $\mathcal{E}$:

$$\frac{((x_0 + a\cos t) - x_0)^2}{a^2} + \frac{((y_0 + a\,\mathrm{sen}\,t) - y_0)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}{b^2} = 1\,.$$

II. Hipérboles

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Vamos obter equações paramétricas para $\mathcal{H}$. A seguir, assumimos $0 < b < a$ e você ficará encarregado de fazer as adaptações necessárias para o caso em que $0 < a < b$. Acompanhe o procedimento na Figura 204.

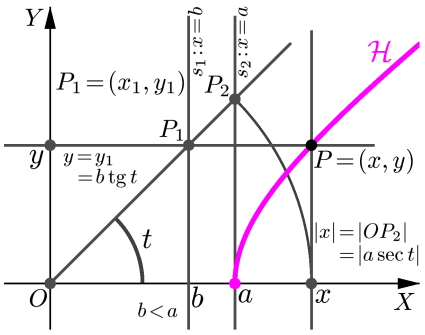


Fig. 204: Hipérbole $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Reveja...
Na Aula 24, do Módulo 2 do Pré-Cálculo, a construção geométrica da hipérbole.

Sejam as retas $s_1 : x = b$ e $s_2 : x = a$.

Consideremos um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ no primeiro quadrante. Seja $P_1 = (x_1, y_1)$ o ponto de interseção de s_1 com a reta paralela ao eixo OX que passa por P.

Seja t a medida (em radianos) do ângulo do semi-eixo positivo OX para a semi-reta OP_1. Da Trigonometria, temos $P_1 = (x_1, y_1) = (b, b\,\mathrm{tg}\,t)$.

Note que as segundas coordenadas de P e P_1 são iguais. Daí concluímos que $y = y_1 = b\,\mathrm{tg}\,t$. Ou seja, $P = (x, y) = (x, y_1) = (x, b\,\mathrm{tg}\,t)$.

Para obter a coordenada x do ponto P, seja P_2 o ponto de interseção da semi-reta OP_1 com a reta s_2. Da Trigonometria, temos $|OP_2| = a\sec t$.

Note que o círculo de centro na origem e raio $|OP_2|$, intersecta o semi-eixo positivo OX num ponto $P_0 = (x_0, 0)$, com $x_0 = |OP_2| = |a\sec t|$.

Como t é um arco do primeiro quadrante, $a\sec t$ é um número positivo. Logo: $x_0 = a\sec t$.

Afirmamos que $x = x_0$, isto é,

$$P = (x, y) = (x, b\,\mathrm{tg}\,t) = (x_0, b\,\mathrm{tg}\,t) = (a\sec t, b\,\mathrm{tg}\,t)\,.$$

Para verificar a afirmativa, basta mostrar que o ponto de coordenadas $(a\sec t, b\,\mathrm{tg}\,t)$ satisfaz a equação cartesiana da hipérbole $\mathcal{H}$:

$$\frac{(a\sec t)^2}{a^2} - \frac{(b\,\mathrm{tg}\,t)^2}{b^2} = \sec^2 t - \mathrm{tg}^2\, t = 1\,.$$

$$a\sec t < 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} b\,\mathrm{tg}\,t \geq 0\,, \text{ para } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi\,, \\ b\,\mathrm{tg}\,t < 0\,, \text{ para } \pi < t < \frac{3\pi}{2}\,. \end{cases}$$

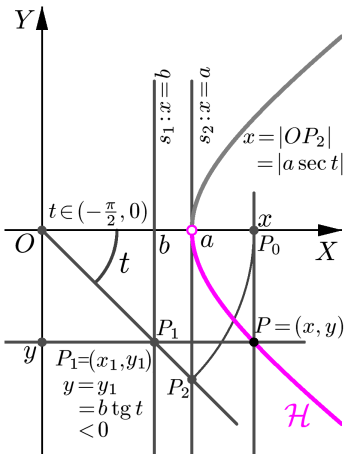


Fig. 205: Ramo de $\mathcal{H}$ no quarto quadrante.

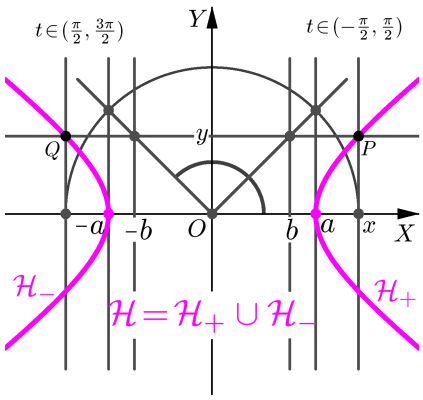


Fig. 206: Hipérbole $\mathcal{H}$ completa.

Na Figura 206 designamos por $\mathcal{H}_+$ o ramo da hipérbole $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo positivo OX, e por $\mathcal{H}_-$ o ramo de $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo negativo OX. Com isso, a hipérbole completa é: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$.

Finalmente, observe que, conforme t percorre todos os valores do

intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, o ponto P percorre todos os pontos da hipérbole que estão no primeiro quadrante, como vemos na Figura 204.

Para obter os pontos do quarto quadrante, fazemos a mesma construção, variando t no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0]$. Neste caso, o ponto $P = (x, y)$ da hipérbole tem a sua segunda coordenada negativa coincidindo com $b \operatorname{tg} t$, que é também um número negativo. Veja a Figura 205.

Para obter o ramo da hipérbole que intersecta o semi-eixo negativo OX, repetimos a construção, variando t no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Neste caso, temos:

Com essa análise, chegamos às seguintes equações paramétricas da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}, \quad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2})$$

Quando t varia no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obtemos o ramo da hipérbole $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo positivo OX, e quando t varia no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, obtemos o ramo de $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo negativo OX.

Observação.

Podemos determinar equações paramétricas de cada ramo da hipérbole isoladamente, fazendo variar t num mesmo intervalo. De fato, já sabemos que as equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_+ : \begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}, \; t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),$$

descrevem as coordenadas dos pontos do ramo $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H}$, que intersecta o semi-eixo positivo OX.

Também, como $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ se, e somente se, $t - \pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e:

$$a \sec t = -a \sec(t - \pi) \quad \text{e} \quad a \operatorname{tg} t = a \operatorname{tg}(t - \pi),$$

vemos que as coordenadas dos pontos do ramo $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$, que intersecta o semi-eixo negativo OX, são dadas pelas equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_- : \begin{cases} x = -a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

Portanto, $\mathcal{H}$ é descrita completamente pelas equações paramétricas:

$$\mathcal{H}_+ : \begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \qquad \mathcal{H}_- : \begin{cases} x = -a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}, \; t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

Funções hiperbólicas. As funções hiperbólicas são definidas a partir da função exponencial:
Cosseno hiperbólico: $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$
Seno hiperbólico: $\mathrm{senh}\,t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$
e descrevem as coordenadas x e y, respectivamente, dos pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, de maneira similar às funções $\cos t$ e $\mathrm{sen}\,t$ que descrevem as coordenadas x e y, respectivamente, dos pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Em particular, vale a relação: $\cosh^2 t - \mathrm{senh}^2\, t = 1$.

Observação.

Podemos obter outras equações paramétricas para a hipérbole $\mathcal{H}$, utilizando as *funções hiperbólicas*. Para isso, consideremos as equações paramétricas:

$$\text{(1)} \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\,\mathrm{senh}\,t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{(2)} \begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\,\mathrm{senh}\,t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

Substituindo as equações de (1) na equação cartesiana de $\mathcal{H}$:

$$\frac{(a\cosh t)^2}{a^2} - \frac{(b\,\mathrm{senh}\,t)^2}{b^2} = \cosh^2 t - \mathrm{senh}^2\, t = 1\,.$$

O mesmo ocorre ao se substituir as equações de (2) na equação cartesiana de $\mathcal{H}$.

