GEOMETRIA ANALÍTICA

GENÉSIO LIMA DOS REIS

— Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás
Doutor, IMPA

VALDIR VILMAR DA SILVA

— Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás
Mestre, UFG

5ª Reimpressão

LTC EDITORA

PREFÁCIO

A idéia de se escrever este livro ocorreu por volta do ano de 1972. A proposta era a de obter um texto de Geometria Analítica adequado aos estudantes dos cursos de Matemática, Física e Engenharia, recém-ingressados na Universidade, isto é, cuja leitura pressupusesse apenas conhecimentos básicos de Álgebra e Geometria Elementar, a nível colegial.

De maneira intuitiva e geométrica introduzimos a reta real no Cap. 1. Em linguagem vetorial, apresentamos a Geometria Analítica no plano nos Caps. 2 e 3, e no espaço, nos Caps. 4 e 5. No plano, iniciamos com sistemas de coordenadas e concluímos com cônicas. Além das aplicações geométricas, damos várias aplicações à Física, especialmente as relacionadas com movimento de partícula e resultantes de forças. Para o estudante que esteja cursando Cálculo Diferencial, indicamos também as soluções com o emprego de derivadas, para o cálculo de velocidade e de tangentes. Na obtenção das formas canônicas das cônicas utilizamos rotação e translação de eixos. No espaço tridimensional (Caps. 4 e 5) estudamos a reta, o plano e as superfícies quádricas na forma canônica. No Cap. 6, introduzimos a Geometria Analítica no plano complexo. As várias formas de equações de curvas (cartesianas, paramétricas, complexas e polares) são aqui reunidas, para destacar as vantagens de umas ou de outras, conforme a curva que se esteja estudando. No Cap. 7 apresentamos o espaço de dimensão quatro. Este capítulo faz sentir a necessidade de uma teoria mais sólida para o estudo de espaços de dimensões superiores e serve como uma transição natural para um curso de Álgebra Linear. Aliás, frizamos que ao introduzir o Cálculo Vetorial neste livro o fizemos com o propósito de enriquecer as técnicas usadas em Geometria Analítica, sem preocupações diretas com a Álgebra Linear. Finalmente, o Cap. 8, além de sugestões e respostas, contém comentários das questões propostas.

Em nenhum momento tivemos a pretensão de esgotar o assunto. Pelo contrário, propositadamente, procuramos nos restringir às idéias fundamentais e evitar excessos de nomenclatura que poderiam desviar a atenção dos alunos. Acreditamos, assim, que todo o conteúdo do livro pode ser abordado num curso semestral de quatro aulas semanais.

Por fim, não poderíamos deixar de agradecer a todos os colegas e estudantes que direta ou indiretamente contribuiram para a elaboração deste livro. Antecipadamente, agradecemos também àqueles que nos enviarem críticas construtivas.

Goiânia, novembro de 1983

Os autores.

SUMÁRIO

A RETA 1

1.1 NÚMEROS INTEIROS

Os números

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

são chamados *números naturais*. O símbolo **N** será usado para denotar o conjunto dos números naturais. Com o símbolo **Z** indicaremos o conjunto dos *números inteiros*, que são:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Os números inteiros podem ser convenientemente representados por pontos de uma reta, como mostra a Fig. 1.1.

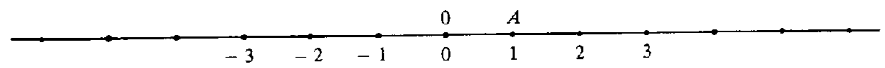


Fig. 1.1

Nesta figura o ponto O, chamado origem, foi escolhido arbitrariamente. O segmento OA, de comprimento arbitrário, foi tomado como unidade de comprimento e convencionamos representar os números positivos por pontos à direita de O e os números negativos por pontos à esquerda de O. Sempre que usarmos a reta com estas características, isto é, com uma origem, uma unidade de comprimento e um sentido (todos arbitrários) a indicaremos por **R**.

1.2 NÚMEROS RACIONAIS

Os números que podem ser escritos na forma

$$\frac{p}{q},$$

onde p e q são inteiros e $q \neq 0$, são chamados *números racionais*. Como

$$4 = \frac{4}{1}, 3{,}141 = \frac{3\,141}{1\,000}, 0{,}33\ldots = \frac{1}{3}$$

concluímos que 4, 3,141, 0,33 . . . são todos números racionais. Em particular, os números inteiros são números racionais.

Usando o símbolo **Q** para indicar o conjunto dos números racionais, podemos escrever:

$$\mathbf{Q} = \left\{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in Z \text{ e } q \neq 0\right\}.$$

Os números racionais também podem ser representados por pontos de uma reta. A seguir representaremos na reta **R** da Fig. 1.2 o número racional p/q.

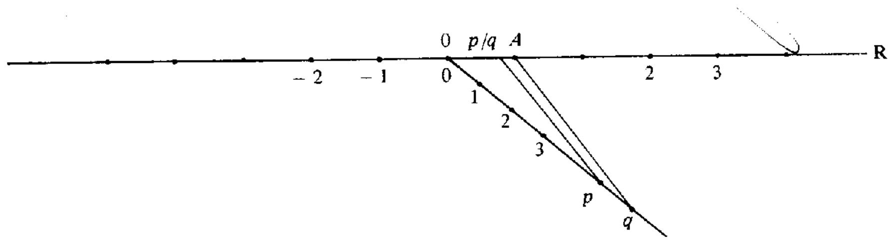


Fig. 1.2

O processo consiste em traçar uma semi-reta qualquer, com origem em O, formando com OA um ângulo agudo, e nela marcar p e q, utilizando-se uma unidade de comprimento qualquer. Traçando-se pelo ponto correspondente a p uma reta paralela à reta determinada pelo ponto A e o ponto correspondente a q, onde esta reta interceptar a reta **R** temos o ponto correspondente ao número p/q. Se o número p/q for negativo, $-p/q$ será positivo e, usando o processo anterior, podemos marcar sobre a reta **R** o número $-p/q$; tomando-se seu simétrico em relação à origem O temos o ponto sobre R correspondente a p/q.

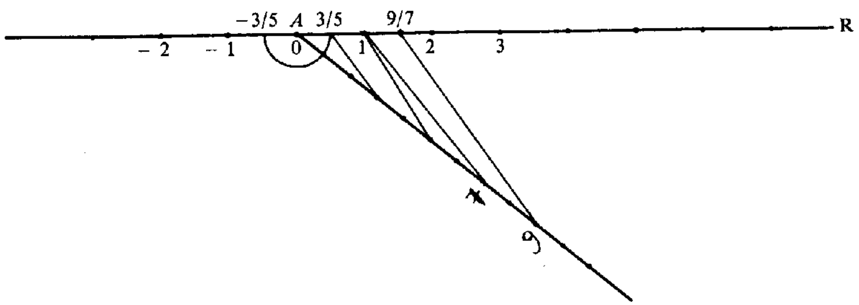


Fig. 1.3

A Fig. 1.3 mostra os números

$$\frac{3}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{5}$$

representados por pontos na reta.

1.3 NÚMEROS IRRACIONAIS

O comprimento da diagonal de um quadrado, cujo lado mede uma unidade, é um número que pode ser marcado na reta **R**, como mostra a Fig. 1.4. Pelo teorema de Pitágoras, este número é $\sqrt{2}$. A seguir vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. A prova consiste em supor que $\sqrt{2}$ seja racional e a partir daí obter uma contradição.

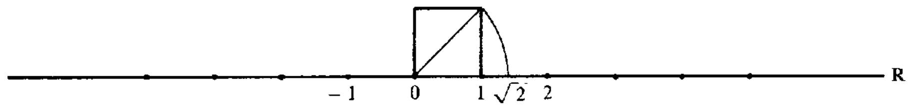


Fig. 1.4

Se $\sqrt{2}$ é racional, então existe uma fração p/q, com p e q inteiros, tal que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

sendo p e q primos entre si. Temos, então:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ou} \quad 2q^2 = p^2.$$

Logo, p^2 é par e, portanto, p também é par (veja o exercício 1.3). Conseqüentemente, podemos escrever $p = 2k$ sendo k inteiro. Temos, então:

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \text{ou} \quad q^2 = 2k^2.$$

Assim, vemos que q^2 também é par e, por conseguinte, q é par. Resulta que p e q são ambos pares, o que contradiz a hipótese de que p e q são primos entre si. Esta contradição surgiu por se supor $\sqrt{2}$ racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional. Números como este, não-racionais, são chamados *irracionais*.

A partir do número irracional $\sqrt{2}$ podemos construir uma infinidade de números irracionais. Com efeito, qualquer que seja o número inteiro n, não-nulo, $n\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/n$ são números irracionais, como facilmente podemos mostrar.

Realmente, se para algum n, $n\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}/n$ fosse racional deveríamos ter:

$$n\sqrt{2}=\frac{p}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q},$$

sendo p e q inteiros. Se a primeira igualdade acima for verdadeira também o é:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{nq},$$

mas esta igualdade diz que $\sqrt{2}$ é um número racional, o que é falso. Igualmente,

$$\frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q}$$

também não pode ser, pois teríamos

$$\sqrt{2}=\frac{np}{q}.$$

Assim, já dispomos de seqüências infinitas de números irracionais, a saber:

$$\ldots, -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$$
$$\ldots, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/3, \ldots$$

Na primeira seqüência figuram números irracionais arbitrariamente grandes, enquanto que na segunda temos números irracionais arbitrariamente pequenos.

Outros exemplos clássicos de números irracionais são: o π da Geometria Elementar; o número e, base dos logaritmos neperianos; $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$ etc. Em geral, se um número natural não é um quadrado perfeito, suas raízes quadradas são números irracionais. O mesmo argumento, usado para mostrar que $n\sqrt{2}$ é irracional, prova a seguinte afirmação:

O produto de um número racional não-nulo por um irracional é um número irracional (veja o Exerc. 1.4).

1.4 NÚMEROS REAIS

O conjunto de todos os números, racionais e irracionais, é chamado conjunto dos números reais e indicado por **R**.

Vimos que a cada número racional podemos fazer corresponder um ponto sobre a reta. Esta correspondência pode ser feita usando apenas a régua e o compasso, pelo processo descrito anteriormente, na Fig. 1.2. Vimos também como marcar um ponto na reta correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$. A Fig. 1.5 mostra como marcar na reta **R** o ponto correspondente ao número $\sqrt{3}$. Pontos sobre a reta **R**, correspondentes aos números da seqüência $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, ... ou da seqüência $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/3$, $\sqrt{2}/4$, ..., podem facilmente ser marcados a partir do ponto correspondente a $\sqrt{2}$. Todavia, não dispomos de uma construção geométrica que nos permita marcar sobre **R** pontos correspondentes aos números irracionais e, π e outros e nem de argumentos que nos possibilitem a provar que tais pontos existem. Isto se dá porque, a rigor, não definimos número irracional. A definição de número irracional, bem como sua construção, em geral, é apresentada nos livros de Análise Matemática. Para os propósitos da Geometria Analítica, é suficiente o seguinte resultado:

A cada ponto da reta **R** *corresponde um único número (racional ou irracional),*

que admitiremos como postulado. Os números, cuja existência é garantida por este postulado, são chamados números reais.

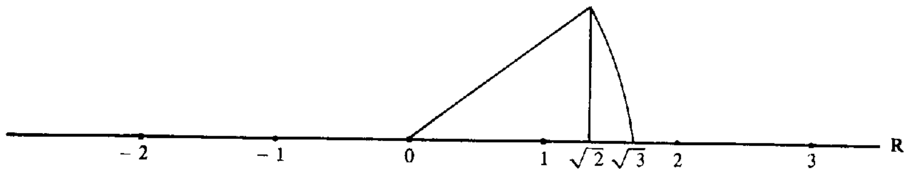


Fig. 1.5

Para simplificação de linguagem, às vezes, não faremos distinção entre número real e o ponto que o representa na reta **R**, e designaremos o conjunto dos números reais também por **R**. Intuitivamente pensamos que a reta é "contínua", não tem "furos" ou "falta de pontos". Esta idéia levada para os números reais nos dá uma noção de como é o conjunto **R** dos números reais. Ela nos leva a induzir, de modo natural, uma relação de ordem no conjunto **R** dos números reais, da seguinte maneira:

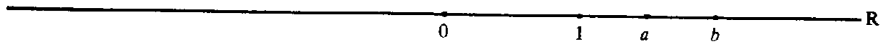


Fig. 1.6

Dizemos que a é um número menor que b se na reta **R** a está à esquerda de b. Indicamos isto assim

$$a < b.$$

A notação $a \leqslant b$ significa que a é um número que está à esquerda de b ou é o próprio b. Utiliza-se também a notação $b \geqslant a$ significando o mesmo que $a \leqslant b$.

Vamos mostrar que tantos os números racionais quantos os irracionais estão "espalhados" por toda a reta, no seguinte sentido:

1º) entre dois números reais distintos existem infinitos números racionais bem como infinitos números irracionais;

2º) arbitrariamente próximo de um número irracional existe um número racional.

As afirmações acima estão formalizadas nas proposições 1.1 e 1.2 seguintes.

Proposição 1.1 – *Sejam* a *e* b, a < b, *números reais. Entre* a *e* b *existem infinitos números irracionais bem como infinitos números racionais.*

Prova. Conforme vimos anteriormente, existem números irracionais arbitrariamente pequenos. Seja, então, $s > 0$ um número irracional, tal que

$$s < b - a.$$

Seja n o maior inteiro tal que

$$ns < a.$$

Então, o número $(n + 1)s$ satisfaz:

$$a < (n + 1)s < b$$

pois, sendo n o maior inteiro tal que $ns \leqslant a$, segue-se que

$$a < (n + 1)s$$

e também que

$$(n + 1)s = ns + s < a + (b - a) = b,$$

porque

$$ns \leqslant a \text{ e } s < b - a.$$

Logo,

$$a < (n + 1)s < b.$$

Portanto, o número irracional $(n + 1)s$ (veja Exerc. 1.4*b*), está entre a e b. Fazendo-se $(n + 1)s = a_1$ e repetindo o processo anterior, para os números a_1 e b, vamos encontrar a_2 tal que a_2 é irracional e

$$a_1 < a_2 < b.$$

Conseqüentemente,

$$a < a_2 < b$$

e

$$a_2 \neq a_1.$$

Do mesmo modo encontramos a_3, diferente de a_1 e a_2, entre a e b, a_4 diferente de a_1, a_2 e a_3, entre a e b e assim por diante. Este processo nos possibilita construir tantos números irracionais entre a e b quantos quisermos, o que significa precisamente que entre a e b existem infinitos números irracionais.

Para mostrarmos que entre a e b existem infinitos números racionais tomamos s racional e argumentamos como acima. A Fig. 1.7 ilustra os argumentos usados nesta demonstração.

Fig. 1.7

Proposição 1.2 – *Dado um número real* b, *arbitrariamente próximo de* b *existem números racionais e irracionais.*

Prova. Escolhemos $a < b$, a tão próximo de b quanto desejarmos. Aplicando a proposição 1.1 concluímos que entre a e b existem infinitos números racionais e infinitos irracionais. Tais números estão mais próximo de b do que o próprio a; logo, arbitrariamente próximo de b.

Observação. Pode-se mostrar que existem tantos números racionais quantos são os naturais, isto é, há uma correspondência biunívoca entre **N** e **Q**. Porém, entre o conjunto **N** e o conjunto dos números irracionais não se pode estabelecer uma correspondência biunívoca. De fato, demonstra-se que qualquer função injetiva definida em **N** com valores no conjunto dos números irracionais não é sobrejetiva. Neste sentido, existem mais números irracionais do que racionais.

Com respeito à relação de ordem $\leqslant$ definida em **R**, dois fatos merecem ser destacados. O primeiro é a compatibilidade da relação $\leqslant$ com a operação de adição, a qual pode ser dita assim:

Se $a \leqslant b$, então $a + x \leqslant b + x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Em particular, fazendo $x = -b$; obtemos que

$$a \leqslant b \text{ é equivalente a } b - a \geqslant 0.$$

O segundo fato diz que, em relação à operação de multiplicação, a relação de ordem $\leqslant$ não se comporta tão bem, como em relação à adição. Precisamente, temos:

Se $a \leqslant b$ e $x \geqslant 0$, então $ax \leqslant bx$,

mas

se $x < 0$, então $ax \geqslant bx$.

Exercícios

1.1. Justifique a construção feita na Fig. 1.2.

1.2. Represente na reta **R** os números $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $-3\sqrt{2}$, 0,6 e $4\sqrt{3}/7$.

1.3. Demonstre que, se p é um número inteiro, então p e p^2 são ambos pares ou ambos ímpares.

1.4. Se a e b são números racionais e s irracional, prove que:
$a)$ $a + b$ e ab são racionais;
$b)$ $a + s$ e as são irracionais, se $a \neq 0$.

1.5. Dê exemplos de números irracionais s_1, s_2, s_3 e s_4 tais que:
$a)$ $s_1 s_2$ seja racional;
$b)$ $s_3 s_4$ seja irracional.

1.6. Considere a figura abaixo

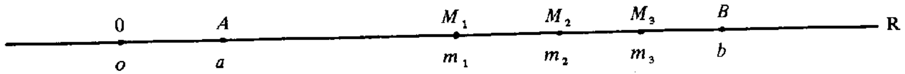


Fig. 1.8

$a)$ Demonstre que, se M_1 é o ponto médio de AB, então m_1 é a média aritmética de a e b.
$b)$ Seja M_2 o ponto médio de $M_1 B$, M_3 o ponto médio de $M_2 B$ e assim por diante. Calcule a soma:

$$(m_1 - a) + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \dots$$

1.7. Construir uma seqüência de números irracionais $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ satisfazendo $2 < x_1 < x_2 < \dots < x_{10} < 3$.

1.8. Se a e b são números reais positivos mostre que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

1.9. A Fig. 1.9 mostra como construir uma função que estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do segmento AB e os pontos do segmento $A'B'$. Ache y em termos de x, isto é, ache a expressão algébrica da função

$$f: AB \to A'B'$$
$$x \to y$$

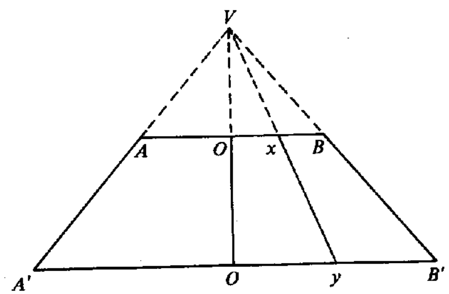


Fig. 1.9

1.10. Mostre que a altura de um triângulo retângulo, relativamente à hipotenusa, é menor ou igual à metade da hipotenusa.

1.5 VALOR ABSOLUTO

Seja x um número real. O número $|x|$ definido assim

$$|x| = x \text{ se } x \geqslant 0$$
$$|x| = -x \text{ se } x < 0,$$

é chamado *valor absoluto* de x (ou *módulo* de x). Por exemplo,

$$|5| = 5 \text{ e } |-5| = -(-5) = 5.$$

Geometricamente, podemos interpretar $|x|$ como sendo a distância do ponto P, correspondente a x, à origem O, isto é, o comprimento do segmento OP.

Decorrem imediatamente, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades:

$$|x| \geqslant 0,$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$|x| = |-x|.$$

Na proposição seguinte estão reunidas outras propriedades importantes do valor absoluto de um número real.

Proposição 1.3 – *Quaisquer que sejam os números reais* a, b *e* x, *tem-se*

1) $|ab| = |a|\,|b|$,
2) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$,
3) Se $a > 0$, $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$,
4) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Prova. Inicialmente, vamos mostrar que

$$|x|^2 = |x^2| = x^2, \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Sendo

$$x^2 \geqslant 0, \forall\, x \in \mathbf{R},$$

temos que

$$|x^2| = x^2,$$

pela definição de valor absoluto. Resta mostrar que

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x \geqslant 0$, temos

$$|x| = x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = x^2;$$

se $x < 0$,

$$|x| = -x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

Usando estas propriedades podemos provar a parte (1) da proposição assim:

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2 b^2 = |a|^2 \; |b|^2 \Rightarrow |ab| = |a| \; |b|.$$

Parte (2). $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ é chamada desigualdade triangular. Na sua prova, dada a seguir, faremos uso do fato

$$x \leqslant |x|, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Temos

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a| \cdot |b| = (|a| + |b|)^2.$$

Ou seja,

$$|a + b|^2 \leqslant (|a| + |b|)^2,$$

donde obtemos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Parte (3). Suponhamos que $|x| \leqslant a$. Se $x \geqslant 0$, temos

$$x = |x| \leqslant a,$$

sendo $x \geqslant 0$ é claro que $x \geqslant -a$, de modo que, neste caso,

$$-a \leqslant x \leqslant a;$$

se $x < 0$, então $x \leqslant a$ e

$$-x = |x| \leqslant a.$$

Mas $-x \leqslant a$ é equivalente a $x \geqslant -a$, de modo que

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Portanto, provamos que

$$|x| \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

Para provarmos a recíproca, também distinguiremos os casos $x \geqslant 0$ e $x < 0$. Suponhamos que

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em

$$x \leqslant a \text{ e } x \geqslant -a.$$

Se $x \geqslant 0$, $|x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá

$$|x| \leqslant a.$$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos

$$|x| \leqslant a.$$

Logo,

$$-a \leqslant x \leqslant a \Rightarrow |x| \leqslant a.$$

O segmento destacado na Fig. 1.10 representa o intervalo de variação de x.

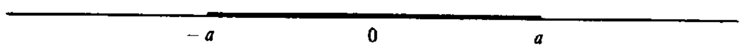


Fig. 1.10

Parte (4). Antes de provarmos esta parte, faremos uma observação sobre o símbolo $\sqrt{x}$, sendo x um número positivo. É comum usar $\sqrt{x}$ para indicar uma das raízes de x, sem especificar qual delas, ou seja, colocar

$$\sqrt{x^2} = x. \, (?)$$

Tal notação pode conduzir a uma contradição, senão vejamos: usando a fórmula $\sqrt{x^2} = x$, temos

$$\sqrt{3^2} = 3 \text{ e } \sqrt{(-3)^2} = -3.$$

(Na primeira, temos $x = 3$ e na segunda, $x = -3$.)

Mas

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}.$$

Logo,

$$3 = -3, \text{ contradição!}$$

Para evitar este fato usaremos, sistematicamente, o símbolo $\sqrt{x}$ para indicar a raiz quadrada positiva de x. A raiz quadrada negativa de x será indicada por $-\sqrt{x}$.

Isto posto, vamos à prova de (4).

$\sqrt{x^2}$ é a raiz quadrada positiva de x^2, isto é, é o número positivo cujo quadrado é x^2. O número $|x|$ satisfaz tais condições, ou seja,

$$|x| \geqslant 0,$$
$$|x|^2 = x^2.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Na parte (2) da proposição 1.3 ocorre a igualdade se, e somente se, a e b forem ambos $\geqslant 0$ ou ambos $\leqslant 0$ (veja o Exerc. 1.11).

Na parte (3) podemos, evidentemente, usar $<$ no lugar de $\leqslant$ e então obtemos

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Dado um número positivo a, qualquer que seja o número real x, vale somente uma das duas alternativas:

$$|x| < a \text{ ou } |x| \geqslant a.$$

Como a primeira é equivalente a

$$-a < x < a,$$

segue que todo número real x que não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

é tal que

$$|x| \geqslant a.$$

Mas x não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

se, e somente se, $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Desta forma demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 1.4 – *Se* $a > 0$ *e* x *são números reais, então*

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a.$$

Veja, na Fig. 1.11, uma ilustração da proposição 1.4. O número x pode ser qualquer um dos pontos das semi-retas destacadas.

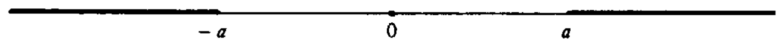


Fig. 1.11

Exemplo. Encontre os valores de x para os quais se tem

$$|3x + 4| \leqslant 8.$$

Solução. Fazendo-se $3x + 4 = t$, a desigualdade acima se transforma em

$$|t| \leqslant 8$$

que, pela parte (3) da proposição 1.3, é equivalente a

$$-8 \leqslant t \leqslant 8$$

que, em termos de x, é

$$-8 \leqslant 3x + 4 \leqslant 8.$$

Somando-se -4 a cada membro desta desigualdade temos

$$-12 \leqslant 3x \leqslant 4.$$

Multiplicando-se cada membro desta desigualdade por $1/3$, obtemos

$$-4 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3},$$

que é a resposta.

Exemplo. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade

$$|x^2 - 4| \leqslant 2.$$

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$-2 \leqslant x^2 - 4 \leqslant 2,$$

ou

$$2 \leqslant x^2 \leqslant 6.$$

Como $x^2 = |x|^2$, a última desigualdade pode ser escrita assim

$$2 \leqslant |x|^2 \leqslant 6,$$

de onde temos

$$\sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{6}.$$

A primeira parte desta dupla desigualdade é equivalente a

$$x \geqslant \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x \leqslant -\sqrt{2} \quad \text{(Fig. 1.12}a\text{)},$$

e a segunda a

$$-\sqrt{6} \leqslant x \leqslant \sqrt{6} \quad \text{(Fig. 1.12}b\text{)}.$$

Na Fig. 1.12*c* está indicado o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leqslant 2$, que é a interseção do conjunto solução de $|x| \geqslant \sqrt{2}$ com o conjunto solução de $|x| \leqslant \sqrt{6}$.

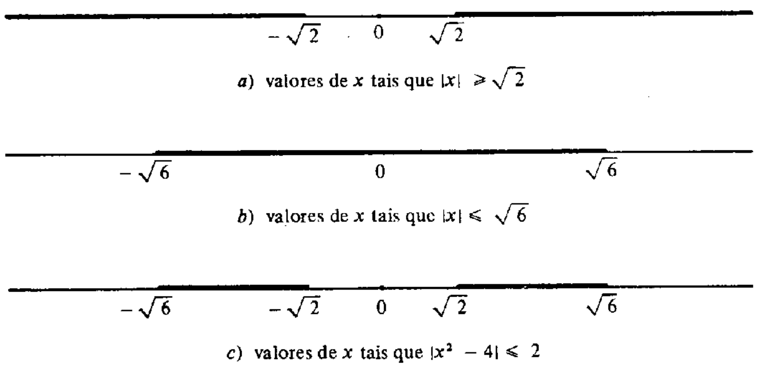


Fig. 1.12

Usando-se a notação $[a, b]$ para indicar o intervalo

$$\{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x \leqslant b\},$$

podemos escrever o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leqslant 2$ assim

$$[-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}].$$

Exercícios

1.11. Mostre que $|a + b| = |a| + |b|$ se, e somente se, a e b forem ambos $\geqslant 0$ ou ambos $\leqslant 0$.

1.12. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a cada uma das desigualdades:
a) $|x - 2| < 1$;
b) $|x - 2| > 1$;
c) $|x - 2| = 1$;
d) $|x^2 - 4| \geqslant 2$;
e) $|3 - 2x^2| \leqslant 9$;
f) $|x - 1| < |x - 2|$.

1.13. Determine b, para que se tenha:
a) $|2x - 3| < b \Leftrightarrow 0 < x < 3$.
b) $|5x + b| \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant -1/5$;
c) $|b - 1| = |3b - 4|$.

1.14. Justifique ou dê contra-exemplo para as implicações seguintes:
a) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$;
b) $|a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$;
c) $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$;
d) $a \neq b \Rightarrow |a| \neq |b|$;
e) $|a| \neq |b| \Rightarrow a \neq b$.

1.15. Demonstre que para qualquer número real x se tem:
a) $|x| = |-x|$;
b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

1.16. Demonstre que:
a) $|a| - |b| \leqslant |a - b|$;
b) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$;

quaisquer que sejam os números a e b.

1.17. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que:
a) $-b < x < a \Leftrightarrow |2x + b - a| < a + b$;
b) $-2b < x + a - b < 2a \Leftrightarrow |x| < a + b$.

1.18. Encontre todos os valores de x que satisfaçam as seguintes desigualdades:
a) $3x + 5 < 23$;
b) $(x - 1)(x - 3) < 0$;
c) $x^2 - 5x < -6$;
d) $x^3 + x^2 \geqslant 0$;
e) $\dfrac{2x}{x - 2} \geqslant 1$.

1.19. Prove que as raízes quadradas r_1 e r_2 de um número real positivo satisfazem:
a) $|r_1| = |r_2|$;
b) $r_1 + r_2 = 0$.

1.20. Que condições devem satisfazer a e b para que se tenha

$$|a - b| = b - a?$$

1.21. Resolva as seguintes equações:
a) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$;
b) $x^2 + |4x| - 21 = 0$;
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$;
d) $|x^2 - 3x| = 2$;
e) $(|x|^5 + |18x^3| + 1)(x^2 - 1) = 0$.

O PLANO 2

2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Consideremos o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y, tal como mostra a Fig. 2.1. Tomemos a unidade OA igual à OA', e seja P um ponto qualquer do plano. Por P podemos traçar uma única paralela x' à reta x e uma única paralela y' à reta y. Como se vê na Fig. 2.1, estas paralelas interceptam as retas x e y, respectivamente, nos pontos P_x e P_y. Seja x o número correspondente ao ponto P_x e y o número correspondente a P_y. Estes dois números x e y determinam o ponto P, no seguinte sentido: conhecendo-se x e y, podemos determinar os pontos P_x e P_y e traçar as paralelas x' e y'. ~~A interseção destas paralelas é o ponto P.~~ Os números x e y são chamados, respectivamente, *abscissa* e *ordenada* do ponto P; eles constituem as *coordenadas* de P. Para indicar que o ponto P tem abscissa x e ordenada y usamos a notação

$$P(x, y).$$

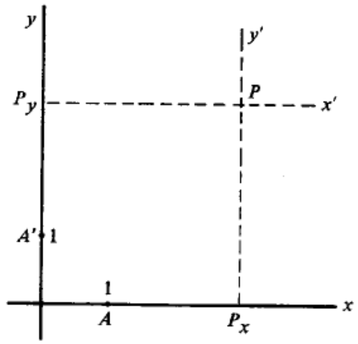


Fig. 2.1

A construção que acabamos de fazer nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y).

Na prática, é comum omitirem-se vários elementos que aparecem na Fig. 2.1, deixando-os apenas subentendidos, para se obter uma figura mais simples, como a 2.2.

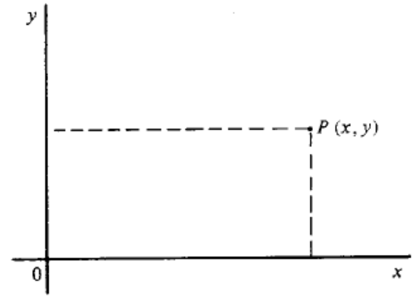


Fig. 2.2

2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos do plano. Como mostra a Fig. 2.3, a partir de P e Q, podemos construir o triângulo retângulo PSQ. Em termos das coordenadas de P e Q, as medidas dos catetos deste triângulo são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Logo, a medida de sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Este número é chamado *distância* de P a Q e indicado por $d(P, Q)$, isto é, por definição,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

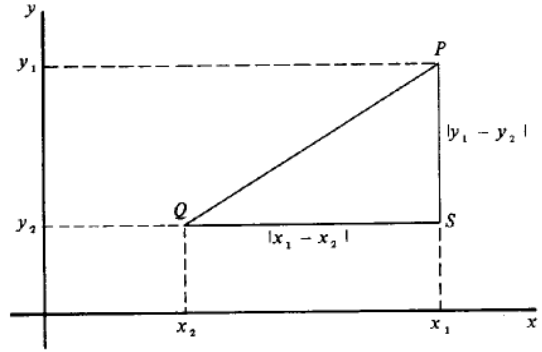


Fig. 2.3

Exercícios

2.1. *a*) Construir um sistema de coordenadas de modo que na Fig. 2.4 se tenha $P\ (5, 2)$ e $Q\ (-4, -1)$.
b) Determinar $d\ (P, Q)$.
c) $d\ (P, Q)$ depende do sistema de coordenadas?

Tomar a unidade sobre os eixos igual à distância comum entre as paralelas da figura.

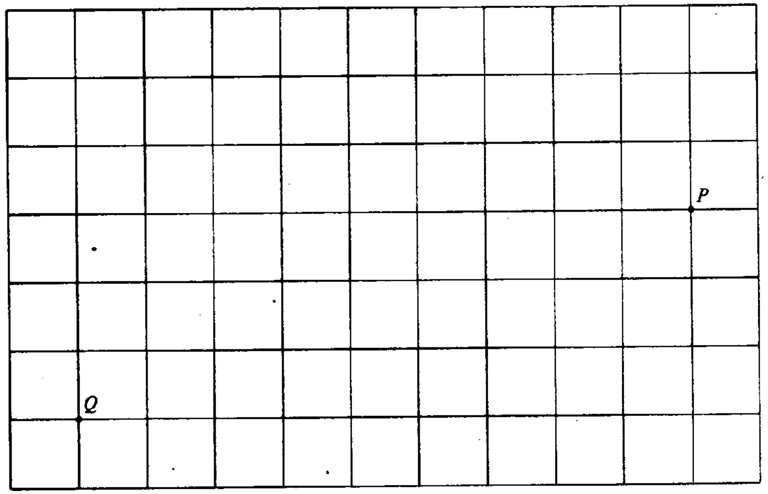


Fig. 2.4

2.2. Um campo de futebol tem 60 m de comprimento por 40 m de largura. Construir um sistema de coordenadas e dar as coordenadas dos seguintes pontos:
a) dos quatro cantos do campo;
b) do centro do campo.

2.3 VETORES NO PLANO

Vimos, na seção anterior, que a cada par ordenado de números reais (x, y) corresponde um ponto no plano. Além do ponto, podemos também fazer corresponder ao par (x, y) uma seta como mostra a Fig. 2.5. Assim, podemos representar graficamente um par ordenado por um ponto no plano ou por uma seta. A representação por seta motiva a seguinte definição:

Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (x, y).

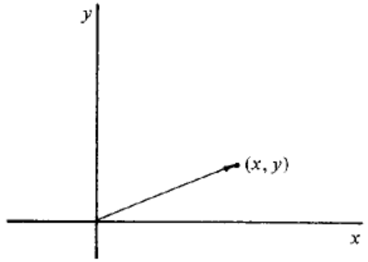
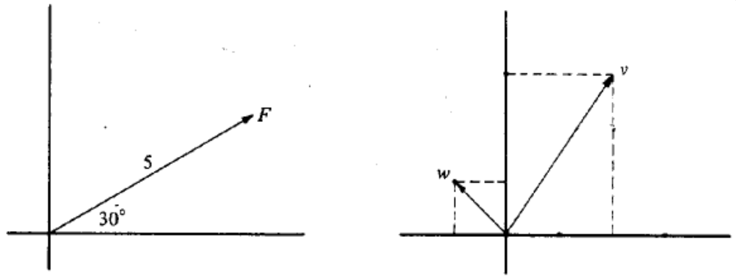


Fig. 2.5

Exemplo. A seta F da Fig. 2.6*a*, que pode ser imaginada como sendo uma força de intensidade igual a cinco unidades, aplicada no ponto 0, é a representação gráfica do vetor $(5 \cdot \sqrt{3}/2, 5 \cdot 1/2)$. Como se vê, F fica perfeitamente determinada pelo par $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$. Logo, dar o par ordenado $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$ equivale a dar a intensidade a direção e o sentido de F, como se faz em Física. Na Fig. 6.6*b* estão representados, graficamente, os vetores $v = (2, 3)$ e $w = (-1, 1)$. Observe que o comprimento da seta que representa o vetor $v = (x, y)$ é dado por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Este número é chamado *módulo* do vetor $v = (x, y)$ e é indicado por $\|v\|$.



(*a*) (*b*)

Fig. 2.6

Exemplo. O módulo de $v = (2, 3)$ é

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

O vetor

$$O = (0, 0)$$

é chamado *vetor nulo* e sua representação gráfica coincide com a origem do sistema de coordenadas. Exceto no caso do vetor nulo, associaremos ao vetor (x, y) as idéias de direção e sentido da seta que o representa. Por exemplo, a direção do vetor $v = (2, 3)$ é a direção da seta v da Fig. 2.6*b*.

Há casos em que representamos graficamente um vetor por uma seta que não parte necessariamente da origem. Por exemplo, os pontos $A\ (x_1, y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$ determinam o vetor

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Como mostra a Fig. 2.7, a seta que representa o vetor $\overrightarrow{AB}$, partindo da origem, e a seta com origem em A e extremidade em B, têm o mesmo módulo, direção e sentido. Conforme a conveniência, utilizamos uma ou outra para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$.

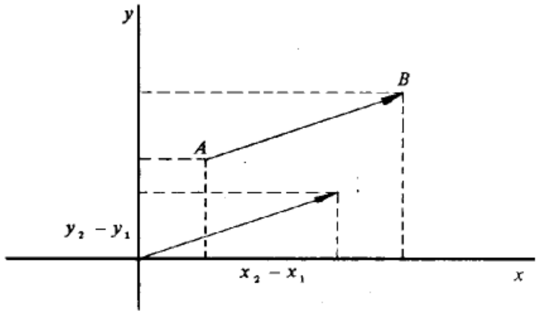


Fig. 2.7

Outro exemplo que ilustra a representação gráfica de um vetor, obtém-se com o movimento de uma partícula no plano. Neste caso, representamos o vetor posição da partícula, num determinado instante, por uma seta que parte da origem; e o vetor velocidade, por uma seta tangente à trajetória da partícula e com ponto inicial no lugar onde ela se encontra naquele instante. Veja a Fig. 2.8.

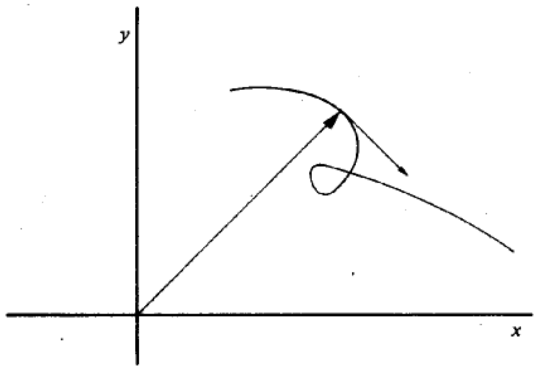


Fig. 2.8

Do que foi dito conclui-se que para representar graficamente um vetor usa-se uma seta. O lugar onde esta seta é colocada depende do problema que está sendo considerado.

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $k \in \mathbf{R}$. Definimos:

a) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

b) $ku = (kx_1, ky_1)$.

A operação que a cada par de vetores u e v faz corresponder o vetor $u + v$, definido acima, chama-se *adição de vetores*. A lei de composição que ao par k e u, onde k é um número e u um vetor, faz corresponder o vetor ku, definido acima, é chamada *multiplicação de um vetor por um número*.

A adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades (u, v e w são vetores quaisquer):

$$(A_1)\ u + v = v + u,$$
$$(A_2)\ u + (v + w) = (u + v) + w,$$
$$(A_3)\ u + O = u, \text{ onde } O = (0, 0) \text{ é o vetor nulo.}$$

Se k_1 e k_2 são números reais quaisquer, verificam-se, para multiplicação de um vetor por um número, as propriedades:

$$(M_1)\ k_1\ (u + v) = k_1 u + k_1 v,$$
$$(M_2)\ (k_1 + k_2)\ u = k_1 u + k_2 u,$$
$$(M_3)\ k_1\ (k_2 u) = (k_1 k_2)\ u,$$
$$(M_4)\ 1 \cdot u = u \text{ e } 0u = 0.$$

Na propriedade M_4 o primeiro zero da igualdade é o número zero e o segundo é o vetor nulo (0, 0).

As propriedades $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, M_3$ e M_4 são conseqüências imediatas das definições dadas. Sugerimos ao leitor demonstrá-las.

O vetor $(-1)\ u$ é indicado por $-u$ e chamado o *oposto* de u. Também, indicamos $v + (-u)$ por $v - u$. Na Fig. 2.9 está representado um vetor u e seu oposto $-u$.

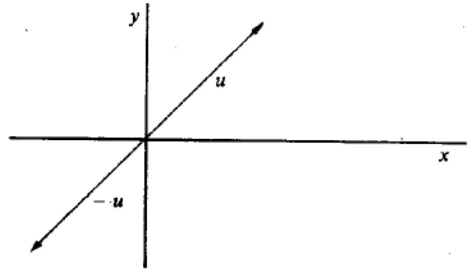


Fig. 2.9

O vetor ku tem a mesma direção de u, isto é, u e ku são representados por setas paralelas. Se $k > 0$, os sentidos de u e ku coincidem. Se $k < 0$, o sentido de ku é o oposto de u. Além disso, os módulos de u e ku estão relacionados por

$$||ku|| = |k|\ ||u||$$

pois sendo $u = (x, y)$ então $ku = (kx, ky)$ e

$$||ku|| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2\,(x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2}\ \sqrt{x^2 + y^2} = |k|\ ||u||.$$

Para representar graficamente o vetor $u + v$, fazemos a construção indicada na Fig. 2.10. A seta que representa $u + v$ é uma das diagonais do paralelogramo cujos lados são as setas que representam u e v. Veja no Exerc. 2.3 uma indicação de como justificar esta representação.

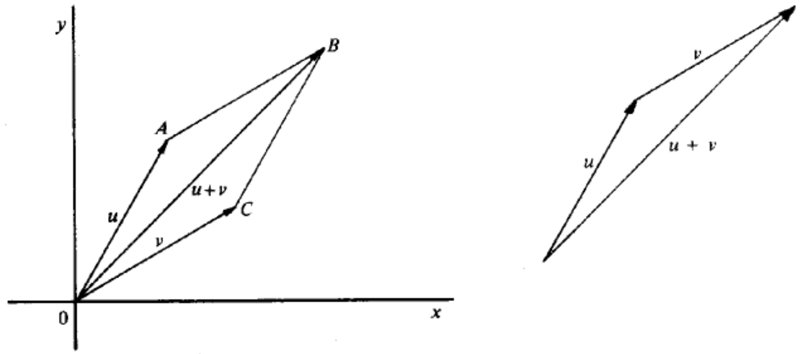


Fig. 2.10

Proposição 2.1 – *Sejam* u *e* v *vetores e* k *um número real. Então*

a) $ku = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $u = 0$;

b) $||u|| \geqslant 0$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

c) $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$.

Prova. Se $u = (x, y)$, então $ku = 0$ é o mesmo que

$$(kx, ky) = (0, 0).$$

Mas isto significa que

$$kx = 0 \ \text{ e } \ ky = 0.$$

Se $k \neq 0$, dividindo ambos os membros das igualdades acima por k, obtemos $x = 0$ e $y = 0$ e, portanto, $u = 0$. Se $u \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e, das igualdades acima, obtemos $k = 0$.

Parte (*b*)

$$||u|| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$$
$$||u|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

A parte (*c*) desta proposição é chamada *desigualdade triangular*. Ela expressa o conhecido fato da Geometria Elementar de que, em um triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados excede ao comprimento do terceiro lado. Sua prova será dada depois que introduzirmos o conceito de produto escalar, na Seç. 2.6.

2.5 APLICAÇÕES

2.5.1 Vetor Deslocamento

Na Física, a mudança de posição de uma partícula é chamada *deslocamento*. Se uma partícula move-se de um ponto $A\ (x_1, y_1)$ para um ponto $B\ (x_2, y_2)$, o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

é chamado *vetor deslocamento* da partícula. Na Fig. 2.11*a* está indicada a trajetória de uma partícula, do ponto A ao ponto B. O vetor deslocamento da partícula está indicado pela seta de A a B.

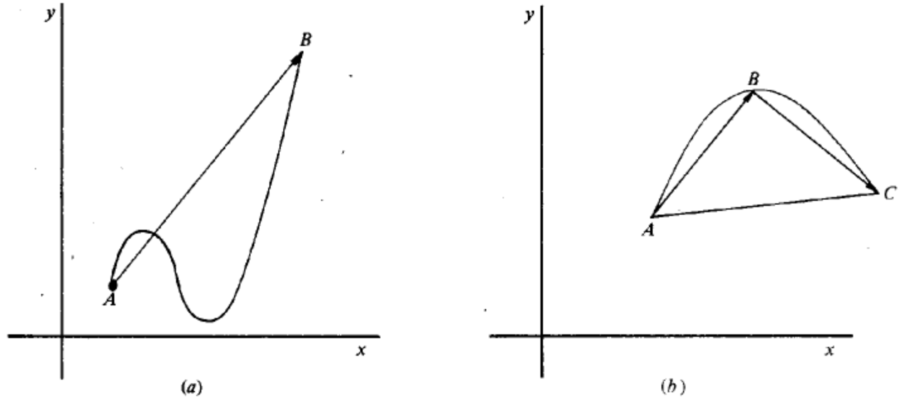


Fig. 2.11

Suponhamos que uma partícula mova-se do ponto $A\ (x_1, y_1)$ para o ponto $B\ (x_2, y_2)$ e depois para $C\ (x_3, y_3)$. Veja a Fig. 2.11*b*. Então, o vetor deslocamento total da partícula é

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Por outro lado, somando-se os vetores deslocamentos parciais

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ e } \vec{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2),$$

obtemos

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) = \vec{AC},$$

isto é, o deslocamento total é a soma dos deslocamentos parciais.

Em geral, se A, B e C são três pontos quaisquer do plano (veja a Fig. 2.12), então

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

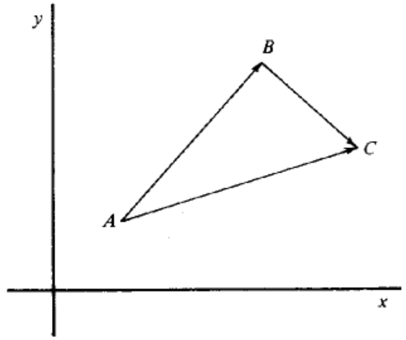


Fig. 2.12

Exemplo. Um carro move-se, em linha reta, 5 km na direção norte e, em seguida, também em linha reta, 5 km na direção leste. Qual foi o deslocamento do carro?

Solução. Consideramos na Fig. 2.13, um sistema de coordenadas com origem no ponto de partida do carro e os eixos y e x, respectivamente, nas direções norte e leste.

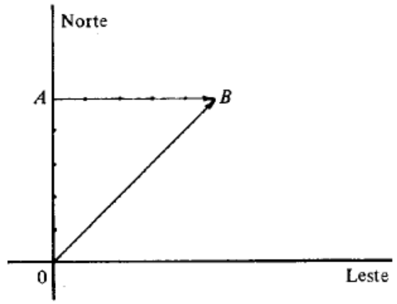


Fig. 2.13

Em relação ao sistema acima, as coordenadas dos pontos O, A e B são:

$$O\,(0, 0), A\,(0, 5), B\,(5, 5).$$

Logo, o deslocamento do carro é

$$\vec{OB} = (5 - 0, 5 - 0) = (5, 5),$$

ou seja, $5\sqrt{2}$ km (aproximadamente 7,05 km) na direção nordeste, pois $\|\vec{OB}\| = 5\sqrt{2}$ e $\vec{OB}$ faz com a direção leste um ângulo de 45°.

2.5.2 Resultante

Na Fig. 2.14*a* estão representadas duas forças F_1 e F_2, respectivamente, de 5 kgf e 3 kgf, atuando no ponto O de uma barra. A resultante de F_1 e F_2 é a força

$$F = F_1 + F_2.$$

Para calcular F, escolhemos um sistema de coordenadas e decompomos F_1 e F_2 como mostra a Fig. 2.14*b*.

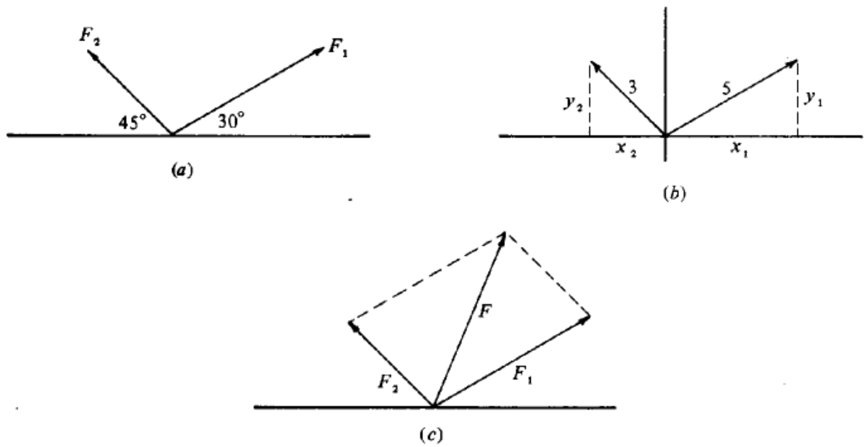


Fig. 2.14

As componentes de F_1 são

$$x_1 = 5 \cos 30° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = 5 \text{ sen } 30° = 5 \cdot \frac{1}{2}$$

e as de F_2 são

$$x_2 = -3 \cos 45^\circ = -3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y_2 = \quad 3 \operatorname{sen} 45^\circ = \quad 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$F_1 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ e } F_2 = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo, a resultante é

$$F = F_1 + F_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Calculando $||F||$ encontramos

$$||F|| = \frac{1}{2}\sqrt{136 - 30(\sqrt{6} - \sqrt{2})},$$

que é aproximadamente igual a 5,12. A tangente do ângulo que F faz com a barra (o eixo x) é dada por

$$\frac{5 + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}},$$

que corresponde a um ângulo de aproximadamente $64^\circ 27'$. Portanto, como está indicado na Fig. 2.14*c*, F é uma força de aproximadamente 5,12 kgf e sua linha de ação faz com a barra um ângulo próximo de $64^\circ 27'$.

Observe que no problema anterior não se conheciam as componentes dos vetores F_1 e F_2. Estas componentes foram calculadas usando-se as relações

$$x = ||v|| \cos \theta,$$
$$y = ||v|| \operatorname{sen} \theta,$$

onde $v = (x, y)$ e θ é o ângulo entre v e o eixo x, como mostra a Fig. 2.15.

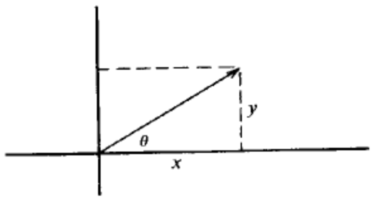


Fig. 2.15

2.5.3 Ponto Médio

Cálculo das coordenadas do ponto médio M do segmento AB em função das coordenadas de A e B.

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $M(x, y)$; queremos calcular x e y em função de x_1, y_1, x_2 e y_2. Veja a Fig. 2.16.

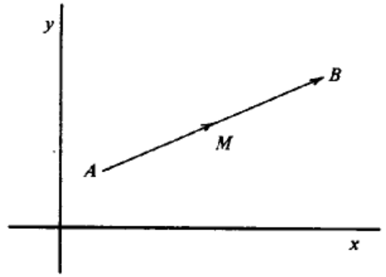


Fig. 2.16

Sendo M o ponto médio de AB, temos

$$2\vec{AM} = \vec{AB}.$$

Mas,

$$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1) \text{ e } \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Logo,

$$2(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

ou

$$(2x - 2x_1, 2y - 2y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

donde temos

$$2x - 2x_1 = x_2 - x_1 \text{ e } 2y - 2y_1 = y_2 - y_1.$$

Explicitando x e y, encontramos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio de AB são as médias aritméticas das coordenadas de A e B.

2.5.4 Vetor Unitário

Um vetor de módulo 1 é chamado *vetor unitário*. Por exemplo,

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

é unitário pois

$$||v|| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Outros exemplos de vetores unitários são

$$\begin{aligned} u &= (1, 0),\\ v &= (0, 1),\\ -v &= (0, -1),\\ w &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ , -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

No caso geral, qualquer que seja o vetor não-nulo v,

$$\frac{v}{||v||}$$

é unitário pois

$$\left|\left| \frac{v}{||v||} \right|\right| = \frac{||v||}{||v||} = 1.$$

Assim, para se obter um vetor unitário é suficiente tomar um vetor não-nulo e multiplicá-lo pelo inverso de seu módulo.

Exercícios

2.3. Para justificar a construção feita na Fig. 2.10, mostre que $OABC$ é um paralelogramo, ou seja, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Ok! 2.4. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A\ (x, 1)$, $B\ (4, x + 3)$, $C\ (x, x + 2)$ e $D\ (2x, x + 6)$.

Ok! 2.5. Determine a extremidade da seta que representa o vetor $v = (3, -7)$ sabendo-se que sua origem é o ponto $A\ (2, 1)$.

ok! 2.6. Dados $A\ (2, y)$ e $B\ (3, 3)$, determine y para que o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

Ok! 2.7. Dado $B\ (3, 4)$ e sendo $||\overrightarrow{AB}|| = 2$, qual é o valor máximo que a primeira coordenada de A pode assumir? E o mínimo?

Ok! 2.8. Sejam $A\ (x_1, y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$ pontos do plano. Demonstre que

$$d\ (A, B) = ||\overrightarrow{AB}||.$$

2.9. Determine vetores u e v tais que

$$||u||^2 + ||v||^2 = ||u - v||^2.$$

2.10. Determine gráfica e algebricamente

a) $u + 2v$;
b) $-u$;
c) $u - v$;
d) $3u - 2v + w$;
e) $-u - v + 2w$;

sendo $u = (2, 3)$, $v = (-1, 4)$ e $w = (-2, -1)$.

Ok 2.11. Dados os vetores $u = (2, -1)$ e $v = (1, 3)$, determinar um vetor w tal que

a) $3\ (u + w) - 2\ (v - w) = 0$;
b) $\frac{1}{2}\ [3\ (u + w) - 4\ (v - w)] = 5\ [u - 3w + 4\ (3v - 2w)]$.

Ok! 2.12. Dados os vetores u e v, determinar os vetores z e w tais que

$$\begin{aligned} 2\ (u + z) - 3\ (v + w) &= u,\\ 5\ (u - z) + 2\ (v - w) &= v. \end{aligned}$$

2.13. Mostre que se os vetores u e v têm a mesma direção, então existe um número k tal que $v = ku$.

Ok! 2.14. Encontre um vetor

a) com mesma direção e sentido do vetor $(3, 4)$ e módulo igual a 6;
b) com mesma direção e sentido contrário ao do vetor $(-1, 2)$ e módulo igual a 5.

Ok! 2.15. Encontrar números k_1 e k_2 tais que

$$v = k_1 u + k_2 w,$$

sendo $v = (2, 3)$, $u = (-1, 2)$ e $w = (1, 2)$.

2.16. Dados os pontos $A\ (2, 3)$ e $B\ (5, 4)$, determine um ponto C tal que $\overrightarrow{AC}$ seja paralelo ao vetor $u = (2, 1)$ e $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||$.

Ok! 2.17. Dados $A\ (-1, -1)$ e $B\ (3, 5)$, determine C tal que

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
c) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$;
d) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Ok! 2.18. Dados os pontos A, B e C, exprimir o vetor $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, sendo M

a) o ponto médio de AB;
b) um ponto de AB tal que $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

Ok! 2.19. Dados $B\ (0, 4)$ e $C\ (8, 2)$, determine o vértice A do triângulo ABC sabendo-se que o ponto médio de AB é $M\ (3, 2)$.

2.20. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $(1, -1)$ e o outro paralelo ao vetor $(1, 1)$.

Ok!

2.21. Represente graficamente os vetores da forma

$$(2, 4) + t\,(3, -1),$$

onde t é um número real.

2.22. Dados $A\ (1, 3)$ e $B\ (2, 2)$, determine x para que a reta definida pelo ponto médio de AB e o ponto $X\ (x, 0)$ seja paralela ao vetor $v = (1, 2)$.

2.23. Demonstre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

2.24. Se $ABCD$ é um quadrilátero e P, Q, R e S são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, prove que $PQRS$ é um paralelogramo.

2.25. Os pontos $A\ (1, -5)$, $B\ (5, 2)$ e $C\ (3, 9)$ são três vértices de um paralelogramo. Ache três pontos, cada um dos quais podendo ser o seu quarto vértice.

2.26. Calcule a resultante das forças aplicadas ao ponto O da Fig. 2.17*a*, sabendo-se que $\|F_1\| = 3$, $\|F_2\| = 1$, $\|F_3\| = 2$.

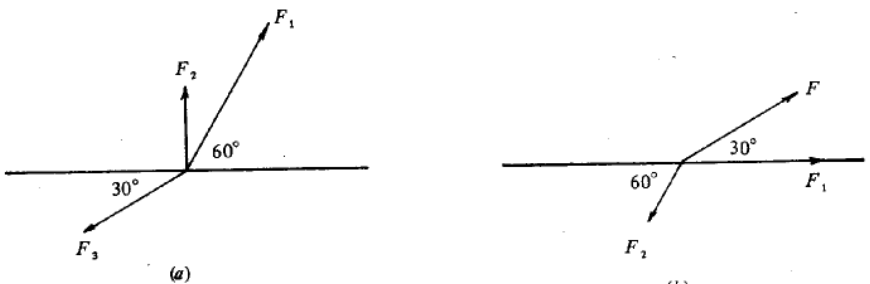


Fig. 2.17

2.27. Determine como deve variar o módulo e o sentido de F_1 e F_2 (isto é, por quais constantes se deve multiplicar F_1 e F_2) para que a resultante dessas forças seja F, sendo $\|F\| = \sqrt{3}$, $\|F_1\| = 2$ e $\|F_2\| = 1$. Veja a Fig. 2.17*b*.

2.28. Num ponto atuam três forças: $F_1 = (-3, -4)$, $F_2 = (-1, 2)$ e $F_3 = (2, 1)$.
a) Elas estão em equilíbrio?
b) Mantendo-se a direção e o sentido de F_2 e F_3, como podemos modificá-las de modo que o sistema fique em equilíbrio?
c) É possível colocar o sistema em equilíbrio mantendo-se F_1 e F_3 fixas e variando apenas o módulo e o sentido de F_2?

2.29. Calcule a resultante das forças F_1, F_2 e F_3 sabendo-se que
i) $\|F_1\| = 1$ e F_1 é horizontal;
ii) $F_2 = F_1 + u_1$, onde $\|u_1\| = 1$ e u_1 é perpendicular a F_1;
iii) $F_3 = F_2 + u_2$, onde $\|u_2\| = 1$ e u_2 é perpendicular a F_2.

2.30. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Demonstre que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \cdot v,$$

onde $u \cdot v$ é, por definição, o número $x_1x_2 + y_1y_2$.

2.6 PRODUTO ESCALAR E ÂNGULO ENTRE VETORES

Definimos o *produto escalar* dos vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ como sendo o número

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplo. Se $u = (2, 1)$ e $v = (3, -5)$, então

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 1.$$

O símbolo $u \cdot v$ deve ser lido assim: "u escalar v".

Decorrem imediatamente da definição as seguintes propriedades do produto escalar:

1) $u \cdot u = \|u\|^2$;
2) $u \cdot v = v \cdot u$;
3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
4) $(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k\,(u \cdot v)$.

Nas propriedades acima u, v e w são vetores quaisquer e k é um número real. Faremos a demonstração da propriedade (4). A demonstração das demais fica como exercício.

Tomamos, como na definição, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Sabemos que vale

$$(kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 = x_1\,(kx_2) + y_1\,(ky_2) = k\,(x_1x_2 + y_1y_2),$$

e daí temos

$$(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k\,(u \cdot v).$$

A desigualdade que aparece na proposição seguinte é chamada desigualdade de *Cauchy-Schwarz.*

Proposição 2.2 – *Sejam* u *e* v *vetores arbitrários. Então*

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

Prova. Inicialmente vamos provar que se w e z são vetores unitários, então

$$|w \cdot z| \leqslant 1.$$

Usando este resultado, faremos a prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso geral. Para provarmos o caso particular $|w \cdot z| \leqslant 1$, observemos que

$$\|w - z\|^2 = \|w\|^2 - 2w \cdot z + \|z\|^2 \geqslant 0.$$

Logo,

$$2w \cdot z \leqslant \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

Como $\|w\|^2 = \|z\|^2 = 1$, temos

$$2w \cdot z \leqslant 2 \text{ ou } w \cdot z \leqslant 1 \tag{1}$$

Analogamente, partindo-se de

$$\|w + z\|^2 = \|w\|^2 + 2w \cdot z + \|z\|^2 \geqslant 0,$$

obtemos

$$-w \cdot z \leqslant 1. \tag{2}$$

De (1) e (2), temos

$$|w \cdot z| \leqslant 1.$$

Sejam, agora, u e v vetores arbitrários. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, $u/\|u\|$ e $v/\|v\|$ são unitários e, portanto, vale

$$\left| \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right| \leqslant 1$$

ou

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1,$$

donde

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

Como a desigualdade de Cauchy-Schwarz verifica se $u = 0$ ou $v = 0$ a prova da proposição está completa.

A seguir, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos definir o ângulo entre dois vetores.

Se u e v são vetores não-nulos, então

$$\|u\|\,\|v\| > 0$$

e, como

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|,$$

segue que

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1,$$

que é equivalente a

$$-1 \leqslant \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1.$$

Estando o número

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$$

entre 1 e -1, existe um único ângulo θ (medido em radianos) entre 0 e π, tal que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}. \tag{F}$$

Definimos o *ângulo entre os vetores não-nulos* u e v como sendo o ângulo θ dado pela fórmula (F).

Exemplo. Se $u = (0, 2)$ e $v = (3, 3)$, o ângulo θ entre estes vetores é

$$\cos\theta = \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{\sqrt{0 + 2^2}\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ radianos. (Veja a Fig. 2.18}a\text{.)}$$

Observe também que, a partir da fórmula (F), podemos escrever

$$u \cdot v = \|u\|\,\|v\| \cos\theta.$$

Em algumas aplicações é mais conveniente calcular o produto escalar utilizando esta fórmula.

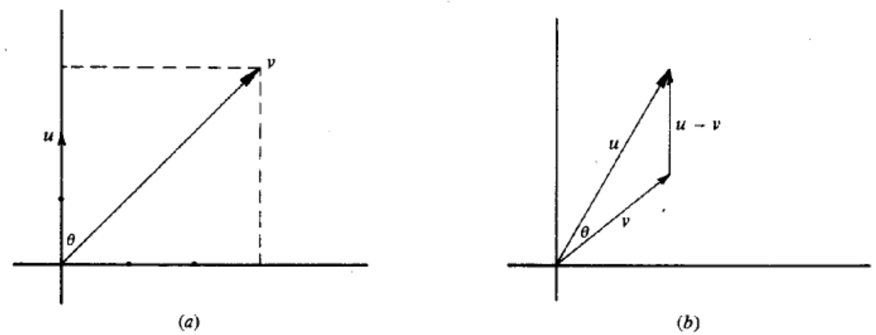


Fig. 2.18

Usando a lei dos co-senos podemos mostrar que o ângulo θ, entre os vetores u e v, dado pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|},$$

é exatamente o menor ângulo formado pelas setas que representam u e v. Veja a Fig. 2.18*b*. De fato, a lei dos co-senos, aplicada ao triângulo cujos lados são as setas que representam u, v e $u - v$, nos dá

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos\theta,$$

de onde temos

$$\cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\,\|u\|\,\|v\|}.$$

Mas, conforme o Exerc. 2.30, temos

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \cdot v,$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|},$$

como queríamos.

Como no caso de retas, se o ângulo θ entre dois vetores é $\pi/2$ radianos, eles são ditos *perpendiculares*. Observe que, se u e v são perpendiculares, então

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} = \cos \pi/2 = 0;$$

mas $u \cdot v/\|u\|\,\|v\| = 0$, implica que $u \cdot v = 0$. Logo, se u e v são perpendiculares, então $u \cdot v = 0$. Por outro lado, se $u \neq 0$ e $v \neq 0$ são tais que $u \cdot v = 0$, então $\cos\theta = 0$ e, portanto, u é perpendicular a v. Assim, para vetores não-nulos, temos

$$u \text{ é perpendicular a } v \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

Ainda usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos demonstrar a parte (*c*) da proposição 2.1, que é a desigualdade triangular

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Prova. Usando as propriedades do produto escalar, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$u \cdot v \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

de modo que

$$\|u + v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2$$

ou

$$\|u + v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$$

e, finalmente,

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

2.7 PROJEÇÃO DE VETORES

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores não-nulos e P a projeção ortogonal do ponto (x_1, y_1) sobre a reta definida por $(0, 0)$ e (x_2, y_2). Veja a Fig. 2.19.

Se o ângulo θ entre os vetores u e v for menor que $90°$, como é o caso da Fig. 2.19, então

$$\vec{OP} = \|\vec{OP}\| \frac{v}{\|v\|}$$

e, como

$$\|\vec{OP}\| = \|u\| \cos\theta,$$

temos

$$\vec{OP} = \|u\| \cos\theta \frac{v}{\|v\|}$$

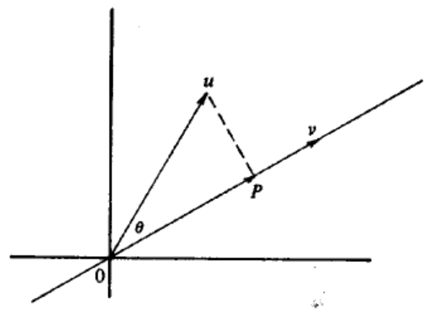


Fig. 2.19

ou

$$\vec{OP} = \|u\| \;\frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\;\frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v.$$

No caso do ângulo θ entre os vetores u e v ser maior que 90°, conforme mostra a Fig. 2.20, com um procedimento análogo ao anterior, podemos mostrar que também se tem

$$\vec{OP} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v.$$

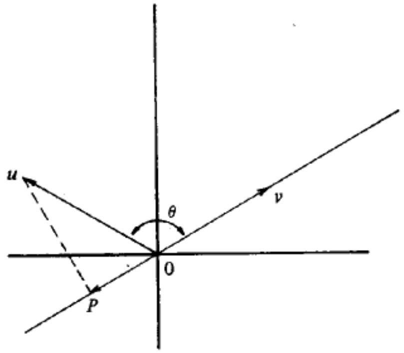


Fig. 2.20

Observe também que, se $\theta = 90^\circ$, então $\vec{OP} = 0$, mas mesmo assim, a fórmula

$$\vec{OP} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$$

continua válida.

Independentemente do ângulo entre u e v, o vetor $\vec{OP}$ é chamado a *projeção* de u sobre v. Indicaremos $\vec{OP}$ por p_v^u. Portanto, quaisquer que sejam os vetores não-nulos u e v, o vetor

$$p_v^u = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$$

é denominado a projeção de u sobre v.

Por exemplo, a projeção do vetor $u = (2, 1)$ sobre $v = (4, -1)$ é

$$p_v^u = \frac{(2, 1) \cdot (4, -1)}{(4, -1) \cdot (4, -1)}\,(4, -1) = \frac{7}{17}(4, -1).$$

Exemplo. *a*) Verificar que o triângulo cujos vértices são $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$ é retângulo em A.

b) Calcular a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o pé da altura do triângulo relativa ao vértice A.