Além disso, variando t em $\mathbb{R}$, vemos que $x = \pm a\cosh t \geq a$ percorre todos os valores em $(-\infty, a] \cup [a, +\infty)$, enquanto que $y = b\,\mathrm{senh}\,t$ percorre todos os valores reais.

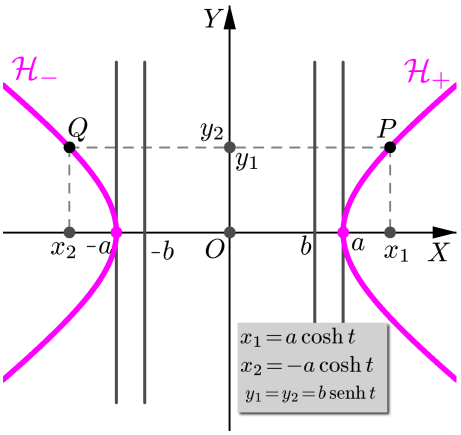


Fig. 207: Hipérbole $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$

Portanto, (1) são equações paramétricas para o ramo $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H}$ que intersecta o semi-eixo positivo OX e, (2) são equações paramétricas para o outro ramo $\mathcal{H}_-$ de $\mathcal{H}$.

III. Parábolas

As equações cartesianas canônicas das parábolas se caracterizam por apresentar uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar

essa variável como *dependente da variável do segundo grau*. Assim, escolhemos o parâmetro t igual à variável independente (do segundo grau) da equação cartesiana, percorrendo todos os valores reais.

Assim, na parábola $\mathcal{P}$ de equação cartesiana $(x-a)^2 = k(y-b)$ (Figura 208), escrevemos $y = \frac{1}{k}(x-a)^2 + b$. Portanto, escolhendo a variável independente x como sendo o parâmetro t, a variável dependente y se expressa como $y = \frac{1}{k}(t-a)^2 + b$.

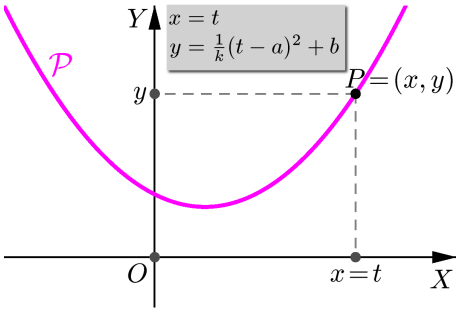


Fig. 208: $\mathcal{P} : (x-a)^2 = k(y-b)$.

Portanto, $\mathcal{P}$ tem por equações paramétricas:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{k}(t-a)^2 + b \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

Observação.

O procedimento utilizado para obter equações paramétricas das parábolas se aplica para obter equações paramétricas de partes de elipses e hipérboles.

Exemplo 94 *Determinar equações paramétricas da elipse*

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Solução: *Colocando em evidência a variável y, obtemos:*

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Note que a expressão que aparece no radicando, no lado direito da última igualdade, está definida somente para os valores de x, tais que $a^2 - x^2 \geq 0$, ou seja, $-a \leq x \leq a$.

Para cada escolha de sinal na expressão de y, descrevemos uma parte da elipse $\mathcal{E}$. Logo, suas equações paramétricas são:

$$\mathcal{E}_+ : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2} \end{cases}, \; t \in (-a, a], \quad \mathcal{E}_- : \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}, \; t \in [-a, a),$$

onde $\mathcal{E}_+$ é a semi-elipse contida no semiplano superior incluindo o vértice

$V_1 = (a,0)$ e excluindo o vértice $V_2 = (-a,0)$. Analogamente, $\mathcal{E}_-$ é a semi-elipse contida no semiplano inferior, incluindo o vértice $V_2 = (-a,0)$ e excluindo o vértice $V_1 = (a,0)$. Veja as Figuras 209, 210 e 211.

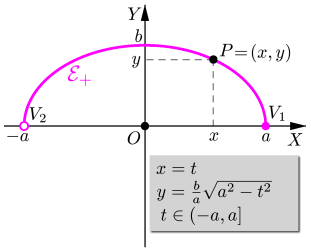


Fig. 209: Semi-elipse $\mathcal{E}_+$.

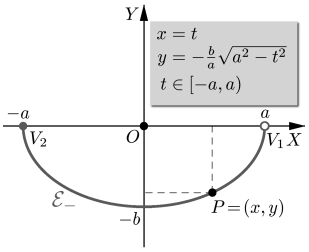


Fig. 210: Semi-elipse $\mathcal{E}_-$.

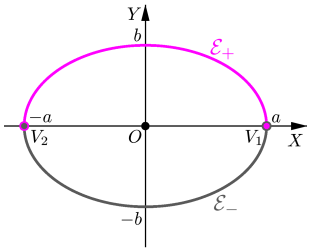


Fig. 211: Elipse $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$.

Resumo

Nesta aula vimos como obter as expressões de equações paramétricas das cônicas, usando relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer a uma dada curva. Na Aula 13 vamos obter e analisar as equações paramétricas de outras curvas planas interessantes que não são cônicas.

Exercícios

1. Verifique que $\begin{cases} x = 1 + 2\sec t \\ y = 3 + 3\,\mathrm{tg}\, t \end{cases}$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, são equações paramétricas de um ramo da hipérbole $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$.

2. Seja a hipérbole de equação $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. Dê as equações paramétricas do ramo desta hipérbole que intersecta o semi-eixo positivo OX. Como são as equações paramétricas desse ramo, expressando uma variável em função da outra?

3. Determine equações paramétricas para a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, fazendo $y = t$ (veja o Exemplo 94).

4. Determine a equação cartesiana da elipse:

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

5. Sejam a e b números reais positivos. Verifique que o lugar geométrico cujas equações paramétricas são:

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x = a\,\mathrm{tg}\, t \\ y = b\sec t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

é uma hipérbole cujo eixo focal é o eixo y. Descreva a forma dessa hipérbole nos casos $a < b$ e $b < a$.

6. Determine a equação cartesiana da hipérbole:

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x = 2 + \tan t \\ y = 3 + 3\sec t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

7. Determine equações paramétricas para a hipérbole $\mathcal{H}: xy = 1$ fazendo uma das variáveis igual ao parâmetro.

8. Verifique que $x = t^3$ e $y = t^6 - 4t^3$, $t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma parábola. Dê a equação cartesiana dessa parábola.

9. Verifique que $\mathcal{H}: \begin{cases} x = \cosh t + \mathrm{senh}\, t \\ y = \cosh t - \mathrm{senh}\, t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de um ramo da hipérbole $xy = 1$.

10. Verifique que $\mathcal{E}: \begin{cases} x = 2(\cos t + \mathrm{sen}\, t) \\ y = 3(\cos t - \mathrm{sen}\, t) \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma elipse. Dê a equação cartesiana dessa elipse.

Auto-avaliação

Se você resolveu os Exercícios de 1 a 6, aprendeu a verificar se um par de equações são equações paramétricas de uma dada curva. Ao resolver os Exercícios de 7 a 10, você fixou as técnicas para obter equações paramétricas das cônicas em relação a uma variável. Caso não tenha conseguido resolver algum exercício, releia a aula e procure orientação com os tutores.

Apêndice: Parametrizações de curvas planas

Objetivo

- Obter equações paramétricas de curvas planas importantes.