Solução. *a*) É suficiente verificar que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Como $\vec{AB} = (-3, -2)$ e $\vec{AC} = (-2, 3)$, temos

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 = 0.$$

b) A projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é o módulo do vetor

$$p_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}.$$

Sendo $\vec{BA} = (3, 2)$ e $\vec{BC} = (1, 5)$, temos

$$p_{\vec{BC}}^{\vec{BA}} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\vec{BC} \cdot \vec{BC}}\,\vec{BC} = \frac{13}{26}(1, 5) = \frac{1}{2}(1, 5).$$

Logo, a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é

$$\|p_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}\| = \frac{1}{2}\sqrt{26}.$$

c) Seja $P(x, y)$ o pé da altura relativa ao vértice A. Então,

$$\vec{BP} = p_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}$$

ou

$$(x - 0, y - 1) = \frac{1}{2}(1, 5).$$

Logo,

$$x = \frac{1}{2} \text{ e } y - 1 = \frac{5}{2}.$$

Donde

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Exemplo. Calcule o ângulo entre $u + v$ e $u - v$, sabendo-se que $\|u\| = \sqrt{3}$, $\|v\| = 1$ e o ângulo entre u e v é 30°.

Solução. Seja θ o ângulo entre $u + v$ e $u - v$. Então,

$$\cos\theta = \frac{(u+v)\cdot(u-v)}{\|u+v\|\,\|u-v\|} = \frac{u\cdot u - v\cdot v}{\|u+v\|\,\|u-v\|}\,.$$

Mas

$$u\cdot u = \|u\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$v\cdot v = \|v\|^2 = 1^2 = 1.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{2}{\|u+v\|\,\|u-v\|}\,.$$

Para calcular $\|u+v\|$ e $\|u-v\|$, procedemos assim:

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\cdot v = 4 + 2u\cdot v.$$

Mas

$$u\cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos 30^\circ = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$\|u+v\|^2 = 4 + 2\cdot\frac{3}{2} = 7.$$

Portanto,

$$\|u+v\| = \sqrt{7}.$$

Procedendo da mesma forma encontramos

$$\|u-v\| = 1.$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

e

$$\theta = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\,.$$

Observe que $u + v$ e $u - v$ são as diagonais do paralelogramo definido pelos vetores u e v.

Exercícios

2.31. Sejam $u = (2, 4)$ e $v = (-3, 5)$. Determine:
a) o produto escalar de u por v;
b) o ângulo entre u e v;
c) P^{u}_{v}.

2.32. *a)* Dado o vetor $u = (x, y)$, mostre que os vetores $v = (-y, x)$ e $w = (y, -x)$ são perpendiculares a u.
b) Faça numa figura a representação dos vetores u, v e w.

2.33. *a)* Encontre um vetor de módulo 5 perpendicular ao vetor $(2, -1)$
b) Determine o valor de x para que o vetor $(2, x^2 - 1)$ seja perpendicular ao vetor $(-6, 4)$.

2.34. Dado o triângulo cujos vértices são $A\ (1, 1)$, $B\ (4, 0)$ e $C\ (3, 4)$, determine:
a) os ângulos A, B e C;
b) as projeções dos lados AC e BC sobre o lado AB;
c) o pé da altura relativa ao vértice C;
d) a área do triângulo ABC;
e) a interseção da bissetriz do ângulo B com o lado AC.

2.35. Determine a altura (relativa ao lado AD) do paralelogramo cujos vértices são $A\ (1, 0)$, $B\ (2, 2)$, $C\ (5, 3)$ e $D\ (4, 1)$.

2.36. Calcule a área do paralelogramo cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$, sendo $A\ (0, 1)$, $B\ (-4, -1)$, $C\ (5, -3)$ e $D\ (7, 0)$.

2.37. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (-2, 3)$ e $v = (5, 1)$.

2.38. Verifique que os pontos $A\ (2, 7)$, $B\ (2, -6)$ e $C\ (5, -6)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

2.39. Seja $u = (3, 1)$. Determine as coordenadas de um vetor v, de módulo 2, e que faz com u um ângulo de 30°.

2.40. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um dos quais é paralelo e o outro é perpendicular ao vetor $(1, -1)$.

2.41. Sejam u e v vetores unitários e perpendiculares, $w = a_1 u + b_1 v$ e $z = a_2 u + b_2 v$. Calcule:
a) $\|w\|$ e $\|z\|$;
b) $w\cdot z$;
c) o ângulo entre w e z.

2.42. Sejam u e v vetores distintos. Mostre que, se $u + v$ é perpendicular a $u - v$, então $\|u\| = \|v\|$. A que teorema sobre quadriláteros corresponde este resultado?

2.43. Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $w = (x, y)$. Mostre que
a) $w = xe_1 + ye_2$;
b) $w = (w\cdot e_1, w\cdot e_2)$.

2.44. Calcule o ângulo entre os vetores v e w sabendo-se que:

$$\|u\| = \|w\| = 5;\ \|v\| = 1;\ \|u - v + w\| = \|u + v + w\|;$$

o ângulo entre u e v é $\pi/8$.

2.45. Se $u + v + w = 0$, $\|u\| = 5$, $\|v\| = 6$ e $\|w\| = 7$, calcule:
a) $u\cdot v$; *b)* $u\cdot w$; *c)* $v\cdot w$.

2.46. Se $P^{v}_{u} = (2, 1)$, $u = (4, 2)$ e $\|v\| = 6$, determine v.

2.47. Demonstre que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. (*Sugestão*. Demonstre que os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, da Fig. 2.21 são perpendiculares.)

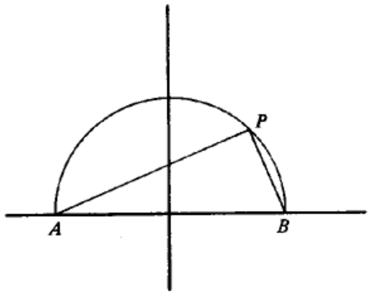
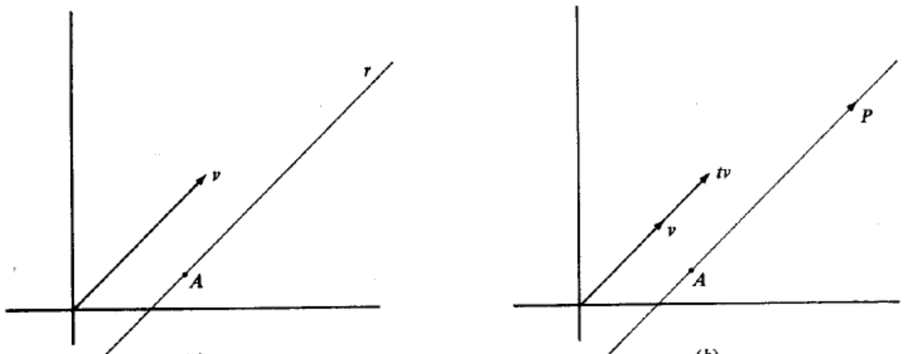


Fig. 2.21

2.48. Sejam u e v vetores não-nulos. Demonstre que u é perpendicular a $v - P_u^v$.

2.8 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja $v = (a, b)$ um vetor não-nulo e $A\,(x_o, y_o)$ um ponto do plano. Da Geometria Elementar sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém A. Dizer que r tem a mesma direção de v significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v.



(a) (b)

Fig. 2.22

Assim, um ponto $P\,(x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = tv,$$

para algum número real t. Ou, em termos de coordenadas,

$$(x - x_o, y - y_o) = (ta, tb).$$

Esta equação é equivalente ao sistema de equações

$$x = x_o + at$$
$$y = y_o + bt,$$

chamadas *equações paramétricas* de r.

Exemplo.

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 - 3t$$

são equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $(1, 2)$ e tem a direção do vetor $(2, -3)$. Isto significa que para cada valor do *parâmetro* t, o ponto

$$(1 + 2t, 2 - 3t)$$

pertence à reta r e também que todo ponto de r é da forma $(1 + 2t, 2 - 3t)$, para algum valor de t.

Exemplo. Uma partícula está animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t).$$

a) Determinar sua posição nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.
b) Determinar o instante no qual a partícula atinge o ponto $(11, 13)$.
c) A partícula passa pelo ponto $(5, 6)$?
d) Descrever sua trajetória.
e) Determinar sua velocidade no instante t.

Solução. *a*) Como a posição da partícula é dada em função do tempo por

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t),$$

suas posições nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$ são, respectivamente,

$$(x, y) = (2 + 3.0, 1 + 4.0) = (2, 1),$$
$$(x, y) = (2 + 3.1, 1 + 4.1) = (5, 5),$$
$$(x, y) = (2 + 3.2, 1 + 4.2) = (8, 9).$$

b) Basta determinar t de modo que

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (11, 13),$$

ou

$$2 + 3t = 11$$
$$1 + 4t = 13.$$

Logo, $t = 3$, pois ambas as equações acima admitem esta solução.

c) Para que a partícula passe pelo ponto (5, 6) é necessário que para algum valor de t se tenha

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (5, 6),$$

o que não ocorre pois as equações

$$\begin{aligned} 2 + 3t &= 5 \\ 1 + 4t &= 6 \end{aligned}$$

são incompatíveis, isto é, não admitem solução comum.

d) A equação

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t)$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 1 + 4t \end{aligned}$$

que são equações paramétricas da reta paralela ao vetor (3, 4) e que contém o ponto (2, 1). Logo, esta reta é da trajetória da partícula.

e) Vamos determinar a velocidade v da partícula no instante t_o. Se no instante t_o a partícula se encontra em $P_o\,(2 + 3t_o, 1 + 4t_o)$, e no instante t se encontra em $P\,(2 + 3t, 1 + 4t)$, o vetor deslocamento no intervalo de tempo $\Delta t = t - t_o$ é

$$\overrightarrow{P_oP} = (2 + 3t, 1 + 4t) - (2 + 3t_o, 1 + 4t_o) = (t - t_o)(3, 4) = \Delta t\,(3, 4).$$

Logo, pela definição de velocidade, temos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{P_oP}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(3, 4)}{\Delta t} = (3, 4).$$

Como a velocidade, no instante t_o, independe de t_o, concluímos que a partícula tem velocidade constante. Observe que o número

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

expressa a velocidade escalar da partícula.

2.9 EQUAÇÕES CARTESIANAS DA RETA

Vimos, na Seç. 2.8, que as equações paramétricas de uma reta r paralela ao vetor não-nulo $v = (a, b)$ e que contêm o ponto (x_o, y_o) são dadas por

$$\begin{aligned} x &= x_o + at \\ y &= y_o + bt. \end{aligned}$$

Podemos eliminar o parâmetro t destas equações efetuando as seguintes operações: multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a, encontramos

$$bx = bx_o + bat \tag{1}$$

$$ay = ay_o + abt; \tag{2}$$

subtraindo-se (1) de (2), temos

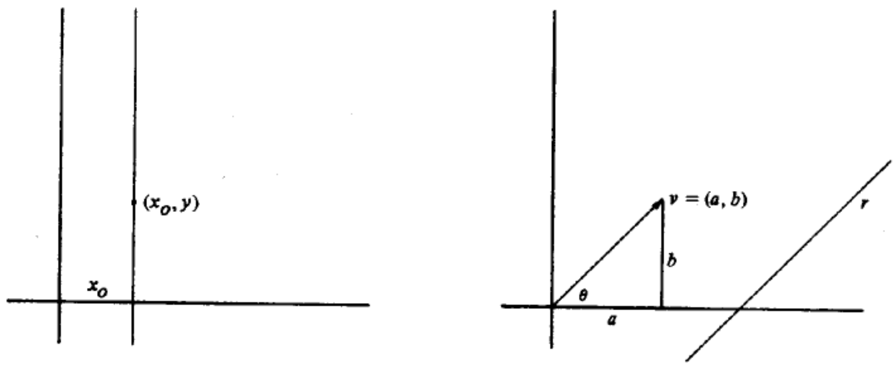
$$ay - bx = ay_o - bx_o.$$

Observemos que o segundo membro desta equação é constante. Chamando-se esta constante de c, obtemos a equação

$$ay - bx = c$$

que é chamada ***equação cartesiana*** da reta r.

Se a primeira coordenada do vetor $v = (a, b)$ é zero, isto é, $a = 0$, r é paralela ao eixo y como mostra a Fig. 2.23*a*, e sua equação cartesiana reduz-se a $x = x_o$.



(*a*) (*b*)

Fig. 2.23

Se $a \neq 0$, podemos dividir a equação cartesiana de r por a e obtermos

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo-se, nesta equação, $b/a = m$ e $c/a = k$, temos

$$y = mx + k.$$

Como se vê na Fig. 2.23*b*,

$$m = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\theta,$$

onde θ é o ângulo que r faz com o eixo x. O número m é chamado *declividade* de r. A constante k é a ordenada do ponto de interseção de r com o eixo y pois $(0, k)$ satisfaz a equação $y = mx + k$.

Resumindo, demonstramos o seguinte:

Se r *é uma reta paralela ao eixo* y, *sua equação cartesiana é da forma*

$$x = x_o,$$

e se r *não é paralela ao eixo* y, *sua equação é da forma*

$$y = mx + k,$$

onde m *é a tangente do ângulo que* r *faz com o eixo* x.

Observe que o vetor $(1, m)$ é paralelo à reta r de equação $y = mx + k$. De fato, como

$$(1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}\,(a, b),$$

$(1, m)$ é múltiplo de (a, b) e, conseqüentemente, tem também a direção de r.

Exemplo. Determinar as equações paramétrica e cartesiana da reta r definida pelos pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$.

Solução. Como as abscissas dos dois pontos dados são diferentes, a reta, por eles definida, não é paralela ao eixo y. Logo, sua equação cartesiana é da forma

$$y = mx + k. \tag{1}$$

Para determinar m e k substituímos os pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$ em (1) e obtemos

$$\begin{aligned} 5 &= m + k \\ 7 &= 2m + k. \end{aligned}$$

Resolvendo-se este sistema encontramos

$$m = 2 \quad \text{e} \quad k = 3.$$

Logo, a equação procurada é

$$y = 2x + 3.$$

Para escrever as equações paramétricas de r, tomamos o ponto (x_o, y_o) como sendo $(1, 5)$ e $v = (2, 7) - (1, 5) = (1, 2)$ e obtemos

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 5 + 2t. \end{aligned} \tag{I}$$

Uma mesma reta pode ser representada por pares de equações paramétricas diferentes. De fato, depende da escolha do ponto (x_o, y_o) e do vetor $v = (a, b)$. Por exemplo, a reta do exemplo anterior pode ser representada também pelas equações

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 7 + 4t. \end{aligned} \tag{II}$$

Embora o sistema (I) seja diferente do sistema (II), eles são equivalentes. Isto significa que quando t varia sobre o conjunto dos números reais o conjunto de pontos dados por (I) é exatamente o conjunto de pontos dados por (II).

Demonstramos anteriormente que toda reta r tem uma equação da forma

$$bx - ay = c,$$

onde (a, b) é um vetor paralelo a r. Fazendo-se $A = b$, $B = -a$ e $C = -c$, podemos escrever a equação de r assim

$$Ax + By + C = 0. \tag{III}$$

Observe que o vetor (A, B) é perpendicular à reta r, pois

$$(A, B) \cdot (a, b) = (b, -a) \cdot (a, b) = ab - ab = 0,$$

e (a, b) é paralelo a r.

A recíproca também é verdadeira, isto é, toda equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

tem como gráfico uma reta. Realmente, se (x_o, y_o) é um ponto tal que

$$Ax_o + By_o + C = 0, \tag{2}$$

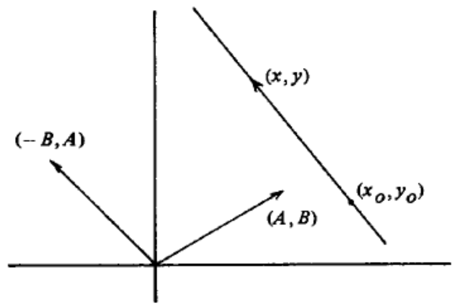


Fig. 2.24

subtraindo-se (2) de (1) encontramos

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0.$$

Interpretando-se este resultado como o produto escalar dos vetores (A, B) e $(x-x_o, y-y_o)$, vemos que o conjunto solução de (III) é constituído de todos os pontos (x, y) tais que os vetores $(x-x_o, y-y_o)$ e (A, B) são perpendiculares. Isto significa que o gráfico de (III) é a reta que contém (x_o, y_o) e tem a direção do vetor $(-B, A)$.

2.10 ÂNGULOS ENTRE RETAS

Exemplo. Determinar o menor dos ângulos entre as retas r e s, cujas equações são, respectivamente,

$$y=2x-2 \quad \text{e} \quad y=-x+4.$$

Solução. O vetor $(1, 2)$ tem a direção de r, assim como o vetor $(1, -1)$ tem a direção de s. Veja a Fig. 2.25.

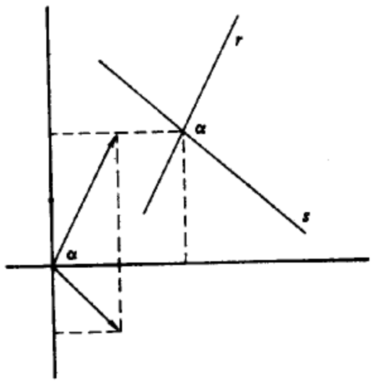


Fig. 2.25

O ângulo α entre os vetores $(1, 2)$ e $(1, -1)$ é um dos ângulos entre as retas r e s. Efetuando-se as contas, encontramos

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Logo,

$$\alpha=\arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right), 0\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

Como $\cos\alpha<0$, encontramos o ângulo maior entre as duas retas. O ângulo menor entre r e s é, evidentemente, $\pi-\alpha$, cujo co-seno é

$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$

pois,

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

2.11 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

A distância do ponto $P(x_o, y_o)$ à reta r, de equação $y=mx+k$, é definida como sendo a distância de P a A, onde $A(x_1, y_1)$ é o pé da perpendicular baixada de P a r. (Veja a Fig. 2.26*a*.

Indicando-se por $d(P, r)$ a distância de P a r, temos

$$d(P,r)=\|\vec{PA}\|.$$

Como o vetor $(1, m)$ tem a direção da reta r, os vetores $\vec{PA}=(x_1-x_o, y_1-y_o)$ e $(-m, 1)$ têm a mesma direção. Logo, existe um número real t tal que

$$\vec{PA}=t(-m,1)$$

e, portanto,

$$d(P,r)=\|\vec{PA}\|=\|t(-m,1)\|=|t|\sqrt{m^2+1}.$$

Desta forma, $d(P, r)$ estará determinada quando conhecermos t. A seguir, faremos o cálculo de t. De

$$\vec{PA}=(x_1-x_o, y_1-y_o)=t(-m,1)$$

obtemos

$$x_1=x_o-tm$$
$$y_1=y_o+t.$$

Como (x_1, y_1) pertence à reta r, deve valer

$$y_o+t=m(x_o-tm)+k,$$

donde

$$t = \frac{-y_o + mx_o + k}{1 + m^2} .$$

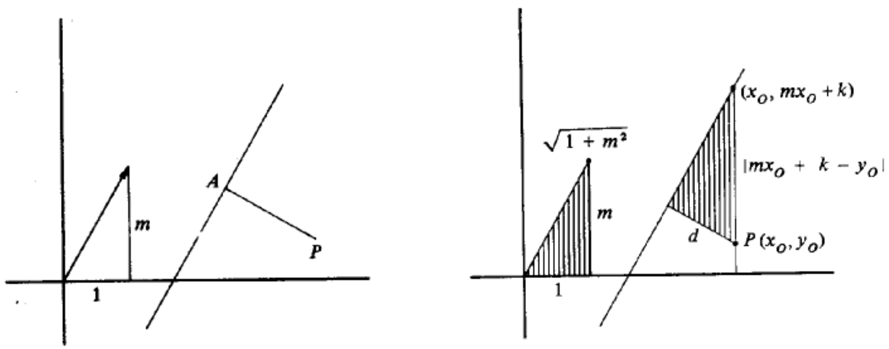
Sendo $d(P, r) = |t| \sqrt{1 + m^2}$, temos, finalmente,

$$d(P, r) = \left| \frac{-y_o + mx_o + k}{1 + m^2} \right| \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

ou

$$d(P, r) = \frac{|-y_o + mx_o + k|}{\sqrt{1 + m^2}} .$$

Esta fórmula também pode ser obtida da Fig. 2.26*b* usando a semelhança dos triângulos hachurados.



(*a*) (*b*)

Fig. 2.26

$$\frac{d}{1} = \frac{|mx_o + k - y_o|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Se a equação de r é da forma $x = c$ a fórmula deduzida acima não se aplica. Neste caso, a distância de $P(x_o, y_o)$ a r é dada por $d(P, r) = |c - x_o|$. A fórmula enunciada no Exerc. 2.58 aplica-se a todos os casos.

2.12 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA

Na Fig. 2.27 representamos uma circunferência de centro $C(x_o, y_o)$ e raio r.

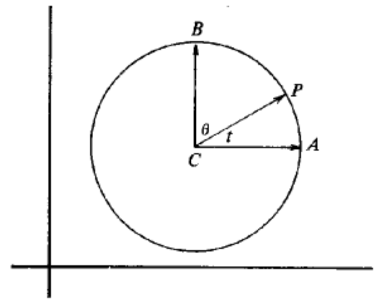


Fig. 2.27

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência e t o ângulo formado pelos vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CA}$, onde $A(x_o + r, y_o)$. Então,

$$\cos t = \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CA}}{\|\vec{CP}\| \, \|\vec{CA}\|} .$$

Como $\vec{CP} = (x - x_o, y - y_o)$, $\vec{CA} = (r, 0)$ e $\|\vec{CP}\| = \|\vec{CA}\| = r$, temos

$$\cos t = \frac{x - x_o}{r}$$

ou

$$x = x_o + r \cos t .$$

Procedendo-se de maneira análoga com os vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$, onde B é o ponto $(x_o, y_o + r)$, e tendo-se em conta que o co-seno do ângulo θ, formado por estes vetores, é igual ao seno do ângulo t, obtemos

$$y = y_o + r \operatorname{sen} t .$$

Reciprocamente, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz as equações $x = x_o + r \cos t$ e $y = y_o + r \operatorname{sen} t$, então $P(x, y)$ pertence à circunferência, pois

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t} = r .$$

As equações

$$x = x_o + r \cos t$$
$$y = y_o + r \operatorname{sen} t$$

são chamadas ***equações paramétricas da circunferência*** de centro $C(x_o, y_o)$ e raio r.

Como no caso da reta, eliminando-se t nas equações paramétricas, obtemos a equação cartesiana da circunferência. Aqui procedemos assim: das equações paramétricas obtemos

$$(x - x_o)^2 = r^2 \cos^2 t$$
$$(y - y_o)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 t,$$

e daí,

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

que é a *equação cartesiana da circunferência* de centro (x_o, y_o) e raio r.

Exemplo. Escrever uma equação cartesiana da circunferência definida pelos pontos $A\,(1, 1)$, $B\,(1, -2)$ e $C\,(2, 3)$.

Solução. A equação procurada é da forma

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

que também pode ser escrita assim

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo-se

$$-2x_o = a, -2y_o = b \text{ e } x_o^2 + y_o^2 - r^2 = c$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

que é outra forma de se escrever a equação cartesiana da circunferência.

Esta última equação deve ser verificada pelas coordenadas de cada um dos pontos A, B e C. Substituindo-se, pois, as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos o sistema.

$$\begin{aligned} a + b + c &= -2 \\ a - 2b + c &= -5 \\ 2a + 3b + c &= -13, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = -13, \; b = 1 \text{ e } c = 10.$$

Logo,

$$x^2 + y^2 - 13x + y + 10 = 0,$$

é a equação procurada.

Por outro lado, sendo

$$a = -2x_o, \; b = -2y_o \text{ e } c = x_o^2 + y_o^2 - r^2$$

segue-se que

$$x_o = \frac{13}{2}, \; y_o = -\frac{1}{2} \text{ e } r^2 = \frac{65}{2}.$$

Logo, a equação da circunferência pode também ser escrita na forma

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

Observe que as equações paramétricas desta circunferência são

$$x = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \cos t$$
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t.$$

Exemplo. Descrever a trajetória de uma partícula animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 \cos 3\,t, 2 \operatorname{sen} 3t).$$

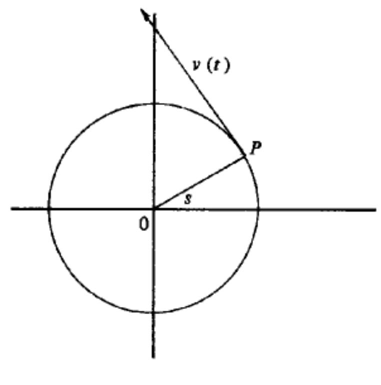


Fig. 2.28

Solução. A igualdade dada pode ser desdobrada em

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos 3t \\ y &= 2 \operatorname{sen} 3t \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} x &= 2 \cos s \\ y &= 2 \operatorname{sen} s, \end{aligned}$$

onde $s = 3t$. Comparando

$$x = 2 \cos s$$
$$y = 2 \operatorname{sen} s$$

com as equações paramétricas da circunferência de centro (x_o, y_o) e raio r, concluímos que a trajetória da partícula é a circunferência de centro na origem e raio 2.

Observe que $s = 3t$ é o ângulo descrito pela partícula no tempo t. O número 3 é a velocidade angular da partícula. Observe, ainda, que o vetor

$$v(t) = (-6 \operatorname{sen} 3t, 6 \cos 3t)$$

é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{OP} = (2 \cos 3t, 2 \operatorname{sen} 3t)$, pois $v(t) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$. Usando a definição de velocidade e o conceito de derivada podemos mostrar que $v(t)$ é, exatamente, a velocidade da partícula no instante t.

Exercícios

2.49. Escreva as equações da reta que
a) contém o ponto $(-1, 1)$ e tem a direção do vetor $(2, 3)$.
b) contêm os pontos A $(3, 2)$ e B $(-3, 1)$.

2.50. Dados os vetores $u = (1, 5)$ e $v = (4, 1)$, escreva as equações paramétricas e cartesianas das retas que contêm as diagonais do paralelogramo definido por u e v.

2.51. *a*) Mostre que

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 7 - 5t$$

são equações paramétricas da reta definida pelos pontos A $(3, 7)$ e B $(5, 2)$.
b) Que valores se deve atribuir a t para se obter os pontos A e B?
c) Que valores de t dão os pontos entre A e B?
d) Localize na reta os pontos para os quais $t > 1$ e $t < 0$.

2.52. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $(1, 2)$ e faz com a reta $y = -2x + 4$ um ângulo de $60°$.

2.53. Determine a projeção ortogonal do ponto P $(2, 4)$ sobre a reta

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -1 + 3t.$$

2.54. Dado o ponto A $(2, 3)$, ache o vetor $\overrightarrow{AP}$, onde P é o pé da perpendicular baixada de A à reta $y = 5x + 3$.

2.55. Determine a interseção da reta $y = 2x - 1$ com a reta definida pelos pontos $(2, 1)$ e $(0, 0)$.

2.56. Dados o ponto P $(2, -1)$ e a reta r de equação $y = 3x - 5$, escreva uma equação da reta que contém o ponto P e
a) seja paralela à reta r;
b) seja perpendicular à reta r.

2.57. Determine o ângulo menor entre as retas
a) $2x + 3y = 1$ e $y = -5x + 8$;
b) $x + y + 1 = 0$ e $x = 1 - 2t, y = 2 + 5t$.

2.58. Mostre que a distância do ponto P (x_o, y_o) à reta $Ax + By + C = 0$ é dada por

$$\frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.59. Mostre que se a distância entre P (a, b) e a origem é c, então a reta definida por P e A $(-c, 0)$ é perpendicular à reta definida por P e B $(c, 0)$.

2.60. Determine o comprimento do segmento OP da figura.

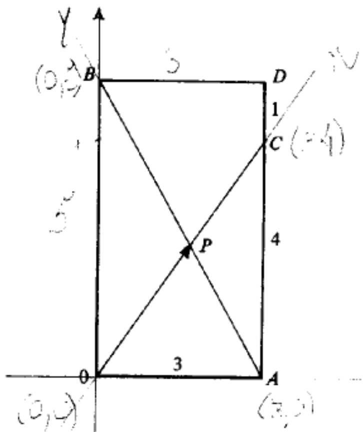


Fig. 2.29

2.61. Determine a distância entre as retas $2x - y = 6$ e $2x - y = -1$.

2.62. Escreva uma equação da circunferência que contém os pontos de interseção das retas $y = x + 1$, $y = 2x + 2$ e $y = -2x + 3$.

2.63. Escreva as equações paramétricas das seguintes circunferências:
a) $x^2 + y^2 - 11 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

2.64. Deduza uma equação da circunferência de centro na origem e tangente à reta $3x - 4y + 20 = 0$.

2.65. Determine uma equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

2.66. Determine um ponto na circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 que seja eqüidistante dos pontos A $(6, 6)$ e B $(2, 10)$.

2.67. *a*) Determine a interseção das circunferências

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$$

b) Escreva uma equação cartesiana da reta que contém a corda comum às circunferências do item (*a*).

2.68. *a*) Uma partícula percorre a reta definida pelos pontos $A\ (1, 2)$ e $B\ (3, -1)$ com velocidade constante. Sabendo-se que no instante $t = 0$ a partícula se encontra em A e que em $t = 2$ se encontra em B, determinar sua posição no instante t.

b) Em que instante a partícula se encontra mais próxima do ponto $C\ (4, -2)$?

2.69. Num determinado instante t as posições de duas partículas P e Q são dadas, respectivamente, por

$$(1 + 2t, 1 + t) \text{ e } (4 + t, -3 + 6t).$$

Elas se chocam?

2.70. Um móvel M_1 parte do ponto $A\ (0, 4)$ com velocidade $v = (1, -1)$ no mesmo instante em que um móvel M_2 parte de $O\ (0, 0)$, também com velocidade constante. Qual deve ser a velocidade de M_2 para que M_1 e M_2 se choquem uma unidade de tempo depois?

2.71. Uma partícula está animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (1 + 2\cos t, 2 + 2\operatorname{sen} t).$$

a) Descrever sua trajetória.

b) Verificar que sua velocidade no instante t é

$$v(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t).$$

2.72. Escreva as equações paramétricas da tangente à circunferência

$$x = x_0 + r\cos t$$
$$y = y_0 + r\operatorname{sen} t,$$

no ponto (x_1, y_1).

2.73. A trajetória de uma partícula é dada por

$$x = 2 + 2\cos t$$
$$y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \ \frac{\pi}{8} \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Determine o menor valor de t para o qual a partícula se encontra a igual distância dos pontos $A\ (0, 4)$ e $B\ (1, 5)$.

2.74. Sejam r e s duas retas cujas equações são $Ax + By + C = 0$ e $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

a) Mostre que, qualquer que seja λ,

$$Ax + By + C + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \qquad \text{(I)}$$

é a equação de uma reta que contém a interseção de r e s.

b) Se $A^2 + B^2 = A_1^2 + B_1^2$, mostre que para $\lambda = \pm 1$ as retas dadas por (I) são as bissetrizes dos ângulos entre r e s.

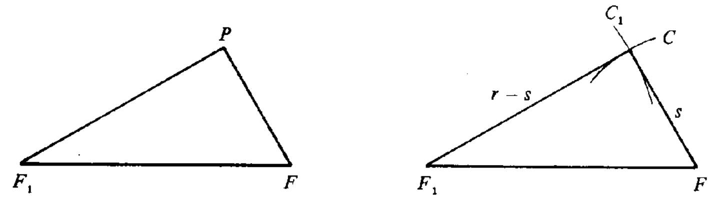
CÔNICAS 3

3.1 ELIPSE

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) + d(P, F_1) = r$$

é chamado elipse de focos F_1 e F e eixo maior r.



(*a*) (*b*)

Fig. 3.1

Graficamente podemos obter um ponto da elipse fazendo-se a seguinte construção: centramos o compasso em um dos focos e com abertura igual a s $(s < r)$ traçamos um arco C, depois, centramos no outro foco e com abertura igual a $r - s$ traçamos o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da elipse. Veja a Fig. 3.1.

Utilizando-se esta construção podemos obter tantos pontos da elipse quantos desejarmos. Ligando-se estes pontos obtemos a representação gráfica da elipse (Fig. 3.2).

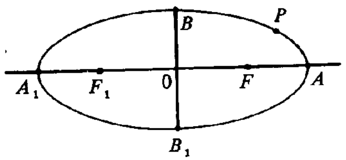


Fig. 3.2

Os pontos A_1 e A foram obtidos tomando-se $s = (r - d(F, F_1))/2$ e os pontos B e B_1 tomando-se $s = r/2$. Estes pontos são chamados *vértices da elipse*. Observe que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior da elipse e que o segmento BB_1 é perpendicular a A_1A. O ponto O, interseção de A_1A e BB_1, é o *centro da elipse*.

Na prática, podemos traçar uma elipse usando um laço completo de barbante e dois pregos. Fixam-se os pregos em dois pontos (focos) e faz-se um lápis deslizar sobre o papel de modo que o laço de barbante, apoiado nos pregos e na ponta do lápis, mantenha-se esticado.

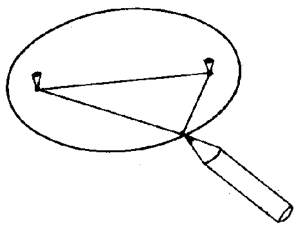


Fig. 3.3

A seguir, vamos deduzir uma equação da elipse na situação particular em que seu centro coincide com a origem do sistema e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, conforme ilustra a Fig. 3.4.

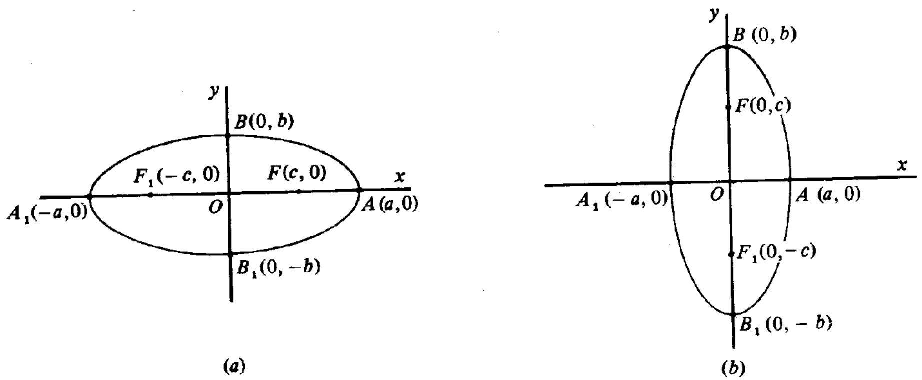


Fig. 3.4

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$d(P, F) + d(P, F) = d(A_1, A),$$

onde $P(x, y)$ é um ponto qualquer da elipse.

Para maior simplicidade nas contas, estamos indicando o eixo maior por $2a$ e a distância focal $d(F_1, F)$ por $2c$. Com esta notação, em termos das coordenadas de F_1, F e P, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Elevando-se ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Novamente, elevando-se esta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{1}$$

Na Fig. 3.4*a*, por definição do ponto B, temos

$$d(B, F) = a \ \text{ e } \ d(O, F) = c.$$

Logo, do triângulo OBF, deduzimos que $a^2 - c^2 = b^2$.

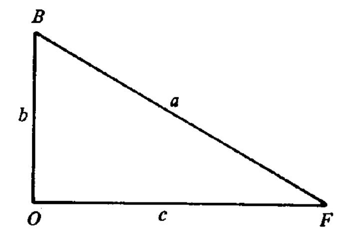


Fig. 3.5

Introduzindo-se este valor em (1), obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a ***equação*** da elipse.

Observação. Na verdade, demonstramos apenas que um ponto $P(x, y)$ que satisfaz a equação

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

também satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, pode-se mostrar que todo ponto $P(x, y)$ que satisfaz (2) também satisfaz (1). Assim, as Eqs. (1) e (2) são equivalentes e (2) é, de fato, uma equação da elipse.

Quando os focos da elipse estão sobre o eixo y, como na Fig. 3.4b, sua equação é, também,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Sendo agora $2b$ o seu eixo maior. Neste caso o vértice A é tal que $d(F, A)=b$ e, portanto, vale $b^2-c^2=a^2$ (Fig. 3.6).

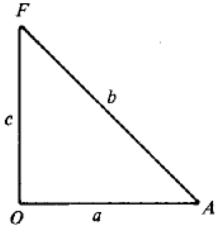


Fig. 3.6

Resumindo, temos: em ambos os casos a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se $a>b$ os focos da elipse estão no eixo x e são $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
Se $a<b$ os focos da elipse estão no eixo y e são $F_1(0, -c)$ e $F(0, c)$, onde $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

Exemplo. $9x^2+4y^2=36$, que também pode ser escrita assim

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$$

é uma equação da elipse de vértices

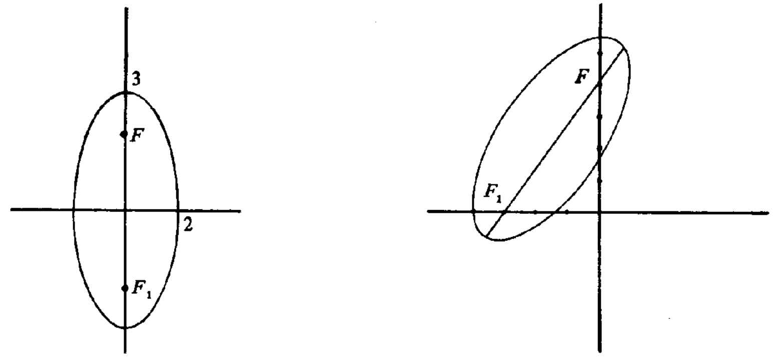
$$A_1(-2, 0), A(2, 0), B(0, 3), B_1(0, -3)$$

e focos

$$F(0, \sqrt{5}) \text{ e } F_1(0, -\sqrt{5}). \text{ (Veja a Fig. 3.7}a\text{).}$$

Em ~~geral, a equação de uma elipse é do~~ segundo grau. Quando os vértices da elipse não estão sobre os eixos do sistema de coordenadas, além dos termos em x^2 e y^2 a equação apresenta também termos em xy, x e y.

Exemplo. Equação da elipse cujos focos são $F_1(-3, 0)$ e $F(0, 4)$ e o eixo maior é 7. (Fig. 3.7b.)



(a) (b)

Fig. 3.7

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse. Então, por definição,

$$d(P, F)+d(P, F_1)=7$$

ou

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=7.$$

Na verdade já obtivemos uma equação da elipse. Contudo, vamos transformar a equação acima a fim de eliminar os radicais que nela figuram. Transpondo o termo

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

para o segundo membro e elevando a equação resultante ao quadrado, obtemos

$$(x+3)^2+y^2=49+x^2+(y-4)^2-14\sqrt{x^2+(y-4)^2},$$

que pode ser simplificada e escrita assim

$$3x + 4y - 28 = -7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\,.$$

Elevando-se ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos, finalmente,

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y - 200 = 0,$$

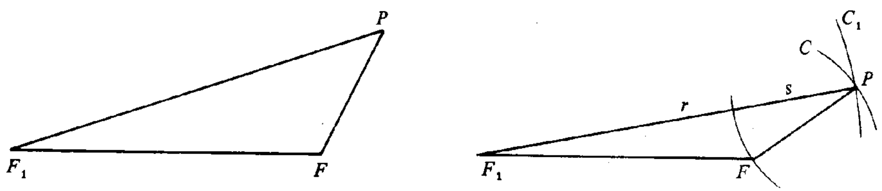
que não contém radicais e é do segundo grau.

3.2 HIPÉRBOLE

Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d\,(F_1, F)$, o conjunto dos pontos F do plano tais que

$$|d\,(F,P) - d\,(F_1,P)| = r$$

é chamado hipérbole de focos F_1 e F e eixo r.



(a) (b)

Fig. 3.8

Graficamente, para se obter um ponto da hipérbole é suficiente centrar o compasso em um dos focos e com abertura s traçar um arco C; depois, centrar no outro foco e com abertura $s + r$ traçar o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da hipérbole. Unindo-se os pontos assim obtidos temos o traçado da hipérbole.

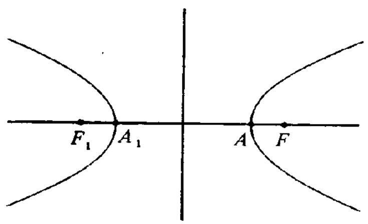
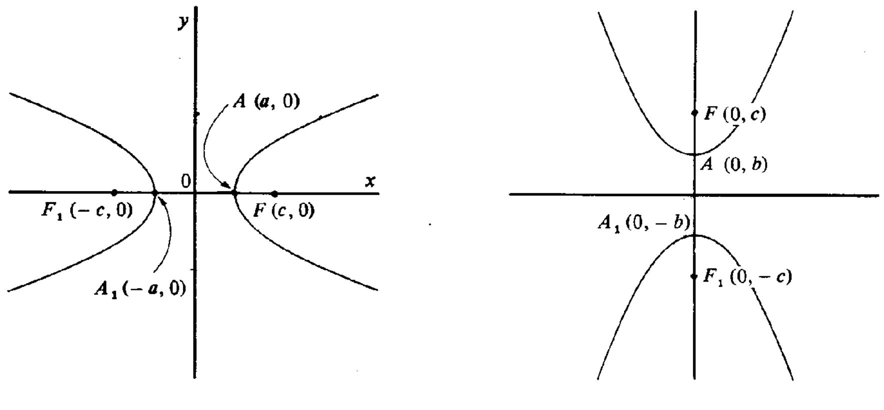


Fig. 3.9

Os pontos A_1 e A, chamados *vértices* da hipérbole, foram obtidos tomando-se $s = (d\,(F_1, F) - r)/2$. Observe que $d\,(A_1, A) = r$ e que se $s < (d\,(F_1, F) - r)/2$ os arcos C e C_1 não se interceptam. Da construção, é fácil ver que a hipérbole é composta de dois ramos e simétrica em relação à reta que contém os focos e em relação à mediatriz do segmento F_1F.

Com o objetivo de obter uma equação mais simples para a hipérbole, vamos eleger um sistema de coordenadas onde um dos eixos contém os focos e a origem seja o ponto médio do segmento F_1F. Como para a elipse, temos, também, dois casos.



(a) (b)

Fig. 3.10

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$|d\,(P, F_1) - d\,(P, F)| = d\,(A, A_1),$$

onde $P\,(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole. Como mostra a Fig. 3.10*a*, estamos chamando a distância focal $d\,(F_1, F)$ de $2c$ e a distância entre os vértices de $2a$. Logo,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,\right| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\, 2a \qquad (1)$$

Depois de eliminarmos os radicais de (1), podemos escrevê-la assim

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo-se

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é equivalente a (1) e, portanto, é uma equação da hipérbole.

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, como na Fig. 3.10b, sua equação é

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

onde $2b$ é a distância entre os vértices e a é tal que

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Mesmo quando os focos da hipérbole não estão sobre os eixos, ou não são simétricos em relação à origem, sua equação é também do segundo grau. Por exemplo, uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 1)$ e $F(1, 3)$ e eixo 2 é

$$20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0,$$

como o leitor pode verificar.

Exemplo. Determine condições sobre a, b e m para que a reta $y = mx$ intercepte a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução. Suponhamos que (x_o, y_o) seja um ponto da interseção da reta com a hipérbole. Veja a Fig. 3.11a.

Então, devemos ter

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1,$$

$$y_o = mx_o.$$

Destas duas equações, obtemos

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{m^2x_o^2}{b^2} = 1,$$

que, resolvida em x_o, nos dá

$$x_o = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}.$$

Para que x_o tenha valor real, isto é, para que a reta intercepte a hipérbole, é necessário e suficiente que

$$\frac{b^2}{a^2} - m^2 > 0 \text{ ou que } m^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

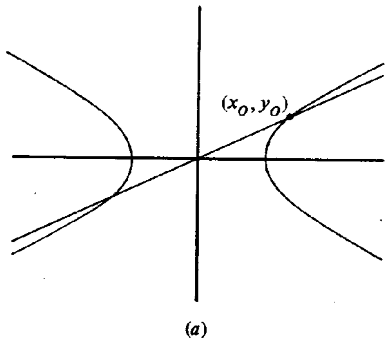
Sendo a e b números positivos, segue-se que

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Assim, a reta $y = mx$ intercepta a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, sua declividade estiver compreendida entre $-b/a$ e b/a. A parte (b) da Fig. 3.11 mostra a hipérbole e as retas de declividade b/a e $-b/a$, que contém a origem.



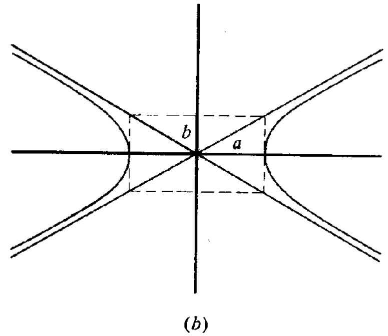


Fig. 3.11

Cada uma das retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

é chamada *assíntota* da hipérbole. Portanto, as assíntotas são posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem. Ainda mais, da expressão

$$x_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}$$

vemos que, quando a declividade da secante tende para b/a, a abscissa x_o do ponto de interseção tende para mais ou menos infinito. Isto significa que a hipérbole (ambos os ramos) tende para as assíntotas, à medida que se afasta da origem. Esta interpretação geométrica sugere um procedimento cômodo para se esboçar uma hipérbole, a saber, primeiro traçamos as assíntotas e, depois, os ramos da hipérbole tendendo às assíntotas, como mostra a Fig. 3.11*b*.

Procedendo-se de forma análoga, em relação à reta $y = mx$ e a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

podemos deduzir que a reta intercepta a hipérbole se, e somente se, $m > b/a$ ou $m < -b/a$. Portanto, as retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

também ocupam as posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem, isto é, a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

tende ao par de retas $y = bx/a$ e $y = -bx/a$ que são as assíntotas.

Exemplo. As assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

são (Fig. 3.12*a*)

$$y = \frac{2}{3}x \text{ e } y = -\frac{2}{3}x$$

e as da hipérbole

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

são (Fig. 3.12*b*)

$$y = 2x \text{ e } y = -2x.$$

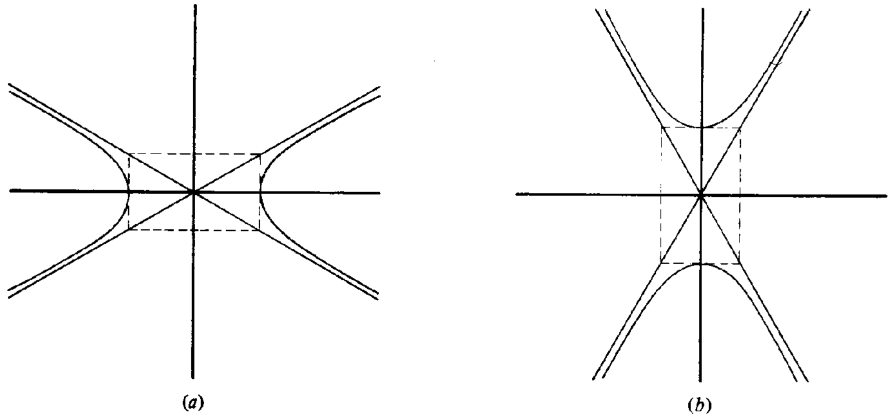


Fig. 3.12

3.3 PARÁBOLA

Dados um ponto F e uma reta r, chama-se parábola de foco F e diretriz r ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Construção. Pelo foco F traçamos a perpendicular à diretriz r e tomamos sobre esta perpendicular (chamada *eixo* da parábola) um ponto C. Por C traçamos uma paralela a r e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em F determinamos nesta paralela os pontos P e P' da parábola. Unindo-se os pontos assim construídos obtemos a parábola (Fig. 3.13).

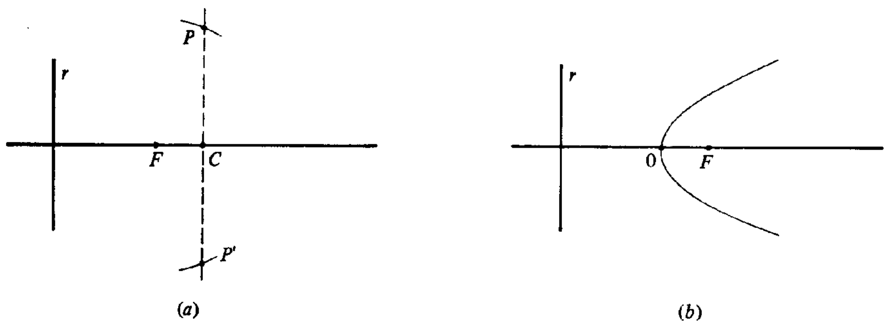


Fig. 3.13

Observe que se escolhermos o ponto C, sobre o eixo, de modo que $d(C,r) < d(C,F)$, o arco traçado com centro em F e raio $d(C,F)$ não intercepta a paralela à diretriz traçado por C. O ponto da parábola mais próximo de r é o ponto 0 (veja a Fig. 3.13*b*) tal que, $d(0, C) = d(0, F)$. Este ponto é chamado *vértice* da parábola.

Em geral, a equação de uma parábola é do segundo grau, isto é, contém termos em x^2, y^2, xy, x e y. Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, como veremos, sua equação é muito simples. Existem quatro casos.

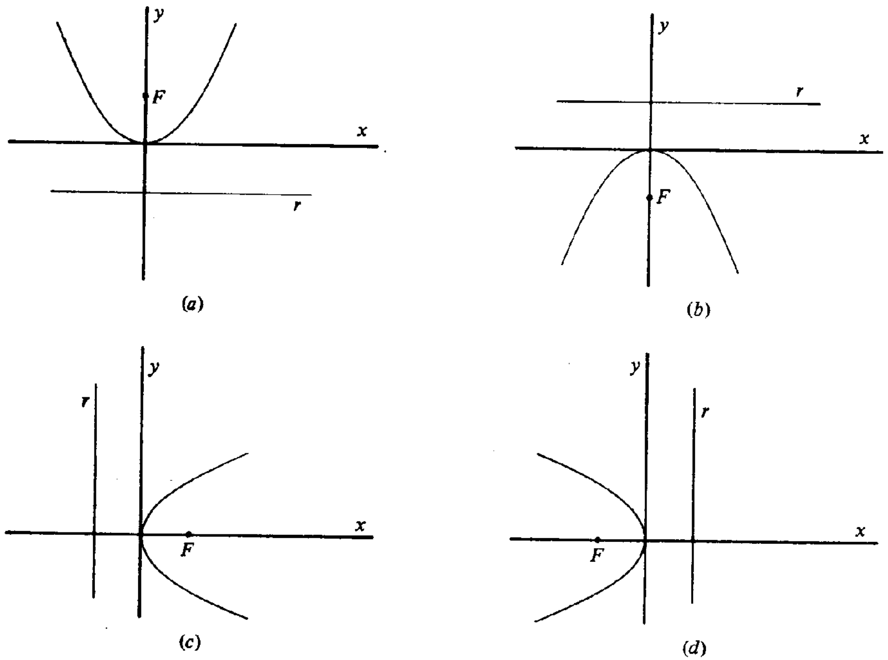


Fig. 3.14

Na Fig. 3.14*a* o foco está sobre o eixo y e a diretriz é paralela ao eixo x. Se $d(F,r) = 2a$, então o foco é $F(0,a)$ e a equação da diretriz é

$$y = -a.$$

Um ponto $P(x,y)$ pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P,F) = d(P,r)$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y + a|.$$

Eliminando-se o radical desta equação e simplificando o resultado, obtemos a sua equivalente

$$4ay = x^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4a}x^2,$$

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando-se contas semelhantes, obtemos

$$y = -\frac{1}{4a}x^2$$

$$x = \frac{1}{4a}y^2$$

$$x = -\frac{1}{4a}y^2$$

que são, respectivamente, as equações das parábolas das Figs. 3.14*b*, *c* e *d*. Em todos os casos

$$a = \frac{1}{2}d(F,r).$$

Exemplo. O gráfico da equação

$$x = -y^2,$$

é a parábola de foco $F(-1/4, 0)$ e diretriz $x = 1/4$ pois, neste caso, $1/4a = 1$, donde $a = 1/4$. Veja a Fig. 3.15.

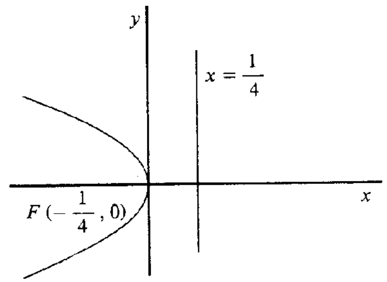


Fig. 3.15

Exercícios

3.1. O que acontece com a elipse da Fig. 3.3 quando os pregos são fixados cada vez mais próximo um do outro? Que curva se obtém se fixarmos os dois pregos no mesmo ponto?

3.2. Utilizando-se régua e compasso construir:

a) uma elipse conhecendo-se seus quatro vértices;
b) uma parábola conhecendo-se seu foco e seu vértice;
c) uma hipérbole conhecendo-se seus dois vértices e um de seus focos.

3.3. Esboce e determine os elementos principais (focos, vértices, assíntotas, diretriz) das curvas cujas equações são

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; *b*) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

c) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; *d*) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$;

e) $x = y^2$; *f*) $y = x^2$;

g) $4x^2 + 9y^2 = 36$; *h*) $x^2 - y^2 + 4 = 0$.

3.4. Deduzir uma equação

a) da elipse cujos focos são $F_1\,(-1, -1)$ e $F\,(1, 1)$ e o eixo maior é $4\sqrt{2}$;
b) da hipérbole cujos focos são $F_1\,(-1, -1)$ e $F\,(1, 1)$ e o eixo é $\sqrt{2}$;
c) da parábola de foco $F\,(0, 0)$ e diretriz $y = 2$.

3.5. Deduza uma equação da parábola com vértice em $V\,(6, -3)$ e cuja diretriz é a reta $3x - 5y + 1 = 0$.

3.6. Determine uma equação da hipérbole cujas assíntotas são $y = x$ e $y = -x$, sabendo-se que um de seus vértices é o ponto $(2, 0)$.

3.7. Escrever uma equação da elipse cujos focos são $F_1\,(-2, 1)$ e $F\,(2, 3)$ e o eixo menor mede 4.

3.8. Demonstre que a reta

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

é tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto $P\,(x_0, y_0)$.

3.9. Determine o valor de k para que a reta

$$\frac{2x}{9} + \frac{kx}{4} = 1$$

seja tangente à elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.10. Determine o ponto da elipse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

mais próximo da reta $2x - 3y + 25 = 0$.

3.11. Considere uma semi-elipse e uma semi-reta como mostra a Fig. 3.16. Se girarmos a semi-reta no sentido horário, em torno de P, em qual ponto da elipse ela tocará?

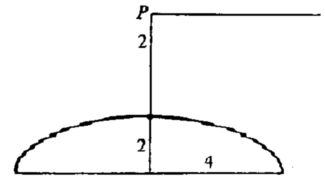


Fig. 3.16

3.12. Determine os valores de m para os quais a reta

$$y = \frac{5}{2}x + m$$

é tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

3.13. Seja P o pé da perpendicular baixada do foco F da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a uma das assíntotas. Demonstre que $\overline{PF} = b$ e $\overline{PO} = a$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

3.14. Prove que toda parábola cujo eixo é paralelo ao eixo y tem uma equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Qual é a forma geral das equações das parábolas cujo eixo é paralelo ao eixo x?

3.15. Deduzir uma equação da parábola que contém o ponto $(1, 4)$, sabendo-se que seu eixo é paralelo ao eixo y e que seu vértice é o ponto $(2, 3)$.

3.16. Deduza uma equação da parábola que contém os pontos $(-1, 12)$, $(1, 2)$ e $(2, 0)$ e tem eixo paralelo ao eixo y.

3.17. Prove que numa parábola o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo é duas vezes a distância do foco à diretriz.

3.18. *a*) Prove que a reta $x - 2ay_0 y + x_0 = 0$ é tangente à parábola $x = ay^2$ no ponto $P\,(x_0, y_0)$.
b) Mostre que a perpendicular à tangente em $P\,(x_0, y_0)$ é bissetriz do ângulo formado por PF (onde F é o foco da parábola) e a paralela ao eixo da parábola, que contém $P\,(x_0, y_0)$.

3.19. Mostre que, qualquer que seja o valor de t, o ponto

$$(a \cos t,\ b \operatorname{sen} t)$$

pertence à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observação. Quando t varia de 0 a 2π o ponto $(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ percorre a elipse, a partir do vértice $A\,(a, 0)$, uma vez.

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$

são equações paramétricas da elipse.

3.20. Uma partícula se move de modo que no instante t seu vetor posição é

$$\overrightarrow{OP}(t) = (t,\ 4t - t^2).$$

Determine:

a) uma equação cartesiana da trajetória da partícula;

b) o instante em que a partícula se encontra mais próxima da reta $y = 5$.

3.4 ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Nos parágrafos anteriores vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do segundo grau, isto é, é da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Vimos, ainda, que quando o sistema de coordenadas é convenientemente escolhido a equação da cônica reduz-se a uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(E)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(H)}$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2,\ y = -\frac{1}{4a}x^2,\ x = \frac{1}{4a}y^2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4a}y^2. \qquad \text{(P)}$$

Dizemos que estas equações estão na forma *reduzida* ou *canônica*.

Na Seç. 3.5 provaremos que, exceto em certos casos particulares, o gráfico de uma equação do segundo grau, em duas variáveis, é uma cônica. Em geral, a técnica utilizada para identificar e esboçar esta cônica consiste em simplificar sua equação efetuando-se mudanças do sistema de coordenadas. Estas mudanças são translação e rotação de eixos e serão introduzidas a seguir.

TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Na Fig. 3.17*a* estão representados dois sistemas de coordenadas: o sistema $x0y$, como de costume, e o sistema $x_1 0_1 y_1$, que pode ser imaginado como uma translação de $x0y$ tal que a origem 0 coincide com o ponto 0_1.

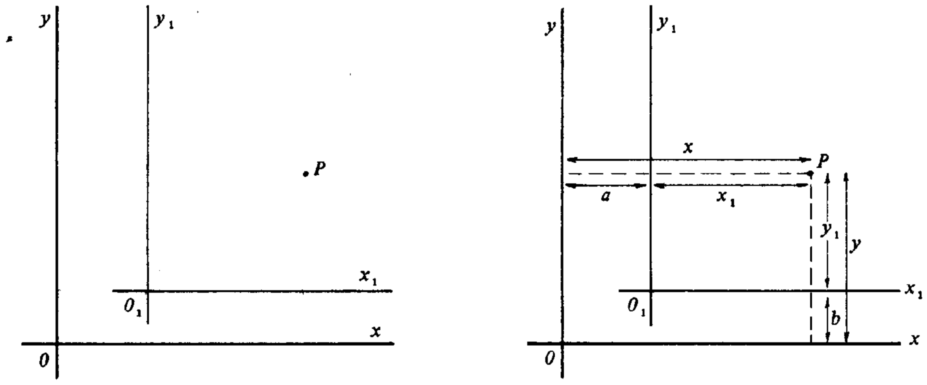
Se P é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas. Como mostra a Fig. 3.17*b*, se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$ e (x_1, y_1) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$, temos

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a \\ y &= y_1 + b, \end{aligned} \qquad \text{(s)}$$

onde (a, b) são as coordenadas de 0_1 em relação ao sistema $x0y$. Explicitando-se x_1 e y_1 em (s) obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x - a \\ y_1 &= y - b. \end{aligned}$$

Estas equações permitem passar das coordenadas de um ponto P, dadas no sistema $x0y$, para as coordenadas de P com relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$.



(*a*) (*b*)

Fig. 3.17

Exemplo. Seja o ponto $P(4, -1)$. Efetuando-se uma translação tal que a nova origem é $0_1(-2, 3)$, em relação ao novo sistema, as coordenadas de P passam a ser

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - (-2) = 6 \\ y_1 &= -1 - 3 = -4, \end{aligned}$$

ou seja, $P(6, -4)$. Veja a Fig. 3.18.

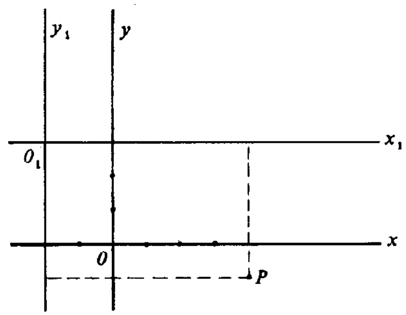


Fig. 3.18

Neste caso, as equações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{array}{l} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y - 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} x = x_1 - 2 \\ y = y_1 + 3. \end{array}$$

Se, relativamente ao sistema $x0y$, a equação de uma reta é

$$y = mx + b,$$

no sistema $x_1 0_1 y_1$ sua equação é

$$y_1 + 3 = m(x_1 - 2) + b$$

ou

$$y_1 = mx_1 + b - 2m - 3.$$

Observe que a declividade da reta não se alterou.

Exemplo. Usando uma translação conveniente elimine os termos do primeiro grau da equação

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

Solução. Completando os quadrados, em x e y, na equação dada, obtemos

$$4(x^2 - 2x + \underbrace{1}) + 9(y^2 - 4y + \underbrace{4}) + 4 = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4$$

ou

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Observe que para obtermos um quadrado perfeito no interior dos parênteses, somamos 1 no primeiro e 4 no segundo. Para mantermos a igualdade, estas mesmas parcelas, multiplicadas pelo coeficiente do parêntese, foram somadas no segundo membro. Depois disto, efetuamos a translação de eixos definidas pelas equações

$$\begin{array}{l} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y - 2 \end{array}$$

e escrevemos a equação

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

assim

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36,$$

que é a solução do problema.

Escrevendo-se a última equação acima na forma

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1,$$

vemos que seu gráfico é uma elipse cujos vértices, no sistema $x_1 0_1 y_1$, onde $0_1(1, 2)$, são

$$A_1(-3, 0), A(3, 0), B(0, 2) \text{ e } B_1(0, -2).$$

Esta elipse está mostrada na Fig. 3.19.

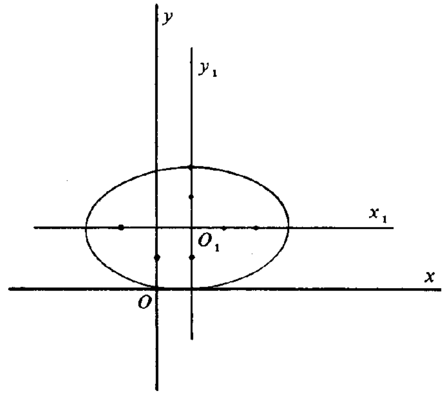


Fig. 3.19

Observe que a elipse acima é também o gráfico da equação

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

em relação ao sistema $x0y$, pois quando se efetua uma translação o gráfico não se altera, apenas a equação muda.

ROTAÇÃO DE EIXOS

Consideremos o sistema de coordenadas $x0y$, e seja $x_1 0 y_1$ o sistema de coordenadas obtido de $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, como mostra a Fig. 3.20.

Sejam (x, y) e (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas $x0y$ e $x_1 0 y_1$, respectivamente. Nosso objetivo é escrever x_1 e y_1 em função de x, y e do ângulo θ.

Uma rotação de um ângulo θ transforma os vetores

$$e_1 = (1, 0) \text{ e } e_2 = (0, 1)$$

nos vetores u_1 e u_2, onde

$$u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$
$$u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Para o vetor $\vec{OP}$ temos

$$\vec{OP} = (x, y) = xe_1 + ye_2,$$

onde x e y são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$. Por outro lado, como u_1 e u_2 são unitários e perpendiculares, temos também

$$\vec{OP} = (x_1, y_1) = x_1u_1 + y_1u_2,$$

sendo x_1 e y_1 as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 0 y_1$.

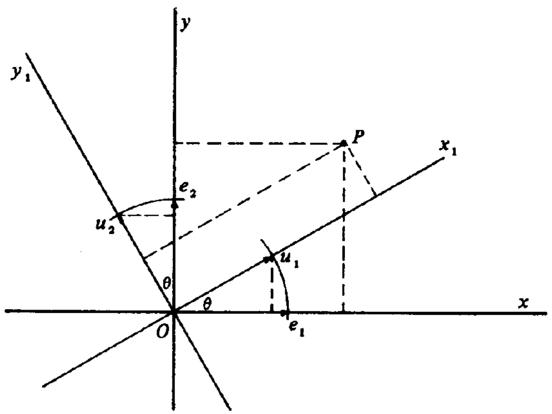


Fig. 3.20

Temos, então, a igualdade

$$xe_1 + ye_2 = x_1u_1 + y_1u_2$$

ou

$$xe_1 + ye_2 = x_1(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2) + y_1(-\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2)$$

de onde obtemos

$$x = x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta$$

ou

$$x_1 = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$$
$$y_1 = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Exemplo. Seja o ponto $P(6, 4)$. Efetuando-se uma rotação de um ângulo de $\pi/3$ radianos nos eixos, em relação ao novo sistema, suas coordenadas passam a ser

$$x_1 = 6\cdot\frac{1}{2} + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = -3\sqrt{3} + 2,$$

ou seja,

$$P(3 + 2\sqrt{3}, 2 - 3\sqrt{3}).$$

Exemplo. Usando uma rotação de eixos convenientes transforme a equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em uma que não contenha o termo em xy.

Solução. Substituindo x e y na equação dada por

$$x = x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta,$$

obtemos

$$4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)^2 +$$
$$+ 4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) +$$
$$+ (x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta) - 2(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) = 0,$$

que é a equivalente da equação inicial em relação ao sistema $x_1 0 y_1$, obtido do sistema $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ. Desenvolvendo-a, obtemos

$$4(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)x_1^2 + (4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)y_1^2 +$$
$$(-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta)x_1y_1 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)x_1 + \qquad (1)$$
$$+ (-\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta)y_1 = 0.$$

Como nosso objetivo é obter uma equação que não contenha o produto das variáveis, igualamos o coeficiente de x_1y_1 a zero, ou seja, impomos para θ a condição

$$-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Lembrando que $\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 1/2\operatorname{sen}2\theta$ e que $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, obtemos

$$-3\operatorname{sen}2\theta + 4\cos 2\theta = 0$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{4}{3}.$$

A partir desta igualdade deduzimos que

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(θ é aproximadamente 26°33').

Substituindo-se os valores de sen θ e cos θ na Eq. (1) e efetuando-se as contas, obtemos

$$y_1 = \sqrt{5}\, x_1^2.$$

O gráfico desta equação, como já vimos, é uma parábola. Ela está representada, juntamente com os dois sistemas de coordenadas, na Fig. 3.21.