Neste apêndice, vamos estudar algumas curvas planas que têm sido historicamente muito importantes no desenvolvimento da Matemática. A história envolvida por trás das descobertas dessas curvas é muito interessante, recomendamos que você mesmo faça uma busca nas páginas:

`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves`

`http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir`

para saber sobre outras curvas que, para não estender demais a aula, deixaremos de considerar.

I. Catenárias.

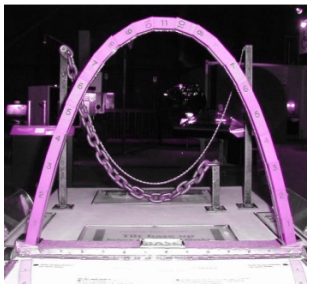


Fig. 213: Corrente suspensa.

A *catenária* é a curva desenhada por uma corda ou um cabo preso a dois postes, ou por uma corrente quando suspensa pelas suas extremidades e sujeita apenas à força devida à atração gravitacional, como mostra a Figura 213. *Galileu Galilei* foi o primeiro a estudar a catenária. No entanto, ele cometeu um engano ao pensar que essa curva fosse uma parábola. Engano desvendado, em 1669, pelo matemático alemão *Joachim Jungius*. No entanto, a equação da *curva da corrente suspensa* foi obtida por *Wilhelm Leibniz*, *Christian Huygens* e *Johann Bernoulli*, por volta de 1690, em resposta ao desafio lançado por *Jacob Bernoulli*: encontrar a *curva da corrente suspensa* a qual Huygens chamou de *catenária*, pela primeira vez, numa carta a Leibniz.

Definição 30 (Catenária) *A catenária é o gráfico da função cosseno hiperbólico* $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ *, ou seja, é o conjunto (Figura 212)*

$$\mathcal{C} = \{(t, \cosh t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,,$$

e suas equações paramétricas são:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

Joachim Jungius
1587-1657, Alemanha

Estudou Metafísica na Universidade de Rostock. Em 1609, foi nomeado professor de Matemática em Giessen, onde permaneceu até 1614. Jungius voltou a lecionar Matemática na Universidade de Rostock entre 1624 e 1628. Em 1629, foi nomeado professor de Ciência Natural na Universidade de Hamburgo, permanecendo até 1640. Jungius foi um dos primeiros a utilizar expoentes para representar as potências e usou a Matemática para modelar fenômenos das Ciências Naturais. Em 1638, escreveu também um belo tratado sobre Lógica: *Logica Hamburgensis*. Veja: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Jungius.html`

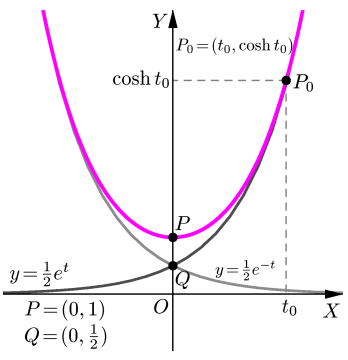


Fig. 212: Catenária.

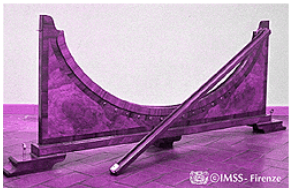


Fig. 215: Braquistócrona.

Uma bola metálica é solta na canaleta cicloidal e outra na canaleta inclinada, partindo do mesmo ponto. A bola que rola na canaleta cicloidal atinge o ponto de interseção inferior em menos tempo que a bola que rola na canaleta inclinada. Veja: `galileo.imss.firenze.it/museo/4/index.html`

Johann Bernoulli
1667-1748
Basel, Suíça

Estudou Medicina na Universidade de Basel. Aprendeu Matemática e Física com seu irmão Jacob que já lecionava em Basel. Os trabalhos de Leibniz sobre a teoria do Cálculo foram rapidamente assimilados pelos Bernoulli e utilizados nas suas próprias pesquisas. Johann resolveu o desafio lançado por Jacob sobre a curva da corrente suspensa (catenária), lançou e resolveu o problema da braquistócrona. `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bernoulli_Johann.html`

Na Figura 212, você pode ver como as funções $t \mapsto \frac{1}{2}e^t$ e $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t}$ acompanham o gráfico da catenária de forma assintótica.

Observe também que qualquer mudança de escala da catenária, continua a ser uma catenária. Isto é, dado um número real a fixo, não-nulo, o gráfico da função $f(t) = a\, f(\frac{t}{a})$, continua a ser a catenária. Na Figura 214, mostramos o gráfico desse tipo de funções com $a = 1, 2, 4$. Preste atenção na mudança de escala.

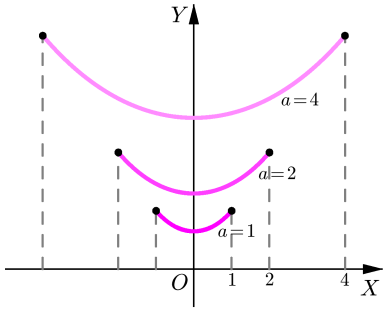


Fig. 214: Catenárias: escalas 1, 2 e 4.

II. Ciclóides e trocóides.

Definição 31 *Sejam $\mathcal{C}$ um círculo de raio r, s uma reta e P um ponto de $\mathcal{C}$. Denominamos* ciclóide *à curva descrita pelo ponto P quando $\mathcal{C}$ rola sobre a reta s, sem deslizar.*

Na primeira década do século XVII, *Galileu Galilei* escreveu uma carta a *Guidobaldo del Monte*, onde se detalha um procedimento geométrico-analítico para mostrar que a ciclóide é uma curva *braquistócrona*. Isto significa que o arco de ciclóide entre dois pontos dados é a *trajetória da descida mais rápida* que um corpo deve seguir de um ponto a outro, quando sujeito apenas à ação gravitacional. No entanto, a demonstração de Galileu não era correta. Em junho de 1696, *Johann Bernoulli* lançou o desafio do problema da braquistócrona. Em 1697, foram dadas cinco soluções, dentre as quais uma do próprio Johann Bernoulli, outra do seu irmão mais velho *Jacob Bernoulli* e outra de *Wilhelm Gottfried Leibniz*.

Para obtermos as equações paramétricas da ciclóide, admitamos que:

- a reta s é o eixo OX;
- o círculo $\mathcal{C}$ inicia o movimento estando com centro no ponto $(0, r)$
- o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

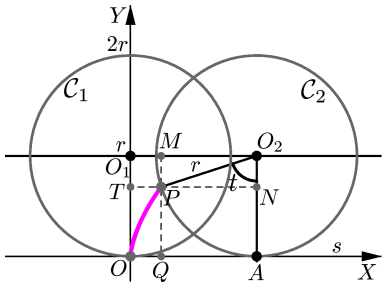


Fig. 216: Desenvolvimento da ciclóide.

Tracemos dois círculos $\mathcal{C}_1$, representando $\mathcal{C}$ em sua posição inicial, e $\mathcal{C}_2$, representando $\mathcal{C}$ após ter rolado alguns instantes.

Veja, na Figura 216, a designação dos seguintes elementos:

- sejam O_1 e O_2 os centros de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente;
- $P = (x, y)$ o ponto da ciclóide em $\mathcal{C}_2$;
- A o ponto em que $\mathcal{C}_2$ toca o eixo OX;
- $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções ortogonais de P sobre OX e OY, respectivamente;
- M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A.
- t a medida do ângulo $\widehat{AO_2P}$, tomada em radianos.

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P, sobre o círculo $\mathcal{C}_2$ que consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta s.

Como t é a medida de $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de $\mathcal{C}_2$ de A a P que já fez contato com s é rt. Logo, $|OA| = rt$.

Analisando o sinal de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, vemos que as coordenadas x e y de P são determinadas por meio das seguintes relações:

$$x = |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r\operatorname{sen} t\,,$$
$$y = |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r\cos t\,.$$

Obtemos, assim, as seguintes equações paramétricas da ciclóide:

$$\begin{cases} x = rt - r\operatorname{sen} t \\ y = r - r\cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Veja como é feito o movimento na seqüência de figuras abaixo.

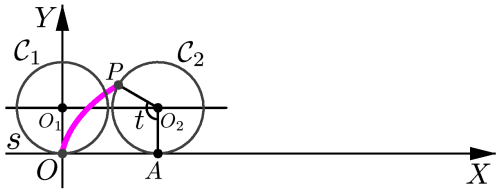


Fig. 217: $t = \frac{2\pi}{3}$.

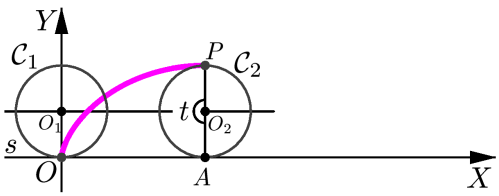


Fig. 218: $t = \pi$.

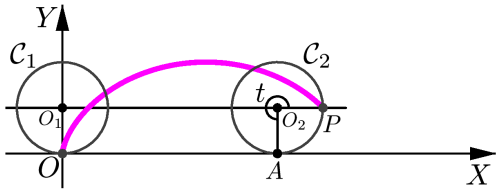


Fig. 219: $t = \frac{3\pi}{2}$.

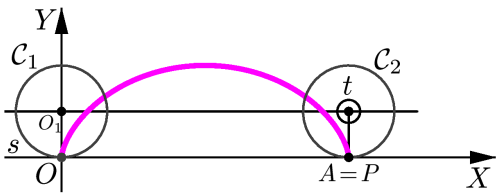


Fig. 220: $t = 2\pi$.

Observe que...

- para $t = 0$, o ponto P está na sua posição inicial;
- para $t = \pi$, P dista $2r$ do eixo OX;
- para $t = 2\pi$, o círculo dá um giro completo e o ponto P volta a tocar o eixo OX.

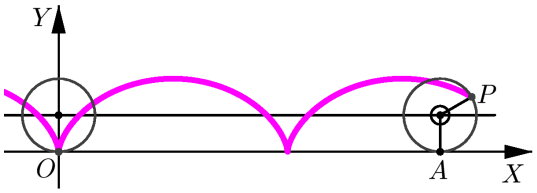


Fig. 221: Ciclóide.

A ciclóide pertence a uma classe mais ampla de curvas rolantes, denominadas *trocóides*.

Definição 32 *Seja $\mathcal{C}$ um círculo de centro C e raio r, e seja s uma reta. Consideremos uma semi-reta radial OB e um ponto P nessa semi-reta.*

Uma trocóide *é o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando $\mathcal{C}$ rola sobre a reta s sem deslizar.*

A trocóide é denominada:

- ciclóide longa *quando P é exterior a $\mathcal{C}$ (isto é, $R = d(P, C) > r$),*
- ciclóide *quando P pertence a $\mathcal{C}$ (isto é, $R = d(P, C) = r$),*
- ciclóide curta *quando P é interior a $\mathcal{C}$ (isto é, $R = d(P, C) < r$).*

O procedimento para obter equações paramétricas dessas três curvas é análogo ao caso da ciclóide, que analisamos anteriormente.

Acompanhe nas Figuras 222 e 223 a designação dos seguintes elementos: assumimos que o círculo $\mathcal{C}$ tem centro $C = (0, r)$, raio r e rola sobre a reta $s =$ eixo OX; sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ círculos de centros O_1 e O_2 representando $\mathcal{C}$ no início do movimento e após transcorrido um instante t, respectivamente; designamos por $P = (x, y)$ o ponto rolante que descreve a trocóide partindo da posição $(0, r - R)$, no instante $t = 0$; seja A o ponto de contato do círculo $\mathcal{C}_2$ com a reta s; sejam Q e T as projeções de P sobre os eixos OX e OY; seja M a projeção de P sobre a reta $y = r$ que contém os centros O_1 e O_2, seja N a projeção de P sobre a reta O_2A.

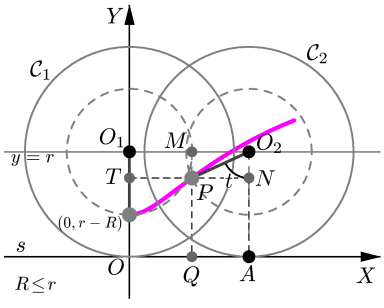


Fig. 222: Ciclóide curta.

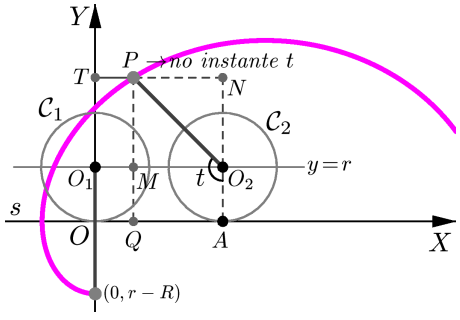


Fig. 223: Ciclóide longa.

Como no caso da ciclóide, temos:

$$x = |OQ| = |OA| \pm |QA| = rt \pm |O_2M|\,,$$
$$y = |OT| = |OO_1| \pm |TO_1| = r \pm |O_2N|\,,$$

onde $|O_2M| = R|\operatorname{sen} t|$, $|O_2N| = R|\cos t|$ e o sinal é escolhido segundo a posição de P em relação a O_2. Isto depende em qual dos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ou $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ está o valor t. Em qualquer caso, você pode verificar que as curvas trocóides têm equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = rt - R\operatorname{sen} t \\ y = r - R\cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

sendo a trocóide uma ciclóide curta, se $R < r$; uma ciclóide, se $R = r$; uma ciclóide longa, se $R > r$.

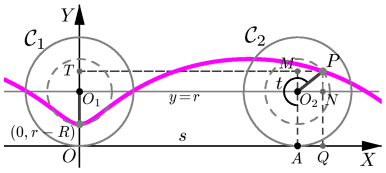


Fig. 224: Ciclóide curta.

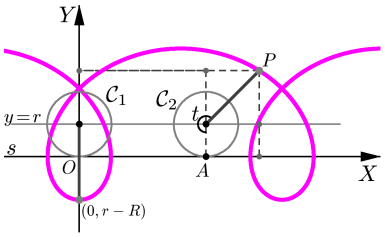


Fig. 225: Ciclóide longa.

Nas Figuras 224 e 225, mostramos a ciclóide curta e a ciclóide longa traçadas em intervalos maiores. Na Figura 226, vemos os três tipos de trocóides.

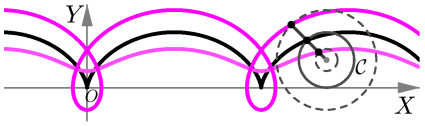


Fig. 226: Trocóides.

III. Epiciclóides e hipociclóides.

Definição 33 (Epiciclóide) *Consideremos dois círculos, Γ e $\mathcal{C}$, de raios R e r, respectivamente,tais que:*

- *Γ e $\mathcal{C}$ se tocam apenas em um ponto P,*
- *os pontos de $\mathcal{C}$, diferentes de P, estão no exterior de Γ.*

Denominamos epiciclóide o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, sem deslizar.