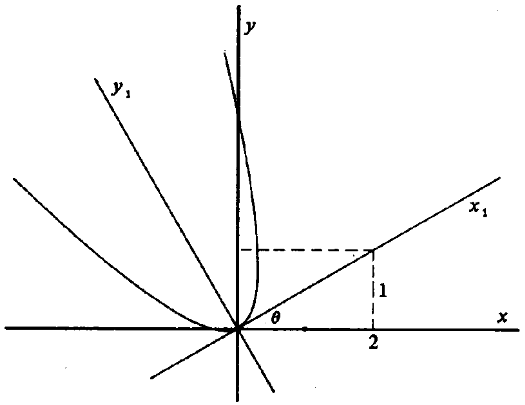


Fig. 3.21

Observe que esta parábola é também o gráfico da equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em relação ao sistema xy.

Como vimos nos exemplos anteriores, dada uma equação do segundo grau nas variáveis x e y, usando uma rotação de eixos podemos eliminar o termo em xy. O ângulo desta rotação é

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{a-b},$$

onde c é o coeficiente de xy, a o coeficiente de x^2 e b o coeficiente de y^2, desde que $a \neq b$. Se $a = b$, θ é 45°. (Veja o Exerc. 3.30.) Após eliminarmos o termo em xy, completamos os

quadrados na equação resultante para determinarmos a translação que elimina os termos do primeiro grau. Vejamos mais um exemplo.

Considere a equação

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y + 32 = 0.$$

Como o coeficiente de x^2 é igual ao de y^2, a rotação é de 45° e suas equações são

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y_1$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,y_1.$$

Substituindo-se estes valores na equação dada e simplificando-a, obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0.$$

Depois de completarmos os quadrados em x_1 e y_1, podemos escrever esta última equação assim

$$\frac{(x_1-2)^2}{16} - \frac{(y_1-1)^2}{4} = 1,$$

que se transforma em

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1,$$

após efetuarmos a translação de eixos definida por

$$x_2 = x_1 - 2$$
$$y_2 = y_1 - 1.$$

O gráfico desta equação é uma hipérbole. Ela está representada na Fig. 3.22, juntamente com os três sistemas de coordenadas.

A construção da Fig. 3.22 obedeceu à seguinte ordem: primeiro desenhamos o sistema de coordenadas xy; girando-se tal sistema de 45° obtivemos o sistema x_1y_1; o sistema x_2y_2 foi obtido conforme a translação definida pelas equações

$$x_2 = x_1 - 2$$
$$y_2 = y_1 - 1,$$

isto é, é uma translação de x_1y_1 onde o ponto (2, 1), relativamente ao sistema x_1y_1, é a nova origem. O esboço da hipérbole foi feito no sistema x_2y_2.

Observe que com a rotação o eixo x_1 ficou paralelo ao eixo da hipérbole e com a translação a origem do novo sistema x_2y_2 coincidiu com o centro da hipérbole.

a = b
45°

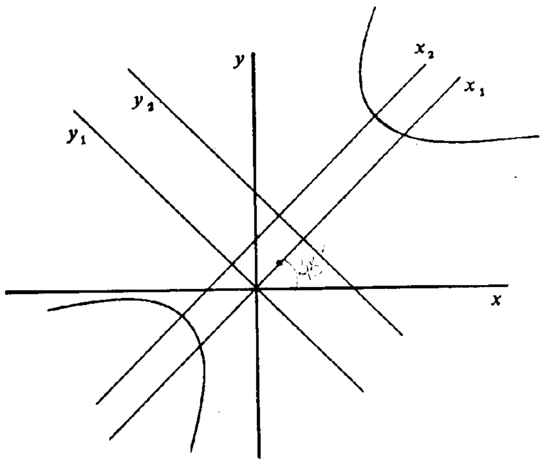


Fig. 3.22

Exercícios

3.21. Efetua-se uma translação de eixos de modo que a nova origem seja o ponto $(-2, 3)$.

a) Determine as coordenadas dos pontos $(3, 2)$ e $(5, 7)$ com respeito ao novo sistema.

b) Escrever uma equação da reta $y = 2x + 7$ com respeito ao novo sistema.

3.22. Efetuar uma translação de eixos tal, que em relação ao novo sistema, as equações das retas $y = 2x - 1$ e $x + 3y = 11$ não contenham o termo constante. Escreva as equações destas retas em relação ao novo sistema.

3.23. Seja $x_1 0_1 y_1$ um sistema obtido de $x0y$ por uma translação. Determine a nova origem 0_1, sabendo-se que um determinado ponto tem coordenadas $(3, 4)$ no sistema $x0y$ e $(-2, 3)$ no sistema $x_1 0_1 y_1$.

3.24. Seja $x_1 0_1 y_1$ uma translação de $x0y$ cuja a nova origem é $0_1 (4, 1)$ e $x_2 0_2 y_2$ uma translação de $x_1 0_1 y_1$ cuja nova origem (no sistema $x_1 0_1 y_1$) é $0_2 (1, 2)$.

a) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{00_1}$, $\overrightarrow{0_1 0_2}$ e $\overrightarrow{00_2}$ em relação a cada um dos três sistemas.

b) Verifique que $\overrightarrow{00_2} = \overrightarrow{00_1} + \overrightarrow{0_1 0_2}$, em qualquer um dos três sistemas.

3.25. Mostre que quando se efetua uma translação de eixos as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{AB}$ (sendo A e B dois pontos quaisquer) não se alteram.

3.26. Efetua-se uma rotação de eixos de um ângulo θ no sistema $x0y$. Sabendo-se que, em relação ao sistema $x0y$, o ponto P é dado por $(5, \sqrt{3})$ e que, em relação ao novo sistema, é dado por $(4, -2\sqrt{3})$, determinar o ângulo θ.

3.27. Determine as coordenadas do ponto $P(2, 5)$ em relação ao sistema obtido do sistema $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ tal que $\operatorname{tg} \theta = 1/3$.

3.28. Seja $x_1 0 y_1$ o sistema obtido de $x0y$ por uma rotação de 30° no sentido anti-horário, e $x_2 0_2 y_2$ o sistema obtido de $x_1 0 y_1$ por uma translação tal que a nova origem (no sistema $x_1 0 y_1$) é o ponto $0_2 (3, 2)$.

a) Determine as coordenadas do ponto P nos sistemas $x0y$ e $x_2 0_2 y_2$, sabendo-se que no sistema $x_1 0 y_1$ ele é dado por $(2, 1)$.

b) Determine as coordenadas do ponto Q no sistema $x0y$, sabendo-se que no sistema $x_2 0_2 y_2$ ele é dado por $(1, 2)$.

ok!
RETOMAR

3.29. Se $x0y$ e $x_1 0_1 y_1$ são os sistemas de coordenadas mostrados na Fig. 3.23, determine as equações de mudança de $x0y$ para $x_1 0_1 y_1$.

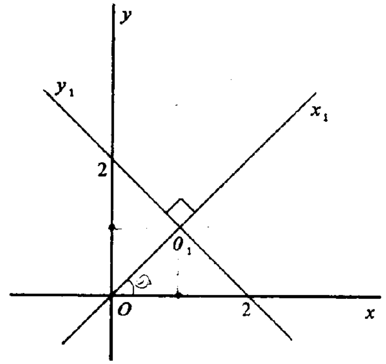


Fig. 3.23

3.30. Dada a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

demonstre que se pode eliminar o termo em xy com uma rotação de eixos de um ângulo igual a $\pi/4$ radianos, se $A = B$, e igual a

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{C}{A - B}, \text{ se } A \neq B.$$

3.31. Esboce o gráfico das seguintes equações:

a) $4(x-1)^2 + 9y^2 = 36$;
b) $x^2 - y^2 - 22x = 0$;
c) $x^2 - 16y^2 - 32y - 32 = 0$;
d) $16y = x^2 + 8x + 32$;
e) $xy = 1$;
f) $xy - 2y - 4x = 0$;
g) $x^2 + y^2 + xy = 3$;
h) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x - 6y = 0$; confirmar
i) $41x^2 + 41y^2 - 18xy - 384x - 384y + 1\,504 = 0$.

3.32. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $x = 1$, $y = 2$ e a tangente à cônica

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

no ponto $\left(2, \dfrac{4 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

3.5 EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU

Já vimos que as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) são subconjuntos do plano cujas equações são do segundo grau. Nos exemplos seguintes apresentaremos outros subconjuntos do plano cujas equações são, também, do segundo grau.

Exemplo. Determine uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto constituído das retas

$$r: ax + by + c = 0$$
$$s: a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Solução. Indiquemos por $r \cup s$ o subconjunto constituído das retas r e s. Como um ponto (x_o, y_o) pertence a $r \cup s$ se, e somente se,

$$ax_o + by_o + c = 0$$

ou

$$a_1x_o + b_1y_o + c_1 = 0$$

e uma destas equações se anula se, e somente se,

$$(ax_o + by_o + c)(a_1x_o + b_1y_o + c) = 0,$$

segue que $r \cup s$ é o gráfico de

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

que, evidentemente, é uma equação do segundo grau em x e y. Por exemplo, o gráfico da equação

$$(x + y + 1)(2x - y + 4) = 0$$

ou

$$2x^2 - y^2 + xy + 6x + 3y + 4 = 0$$

é o par de retas mostrado na Fig. 3.24*a*.

Observe que se $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ são equações da mesma reta,

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

é uma equação do segundo grau cujo gráfico é uma única reta. Por exemplo, o gráfico de

$$(x + y - 1) \cdot (2x + 2y - 2) = 0$$

ou

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$$

é a reta representada na Fig. 3.24*b*.

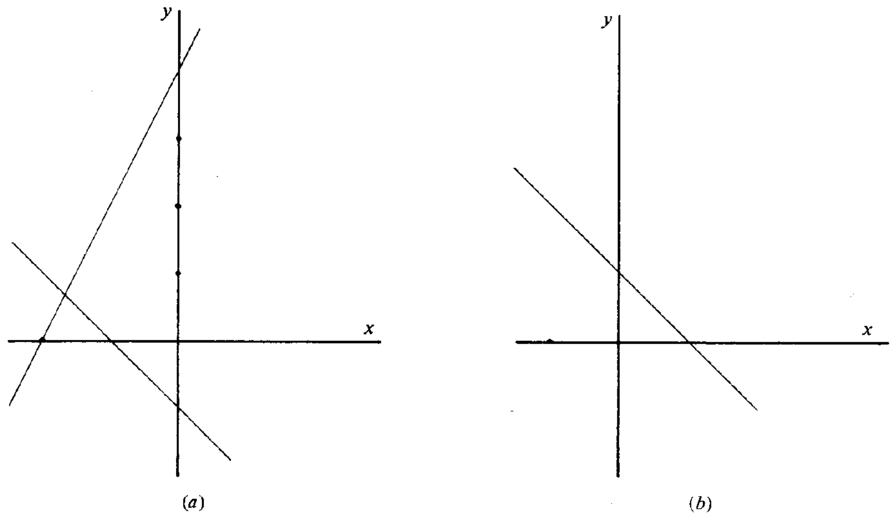


Fig. 3.24

Pode também acontecer que o gráfico de uma equação do segundo grau seja um único ponto ou o conjunto vazio. Por exemplo, o gráfico de

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

é o ponto $(1, -3)$ e o gráfico de

$$4x^2 + 9y^2 + 5 = 0$$

é o conjunto vazio.

Portanto, até agora, vimos que o gráfico de uma equação do segundo grau pode ser:

uma elipse,
uma hipérbole,
uma parábola,
um par de retas,
uma única reta,
um ponto ou
o conjunto vazio.

Nas páginas seguintes, demonstraremos que o gráfico de qualquer equação do segundo grau, com duas variáveis, é um destes subconjuntos. Eles, exceto o subconjunto vazio, são as possíveis interseções de um cone (veja Cone de Revolução, Seç. 1, Cap. 5) com um plano e, por isto, são chamados cônicas. Veja a Fig. 3.25.

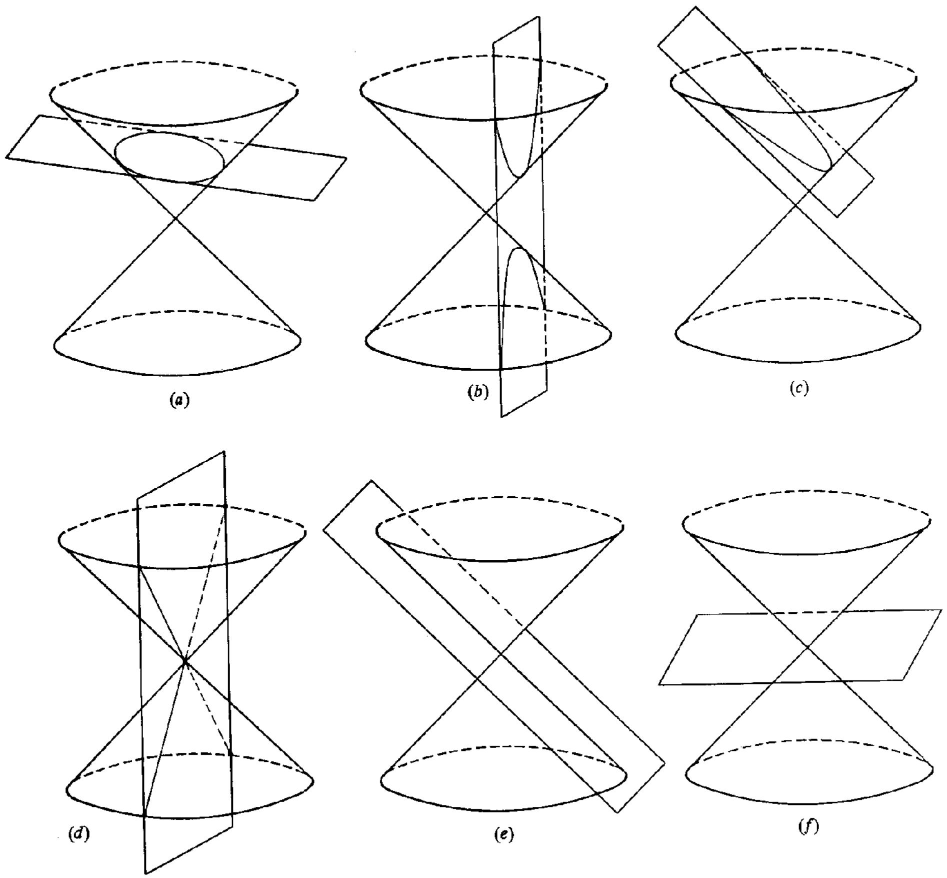


Fig. 3.25

No caso das Figs. 3.25*d*, *e* e *f* a cônica é dita degenerada.

Observação. O estudo das cônicas sob este ponto de vista, isto é, como interseção de um plano e um cone, data do Séc. III a.c. e precede a própria Geometria Analítica que só surgiu no Séc. XVII.

Proposição 3.1 – *O gráfico de uma equação do segundo grau, isto é, o gráfico de uma equação da forma*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, a, b \text{ ou } c \neq 0,$$

é uma cônica.

Demonstração. Inicialmente efetuamos uma rotação de eixos de um ângulo θ, onde

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{c}{a-b}, \text{ se } a \neq b,$$

$$\theta = 45°, \text{ se } a = b.$$

De acordo com o Exerc. 3.30, após esta rotação a equação dada se transforma numa equação da forma

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F_1 = 0, \tag{I}$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Se $A \neq 0$ e $B = 0$, temos

$$Ax_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0. \tag{II}$$

Neste caso, se $E = 0$, esta equação se reduz a

$$Ax_1^2 + Dx_1 + F = 0,$$

cujo gráfico é um par de retas paralelas ao eixo y_1, uma reta paralela ao eixo y_1 ou o conjunto vazio, conforme $D^2 - 4AF$ seja, respectivamente, maior, igual ou menor que zero. Se $E \neq 0$, temos, de (II),

$$y_1 = -\frac{A}{E} x_1^2 - \frac{D}{E} x_1 - \frac{F}{E},$$

cujo gráfico é (veja Exerc. 3.14) uma parábola. Portanto, a proposição está provada no caso $A \neq 0$ e $B = 0$. A prova do caso $A = 0$ e $B \neq 0$ é análoga.

Continuando, suponhamos A e B não-nulos. Completando-se os quadrados em x_1 e y_1 na Eq. (I), obtemos

$$A\left(x_1^2 + \frac{D}{A} x_1 + \frac{D^2}{4A^2}\right) + B\left(y_1^2 + \frac{E}{B} y_1 + \frac{E^2}{4B^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

ou

$$A\left(x_1 + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y_1 + \frac{E}{2B}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}. \tag{1}$$

Efetuando a translação de eixos definida pelas equações

$$x_2 = x_1 + \frac{D}{2A}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E}{2B}$$

reduzimos a Eq. (1) a

$$Ax_2^2 + By_2^2 = \Delta, \tag{2}$$

onde

$$\Delta = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}.$$

Se $\Delta = 0$, o gráfico de (2) é um par de retas concorrentes, se A e B tiverem sinais contrários ou um ponto, se A e B tiverem o mesmo sinal.

Se $\Delta \neq 0$, obtemos, de (2)

$$\frac{x_2^2}{\frac{\Delta}{A}} + \frac{y_2}{\frac{\Delta}{B}} = 1,$$

cujo gráfico é uma elipse, se A, B e Δ tiverem o mesmo sinal, ou uma hipérbole, se os sinais de A e B forem contrários.

Exercícios

3.33. *a*) Deduza uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto formado pelas retas r e s da Fig. 3.26.

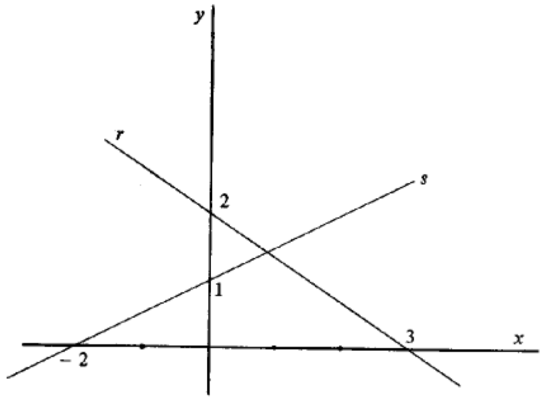


Fig. 3.26

b) Deduza duas equações do segundo grau, (E_1) e (E_2), cujos gráficos sejam, respectivamente, as retas r e s.

c) Multiplique (E_1) por (E_2) e obtenha uma equação do quarto grau em x e y cujo gráfico é o par de retas formado por r e s.

34. Dê exemplo de uma equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde os coeficientes A, B, C, D, E e F sejam todos não-nulos, cujo gráfico seja o conjunto vazio.

3.35. Mostre que o gráfico de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

é o par de assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.36. Dada a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

demonstre que o número

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

é invariante por rotação ou translação, isto é, se

$$A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0$$

é a equação que se obtém de (I) efetuando-se uma rotação ou translação de eixos, então

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

Demonstre, ainda, que conforme Δ seja menor, maior ou igual a zero, o gráfico de (I) é, respectivamente, uma elipse ou um ponto, uma hipérbole ou um par de retas concorrentes, uma parábola ou um par de retas paralelas ou uma única reta.

3.6 DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS

Exemplo. Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a d, determinar o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = e\, d(P, d),$$

onde e é um número positivo.

Solução. Como mostra a Fig. 3.27, introduzimos um sistema de coordenadas onde o eixo y coincide com a reta d e o eixo x é a perpendicular traçada de F à reta d. O ponto F tem coordenadas $(p, 0)$, onde $p = d(F, d)$. Relativamente a este sistema, o conjunto de pontos procurado é caracterizado pela equação

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e\,|x|,$$

que é equivalente a

$$(1 - e^2)\,x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0. \qquad (1)$$

O gráfico de (1), independentemente dos valores (positivos) de e e p, é uma cônica não degenerada (veja Seç. 3.5). Se $e < 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 são ambos positivos e a cônica, cuja equação é (1), é uma elipse. Se $e = 1$, o coeficiente de x^2 é zero e o gráfico é uma parábola. Por último, se $e > 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 têm sinais contrários e o gráfico é uma hipérbole.

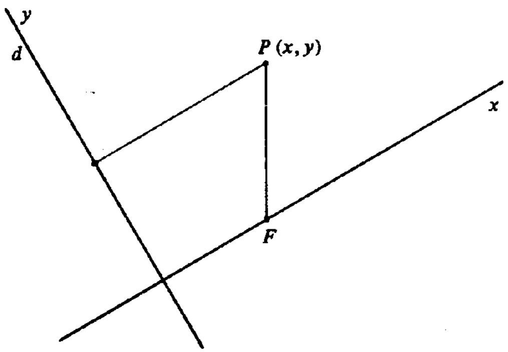


Fig. 3.27

Em vista dos resultados acima podemos unificar a definição de cônica da seguinte forma:

Dados uma reta d *e um ponto* F *não pertencente a* d, *e um número positivo* e, *chama-se cônica de diretriz* d, *foco* F *e excentricidade* e, *o conjunto dos pontos* P, *do plano definido por* d *e* F, *tais que*

$$d(P, F) = e\, d(P, d).$$

A cônica é uma elipse, hipérbole ou parábola, conforme o número e *seja, respectivamente, menor, maior ou igual a 1.*

Exemplo. Equação da cônica (elipse) de foco $F(1, 0)$, excentricidade $1/2$ e que tem por diretriz a reta de equação $x = 4$.

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da cônica. Aplicando a definição unificada, temos

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|x - 4|,$$

que é equivalente a

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

que é a equação procurada. Observe que reescrevendo-se a última equação assim

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

vemos que a cônica é, de fato, uma elipse e que seu outro foco é $F_1(-1, 0)$. Veja a Fig. 3.28. A reta d', de equação $x = -4$, é também uma diretriz da elipse.

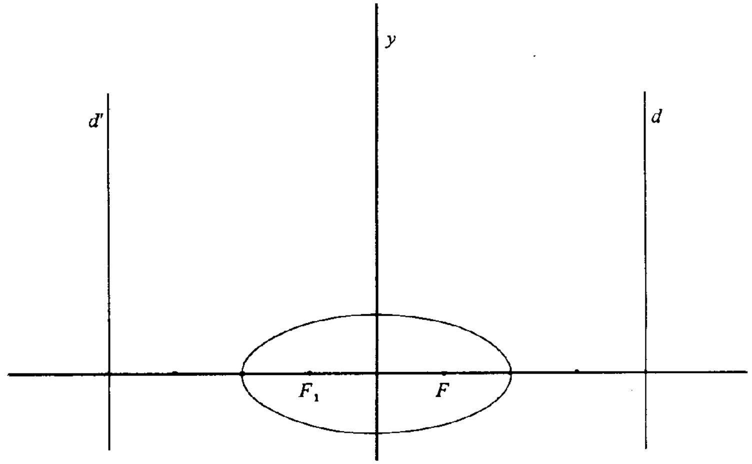


Fig. 3.28

Exercícios

3.27. Deduzir uma equação da cônica de foco $F(2, 0)$ com excentricidade e diretriz

a) $e = \dfrac{1}{4}, \quad x = 8;$

b) $e = 4, \quad x = \dfrac{1}{2};$

c) $e = 1, \quad x = -2.$

3.38. Demonstre que a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b < a$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

3.39. Demonstre que a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3.40. Demonstre que a parábola

$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

é a cônica de foco $F(0, a)$, excentricidade $e = 1$ e diretriz $y = -a$.

O ESPAÇO 4

4.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Inicialmente nosso objetivo é estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e as ternas ordenadas (x, y, z) de números reais. Para isto, tomamos três retas x, y e z perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O como mostra a Fig. 4.1*a*.

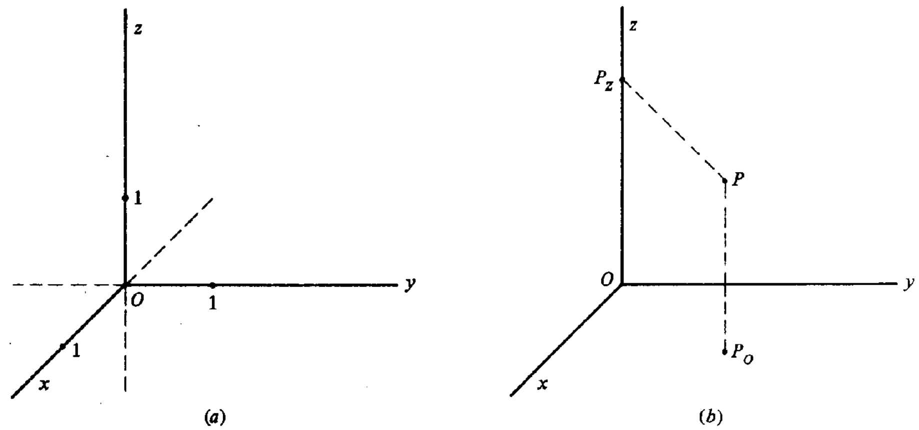
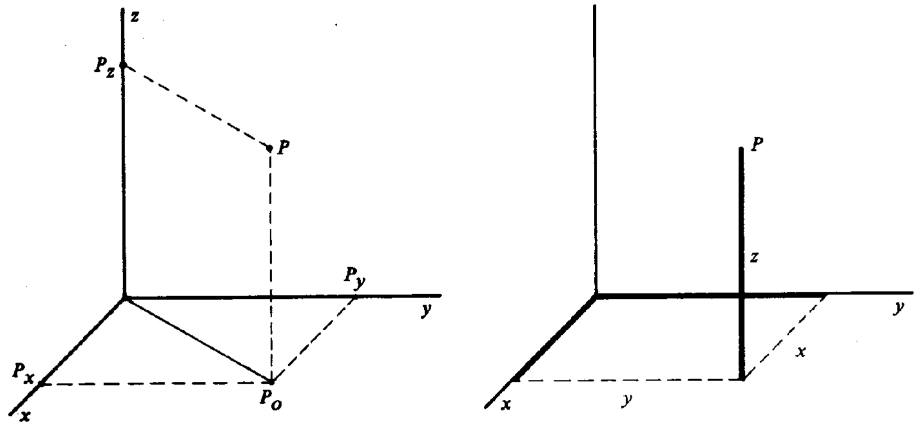


Fig. 4.1

Considerando O como origem, tomemos sobre x, y e z unidades iguais e arbitremos em cada uma um sentido positivo. Observe que os eixos x, y e z definem três planos cada um munido de um sistema de coordenadas. Os eixos x e y, por exemplo, definem o plano horizontal xOy. Seja P um ponto qualquer do espaço. Traçando-se por P perpendiculares a z e ao plano horizontal xOy determinamos os pontos P_z e P_o, veja Fig. 4.1*b*. O ponto P_o, por sua vez, determina nos eixos x e y os pontos P_x e P_y, veja Fig. 4.2*a*. Sejam x, y e z as coordenadas de P_x, P_y e P_z. Ao ponto P associaremos a terna (x, y, z).



(*a*) (*b*)

Fig. 4.2

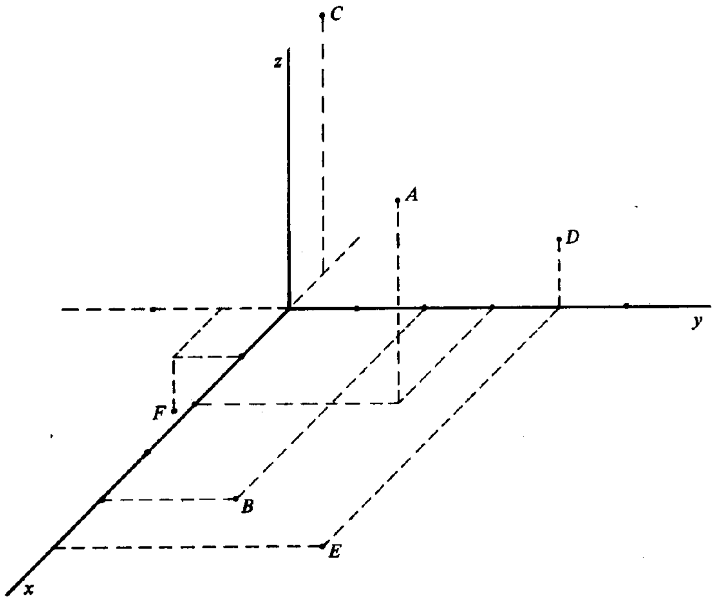


Fig. 4.3

Para indicarmos que P tem coordenadas x, y e z usaremos a notação

$$P(x, y, z).$$

Como a construção que acabamos de descrever pode ser feita no sentido inverso, isto é, partindo-se do terno ordenado determinar o ponto, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais, como queríamos. A Fig. 4.2*b* é uma simplificação da Fig. 4.2*a*. Nela aparecem somente os elementos essenciais na representação de P. Na Fig. 4.3, estão representados os pontos $A\,(2, 3, 4)$, $B\,(4, 2, 0)$, $C(-1, 0, 5)$, $D\,(0, 4, 1)$, $E\,(5, 4, 0)$ e $F\,(1, -1, -1)$.

Exemplo. Uma sala tem 6 m de largura por 8 m de comprimento e 4 m de altura. Estabelecer um sistema e dar as coordenadas dos seguintes pontos:

a) dos oito cantos da sala;

b) do ponto de interseção das diagonais do piso;

c) de um ponto situado a 2 m de altura e sobre a vertical que contém a interseção das diagonais do piso.

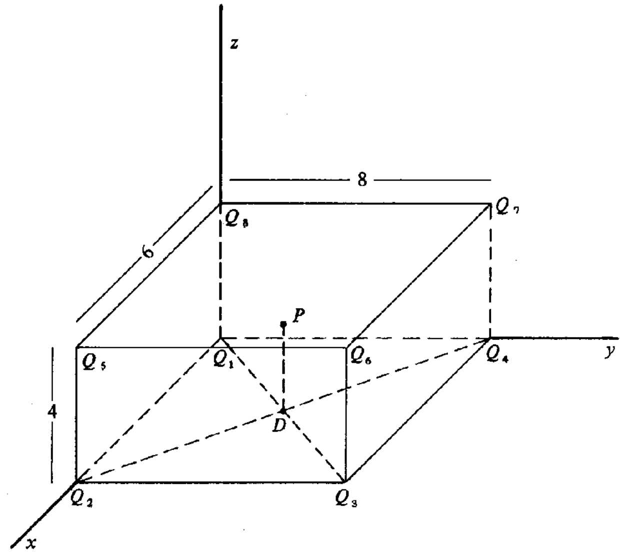


Fig. 4.4

Solução. *a*) Embora tenhamos total liberdade para eleger o sistema de coordenadas, por uma questão de simplicidade, nossa escolha deve recair sobre um que tenha um dos cantos da sala como origem. Outra condição, que também simplificará bastante as coordenadas, é que as arestas da sala coincidem com os eixos do sistema. Um sistema que satisfaz estas duas condições está mostrado na Fig. 4.4. Em relação a tal sistema temos as seguintes coordenadas para os cantos da sala:

$$Q_1\,(0,0,0),\ Q_2\,(6,0,0),\ Q_3\,(6,8,0),\ Q_4\,(0,8,0),\ Q_5\,(6,0,4),$$
$$Q_6\,(6,8,4),\ Q_7\,(0,8,4),\ Q_8\,(0,0,4).$$

b) Como o ponto D pertence ao plano xy, sua terceira coordenada é nula, isto é, $z = 0$. As coordenadas x e y de D são, respectivamente, 3 e 4, como mostra a Fig. 4.5. Logo, $D\,(3,4,0)$.

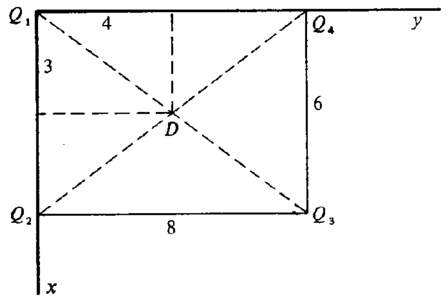


Fig. 4.5

c) As duas primeiras coordenadas de P coincidem com as de D, pois P e D estão numa mesma vertical. A terceira coordenada de P é 2 porque P está duas unidades acima do plano xy. Logo, $P\,(3,4,2)$.

Exercícios

4.1. Representar graficamente os seguintes pontos: $A\,(1,\ 3,\ 2)$, $B\,(0,\ -1,\ 0)$, $C\,(-1,\ -2,\ -3)$, $D\,(0,-3,-5)$, $E\,(0,0,8)$ e $F\,(-2,0,1)$.

4.2. Representar graficamente
a) a reta definida pelos pontos $A\,(2,1,3)$ e $B\,(4,5,-2)$;
b) o plano definido pelos pontos $A\,(0,0,3)$, $B\,(2,3,1)$ e $C\,(0,3,4)$.

4.3. Descreva e represente graficamente os seguintes conjuntos de pontos:

$$A = \{(x,y,z) : x = y = 0\},$$
$$B = \{(x,y,z) : x = 2 \text{ e } y = 3\},$$
$$C = \{(x,y,z) : z = 1\},$$
$$D = \{(x,y,z) : x = 0\},$$
$$E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

4.4. Escreva na forma dos conjuntos $A, B, C, \ldots$, do Exerc. 4.3, os pontos pertencentes
a) a um plano paralelo ao plano xOy e duas unidades acima deste;
b) a uma reta paralela ao eixo x e que intercepta o plano yOz no ponto $(0,2,3)$.

4.5. Um tanque de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base 5×6, altura 3. Dois terços do volume do tanque são ocupados por água. Na superfície superior da água forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha está a igual distância das superfícies das paredes de 5 m de base, e em relação às paredes de 6 m de base, sua posição é tal, que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabelecer um sistema de coordenadas, tendo como origem um dos cantos inferiores do tanque e como um dos planos de coordenadas a parede, de base 6 m, mais próxima da bolha, e dar, em relação a este sistema, as coordenadas do ponto onde se encontra a bolha.