As epiciclóides e outras curvas similares, que veremos mais adiante (as *hipociclóides*), foram muito estudadas por grandes matemáticos da

Para saber mais ...
Sobre a epiciclóide e outras curvas cicloidais, veja:
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Epicycloid.html`
`http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/EpiHypocycloid_dir/epiHypocicloid.html`

idade moderna como *Desargues* (1640), *Huygens* (1679), *Leibniz*, *Newton* (1686), *de L'Hópital* (1690), *Jacob Bernoulli* (1690), *la Hire* (1694), *Johann Bernoulli* (1695), *Daniel Bernoulli* (1725), *Euler* (1745, 1781) e pelo matemático e artista *Dürer* (1525).

O estudo das curvas cicloidais está relacionado à procura pela melhor forma e acoplamento de rodas dentadas.

Para obtermos as equações paramétricas da epiciclóide, admitamos Γ com centro na origem, $\mathcal{C}$ com centro no ponto $(R+r,0)$ e que a posição inicial de P seja $P_1=(R,0)$.

Nas Figuras 227 e 228, mostramos o círculo $\mathcal{C}$ após ter rolado alguns instantes sobre o círculo Γ.

Acompanhe, nessas mesmas figuras, a designação dos seguintes elementos: seja $P=(x,y)$ o ponto da epiciclóide que, estando inicialmente na posição P_1, descreve o arco P_1P quando $\mathcal{C}$ rola um ângulo de medida θ sobre Γ; denotemos A o ponto de contato entre os círculos; O_2 o centro de $\mathcal{C}$; B e D, as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY, respectivamente; $Q=(x,0)$ e $T=(0,y)$, as projeções de P sobre OX e OY; M e N, as projeções de P sobre as retas O_2D e O_2B e seja t o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semi-reta radial OO_2.

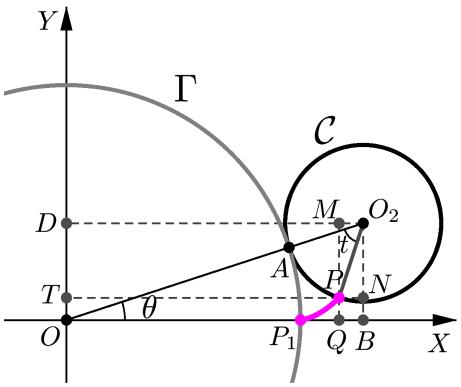


Fig. 227: P descreve uma epiciclóide.

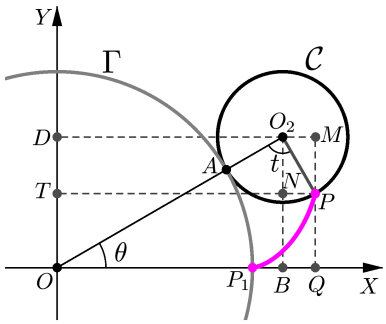


Fig. 228: P continuando o movimento.

O nosso problema consiste em descrever as coordenadas do ponto P em termos de um parâmetro.

Nas figuras acima, vemos que as posições entre Q e B variam de acordo com a posição do ponto P. Isto é, de acordo com a medida t do ângulo AO_2P.

No caso em que Q está entre O e B, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|\,, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Note que, enquanto $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, seu centro descreve um círculo centrado em O e de raio $R+r$. Sendo θ a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para a semi-reta OO_2 (medido no sentido anti-horário), obtemos:

$$|OB| = (R+r)cos\theta \qquad \text{e} \qquad |OD| = (R+r)sen\theta\,. \tag{60}$$

Sendo t a medida do ângulo de O_2A para O_2P, vemos que:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = (\tfrac{\pi}{2} - \theta) - t = \tfrac{\pi}{2} - (\theta + t)\,.$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2, temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r\,\mathrm{sen}(\widehat{NO_2P}) = r\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2} - (\theta+t)) = r\cos(\theta+t)\,, \\ |O_2N| &= r\cos(\widehat{NO_2P}) = r\cos(\tfrac{\pi}{2} - (\theta+t)) = r\,\mathrm{sen}(\theta+t)\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Substituindo as identidades (60) e (61) em (59), obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos(\theta+t)\,, \\ y &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}(\theta+t)\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Mas ainda resta uma complicação: as expressões das coordenadas x e y estão dadas em função de duas variáveis θ e t. Vamos resolver isto.

Note que o comprimento do arco de A a P, do círculo $\mathcal{C}$, é igual ao comprimento do arco de P_1 a A, do círculo Γ (lembre que $\mathcal{C}$ rola sobre Γ). Como a medida do primeiro arco é rt e a medida do segundo é $R\theta$, então $rt = R\theta$, de onde, $t = \frac{R\theta}{r}$.

Assim, substituindo $t = \frac{R\theta}{r}$ em (62), obtemos as seguintes equações paramétricas da epiciclóide, apenas em função do parâmetro θ:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos(\theta + \tfrac{R\theta}{r}) = (R+r)\cos\theta - r\cos((\tfrac{R+r}{r})\theta)\,, \\ y &= (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}(\theta + \tfrac{R\theta}{r}) = (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}((\tfrac{R+r}{r})\theta)\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Resta verificar o caso em que B está entre O e Q (Figura 228).

A Cardióide ...

É a epiciclóide com $r = R$:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta - r\cos(2\theta) \\ y = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}(2\theta) \end{cases}$$

O nome *cardióide* foi dado em 1741 por *Johann de Castillon* (1704-1791) e significa *forma de coração*. Mas, em 1708, o matemático francês *Phillippe de La Hire* (1640-1718) calculou o seu comprimento.

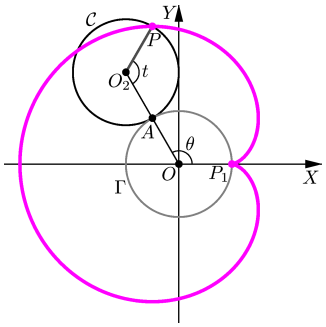


Fig. 229: $r = R$: Cardióide .

O conjunto de Mandelbrot

Em 1979 o matemático polonês *Benoit Mandelbrot* (1924-⋆) analisou a dinâmica das iterações de funções da forma $f_c(z) = z^2 + c$, onde $z \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{C}$ é constante, estudadas por *Gaston Julia* (1918). Usando o computador, Mandelbrot determinou o conjunto M formado pelos valores de c, para os quais certo conjunto limitado associado ao polinômio f_c (denominado *conjunto de Julia*) consiste de uma forma conexa no plano complexo. Eis o conjunto M, de Mandelbrot:

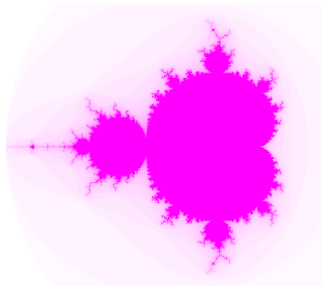


Fig. 230: Cardióide no conjunto de Mandelbrot.

No triângulo NPO_2, (Figura 228), temos $\widehat{NO_2P} = t - (\frac{\pi}{2} - \theta) = (\theta + t) - \frac{\pi}{2}$. Logo:

$$|O_2M| = r\,\mathrm{sen}((\theta + t) - \tfrac{\pi}{2}) = -r\cos(\theta + t)\,,$$
$$|O_2N| = r\cos((\theta + t) - \tfrac{\pi}{2}) = r\,\mathrm{sen}(\theta + t)\,.$$

Sendo que:

$$x = |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|\,,$$
$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,,$$

obtemos as mesmas equações paramétricas do caso anterior.

Assim, você já tem elementos suficientes para verificar que, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, as coordenadas do ponto P satisfazem as equações (63), independentemente da posição de P.

Conclusão: as equações paramétricas da epiciclóide são:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos((\frac{R+r}{r})\theta) \\ y = (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}((\frac{R+r}{r})\theta) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Observe que, quando $\mathcal{C}$ percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ.

Portanto, se $\frac{R}{r} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a n-ésima vez coincide com sua posição inicial.

Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de $\mathcal{C}$: $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$.

Nas seguintes figuras, mostramos várias epiciclóides, indicando os valores de r e R, assim como suas equações paramétricas.

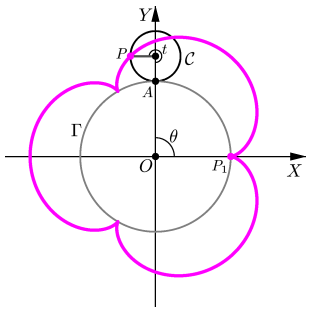


Fig. 231: $r = \frac{1}{2}$, $R = \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \frac{1}{2}\cos(4\theta) \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(4\theta) \end{cases}$$

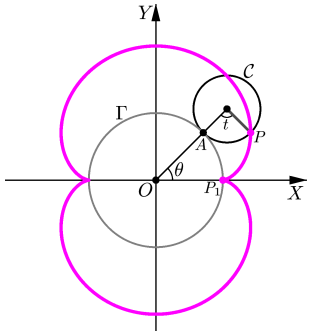


Fig. 232: $r = \frac{2}{3}$, $R = \frac{4}{3}$.

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \frac{2}{3}\cos(3\theta) \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}(3\theta) \end{cases}$$

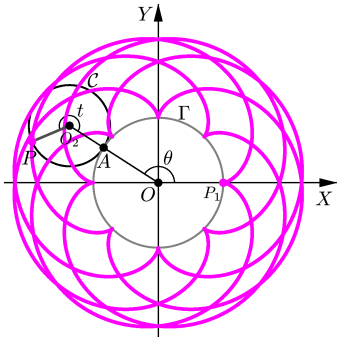


Fig. 233: $r = 5$, $R = 8$.

$$\begin{cases} x = 13\cos\theta - 5\cos(\frac{13}{5}\theta) \\ y = 13\,\mathrm{sen}\,\theta - 5\,\mathrm{sen}(\frac{13}{5}\theta) \end{cases}$$

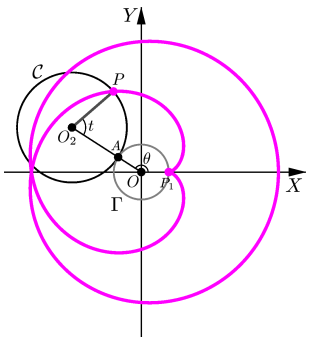


Fig. 234: $r = 2$, $R = 1$.

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta - 2\cos(\frac{3}{2}\theta) \\ y = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\theta) \end{cases}$$

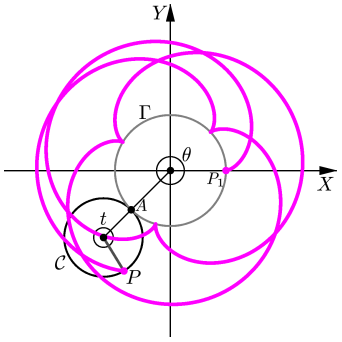


Fig. 235: $r = \sqrt{2}$, $R = 2$.

$$\begin{cases} x = (2+\sqrt{2})\cos\theta - \sqrt{2}\cos(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\theta) \\ y = (2+\sqrt{2})\,\mathrm{sen}\,\theta - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\theta) \end{cases}$$

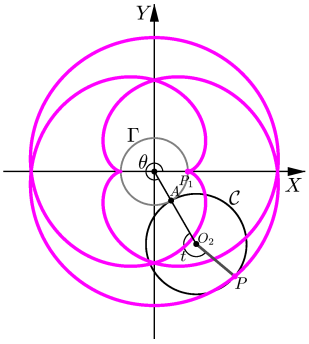


Fig. 236: $r = 3$, $R = 2$.

$$\begin{cases} x = 5\cos\theta - 3\cos(\frac{5}{3}\theta) \\ y = 5\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\theta) \end{cases}$$

Outra classe de curvas rolantes análoga à epiciclóide é a seguinte.

Definição 34 (Hipociclóide) *Consideremos dois círculos $\Gamma, \mathcal{C}$ de raios R e r, respectivamente, tais que:*

- $r < R$,
- Γ *e* $\mathcal{C}$ *se tocam apenas em um ponto* P,
- *os pontos de* $\mathcal{C}$, *diferentes de* P, *estão no interior de* Γ.

Denominamos epiciclóide *o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ, sem deslizar.*

Para obtermos as equações paramétricas da hipociclóide admitamos Γ com centro na origem, $\mathcal{C}$ iniciando o movimento com centro no ponto $(R-r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando $\mathcal{C}$ rola sobre Γ sem deslizar.

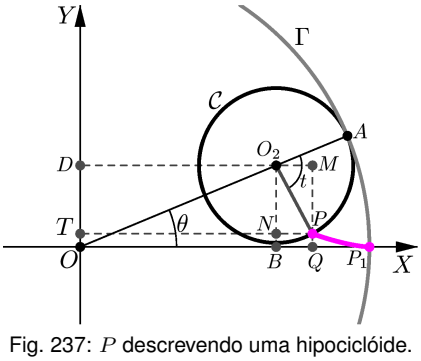


Fig. 237: P descrevendo uma hipociclóide.

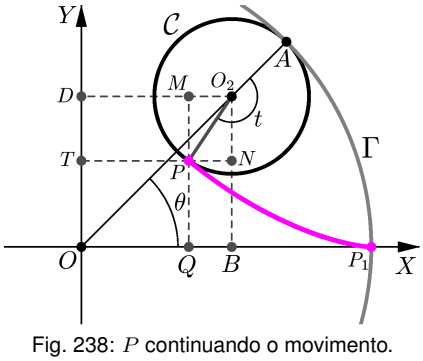


Fig. 238: P continuando o movimento.

Acompanhe, nas Figuras 237 e 238, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de $\mathcal{C}$ que toca Γ; O_2 o centro de $\mathcal{C}$; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as

Para saber mais ...
Outras curvas rolantes são as *epitrocóides* e as *hipotrocóides*, essas curvas são construídas da mesma forma que as epiciclóides e as hipociclóides, quando o ponto que descreve a curva está no interior (ou exterior) do círculo que rola dentro ou fora do círculo fixo. Veja:
`http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html`

projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B, respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q, mostrado na Figura 237, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|\,, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|\,. \end{aligned} \tag{64}$$

Sendo que o centro de $\mathcal{C}$ descreve um círculo de raio $R-r$, obtemos:

$$|OB| = (R-r)\cos\theta \qquad \text{e} \qquad |OD| = (R-r)\operatorname{sen}\theta.$$

Denotando t a medida do ângulo de O_2A para O_2P, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - t \qquad \text{e} \qquad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \tfrac{\pi}{2} - \theta\,.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = -\tfrac{\pi}{2} + \theta + \widehat{OO_2P} = -\tfrac{\pi}{2} + \theta + (\pi - t) = (\theta - t) + \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2, temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r\operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r\operatorname{sen}((\theta-t)+\tfrac{\pi}{2}) = r\cos(\theta-t) = r\cos(t-\theta)\,, \\ |O_2N| &= r\cos(\widehat{NO_2P}) = r\cos((\theta-t)+\tfrac{\pi}{2}) = -r\operatorname{sen}(\theta-t) = r\operatorname{sen}(t-\theta)\,. \end{aligned}$$

Substituindo essas identidades nas relações (64) e usando o fato de que $t = \frac{R\theta}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + r\cos((\frac{R-r}{r})\theta) \\ y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}((\frac{R-r}{r})\theta) \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

Procure verificar que as mesmas equações paramétricas são obtidas quando P está em outras posições com respeito ao centro O_2.