4.6. Determine as coordenadas dos pontos de interseção dos conjuntos

$$A = \{(x,y,z) : z = -1\} \text{ e } B = \{(x,y,z) : x = 2, y = -1\}.$$

4.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P\,(x_1, y_1, z_1)$ e $Q\,(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e P_o e Q_o suas projeções no plano xOy. Traçando-se por P o segmento $\overline{PS}$ paralelo a P_oQ_o, obtemos o triângulo retângulo PSQ. A hipotenusa $\overline{PQ}$ deste triângulo é dada por

$$\sqrt{\overline{SP}^2 + \overline{SQ}^2}\,. \qquad (1)$$

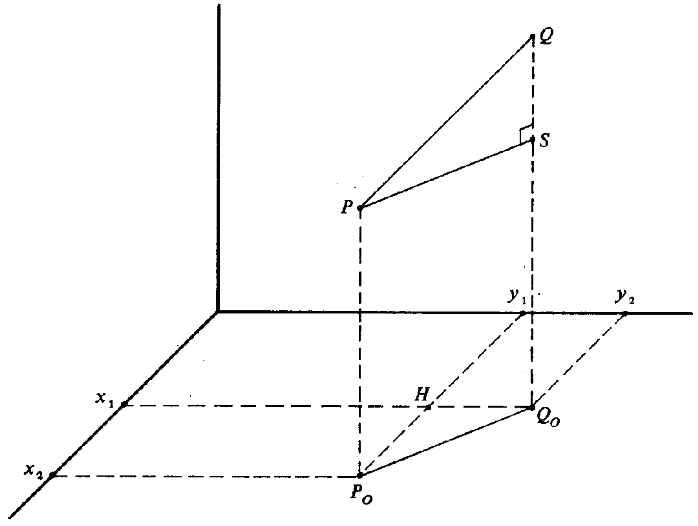


Fig. 4.6

Como o quadrilátero SQ_oP_oP é um retângulo, temos que

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 \tag{2}$$

e que

$$\overline{SP}^2 = \overline{Q_oP_o}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{3}$$

A última igualdade foi obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo P_oHQ_o. Substituindo-se (2) e (3) em (1), obtemos

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Este número, que é a medida da hipotenusa do triângulo PSQ, é chamado distância entre P e Q e indicado por $d\,(P, Q)$. Isto é, por definição,

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Exemplo. A distância entre os pontos $P\,(2, -1, 0)$ e $Q\,(-3, 4, 2)$ é

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(-3-2)^2 + (4+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{54}.$$

A distância entre o ponto $A\ (x, y, z)$ e a origem $O\ (0, 0, 0)$ é

$$d\,(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

4.3 ESFERA

Uma esfera de centro em $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos $P\,(x, y, z)$ do espaço tais que

$$d\,(P, C) = r.$$

Como $d\,(P, C) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$, temos que um ponto $P\,(x, y, z)$ pertence à esfera de centro $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio r se, e somente se,

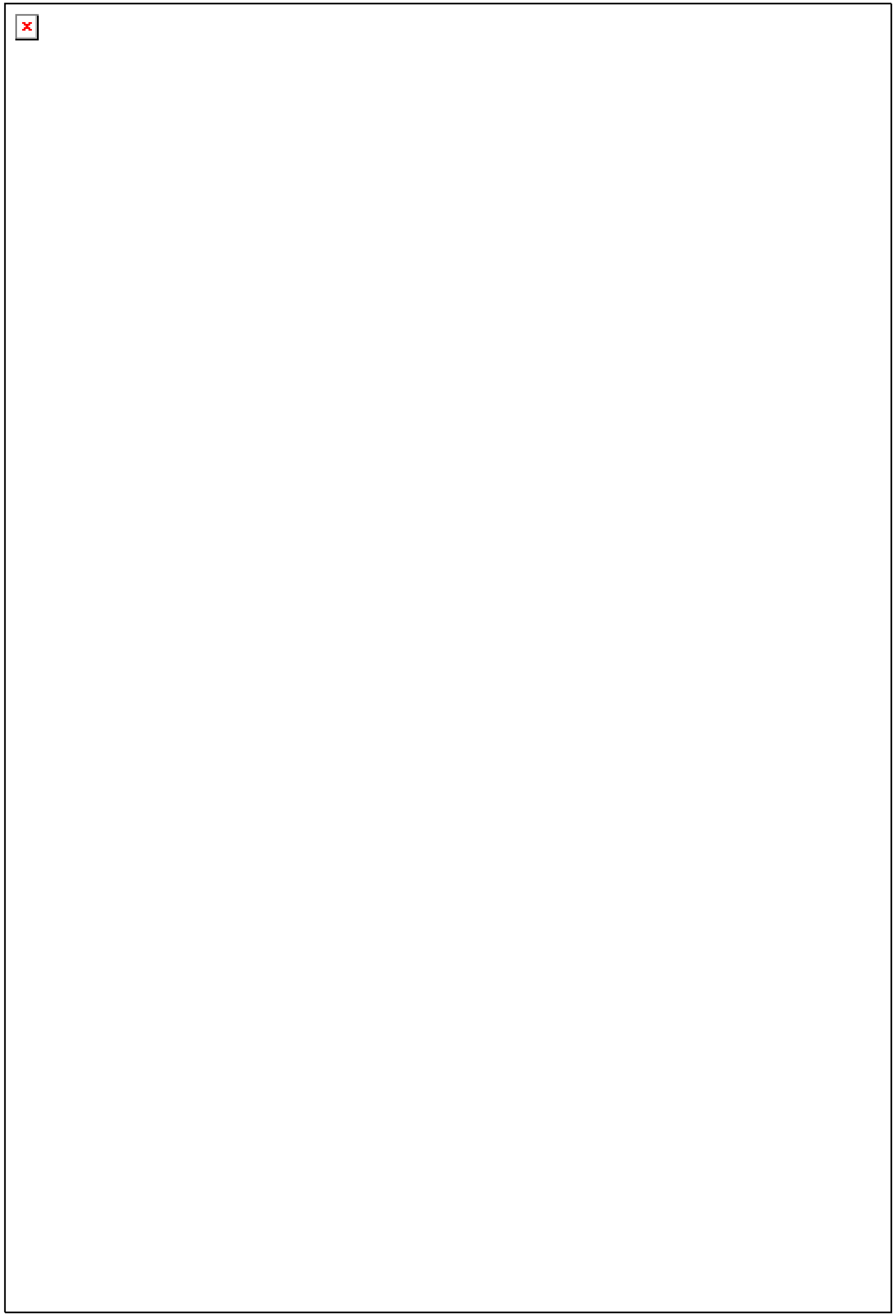
$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} = r.$$

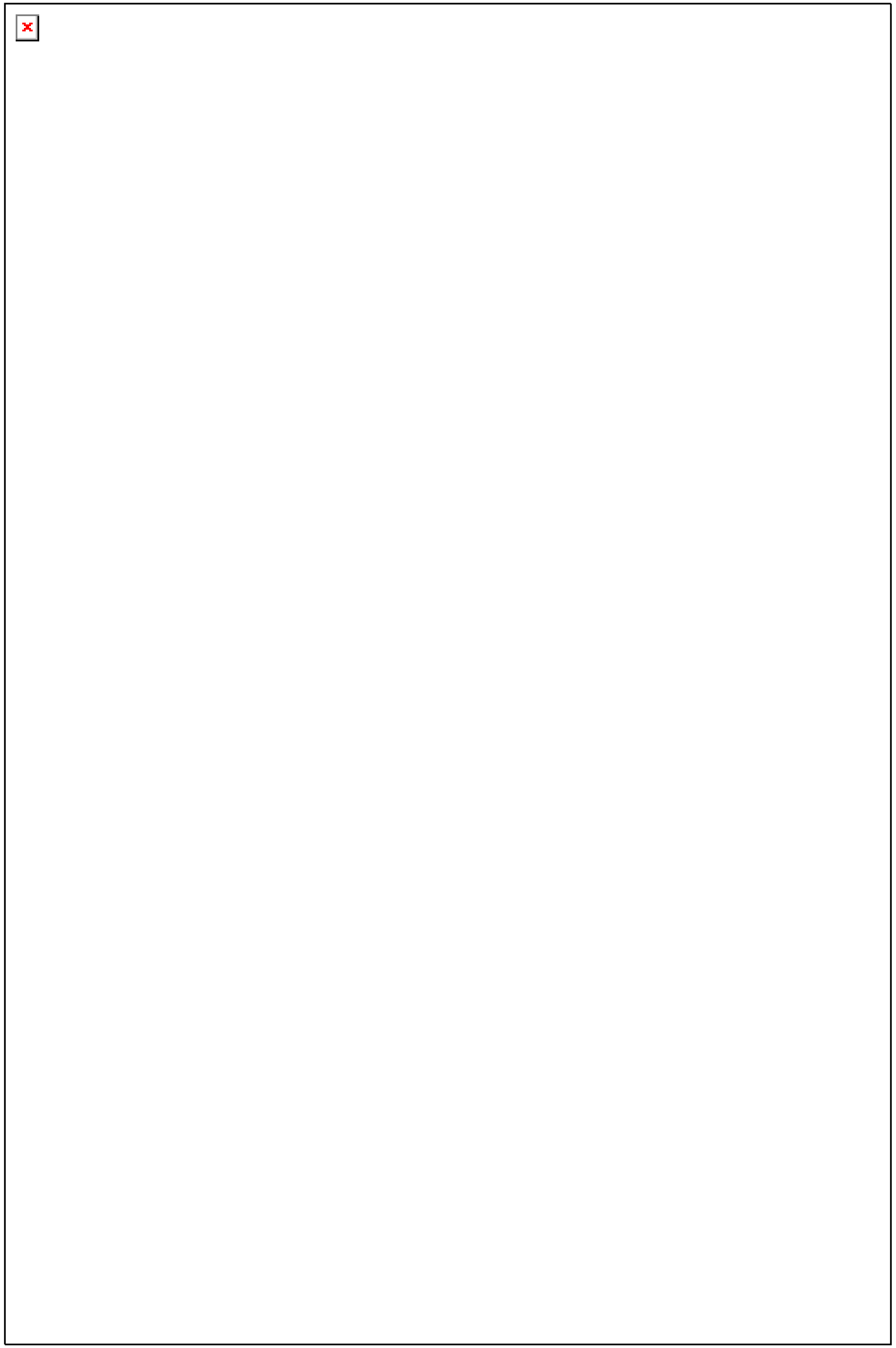
Esta igualdade é equivalente a

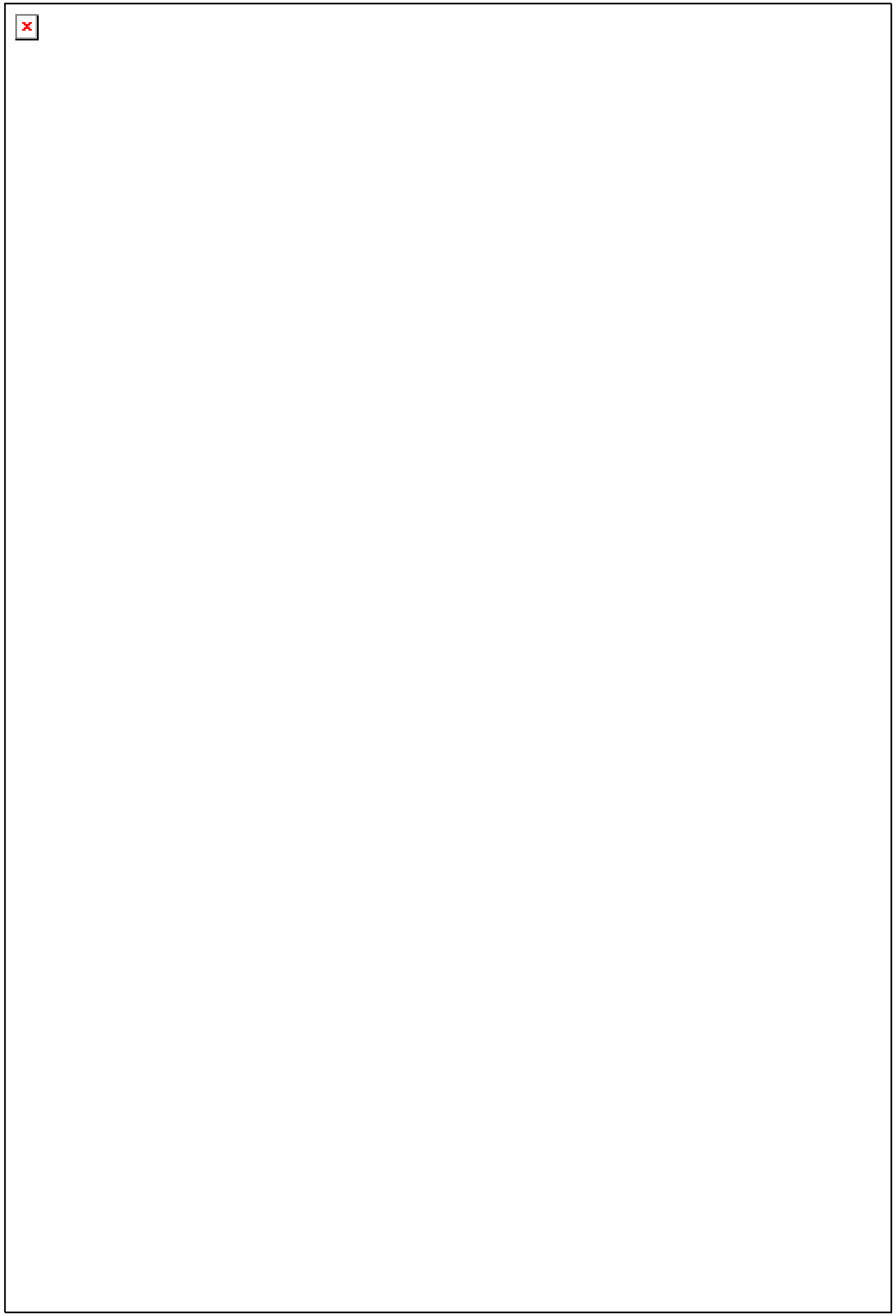
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

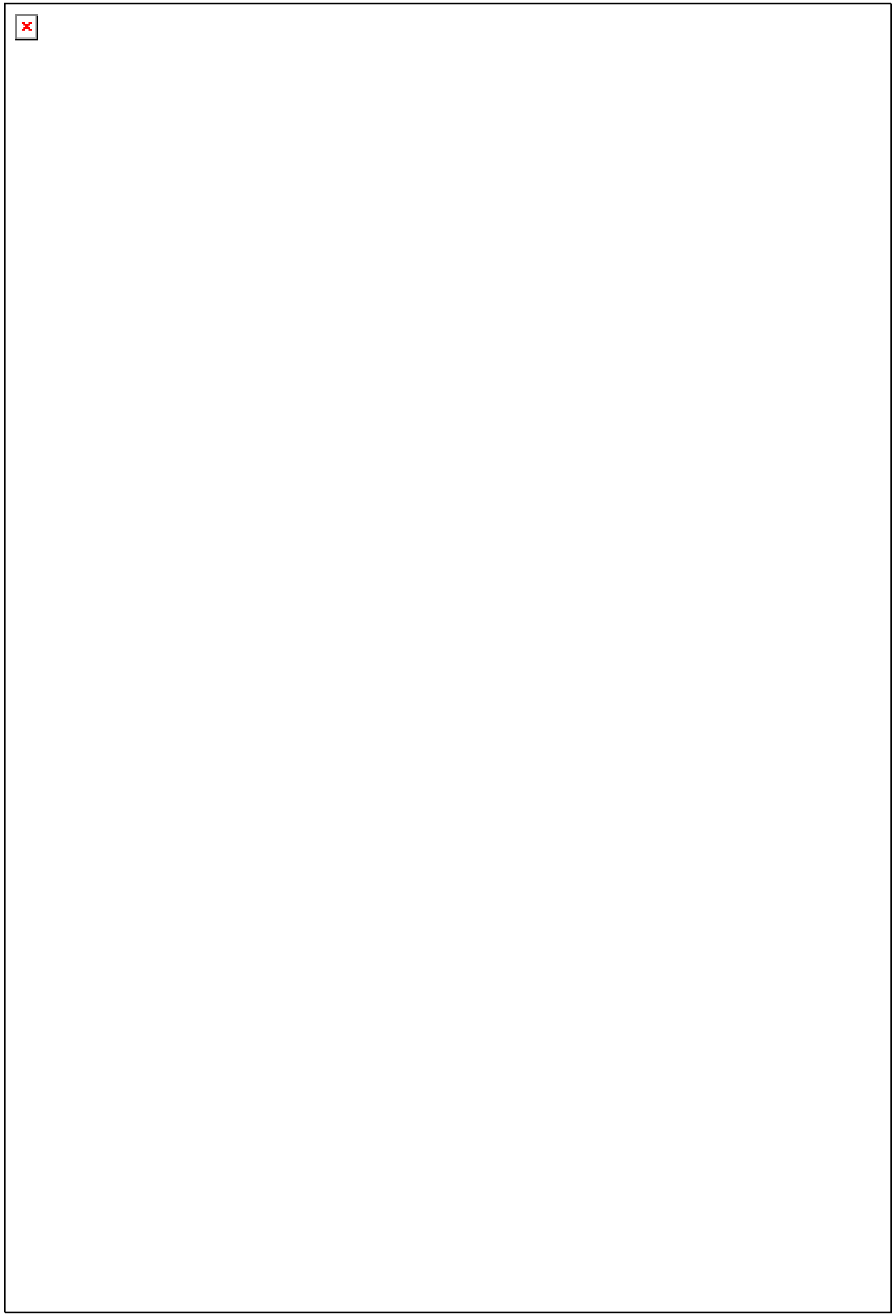
ıe é chamada *equação cartesiana da esfera* de centro $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio r. Por exemplo, na equação da esfera de centro em $(2, 1, -3)$ e raio 3 é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 9.$$









GEOMETRIA ANALÍTICA

GENÉSIO LIMA DOS REIS

— Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás
Doutor, IMPA

VALDIR VILMAR DA SILVA

— Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás
Mestre, UFG

5ª Reimpressão

LTC
EDITORA

PREFÁCIO

A idéia de se escrever este livro ocorreu por volta do ano de 1972. A proposta era a de obter um texto de Geometria Analítica adequado aos estudantes dos cursos de Matemática, Física e Engenharia, recém-ingressados na Universidade, isto é, cuja leitura pressupusesse apenas conhecimentos básicos de Álgebra e Geometria Elementar, a nível colegial.

De maneira intuitiva e geométrica introduzimos a reta real no Cap. 1. Em linguagem vetorial, apresentamos a Geometria Analítica no plano nos Caps. 2 e 3, e no espaço, nos Caps. 4 e 5. No plano, iniciamos com sistemas de coordenadas e concluímos com cônicas. Além das aplicações geométricas, damos várias aplicações à Física, especialmente as relacionadas com movimento de partícula e resultantes de forças. Para o estudante que esteja cursando Cálculo Diferencial, indicamos também as soluções com o emprego de derivadas, para o cálculo de velocidade e de tangentes. Na obtenção das formas canônicas das cônicas utilizamos rotação e translação de eixos. No espaço tridimensional (Caps. 4 e 5) estudamos a reta, o plano e as superfícies quádricas na forma canônica. No Cap. 6, introduzimos a Geometria Analítica no plano complexo. As várias formas de equações de curvas (cartesianas, paramétricas, complexas e polares) são aqui reunidas, para destacar as vantagens de umas ou de outras, conforme a curva que se esteja estudando. No Cap. 7 apresentamos o espaço de dimensão quatro. Este capítulo faz sentir a necessidade de uma teoria mais sólida para o estudo de espaços de dimensões superiores e serve como uma transição natural para um curso de Álgebra Linear. Aliás, frizamos que ao introduzir o Cálculo Vetorial neste livro o fizemos com o propósito de enriquecer as técnicas usadas em Geometria Analítica, sem preocupações diretas com a Álgebra Linear. Finalmente, o Cap. 8, além de sugestões e respostas, contém comentários das questões propostas.

Em nenhum momento tivemos a pretensão de esgotar o assunto. Pelo contrário, propositadamente, procuramos nos restringir às idéias fundamentais e evitar excessos de nomenclatura que poderiam desviar a atenção dos alunos. Acreditamos, assim, que todo o conteúdo do livro pode ser abordado num curso semestral de quatro aulas semanais.

Por fim, não poderíamos deixar de agradecer a todos os colegas e estudantes que direta ou indiretamente contribuiram para a elaboração deste livro. Antecipadamente, agradecemos também àqueles que nos enviarem críticas construtivas.

Goiânia, novembro de 1983

Os autores.

SUMÁRIO

1 A RETA

1.1 NÚMEROS INTEIROS

Os números

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

são chamados *números naturais*. O símbolo **N** será usado para denotar o conjunto dos números naturais. Com o símbolo **Z** indicaremos o conjunto dos *números inteiros*, que são:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Os números inteiros podem ser convenientemente representados por pontos de uma reta, como mostra a Fig. 1.1.

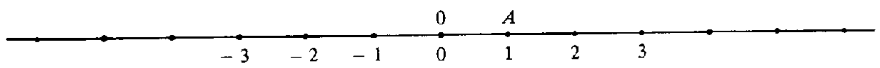


Fig. 1.1

Nesta figura o ponto O, chamado origem, foi escolhido arbitrariamente. O segmento OA, de comprimento arbitrário, foi tomado como unidade de comprimento e convencionamos representar os números positivos por pontos à direita de O e os números negativos por pontos à esquerda de O. Sempre que usarmos a reta com estas características, isto é, com uma origem, uma unidade de comprimento e um sentido (todos arbitrários) a indicaremos por **R**.

1.2 NÚMEROS RACIONAIS

Os números que podem ser escritos na forma

$$\frac{p}{q},$$

onde p e q são inteiros e $q \neq 0$, são chamados *números racionais*. Como

$$4 = \frac{4}{1}, \; 3{,}141 = \frac{3\,141}{1\,000}, \; 0{,}33\ldots = \frac{1}{3}$$

concluímos que 4, 3,141, 0,33 . . . são todos números racionais. Em particular, os números inteiros são números racionais.

Usando o símbolo **Q** para indicar o conjunto dos números racionais, podemos escrever:

$$\mathbf{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q}, p, q \in Z \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

Os números racionais também podem ser representados por pontos de uma reta. A seguir representaremos na reta **R** da Fig. 1.2 o número racional p/q.

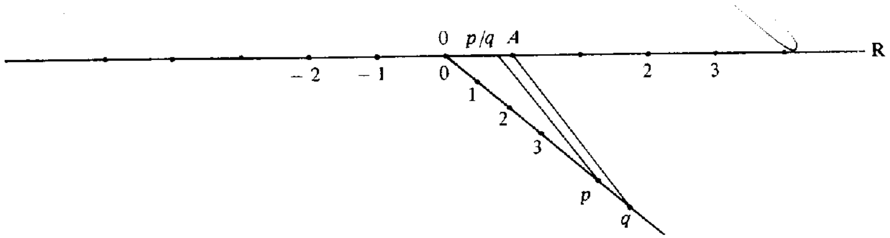


Fig. 1.2

O processo consiste em traçar uma semi-reta qualquer, com origem em O, formando com OA um ângulo agudo, e nela marcar p e q, utilizando-se uma unidade de comprimento qualquer. Traçando-se pelo ponto correspondente a p uma reta paralela à reta determinada pelo ponto A e o ponto correspondente a q, onde esta reta interceptar a reta **R** temos o ponto correspondente ao número p/q. Se o número p/q for negativo, $-p/q$ será positivo e, usando o processo anterior, podemos marcar sobre a reta **R** o número $-p/q$; tomando-se seu simétrico em relação à origem O temos o ponto sobre R correspondente a p/q.

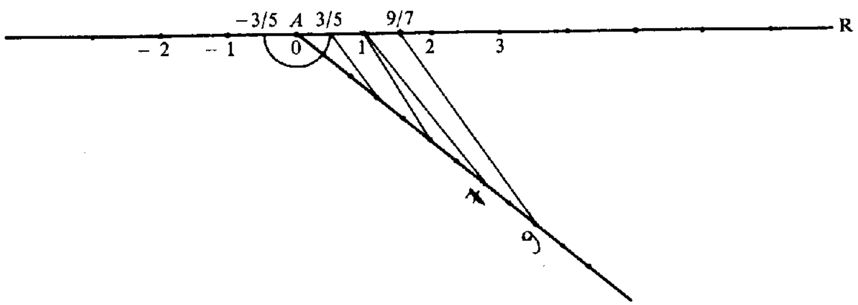


Fig. 1.3

A Fig. 1.3 mostra os números

$$\frac{3}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{5}$$

representados por pontos na reta.

1.3 NÚMEROS IRRACIONAIS

O comprimento da diagonal de um quadrado, cujo lado mede uma unidade, é um número que pode ser marcado na reta **R**, como mostra a Fig. 1.4. Pelo teorema de Pitágoras, este número é $\sqrt{2}$. A seguir vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. A prova consiste em supor que $\sqrt{2}$ seja racional e a partir daí obter uma contradição.

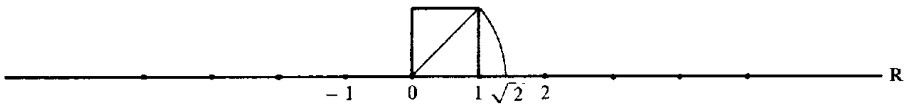


Fig. 1.4

Se $\sqrt{2}$ é racional, então existe uma fração p/q, com p e q inteiros, tal que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

sendo p e q primos entre si. Temos, então:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ou} \quad 2q^2 = p^2.$$

Logo, p^2 é par e, portanto, p também é par (veja o exercício 1.3). Conseqüentemente, podemos escrever $p = 2k$ sendo k inteiro. Temos, então:

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \text{ou} \quad q^2 = 2k^2.$$

Assim, vemos que q^2 também é par e, por conseguinte, q é par. Resulta que p e q são ambos pares, o que contradiz a hipótese de que p e q são primos entre si. Esta contradição surgiu por se supor $\sqrt{2}$ racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional. Números como este, não-racionais, são chamados *irracionais*.

A partir do número irracional $\sqrt{2}$ podemos construir uma infinidade de números irracionais. Com efeito, qualquer que seja o número inteiro n, não-nulo, $n\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/n$ são números irracionais, como facilmente podemos mostrar.

Realmente, se para algum n, $n\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}/n$ fosse racional deveríamos ter:

$$n\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q},$$

sendo p e q inteiros. Se a primeira igualdade acima for verdadeira também o é:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{nq},$$

mas esta igualdade diz que $\sqrt{2}$ é um número racional, o que é falso. Igualmente,

$$\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$$

também não pode ser, pois teríamos

$$\sqrt{2} = \frac{np}{q}.$$

Assim, já dispomos de seqüências infinitas de números irracionais, a saber:

$$\ldots, -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$$
$$\ldots, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/3, \ldots$$

Na primeira seqüência figuram números irracionais arbitrariamente grandes, enquanto que na segunda temos números irracionais arbitrariamente pequenos.

Outros exemplos clássicos de números irracionais são: o π da Geometria Elementar; o número e, base dos logaritmos neperianos; $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$ etc. Em geral, se um número natural não é um quadrado perfeito, suas raízes quadradas são números irracionais. O mesmo argumento, usado para mostrar que $n\sqrt{2}$ é irracional, prova a seguinte afirmação:

O produto de um número racional não-nulo por um irracional é um número irracional (veja o Exerc. 1.4).

1.4 NÚMEROS REAIS

O conjunto de todos os números, racionais e irracionais, é chamado conjunto dos números reais e indicado por **R**.

Vimos que a cada número racional podemos fazer corresponder um ponto sobre a reta. Esta correspondência pode ser feita usando apenas a régua e o compasso, pelo processo descrito anteriormente, na Fig. 1.2. Vimos também como marcar um ponto na reta correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$. A Fig. 1.5 mostra como marcar na reta **R** o ponto correspondente ao número $\sqrt{3}$. Pontos sobre a reta **R**, correspondentes aos números da seqüência $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, ... ou da seqüência $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/3$, $\sqrt{2}/4$, ..., podem facilmente ser marcados a partir do ponto correspondente a $\sqrt{2}$. Todavia, não dispomos de uma construção geométrica que nos permita marcar sobre **R** pontos correspondentes aos números irracionais e, π e outros

e nem de argumentos que nos possibilitem a provar que tais pontos existem. Isto se dá porque, a rigor, não definimos número irracional. A definição de número irracional, bem como sua construção, em geral, é apresentada nos livros de Análise Matemática. Para os propósitos da Geometria Analítica, é suficiente o seguinte resultado:

A cada ponto da reta **R** *corresponde um único número (racional ou irracional),*

que admitiremos como postulado. Os números, cuja existência é garantida por este postulado, são chamados números reais.

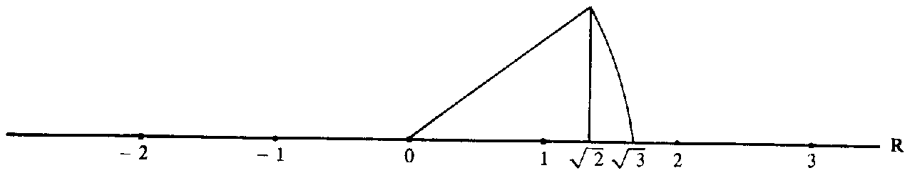


Fig. 1.5

Para simplificação de linguagem, às vezes, não faremos distinção entre número real e o ponto que o representa na reta **R**, e designaremos o conjunto dos números reais também por **R**. Intuitivamente pensamos que a reta é "contínua", não tem "furos" ou "falta de pontos". Esta idéia levada para os números reais nos dá uma noção de como é o conjunto **R** dos números reais. Ela nos leva a induzir, de modo natural, uma relação de ordem no conjunto **R** dos números reais, da seguinte maneira:

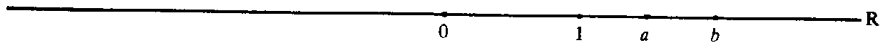


Fig. 1.6

Dizemos que a é um número menor que b se na reta **R** a está à esquerda de b. Indicamos isto assim

$$a < b.$$

A notação $a \leqslant b$ significa que a é um número que está à esquerda de b ou é o próprio b. Utiliza-se também a notação $b \geqslant a$ significando o mesmo que $a \leqslant b$.

Vamos mostrar que tantos os números racionais quantos os irracionais estão "espalhados" por toda a reta, no seguinte sentido:

1º) entre dois números reais distintos existem infinitos números racionais bem como infinitos números irracionais;

2º) arbitrariamente próximo de um número irracional existe um número racional.

As afirmações acima estão formalizadas nas proposições 1.1 e 1.2 seguintes.

Proposição 1.1 – *Sejam* a *e* b, a $<$ b, *números reais. Entre* a *e* b *existem infinitos números irracionais bem como infinitos números racionais.*

Prova. Conforme vimos anteriormente, existem números irracionais arbitrariamente pequenos. Seja, então, $s > 0$ um número irracional, tal que

$$s < b - a.$$

Seja n o maior inteiro tal que

$$ns < a.$$

Então, o número $(n + 1)\,s$ satisfaz:

$$a < (n+1)\,s < b$$

pois, sendo n o maior inteiro tal que $ns \leqslant a$, segue-se que

$$a < (n+1)\,s$$

e também que

$$(n+1)\,s = ns + s < a + (b - a) = b,$$

porque

$$ns \leqslant a \ \text{ e } \ s < b - a.$$

Logo,

$$a < (n+1)\,s < b.$$

Portanto, o número irracional $(n + 1)\,s$ (veja Exerc. 1.4*b*), está entre a e b. Fazendo-se $(n + 1)\,s = a_1$ e repetindo o processo anterior, para os números a_1 e b, vamos encontrar a_2 tal que a_2 é irracional e

$$a_1 < a_2 < b.$$

Conseqüentemente,

$$a < a_2 < b$$

e

$$a_2 \neq a_1.$$

Do mesmo modo encontramos a_3, diferente de a_1 e a_2, entre a e b, a_4 diferente de a_1, a_2 e a_3, entre a e b e assim por diante. Este processo nos possibilita construir tantos números irracionais entre a e b quantos quisermos, o que significa precisamente que entre a e b existem infinitos números irracionais.

Para mostrarmos que entre a e b existem infinitos números racionais tomamos s racional e argumentamos como acima. A Fig. 1.7 ilustra os argumentos usados nesta demonstração.

Fig. 1.7

Proposição 1.2 – *Dado um número real* b, *arbitrariamente próximo de* b *existem números racionais e irracionais.*

Prova. Escolhemos $a < b$, a tão próximo de b quanto desejarmos. Aplicando a proposição 1.1 concluímos que entre a e b existem infinitos números racionais e infinitos irracionais. Tais números estão mais próximo de b do que o próprio a; logo, arbitrariamente próximo de b.

Observação. Pode-se mostrar que existem tantos números racionais quantos são os naturais, isto é, há uma correspondência biunívoca entre **N** e **Q**. Porém, entre o conjunto **N** e o conjunto dos números irracionais não se pode estabelecer uma correspondência biunívoca. De fato, demonstra-se que qualquer função injetiva definida em **N** com valores no conjunto dos números irracionais não é sobrejetiva. Neste sentido, existem mais números irracionais do que racionais.