A astróide ...

Também chamada *tetracúspide*, *cubociclóide* ou *paraciclo*, na literatura antiga, foi estudada por Johann Bernoulli em 1691, aparecendo também em cartas de Gottfried Leibniz de 1715. A astróide é a hipociclóide obtida quando $r = \frac{R}{4}$. Suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta + r\cos(3\theta) \\ y = 3r\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}(3\theta) \end{cases}$$

e seu lugar geométrico é:

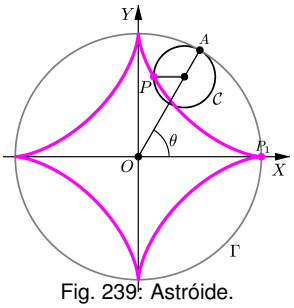


Fig. 239: Astróide.

Hipociclóide degenerada...

O segmento que liga $(R,0)$ com $(-R,0)$ é também uma hipociclóide. De fato, a hipociclóide, tal que, $r = \frac{R}{2}$, tem equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 0 \end{cases}$$

e o seu lugar geométrico é:

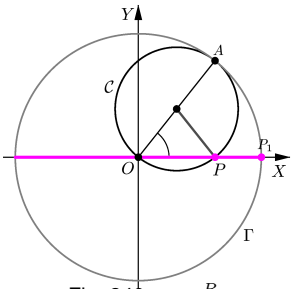


Fig. 240: $r = \frac{R}{2}$.

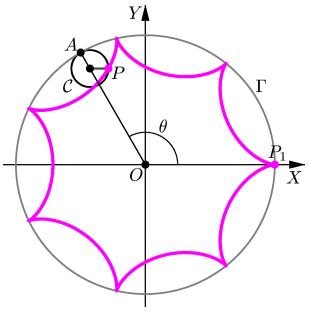


Fig. 241: $r = \frac{3}{7}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{18}{7}\cos\theta - \frac{3}{7}\cos(6\theta) \\ y = \frac{18}{7}\operatorname{sen}\theta - \frac{3}{7}\operatorname{sen}(6\theta) \end{cases}$$

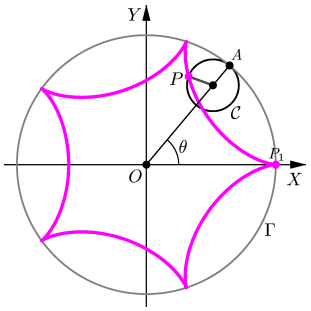


Fig. 242: $r = \frac{3}{5}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{12}{5}\cos\theta - \frac{3}{5}\cos(4\theta) \\ y = \frac{12}{5}\operatorname{sen}\theta - \frac{3}{5}\operatorname{sen}(4\theta) \end{cases}$$

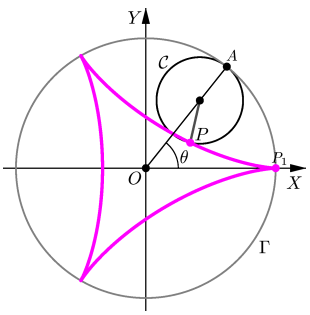


Fig. 243: Deltóide: $r = 1$, $R = 3$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos(2\theta) \\ y = 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(2\theta) \end{cases}$$

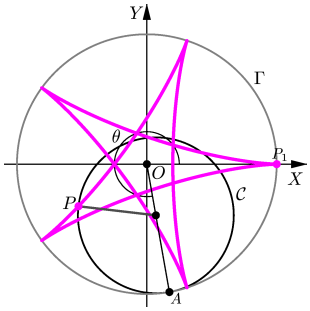


Fig. 244: $r = \frac{9}{5}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5}\cos\theta - \frac{9}{5}\cos(\frac{2}{3}\theta) \\ y = \frac{6}{5}\operatorname{sen}\theta - \frac{9}{5}\operatorname{sen}(\frac{2}{3}\theta) \end{cases}$$

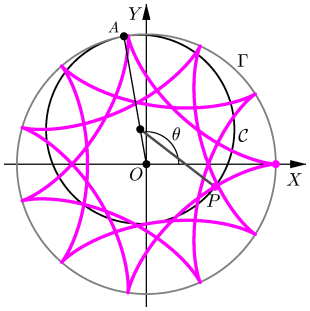


Fig. 245: $r = \frac{24}{11}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{9}{11}\cos\theta - \frac{24}{11}\cos(\frac{3}{8}\theta) \\ y = \frac{9}{11}\operatorname{sen}\theta - \frac{24}{11}\operatorname{sen}(\frac{3}{8}\theta) \end{cases}$$

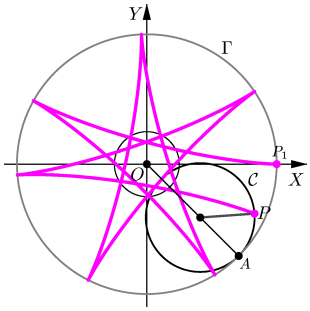


Fig. 246: $r = \frac{2\pi}{5}$, $R = 3$.

$$\begin{cases} x = \frac{15-2\pi}{5}\cos\theta - \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{15-2\pi}{2\pi}\theta) \\ y = \frac{15-2\pi}{5}\operatorname{sen}\theta - \frac{2\pi}{5}\operatorname{sen}(\frac{15-2\pi}{2\pi}\theta) \end{cases}$$

IV. A bruxa de Agnesi.

Como na história da Matemática nunca existiram bruxas, começamos por esclarecer o nome dado a esta curva. Estudada por *Pierre de Fermat* em 1703, sua construção geométrica foi detalhada apenas em 1718, pelo matemático italiano *Grandi*, que dera o nome de *versoria*, cujo significado, em latim, é *corda que vira a vela* (vela de barco) e traduzira também o nome para o italiano em *versiera* (que significa virar).

Em meados do século XVIII, a matemática italiana *Maria Agnesi* publicou o livro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, que consistia de muitos exemplos analisando cuidadosamente as propriedades das curvas planas. Uma das curvas estudadas no livro foi *la versiera*, nomeada corretamente por Agnesi. Posteriormente, o livro de Agnesi foi traduzido para o inglês por *John Colson*, por volta de 1760, contendo um grave erro. Em vez de traduzir *la versiera* em *a curva*, traduziu *l'aversiera*, que significa *a bruxa*. Pior ainda, o erro do inglês Colson foi mantido até nossos dias.

Definição 35 (A bruxa de Agnesi) *Seja $\mathcal{C}$ um círculo de raio r tangente a duas retas paralelas s_1 e s_2. Sejam O e A os pontos de tangência de $\mathcal{C}$ com s_1 e s_2, respectivamente. Do ponto O tracemos uma semi-reta em direção à reta s_2. Denotemos R e Q os pontos de interseção desta semi-reta com o $\mathcal{C}$ e s_2, respectivamente. Tracemos o segmento QD, perpendicular a s_1 e a reta s paralela a s_1 passando por R (veja a Figura 247).*

Seja P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD.

Maria Gaëtana Agnesi
1718 - 1799
Milan, Itália

Considerada um dos grandes talentos matemáticos do século XVIII, publicou diversos tratados sobre Filosofia. Autodidata, estudou Teologia e Matemática, concentrando seus esforços nos trabalhos de L'Hópital e Newton. Com ajuda do monge Ramiro Rampielli, aprendeu as sutilezas do Cálculo.
O seu trabalho mais conhecido foi o tratado *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* que, em dois volumes, não continha pesquisa matemática original, mas sim uma detalhada explicação da teoria das curvas planas mediante exemplos, sendo um deles, a curva conhecida como *bruxa de Agnesi*, por causa de um erro de tradução do inglês John Colson por volta de 1760. Veja:
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Agnesi.html`

Os pontos P assim obtidos, traçando todas as semi-retas que partem de O e intersectam $\mathcal{C}$, descrevem a curva denominada bruxa de Agnesi.

Para obtermos as equações paramétricas da bruxa de Agnesi, admitamos que s_1 seja o eixo OX, $s_2 : y = 2r$, O seja a origem do sistema de coordenadas e $A = (0, 2r)$ (Figura 247).

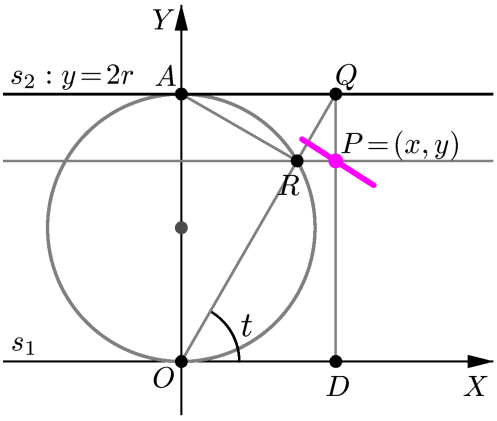


Fig. 247: Construção da bruxa de Agnesi.

De novo, o nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ da bruxa de Agnesi em função de apenas um parâmetro.

Se B é a projeção de R sobre o eixo OX, então:

$$x = |OD| \qquad \text{e} \qquad y = |RB|\,. \tag{65}$$

Denotando t a medida do ângulo $\widehat{DOQ}$, obtemos:

$$|OD| = |OQ|\cos t \qquad \text{e} \qquad |RB| = |OR|\,\text{sen}\,t\,. \tag{66}$$

Note que os triângulos ORA (inscrito em um semicírculo de $\mathcal{C}$) e ODQ são retângulos. No primeiro, $\widehat{ORA}$ é o ângulo reto, a medida de $\widehat{OAR}$ é t e, portanto, $|OR| = 2\,r\,\text{sen}\,t$. No triângulo ODQ, temos $|QD| = 2r$. Logo, $|OQ|\,\text{sen}\,t = 2r$, o qual implica: $|OQ| = \frac{2r}{\text{sen}\,t}$.

Substituindo essas relações em (66), obtemos:

$$|OD| = \frac{2r\cos t}{\text{sen}\,t} = 2r\,\text{cotg}\,t \qquad \text{e} \qquad |RB| = 2r\,\text{sen}^2\,t\,. \tag{67}$$

Substituindo as identidades (67) nas identidades (65), obtemos as equações paramétricas da bruxa de Agnesi:

$$\begin{cases} x = 2\,r\ \text{cotg}\,t \\ y = 2\,r\ \text{sen}^2\,t \end{cases}, \ t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

e traçamos o seu lugar geométrico:

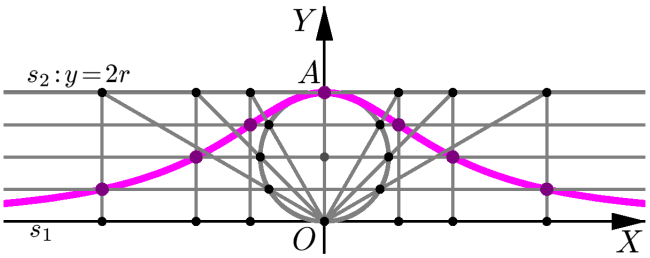


Fig. 248: Bruxa de Agnesi.

Resumo

Neste apêndice vimos como obter as equações paramétricas de várias curvas planas, usando relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer a uma curva dada.

Exercícios

1 . Verifique que $x = 1 + 2sect$ e $y = 3 + 3tgt$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ são equações paramétricas de um ramo da hipérbole $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

2 . Verifique que $x = t^3$ e $y = t^6 - 4t^3$, $t \in \mathbb{R}$ são equações paramétricas de uma parábola. Dê a equação cartesiana dessa parábola.

3 . Verifique que $x = cosht + senht$ e $y = cosht - senht$, $t \in \mathbb{R}$ são equações paramétricas de um ramo da hipérbole $xy = 1$.

4 . Verifique que $x = 2(cost + sent)$ e $y = 3(cost - sent)$, $t \in \mathbb{R}$ são equações paramétricas de uma elipse. Dê a equação cartesiana dessa elipse.

5 . Seja a hipérbole de equação $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. Dê as equações paramétricas do ramo desta hipérbole que intersecta o semi-eixo positivo OX. Como são as equações paramétricas desse ramo, expressando uma variável em função da outra?

6 . Dê as equações paramétricas da ciclóide descrita pelo ponto $P = (0, 0)$ pertencente ao círculo de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, quando este rola sobre o eixo OX.

7 . Dê as equações paramétricas da ciclóide estreita descrita pelo ponto $P = (0, 3)$ pertencente ao círculo de equação $x^2 + (y - 5)^2 = 25$, quando este rola sobre o eixo OX.

8 . Dê as equações paramétricas da ciclóide larga descrita pelo ponto $P = (0, -1)$ pertencente ao círculo de equação $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, quando este rola sobre o eixo OX.

9 . Seja $\mathcal{S}$ a ciclóide larga descrita pelo ponto $P = (0, -2)$ pertencente ao círculo de equação $x^2 + (y - 5)^2 = 25$, quando este rola sobre o eixo OX. Verifique que $\mathcal{S}$ está contida na faixa do plano entre as retas $x = -2$ e $x = 7$.

10 . Dê as equações paramétricas da hipociclóide descrita pelo ponto $P = (6, 0)$ pertencente ao círculo de equação $(x - 7)^2 + y^2 = 1$, quando este rola sobre círculo de equação $x^2 + y^2 = 36$.

11 . Esboce o gráfico de uma hipociclóide em que $R = 4$ e $r = 2$.

12 . Que tipo de curva é descrita pelos centros do círculo $(x-4)^2+y^2 = 16$ quando rolamos esta círculo sobre o eixo OY? Dê a equação dessa curva.

13 . Considere o círculo $\mathcal{C} : x^2 = (y-3)^2 = 9$ e a curva obtida da seguinte forma: da origem, traçamos uma semi-reta u que intersecta $\mathcal{C}$ em um ponto R e intersecta a reta $y = 4$ num ponto Q. Seja QD a perpendicular ao eixo OX. Trace a reta s paralela a OX que passa por R. A reta s intersecta em um ponto $P = (x, y)$.

Dê as equações paramétricas dos pontos P, assim obtidos ao traçarmos a família das semi-retas com as mesmas propriedades da reta u.

Sugestão para o Exercício 14.
Reveja a curva desenhada na Figura 245 e compare com a curva da Figura 246. Tente decifrar se elas são fechadas ou não.

14 . O que você pode afirmar sobre uma epiciclóide ou uma hipociclóide quando a razão entre os raios dos círculos considerados é:

a. um número racional.

b. um número iracional.

Auto-avaliação

Se você resolveu os Exercícios de 1 a 4, aprendeu a identificar as equações paramétricas de uma curva dada. Ao resolver os Exercícios de 5 a 12, você fixou a forma de obter equações paramétricas de algumas curvas e a análise da forma da curva em relação à variação do parâmetro. Se resolveu o Exercício 13, você aprendeu como obter as equações paramétricas de uma curva a partir das condições dadas. Se você teve dificuldades na resolução de algum exercício, procure orientação!