Com respeito à relação de ordem $\leqslant$ definida em **R**, dois fatos merecem ser destacados. O primeiro é a compatibilidade da relação $\leqslant$ com a operação de adição, a qual pode ser dita assim:

Se $a \leqslant b$, então $a + x \leqslant b + x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Em particular, fazendo $x = -b$; obtemos que

$$a \leqslant b \text{ é equivalente a } b - a \geqslant 0.$$

O segundo fato diz que, em relação à operação de multiplicação, a relação de ordem $\leqslant$ não se comporta tão bem, como em relação à adição. Precisamente, temos:

Se $a \leqslant b$ e $x \geqslant 0$, então $ax \leqslant bx$,

mas

se $x < 0$, então $ax \geqslant bx$.

Exercícios

1.1. Justifique a construção feita na Fig. 1.2.

1.2. Represente na reta **R** os números $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $-3\sqrt{2}$, 0,6 e $4\sqrt{3}/7$.

1.3. Demonstre que, se p é um número inteiro, então p e p^2 são ambos pares ou ambos ímpares.

1.4. Se a e b são números racionais e s irracional, prove que:
a) $a + b$ e ab são racionais;
b) $a + s$ e as são irracionais, se $a \neq 0$.

1.5. Dê exemplos de números irracionais s_1, s_2, s_3 e s_4 tais que:
a) $s_1 s_2$ seja racional;
b) $s_3 s_4$ seja irracional.

1.6. Considere a figura abaixo

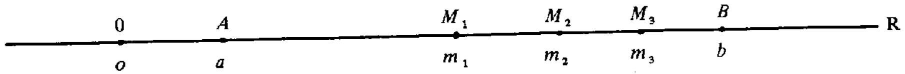


Fig. 1.8

a) Demonstre que, se M_1 é o ponto médio de AB, então m_1 é a média aritmética de a e b.
b) Seja M_2 o ponto médio de M_1B, M_3 o ponto médio de M_2B e assim por diante. Calcule a soma:

$$(m_1 - a) + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \dots$$

1.7. Construir uma seqüência de números irracionais $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ satisfazendo $2 < x_1 < x_2 < \dots < x_{10} < 3$.

1.8. Se a e b são números reais positivos mostre que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

1.9. A Fig. 1.9 mostra como construir uma função que estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do segmento AB e os pontos do segmento $A'B'$. Ache y em termos de x, isto é, ache a expressão algébrica da função

$$f: AB \to A'B'$$
$$x \to y$$

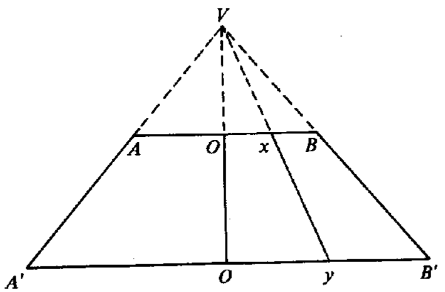


Fig. 1.9

1.10. Mostre que a altura de um triângulo retângulo, relativamente à hipotenusa, é menor ou igual à metade da hipotenusa.

1.5 VALOR ABSOLUTO

Seja x um número real. O número $|x|$ definido assim

$$|x| = x \text{ se } x \geqslant 0$$
$$|x| = -x \text{ se } x < 0,$$

é chamado *valor absoluto* de x (ou *módulo* de x). Por exemplo,

$$|5| = 5 \text{ e } |-5| = -(-5) = 5.$$

Geometricamente, podemos interpretar $|x|$ como sendo a distância do ponto P, correspondente a x, à origem O, isto é, o comprimento do segmento OP.

Decorrem imediatamente, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades:

$$|x| \geqslant 0,$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$|x| = |-x|.$$

Na proposição seguinte estão reunidas outras propriedades importantes do valor absoluto de um número real.

Proposição 1.3 – *Quaisquer que sejam os números reais* a, b e x, *tem-se*

1) $|ab| = |a|\,|b|$,
2) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$,
3) Se $a > 0$, $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$,
4) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Prova. Inicialmente, vamos mostrar que

$$|x|^2 = |x^2| = x^2, \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Sendo

$$x^2 \geqslant 0, \forall\, x \in \mathbf{R},$$

temos que

$$|x^2| = x^2,$$

pela definição de valor absoluto. Resta mostrar que

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x \geqslant 0$, temos

$$|x| = x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = x^2;$$

se $x < 0$,

$$|x| = -x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

Usando estas propriedades podemos provar a parte (1) da proposição assim:

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2\ |b|^2 \Rightarrow |ab| = |a|\ |b|.$$

Parte (2). $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ é chamada desigualdade triangular. Na sua prova, dada a seguir, faremos uso do fato

$$x \leqslant |x|, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Temos

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a| \cdot |b| = (|a| + |b|)^2.$$

Ou seja,

$$|a+b|^2 \leqslant (|a| + |b|)^2,$$

donde obtemos

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Parte (3). Suponhamos que $|x| \leqslant a$. Se $x \geqslant 0$, temos

$$x = |x| \leqslant a,$$

sendo $x \geqslant 0$ é claro que $x \geqslant -a$, de modo que, neste caso,

$$-a \leqslant x \leqslant a;$$

se $x < 0$, então $x \leqslant a$ e

$$-x = |x| \leqslant a.$$

Mas $-x \leqslant a$ é equivalente a $x \geqslant -a$, de modo que

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Portanto, provamos que

$$|x| \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

Para provarmos a recíproca, também distinguiremos os casos $x \geqslant 0$ e $x < 0$. Suponhamos que

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em

$$x \leqslant a \text{ e } x \geqslant -a.$$

Se $x \geqslant 0$, $|x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá

$$|x| \leqslant a.$$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos

$$|x| \leqslant a.$$

Logo,

$$-a \leqslant x \leqslant a \Rightarrow |x| \leqslant a.$$

O segmento destacado na Fig. 1.10 representa o intervalo de variação de x.

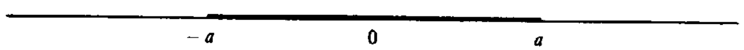


Fig. 1.10

Parte (4). Antes de provarmos esta parte, faremos uma observação sobre o símbolo $\sqrt{x}$, sendo x um número positivo. É comum usar $\sqrt{x}$ para indicar uma das raízes de x, sem especificar qual delas, ou seja, colocar

$$\sqrt{x^2} = x. \ (?)$$

Tal notação pode conduzir a uma contradição, senão vejamos: usando a fórmula $\sqrt{x^2} = x$, temos

$$\sqrt{3^2} = 3 \text{ e } \sqrt{(-3)^2} = -3.$$

(Na primeira, temos $x = 3$ e na segunda, $x = -3$.)

Mas

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}.$$

Logo,

$$3 = -3, \text{ contradição!}$$

Para evitar este fato usaremos, sistematicamente, o símbolo $\sqrt{x}$ para indicar a raiz quadrada positiva de x. A raiz quadrada negativa de x será indicada por $-\sqrt{x}$.

Isto posto, vamos à prova de (4).

$\sqrt{x^2}$ é a raiz quadrada positiva de x^2, isto é, é o número positivo cujo quadrado é x^2. O número $|x|$ satisfaz tais condições, ou seja,

$$|x| \geqslant 0,$$
$$|x|^2 = x^2.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Na parte (2) da proposição 1.3 ocorre a igualdade se, e somente se, a e b forem ambos $\geqslant 0$ ou ambos $\leqslant 0$ (veja o Exerc. 1.11).

Na parte (3) podemos, evidentemente, usar $<$ no lugar de $\leqslant$ e então obtemos

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Dado um número positivo a, qualquer que seja o número real x, vale somente uma das duas alternativas:

$$|x| < a \quad \text{ou} \quad |x| \geqslant a.$$

Como a primeira é equivalente a

$$-a < x < a,$$

segue que todo número real x que não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

é tal que

$$|x| \geqslant a.$$

Mas x não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

se, e somente se, $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Desta forma demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 1.4 – *Se* $a > 0$ *e* x *são números reais, então*

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \quad \text{ou} \quad x \leqslant -a.$$

Veja, na Fig. 1.11, uma ilustração da proposição 1.4. O número x pode ser qualquer um dos pontos das semi-retas destacadas.

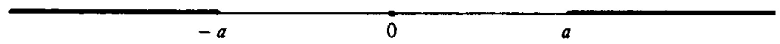


Fig. 1.11

Exemplo. Encontre os valores de x para os quais se tem

$$|3x + 4| \leqslant 8.$$

Solução. Fazendo-se $3x + 4 = t$, a desigualdade acima se transforma em

$$|t| \leqslant 8$$

que, pela parte (3) da proposição 1.3, é equivalente a

$$-8 \leqslant t \leqslant 8$$

que, em termos de x, é

$$-8 \leqslant 3x + 4 \leqslant 8.$$

Somando-se -4 a cada membro desta desigualdade temos

$$-12 \leqslant 3x \leqslant 4.$$

Multiplicando-se cada membro desta desigualdade por $1/3$, obtemos

$$-4 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3},$$

que é a resposta.

Exemplo. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade

$$|x^2 - 4| \leqslant 2.$$

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$-2 \leqslant x^2 - 4 \leqslant 2,$$

ou

$$2 \leqslant x^2 \leqslant 6.$$

Como $x^2 = |x|^2$, a última desigualdade pode ser escrita assim

$$2 \leqslant |x|^2 \leqslant 6,$$

de onde temos

$$\sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{6}.$$

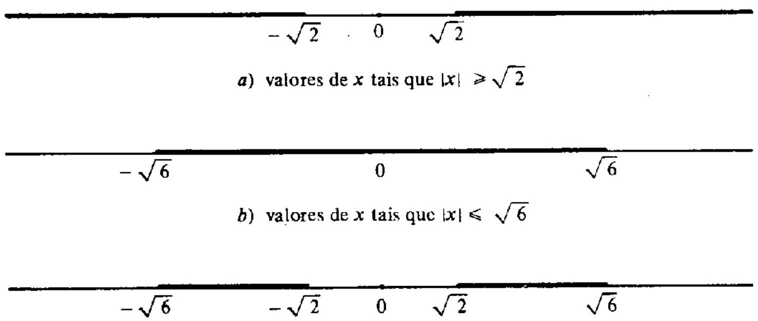
A primeira parte desta dupla desigualdade é equivalente a

$$x \geqslant \sqrt{2} \text{ ou } x \leqslant -\sqrt{2} \text{ (Fig. 1.12}a\text{)},$$

e a segunda a

$$-\sqrt{6} \leqslant x \leqslant \sqrt{6} \text{ (Fig. 1.12}b\text{)}.$$

Na Fig. 1.12*c* está indicado o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leqslant 2$, que é a interseção do conjunto solução de $|x| \geqslant \sqrt{2}$ com o conjunto solução de $|x| \leqslant \sqrt{6}$.



a) valores de x tais que $|x| \geqslant \sqrt{2}$

b) valores de x tais que $|x| \leqslant \sqrt{6}$

c) valores de x tais que $|x^2 - 4| \leqslant 2$

Fig. 1.12

Usando-se a notação $[a, b]$ para indicar o intervalo

$$\{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x \leqslant b\},$$

podemos escrever o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leqslant 2$ assim

$$[-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}].$$

Exercícios

1.11. Mostre que $|a + b| = |a| + |b|$ se, e somente se, a e b forem ambos $\geqslant 0$ ou ambos $\leqslant 0$.

1.12. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a cada uma das desigualdades:
a) $|x - 2| < 1$;
b) $|x - 2| > 1$;
c) $|x - 2| = 1$;
d) $|x^2 - 4| \geqslant 2$;
e) $|3 - 2x^2| \leqslant 9$;
f) $|x - 1| < |x - 2|$.

1.13. Determine b, para que se tenha:
a) $|2x - 3| < b \Leftrightarrow 0 < x < 3$.
b) $|5x + b| \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant -1/5$;
c) $|b - 1| = |3b - 4|$.

1.14. Justifique ou dê contra-exemplo para as implicações seguintes:
a) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$;
b) $|a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$;
c) $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$;
d) $a \neq b \Rightarrow |a| \neq |b|$;
e) $|a| \neq |b| \Rightarrow a \neq b$.

1.15. Demonstre que para qualquer número real x se tem:
a) $|x| = |-x|$;
b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

1.16. Demonstre que:
a) $|a| - |b| \leqslant |a - b|$;
b) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$;

quaisquer que sejam os números a e b.

1.17. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que:
a) $-b < x < a \Leftrightarrow |2x + b - a| < a + b$;
b) $-2b < x + a - b < 2a \Leftrightarrow |x| < a + b$.

1.18. Encontre todos os valores de x que satisfaçam as seguintes desigualdades:
a) $3x + 5 < 23$;
b) $(x - 1)(x - 3) < 0$;
c) $x^2 - 5x < -6$;
d) $x^3 + x^2 \geqslant 0$;
e) $\dfrac{2x}{x - 2} \geqslant 1$.

1.19. Prove que as raízes quadradas r_1 e r_2 de um número real positivo satisfazem:
a) $|r_1| = |r_2|$;
b) $r_1 + r_2 = 0$.

1.20. Que condições devem satisfazer a e b para que se tenha

$$|a - b| = b - a?$$

1.21. Resolva as seguintes equações:
a) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$;
b) $x^2 + |4x| - 21 = 0$;
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$;
d) $|x^2 - 3x| = 2$;
e) $(|x|^5 + |18x^3| + 1)(x^2 - 1) = 0$.

O PLANO

2

2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Consideremos o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y, tal como mostra a Fig. 2.1. Tomemos a unidade OA igual à OA', e seja P um ponto qualquer do plano. Por P podemos traçar uma única paralela x' à reta x e uma única paralela y' à reta y. Como se vê na Fig. 2.1, estas paralelas interceptam as retas x e y, respectivamente, nos pontos P_x e P_y. Seja x o número correspondente ao ponto P_x e y o número correspondente a P_y. Estes dois números x e y determinam o ponto P, no seguinte sentido: conhecendo-se x e y, podemos determinar os pontos P_x e P_y e traçar as paralelas x' e y'. ~~A interseção destas paralelas é o ponto P.~~ Os números x e y são chamados, respectivamente, *abscissa* e *ordenada* do ponto P; eles constituem as *coordenadas* de P. Para indicar que o ponto P tem abscissa x e ordenada y usamos a notação

$$P(x, y).$$

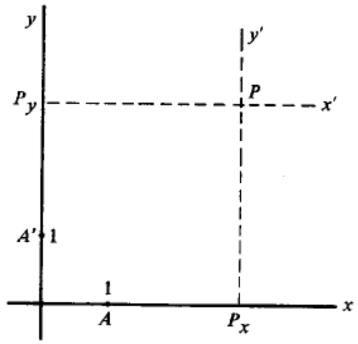


Fig. 2.1

A construção que acabamos de fazer nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y).

Na prática, é comum omitirem-se vários elementos que aparecem na Fig. 2.1, deixando-os apenas subentendidos, para se obter uma figura mais simples, como a 2.2.

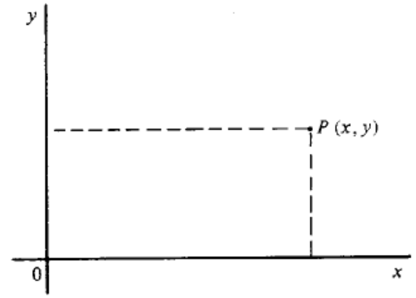


Fig. 2.2

2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos do plano. Como mostra a Fig. 2.3, a partir de P e Q, podemos construir o triângulo retângulo PSQ. Em termos das coordenadas de P e Q, as medidas dos catetos deste triângulo são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Logo, a medida de sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Este número é chamado *distância* de P a Q e indicado por $d(P, Q)$, isto é, por definição,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

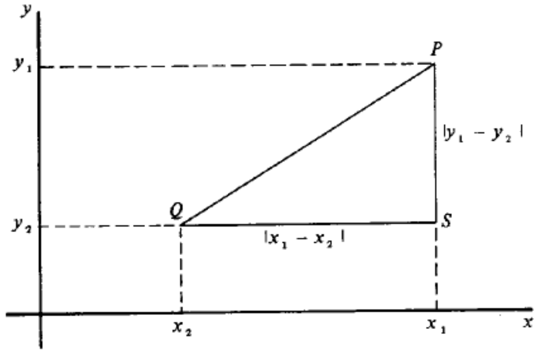


Fig. 2.3

Exercícios

2.1. *a*) Construir um sistema de coordenadas de modo que na Fig. 2.4 se tenha P (5, 2) e Q (– 4, – 1).
b) Determinar d (P, Q).
c) d (P, Q) depende do sistema de coordenadas?

Tomar a unidade sobre os eixos igual à distância comum entre as paralelas da figura.

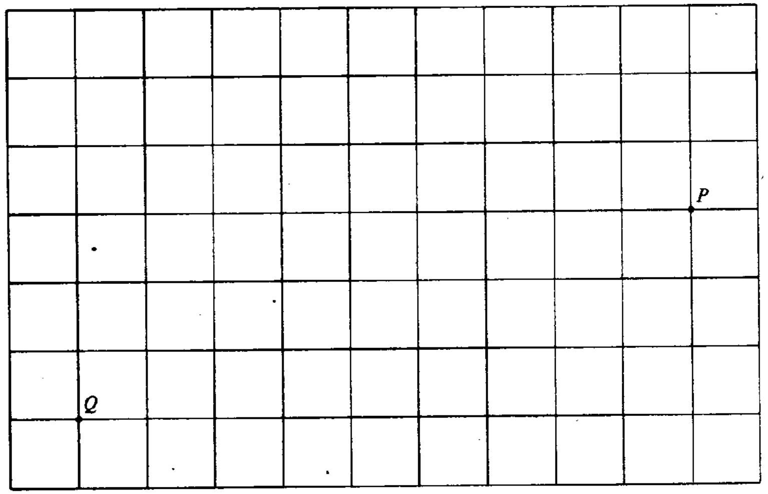


Fig. 2.4

2.2. Um campo de futebol tem 60 m de comprimento por 40 m de largura. Construir um sistema de coordenadas e dar as coordenadas dos seguintes pontos:
a) dos quatro cantos do campo;
b) do centro do campo.

2.3 VETORES NO PLANO

Vimos, na seção anterior, que a cada par ordenado de números reais (x, y) corresponde um ponto no plano. Além do ponto, podemos também fazer corresponder ao par (x, y) uma seta como mostra a Fig. 2.5. Assim, podemos representar graficamente um par ordenado por um ponto no plano ou por uma seta. A representação por seta motiva a seguinte definição:

Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (x, y).

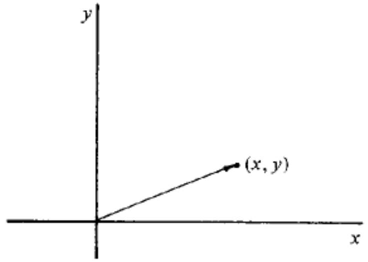


Fig. 2.5

Exemplo. A seta F da Fig. 2.6*a*, que pode ser imaginada como sendo uma força de intensidade igual a cinco unidades, aplicada no ponto 0, é a representação gráfica do vetor $(5 \cdot \sqrt{3}/2, 5 \cdot 1/2)$. Como se vê, F fica perfeitamente determinada pelo par $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$. Logo, dar o par ordenado $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$ equivale a dar a intensidade a direção e o sentido de F, como se faz em Física. Na Fig. 6.6*b* estão representados, graficamente, os vetores $v = (2, 3)$ e $w = (-1, 1)$. Observe que o comprimento da seta que representa o vetor $v = (x, y)$ é dado por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Este número é chamado *módulo* do vetor $v = (x, y)$ e é indicado por $\|v\|$.

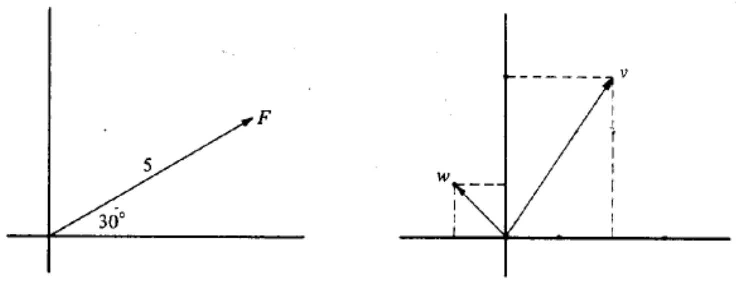


Fig. 2.6

Exemplo. O módulo de $v = (2, 3)$ é

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}\,.$$

O vetor

$$O = (0, 0)$$

é chamado *vetor nulo* e sua representação gráfica coincide com a origem do sistema de coordenadas. Exceto no caso do vetor nulo, associaremos ao vetor (x, y) as idéias de direção e sentido da seta que o representa. Por exemplo, a direção do vetor $v = (2, 3)$ é a direção da seta v da Fig. 2.6*b*.

Há casos em que representamos graficamente um vetor por uma seta que não parte necessariamente da origem. Por exemplo, os pontos $A\ (x_1, y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$ determinam o vetor

$$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Como mostra a Fig. 2.7, a seta que representa o vetor $\vec{AB}$, partindo da origem, e a seta com origem em A e extremidade em B, têm o mesmo módulo, direção e sentido. Conforme a conveniência, utilizamos uma ou outra para representar o vetor $\vec{AB}$.

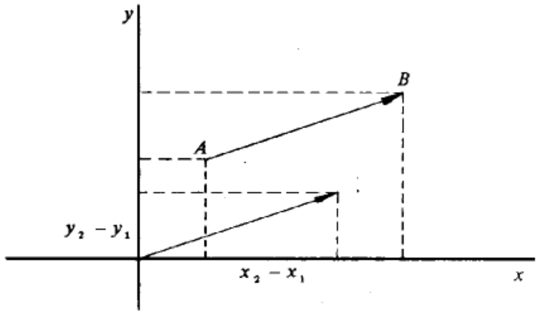


Fig. 2.7

Outro exemplo que ilustra a representação gráfica de um vetor, obtém-se com o movimento de uma partícula no plano. Neste caso, representamos o vetor posição da partícula, num determinado instante, por uma seta que parte da origem; e o vetor velocidade, por uma seta tangente à trajetória da partícula e com ponto inicial no lugar onde ela se encontra naquele instante. Veja a Fig. 2.8.

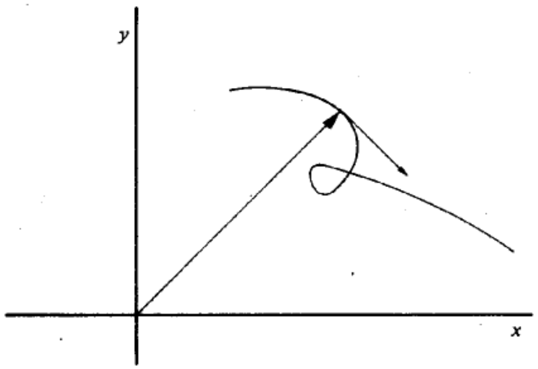


Fig. 2.8

Do que foi dito conclui-se que para representar graficamente um vetor usa-se uma seta. O lugar onde esta seta é colocada depende do problema que está sendo considerado.

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $k \in \mathbf{R}$. Definimos:

a) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

b) $ku = (kx_1, ky_1)$.

A operação que a cada par de vetores u e v faz corresponder o vetor $u + v$, definido acima, chama-se *adição de vetores*. A lei de composição que ao par k e u, onde k é um número e u um vetor, faz corresponder o vetor ku, definido acima, é chamada *multiplicação de um vetor por um número*.

A adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades (u, v e w são vetores quaisquer):

$(A_1)\ u + v = v + u,$

$(A_2)\ u + (v + w) = (u + v) + w,$

$(A_3)\ u + O = u$, onde $O = (0, 0)$ é o vetor nulo.

Se k_1 e k_2 são números reais quaisquer, verificam-se, para multiplicação de um vetor por um número, as propriedades:

$(M_1)\ k_1\ (u + v) = k_1 u + k_1 v,$

$(M_2)\ (k_1 + k_2)\ u = k_1 u + k_2 u,$

$(M_3)\ k_1\ (k_2 u) = (k_1 k_2)\ u,$

$(M_4)\ 1 \cdot u = u$ e $0u = 0$.

Na propriedade M_4 o primeiro zero da igualdade é o número zero e o segundo é o vetor nulo (0, 0).

As propriedades $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, M_3$ e M_4 são conseqüências imediatas das definições dadas. Sugerimos ao leitor demonstrá-las.

O vetor $(-1)\ u$ é indicado por $-u$ e chamado o *oposto* de u. Também, indicamos $v + (-u)$ por $v - u$. Na Fig. 2.9 está representado um vetor u e seu oposto $-u$.

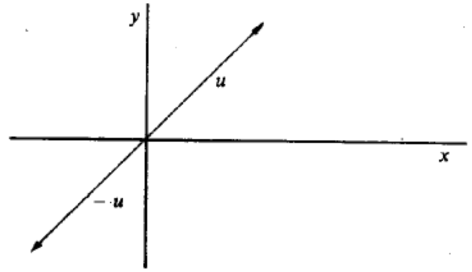


Fig. 2.9

O vetor ku tem a mesma direção de u, isto é, u e ku são representados por setas paralelas. Se $k > 0$, os sentidos de u e ku coincidem. Se $k < 0$, o sentido de ku é o oposto de u. Além disso, os módulos de u e ku estão relacionados por

$$||ku|| = |k|\ ||u||$$

pois sendo $u = (x, y)$ então $ku = (kx, ky)$ e

$$||ku|| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2\,(x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2}\ \sqrt{x^2 + y^2} = |k|\ ||u||.$$

Para representar graficamente o vetor $u + v$, fazemos a construção indicada na Fig. 2.10. A seta que representa $u + v$ é uma das diagonais do paralelogramo cujos lados são as setas que representam u e v. Veja no Exerc. 2.3 uma indicação de como justificar esta representação.

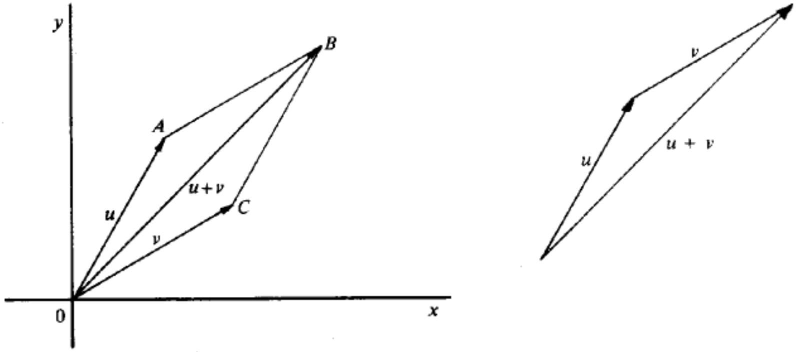


Fig. 2.10

Proposição 2.1 – *Sejam* u *e* v *vetores e* k *um número real. Então*

a) $ku = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $u = 0$;

b) $||u|| \geqslant 0$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

c) $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$.

Prova. Se $u = (x, y)$, então $ku = 0$ é o mesmo que

$$(kx, ky) = (0, 0).$$

Mas isto significa que

$$kx = 0 \text{ e } ky = 0.$$

Se $k \neq 0$, dividindo ambos os membros das igualdades acima por k, obtemos $x = 0$ e $y = 0$ e, portanto, $u = 0$. Se $u \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e, das igualdades acima, obtemos $k = 0$.

Parte (*b*)

$$||u|| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$$
$$||u|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

A parte (*c*) desta proposição é chamada *desigualdade triangular*. Ela expressa o conhecido fato da Geometria Elementar de que, em um triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados excede ao comprimento do terceiro lado. Sua prova será dada depois que introduzirmos o conceito de produto escalar, na Seç. 2.6.

2.5 APLICAÇÕES

2.5.1 Vetor Deslocamento

Na Física, a mudança de posição de uma partícula é chamada *deslocamento*. Se uma partícula move-se de um ponto $A\ (x_1, y_1)$ para um ponto $B\ (x_2, y_2)$, o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

é chamado *vetor deslocamento* da partícula. Na Fig. 2.11*a* está indicada a trajetória de uma partícula, do ponto A ao ponto B. O vetor deslocamento da partícula está indicado pela seta de A a B.

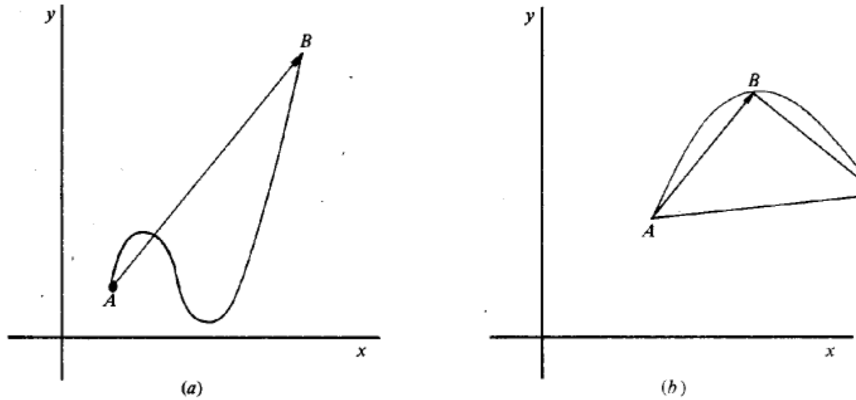


Fig. 2.11

Suponhamos que uma partícula mova-se do ponto $A\ (x_1, y_1)$ para o ponto $B\ (x_2, y_2)$ e depois para $C\ (x_3, y_3)$. Veja a Fig. 2.11*b*. Então, o vetor deslocamento total da partícula é

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Por outro lado, somando-se os vetores deslocamentos parciais

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ e } \vec{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2),$$

obtemos

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) = \vec{AC},$$

isto é, o deslocamento total é a soma dos deslocamentos parciais.

Em geral, se A, B e C são três pontos quaisquer do plano (veja a Fig. 2.12), então

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

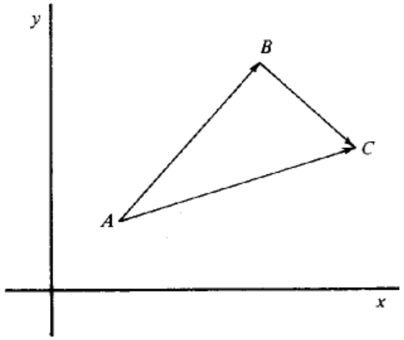


Fig. 2.12

Exemplo. Um carro move-se, em linha reta, 5 km na direção norte e, em seguida, também em linha reta, 5 km na direção leste. Qual foi o deslocamento do carro?

Solução. Consideramos na Fig. 2.13, um sistema de coordenadas com origem no ponto de partida do carro e os eixos y e x, respectivamente, nas direções norte e leste.

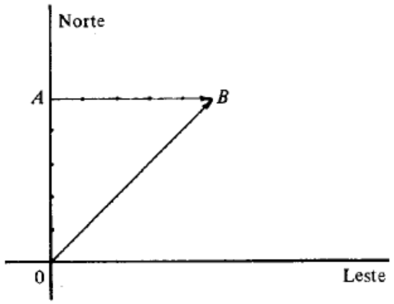


Fig. 2.13

Em relação ao sistema acima, as coordenadas dos pontos O, A e B são:

$$O\,(0, 0), A\,(0, 5), B\,(5, 5).$$

Logo, o deslocamento do carro é

$$\vec{OB} = (5 - 0, 5 - 0) = (5, 5),$$

ou seja, $5\sqrt{2}$ km (aproximadamente 7,05 km) na direção nordeste, pois $\|\vec{OB}\| = 5\sqrt{2}$ e $\vec{OB}$ faz com a direção leste um ângulo de 45°.

2.5.2 Resultante

Na Fig. 2.14*a* estão representadas duas forças F_1 e F_2, respectivamente, de 5 kgf e 3 kgf, atuando no ponto O de uma barra. A resultante de F_1 e F_2 é a força

$$F = F_1 + F_2.$$

Para calcular F, escolhemos um sistema de coordenadas e decompomos F_1 e F_2 como mostra a Fig. 2.14*b*.

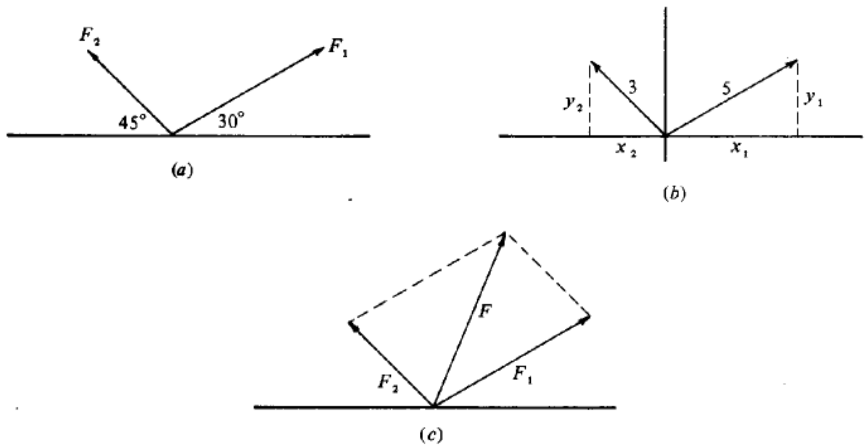


Fig. 2.14

As componentes de F_1 são

$$x_1 = 5 \cos 30° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = 5 \text{ sen } 30° = 5 \cdot \frac{1}{2}$$

e as de F_2 são

$$x_2 = -3\cos 45° = -3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y_2 = 3 \operatorname{sen} 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$F_1 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ e } F_2 = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo, a resultante é

$$F = F_1 + F_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Calculando $||F||$ encontramos

$$||F|| = \frac{1}{2}\sqrt{136 - 30(\sqrt{6} - \sqrt{2})},$$

que é aproximadamente igual a 5,12. A tangente do ângulo que F faz com a barra (o eixo x) é dada por

$$\frac{5 + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}},$$

que corresponde a um ângulo de aproximadamente 64°27′. Portanto, como está indicado na Fig. 2.14*c*, F é uma força de aproximadamente 5,12 kgf e sua linha de ação faz com a barra um ângulo próximo de 64°27′.

Observe que no problema anterior não se conheciam as componentes dos vetores F_1 e F_2. Estas componentes foram calculadas usando-se as relações

$$x = ||v|| \cos\theta,$$
$$y = ||v|| \operatorname{sen}\theta,$$

onde $v = (x, y)$ e θ é o ângulo entre v e o eixo x, como mostra a Fig. 2.15.

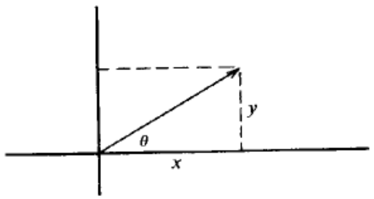


Fig. 2.15

2.5.3 Ponto Médio

Cálculo das coordenadas do ponto médio M do segmento AB em função das coordenadas de A e B.

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $M(x, y)$; queremos calcular x e y em função de x_1, y_1, x_2 e y_2. Veja a Fig. 2.16.

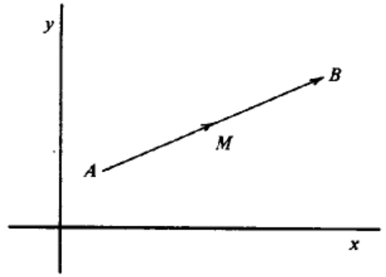


Fig. 2.16

Sendo M o ponto médio de AB, temos

$$2\vec{AM} = \vec{AB}.$$

Mas,

$$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1) \text{ e } \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Logo,

$$2(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

ou

$$(2x - 2x_1, 2y - 2y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

donde temos

$$2x - 2x_1 = x_2 - x_1 \text{ e } 2y - 2y_1 = y_2 - y_1.$$

Explicitando x e y, encontramos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio de AB são as médias aritméticas das coordenadas de A e B.

2.5.4 Vetor Unitário

Um vetor de módulo 1 é chamado *vetor unitário*. Por exemplo,

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

é unitário pois

$$\|v\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Outros exemplos de vetores unitários são

$$u = (1, 0),$$
$$v = (0, 1),$$
$$-v = (0, -1),$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ , -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

No caso geral, qualquer que seja o vetor não-nulo v,

$$\frac{v}{\|v\|}$$

é unitário pois

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1.$$

Assim, para se obter um vetor unitário é suficiente tomar um vetor não-nulo e multiplicá-lo pelo inverso de seu módulo.

Exercícios

2.3. Para justificar a construção feita na Fig. 2.10, mostre que $OABC$ é um paralelogramo, ou seja, que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

OK 2.4. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A\ (x, 1)$, $B\ (4, x+3)$, $C\ (x, x+2)$ e $D\ (2x, x+6)$.

OK 2.5. Determine a extremidade da seta que representa o vetor $v = (3, -7)$ sabendo-se que sua origem é o ponto $A\ (2, 1)$.

OK 2.6. Dados $A\ (2, y)$ e $B\ (3, 3)$, determine y para que o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

OK 2.7. Dado $B\ (3, 4)$ e sendo $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, qual é o valor máximo que a primeira coordenada de A pode assumir? E o mínimo?

OK 2.8. Sejam $A\ (x_1, y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$ pontos do plano. Demonstre que

$$d\ (A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

2.9. Determine vetores u e v tais que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2.$$

2.10. Determine gráfica e algebricamente

a) $u + 2v$;
b) $-u$;
c) $u - v$;
d) $3u - 2v + w$;
e) $-u - v + 2w$;

sendo $u = (2, 3)$, $v = (-1, 4)$ e $w = (-2, -1)$.

OK 2.11. Dados os vetores $u = (2, -1)$ e $v = (1, 3)$, determinar um vetor w tal que

a) $3(u + w) - 2(v - w) = 0$;
b) $\frac{1}{2}[3(u + w) - 4(v - w)] = 5[u - 3w + 4(3v - 2w)]$.

OK! 2.12. Dados os vetores u e v, determinar os vetores z e w tais que

$$2(u + z) - 3(v + w) = u,$$
$$5(u - z) + 2(v - w) = v.$$

2.13. Mostre que se os vetores u e v têm a mesma direção, então existe um número k tal que $v = ku$.

OK! 2.14. Encontre um vetor

a) com mesma direção e sentido do vetor $(3, 4)$ e módulo igual a 6;
b) com mesma direção e sentido contrário ao do vetor $(-1, 2)$ e módulo igual a 5.

OK! 2.15. Encontrar números k_1 e k_2 tais que

$$v = k_1 u + k_2 w,$$

sendo $v = (2, 3)$, $u = (-1, 2)$ e $w = (1, 2)$.

2.16. Dados os pontos $A\ (2, 3)$ e $B\ (5, 4)$, determine um ponto C tal que $\overrightarrow{AC}$ seja paralelo ao vetor $u = (2, 1)$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

OK 2.17. Dados $A\ (-1, -1)$ e $B\ (3, 5)$, determine C tal que

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
c) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$;
d) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{BA}$.

OK 2.18. Dados os pontos A, B e C, exprimir o vetor $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, sendo M

a) o ponto médio de AB;
b) um ponto de AB tal que $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

OK! 2.19. Dados $B\ (0, 4)$ e $C\ (8, 2)$, determine o vértice A do triângulo ABC sabendo-se que o ponto médio de AB é $M\ (3, 2)$.

2.20. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $(1, -1)$ e o outro paralelo ao vetor $(1, 1)$.

OK!

2.21. Represente graficamente os vetores da forma

$$(2, 4) + t\,(3, -1),$$

onde t é um número real.

2.22. Dados $A\ (1, 3)$ e $B\ (2, 2)$, determine x para que a reta definida pelo ponto médio de AB e o ponto $X\ (x, 0)$ seja paralela ao vetor $v = (1, 2)$.

2.23. Demonstre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

2.24. Se $ABCD$ é um quadrilátero e P, Q, R e S são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, prove que $PQRS$ é um paralelogramo.

2.25. Os pontos $A\ (1, -5)$, $B\ (5, 2)$ e $C\ (3, 9)$ são três vértices de um paralelogramo. Ache três pontos, cada um dos quais podendo ser o seu quarto vértice.

2.26. Calcule a resultante das forças aplicadas ao ponto O da Fig. 2.17*a*, sabendo-se que $\|F_1\| = 3$, $\|F_2\| = 1$, $\|F_3\| = 2$.

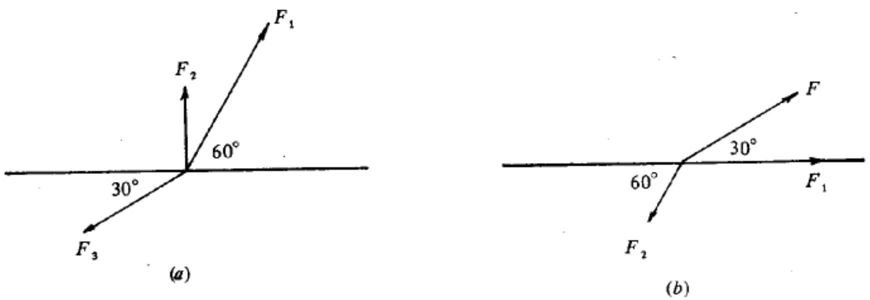


Fig. 2.17

2.27. Determine como deve variar o módulo e o sentido de F_1 e F_2 (isto é, por quais constantes se deve multiplicar F_1 e F_2) para que a resultante dessas forças seja F, sendo $\|F\| = \sqrt{3}$, $\|F_1\| = 2$ e $\|F_2\| = 1$. Veja a Fig. 2.17*b*.

2.28. Num ponto atuam três forças: $F_1 = (-3, -4)$, $F_2 = (-1, 2)$ e $F_3 = (2, 1)$.
a) Elas estão em equilíbrio?
b) Mantendo-se a direção e o sentido de F_2 e F_3, como podemos modificá-las de modo que o sistema fique em equilíbrio?
c) É possível colocar o sistema em equilíbrio mantendo-se F_1 e F_3 fixas e variando apenas o módulo e o sentido de F_2?

2.29. Calcule a resultante das forças F_1, F_2 e F_3 sabendo-se que
i) $\|F_1\| = 1$ e F_1 é horizontal;
ii) $F_2 = F_1 + u_1$, onde $\|u_1\| = 1$ e u_1 é perpendicular a F_1;
iii) $F_3 = F_2 + u_2$, onde $\|u_2\| = 1$ e u_2 é perpendicular a F_2.

2.30. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Demonstre que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \cdot v,$$

onde $u \cdot v$ é, por definição, o número $x_1x_2 + y_1y_2$.

2.6 PRODUTO ESCALAR E ÂNGULO ENTRE VETORES

Definimos o *produto escalar* dos vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ como sendo o número

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplo. Se $u = (2, 1)$ e $v = (3, -5)$, então

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 1.$$

O símbolo $u \cdot v$ deve ser lido assim: "u escalar v".

Decorrem imediatamente da definição as seguintes propriedades do produto escalar:

1) $u \cdot u = \|u\|^2$;
2) $u \cdot v = v \cdot u$;
3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
4) $(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k\,(u \cdot v)$.

Nas propriedades acima u, v e w são vetores quaisquer e k é um número real. Faremos a demonstração da propriedade (4). A demonstração das demais fica como exercício.

Tomamos, como na definição, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Sabemos que vale

$$(kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 = x_1\,(kx_2) + y_1\,(ky_2) = k\,(x_1x_2 + y_1y_2),$$

e daí temos

$$(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k\,(u \cdot v).$$

A desigualdade que aparece na proposição seguinte é chamada desigualdade de *Cauchy-Schwarz*.

Proposição 2.2 – *Sejam* u *e* v *vetores arbitrários. Então*

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

Prova. Inicialmente vamos provar que se w e z são vetores unitários, então

$$|w \cdot z| \leqslant 1.$$

Usando este resultado, faremos a prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso geral. Para provarmos o caso particular $|w \cdot z| \leqslant 1$, observemos que

$$\|w - z\|^2 = \|w\|^2 - 2w \cdot z + \|z\|^2 \geqslant 0.$$

Logo,

$$2w \cdot z \leqslant \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

Como $\|w\|^2 = \|z\|^2 = 1$, temos

$$2w \cdot z \leqslant 2 \text{ ou } w \cdot z \leqslant 1 \tag{1}$$

Analogamente, partindo-se de

$$\|w + z\|^2 = \|w\|^2 + 2w \cdot z + \|z\|^2 \geqslant 0,$$

obtemos

$$-w \cdot z \leqslant 1. \tag{2}$$

De (1) e (2), temos

$$|w \cdot z| \leqslant 1.$$

Sejam, agora, u e v vetores arbitrários. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, $u/\|u\|$ e $v/\|v\|$ são unitários e, portanto, vale

$$\left| \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \right| \leqslant 1$$

ou

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leqslant 1,$$

donde

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\| \, \|v\|.$$

Como a desigualdade de Cauchy-Schwarz verifica se $u = 0$ ou $v = 0$ a prova da proposição está completa.

A seguir, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos definir o ângulo entre dois vetores.

Se u e v são vetores não-nulos, então

$$\|u\| \, \|v\| > 0$$

e, como

$$|u \cdot v| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|,$$

segue que

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leqslant 1,$$

que é equivalente a

$$-1 \leqslant \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \leqslant 1.$$

Estando o número

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

entre 1 e -1, existe um único ângulo θ (medido em radianos) entre 0 e π, tal que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}. \tag{F}$$

Definimos o *ângulo entre os vetores não-nulos* u e v como sendo o ângulo θ dado pela fórmula (F).

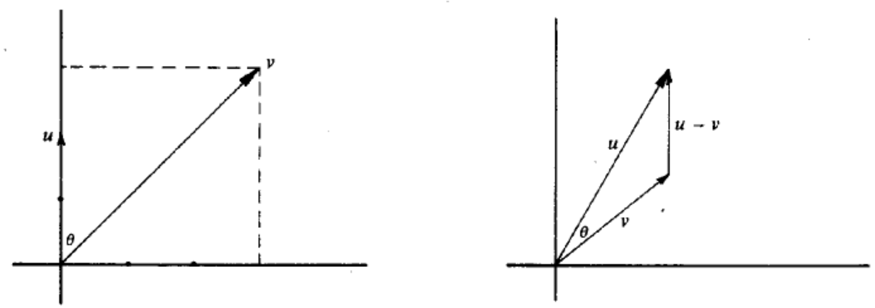
Exemplo. Se $u = (0, 2)$ e $v = (3, 3)$, o ângulo θ entre estes vetores é

$$\cos \theta = \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{\sqrt{0 + 2^2}\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ radianos. (Veja a Fig. 2.18}a\text{.)}$$

Observe também que, a partir da fórmula (F), podemos escrever

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \theta.$$

Em algumas aplicações é mais conveniente calcular o produto escalar utilizando esta fórmula.



(a) (b)

Fig. 2.18

Usando a lei dos co-senos podemos mostrar que o ângulo θ, entre os vetores u e v, dado pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|},$$

é exatamente o menor ângulo formado pelas setas que representam u e v. Veja a Fig. 2.18b. De fato, a lei dos co-senos, aplicada ao triângulo cujos lados são as setas que representam u, v e $u - v$, nos dá

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\ \|v\| \cos\theta,$$

de onde temos

$$\cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\,\|u\|\ \|v\|}.$$

Mas, conforme o Exerc. 2.30, temos

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \cdot v,$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|},$$

como queríamos.

Como no caso de retas, se o ângulo θ entre dois vetores é $\pi/2$ radianos, eles são ditos *perpendiculares*. Observe que, se u e v são perpendiculares, então

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|} = \cos \pi/2 = 0;$$

mas $u \cdot v / \|u\|\ \|v\| = 0$, implica que $u \cdot v = 0$. Logo, se u e v são perpendiculares, então $u \cdot v = 0$. Por outro lado, se $u \neq 0$ e $v \neq 0$ são tais que $u \cdot v = 0$, então $\cos\theta = 0$ e, portanto, u é perpendicular a v. Assim, para vetores não-nulos, temos

$$u \text{ é perpendicular a } v \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

Ainda usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos demonstrar a parte (c) da proposição 2.1, que é a desigualdade triangular

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Prova. Usando as propriedades do produto escalar, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$u \cdot v \leqslant \|u\|\ \|v\|$$

de modo que

$$\|u + v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\ \|v\| + \|v\|^2$$

ou

$$\|u + v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$$

e, finalmente,

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

2.7 PROJEÇÃO DE VETORES

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores não-nulos e P a projeção ortogonal do ponto (x_1, y_1) sobre a reta definida por $(0, 0)$ e (x_2, y_2). Veja a Fig. 2.19.

Se o ângulo θ entre os vetores u e v for menor que 90°, como é o caso da Fig. 2.19, então

$$\vec{OP} = \|\vec{OP}\| \frac{v}{\|v\|}$$

e, como

$$\|\vec{OP}\| = \|u\| \cos\theta,$$

temos

$$\vec{OP} = \|u\| \cos\theta \frac{v}{\|v\|}$$

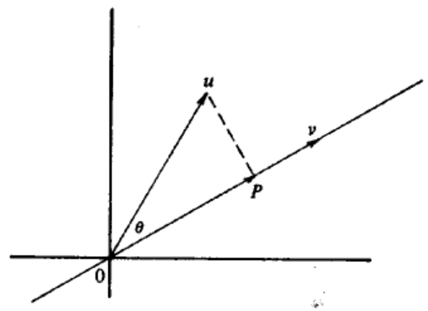


Fig. 2.19

ou

$$\vec{OP} = \|u\| \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \; \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v.$$

No caso do ângulo θ entre os vetores u e v ser maior que 90°, conforme mostra a Fig. 2.20, com um procedimento análogo ao anterior, podemos mostrar que também se tem

$$\vec{OP} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v.$$

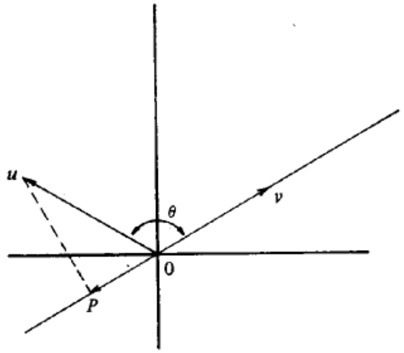


Fig. 2.20

Observe também que, se $\theta = 90^\circ$, então $\vec{OP} = 0$, mas mesmo assim, a fórmula

$$\vec{OP} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$$

continua válida.

Independentemente do ângulo entre u e v, o vetor $\vec{OP}$ é chamado a *projeção* de u sobre v. Indicaremos $\vec{OP}$ por p_v^u. Portanto, quaisquer que sejam os vetores não-nulos u e v, o vetor

$$p_v^u = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$$

é denominado a projeção de u sobre v.

Por exemplo, a projeção do vetor $u = (2, 1)$ sobre $v = (4, -1)$ é

$$p_v^u = \frac{(2, 1) \cdot (4, -1)}{(4, -1) \cdot (4, -1)} \, (4, -1) = \frac{7}{17} (4, -1).$$

Exemplo. *a*) Verificar que o triângulo cujos vértices são $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$ é retângulo em A.

b) Calcular a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o pé da altura do triângulo relativa ao vértice A.

Solução. *a*) É suficiente verificar que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Como $\vec{AB} = (-3, -2)$ e $\vec{AC} = (-2, 3)$, temos

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 = 0.$$

b) A projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é o módulo do vetor

$$P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}.$$

Sendo $\vec{BA} = (3, 2)$ e $\vec{BC} = (1, 5)$, temos

$$P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\vec{BC} \cdot \vec{BC}} \vec{BC} = \frac{13}{26} (1, 5) = \frac{1}{2} (1, 5).$$

Logo, a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é

$$\|P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}\| = \frac{1}{2} \sqrt{26}.$$

c) Seja $P(x, y)$ o pé da altura relativa ao vértice A. Então,

$$\vec{BP} = P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}$$

ou

$$(x - 0, y - 1) = \frac{1}{2} (1, 5).$$

Logo,

$$x = \frac{1}{2} \text{ e } y - 1 = \frac{5}{2}.$$

Donde

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Exemplo. Calcule o ângulo entre $u + v$ e $u - v$, sabendo-se que $\|u\| = \sqrt{3}$, $\|v\| = 1$ e o ângulo entre u e v é 30°.

Solução. Seja θ o ângulo entre $u + v$ e $u - v$. Então,

$$\cos\theta = \frac{(u+v)\cdot(u-v)}{\|u+v\|\,\|u-v\|} = \frac{u\cdot u - v\cdot v}{\|u+v\|\,\|u-v\|}.$$

Mas

$$u\cdot u = \|u\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$v\cdot v = \|v\|^2 = 1^2 = 1.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{2}{\|u+v\|\,\|u-v\|}.$$

Para calcular $\|u+v\|$ e $\|u-v\|$, procedemos assim:

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\cdot v = 4 + 2u\cdot v.$$

Mas

$$u\cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos 30^\circ = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$\|u+v\|^2 = 4 + 2\cdot\frac{3}{2} = 7.$$

Portanto,

$$\|u+v\| = \sqrt{7}.$$

Procedendo da mesma forma encontramos

$$\|u-v\| = 1.$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

e

$$\theta = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Observe que $u + v$ e $u - v$ são as diagonais do paralelogramo definido pelos vetores u e v.

Exercícios

2.31. Sejam $u = (2, 4)$ e $v = (-3, 5)$. Determine:
a) o produto escalar de u por v;
b) o ângulo entre u e v;
c) P^u_v.

2.32. *a*) Dado o vetor $u = (x, y)$, mostre que os vetores $v = (-y, x)$ e $w = (y, -x)$ são perpendiculares a u.
b) Faça numa figura a representação dos vetores u, v e w.

2.33. *a*) Encontre um vetor de módulo 5 perpendicular ao vetor $(2, -1)$
b) Determine o valor de x para que o vetor $(2, x^2 - 1)$ seja perpendicular ao vetor $(-6, 4)$.

2.34. Dado o triângulo cujos vértices são $A\ (1, 1)$, $B\ (4, 0)$ e $C\ (3, 4)$, determine:
a) os ângulos A, B e C;
b) as projeções dos lados AC e BC sobre o lado AB;
c) o pé da altura relativa ao vértice C;
d) a área do triângulo ABC;
e) a interseção da bissetriz do ângulo B com o lado AC.

2.35. Determine a altura (relativa ao lado AD) do paralelogramo cujos vértices são $A\ (1, 0)$, $B\ (2, 2)$, $C\ (5, 3)$ e $D\ (4, 1)$.

2.36. Calcule a área do paralelogramo cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$, sendo $A\ (0, 1)$, $B\ (-4, -1)$, $C\ (5, -3)$ e $D\ (7, 0)$.

2.37. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (-2, 3)$ e $v = (5, 1)$.

2.38. Verifique que os pontos $A\ (2, 7)$, $B\ (2, -6)$ e $C\ (5, -6)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

2.39. Seja $u = (3, 1)$. Determine as coordenadas de um vetor v, de módulo 2, e que faz com u um ângulo de 30°.

2.40. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um dos quais é paralelo e o outro é perpendicular ao vetor $(1, -1)$.

2.41. Sejam u e v vetores unitários e perpendiculares, $w = a_1u + b_1v$ e $z = a_2u + b_2v$. Calcule:
a) $\|w\|$ e $\|z\|$;
b) $w\cdot z$;
c) o ângulo entre w e z.

2.42. Sejam u e v vetores distintos. Mostre que, se $u + v$ é perpendicular a $u - v$, então $\|u\| = \|v\|$. A que teorema sobre quadriláteros corresponde este resultado?

2.43. Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $w = (x, y)$. Mostre que
a) $w = xe_1 + ye_2$;
b) $w = (w\cdot e_1, w\cdot e_2)$.

2.44. Calcule o ângulo entre os vetores v e w sabendo-se que:

$$\|u\| = \|w\| = 5;\ \|v\| = 1;\ \|u - v + w\| = \|u + v + w\|;$$

o ângulo entre u e v é $\pi/8$.

2.45. Se $u + v + w = 0$, $\|u\| = 5$, $\|v\| = 6$ e $\|w\| = 7$, calcule:
a) $u\cdot v$; *b*) $u\cdot w$; *c*) $v\cdot w$.

2.46. Se $P^v_u = (2, 1)$, $u = (4, 2)$ e $\|v\| = 6$, determine v.

2.47. Demonstre que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. (*Sugestão*. Demonstre que os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, da Fig. 2.21 são perpendiculares.)

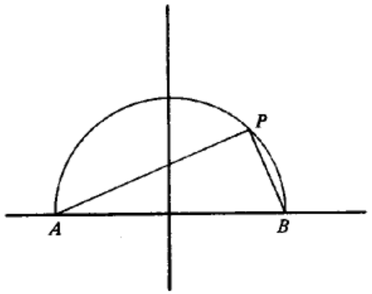
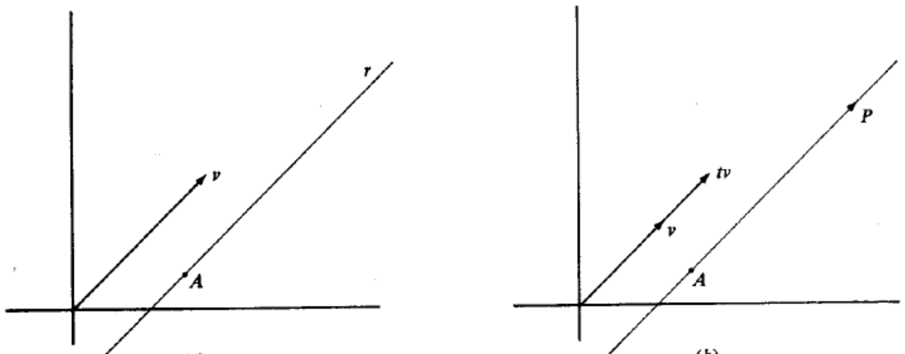


Fig. 2.21

2.48. Sejam u e v vetores não-nulos. Demonstre que u é perpendicular a $v - P_u^v$.

2.8 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja $v = (a, b)$ um vetor não-nulo e $A\,(x_o, y_o)$ um ponto do plano. Da Geometria Elementar sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém A. Dizer que r tem a mesma direção de v significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v.



(a) (b)

Fig. 2.22

Assim, um ponto $P\,(x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = tv,$$

para algum número real t. Ou, em termos de coordenadas,

$$(x - x_o, y - y_o) = (ta, tb).$$

Esta equação é equivalente ao sistema de equações

$$x = x_o + at$$
$$y = y_o + bt,$$

chamadas ***equações paramétricas*** de r.

Exemplo.

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 - 3t$$

são equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $(1, 2)$ e tem a direção do vetor $(2, -3)$. Isto significa que para cada valor do *parâmetro* t, o ponto

$$(1 + 2t, 2 - 3t)$$

pertence à reta r e também que todo ponto de r é da forma $(1 + 2t, 2 - 3t)$, para algum valor de t.

Exemplo. Uma partícula está animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t).$$

a) Determinar sua posição nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.
b) Determinar o instante no qual a partícula atinge o ponto $(11, 13)$.
c) A partícula passa pelo ponto $(5, 6)$?
d) Descrever sua trajetória.
e) Determinar sua velocidade no instante t.

Solução. *a*) Como a posição da partícula é dada em função do tempo por

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t),$$

suas posições nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$ são, respectivamente,

$$(x, y) = (2 + 3.0, 1 + 4.0) = (2, 1),$$
$$(x, y) = (2 + 3.1, 1 + 4.1) = (5, 5),$$
$$(x, y) = (2 + 3.2, 1 + 4.2) = (8, 9).$$

b) Basta determinar t de modo que

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (11, 13),$$

ou

$$2 + 3t = 11$$
$$1 + 4t = 13.$$

Logo, $t = 3$, pois ambas as equações acima admitem esta solução.

c) Para que a partícula passe pelo ponto (5, 6) é necessário que para algum valor de t se tenha

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (5, 6),$$

o que não ocorre pois as equações

$$\begin{aligned} 2 + 3t &= 5 \\ 1 + 4t &= 6 \end{aligned}$$

são incompatíveis, isto é, não admitem solução comum.

d) A equação

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t)$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 1 + 4t \end{aligned}$$

que são equações paramétricas da reta paralela ao vetor (3, 4) e que contém o ponto (2, 1). Logo, esta reta é da trajetória da partícula.

e) Vamos determinar a velocidade v da partícula no instante t_o. Se no instante t_o a partícula se encontra em $P_o\,(2 + 3t_o, 1 + 4t_o)$, e no instante t se encontra em $P\,(2 + 3t, 1 + 4t)$, o vetor deslocamento no intervalo de tempo $\Delta t = t - t_o$ é

$$\overrightarrow{P_oP} = (2 + 3t, 1 + 4t) - (2 + 3t_o, 1 + 4t_o) = (t - t_o)(3, 4) = \Delta t\,(3, 4).$$

Logo, pela definição de velocidade, temos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{P_oP}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(3, 4)}{\Delta t} = (3, 4).$$

Como a velocidade, no instante t_o, independe de t_o, concluímos que a partícula tem velocidade constante. Observe que o número

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

expressa a velocidade escalar da partícula.

2.9 EQUAÇÕES CARTESIANAS DA RETA

Vimos, na Seç. 2.8, que as equações paramétricas de uma reta r paralela ao vetor não-nulo $v = (a, b)$ e que contêm o ponto (x_o, y_o) são dadas por

$$\begin{aligned} x &= x_o + at \\ y &= y_o + bt. \end{aligned}$$

Podemos eliminar o parâmetro t destas equações efetuando as seguintes operações: multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a, encontramos

$$bx = bx_o + bat \qquad (1)$$

$$ay = ay_o + abt; \qquad (2)$$

subtraindo-se (1) de (2), temos

$$ay - bx = ay_o - bx_o.$$

Observemos que o segundo membro desta equação é constante. Chamando-se esta constante de c, obtemos a equação

$$ay - bx = c$$

que é chamada ***equação cartesiana*** da reta r.

Se a primeira coordenada do vetor $v = (a, b)$ é zero, isto é, $a = 0$, r é paralela ao eixo y como mostra a Fig. 2.23*a*, e sua equação cartesiana reduz-se a $x = x_o$.

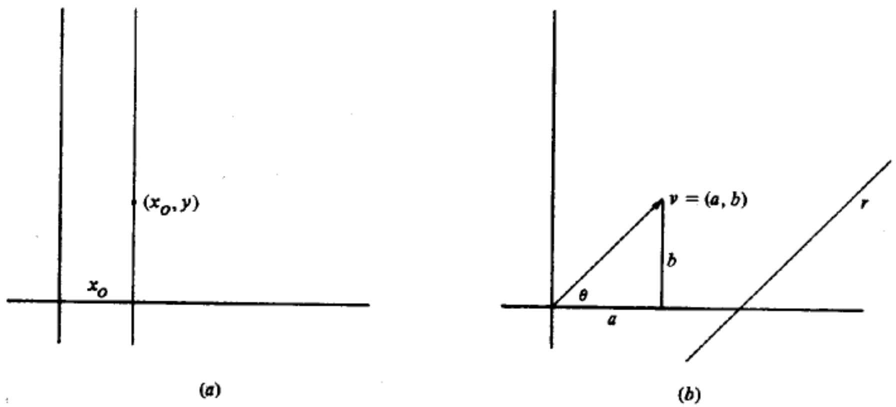


Fig. 2.23

Se $a \neq 0$, podemos dividir a equação cartesiana de r por a e obtermos

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo-se, nesta equação, $b/a = m$ e $c/a = k$, temos

$$y = mx + k.$$

Como se vê na Fig. 2.23*b*,

$$m = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta,$$

onde θ é o ângulo que r faz com o eixo x. O número m é chamado *declividade* de r. A constante k é a ordenada do ponto de interseção de r com o eixo y pois $(0, k)$ satisfaz a equação $y = mx + k$.

Resumindo, demonstramos o seguinte:

Se r *é uma reta paralela ao eixo* y, *sua equação cartesiana é da forma*

$$x = x_o,$$

e se r *não é paralela ao eixo* y, *sua equação é da forma*

$$y = mx + k,$$

onde m *é a tangente do ângulo que* r *faz com o eixo* x.

Observe que o vetor $(1, m)$ é paralelo à reta r de equação $y = mx + k$. De fato, como

$$(1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}\,(a, b),$$

$(1, m)$ é múltiplo de (a, b) e, conseqüentemente, tem também a direção de r.

Exemplo. Determinar as equações paramétrica e cartesiana da reta r definida pelos pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$.

Solução. Como as abscissas dos dois pontos dados são diferentes, a reta, por eles definida, não é paralela ao eixo y. Logo, sua equação cartesiana é da forma

$$y = mx + k. \qquad (1)$$

Para determinar m e k substituímos os pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$ em (1) e obtemos

$$\begin{aligned} 5 &= m + k \\ 7 &= 2m + k. \end{aligned}$$

Resolvendo-se este sistema encontramos

$$m = 2 \quad \text{e} \quad k = 3.$$

Logo, a equação procurada é

$$y = 2x + 3.$$

Para escrever as equações paramétricas de r, tomamos o ponto (x_o, y_o) como sendo $(1, 5)$ e $v = (2, 7) - (1, 5) = (1, 2)$ e obtemos

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 5 + 2t. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Uma mesma reta pode ser representada por pares de equações paramétricas diferentes. De fato, depende da escolha do ponto (x_o, y_o) e do vetor $v = (a, b)$. Por exemplo, a reta do exemplo anterior pode ser representada também pelas equações

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 7 + 4t. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Embora o sistema (I) seja diferente do sistema (II), eles são equivalentes. Isto significa que quando t varia sobre o conjunto dos números reais o conjunto de pontos dados por (I) é exatamente o conjunto de pontos dados por (II).

Demonstramos anteriormente que toda reta r tem uma equação da forma

$$bx - ay = c,$$

onde (a, b) é um vetor paralelo a r. Fazendo-se $A = b$, $B = -a$ e $C = -c$, podemos escrever a equação de r assim

$$Ax + By + C = 0. \qquad \text{(III)}$$

Observe que o vetor (A, B) é perpendicular à reta r, pois

$$(A, B) \cdot (a, b) = (b, -a) \cdot (a, b) = ab - ab = 0,$$

e (a, b) é paralelo a r.

A recíproca também é verdadeira, isto é, toda equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

tem como gráfico uma reta. Realmente, se (x_o, y_o) é um ponto tal que

$$Ax_o + By_o + C = 0, \qquad (2)$$

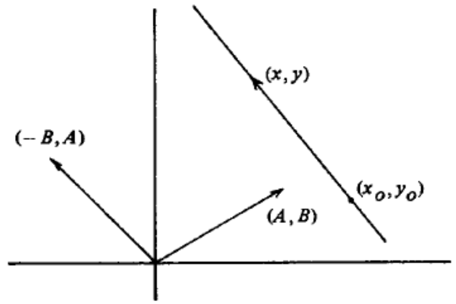


Fig. 2.24

subtraindo-se (2) de (1) encontramos

$$A\,(x - x_o) + B\,(y - y_o) = 0.$$

Interpretando-se este resultado como o produto escalar dos vetores (A, B) e $(x - x_o, y - y_o)$, vemos que o conjunto solução de (III) é constituído de todos os pontos (x, y) tais que os vetores $(x - x_o, y - y_o)$ e (A, B) são perpendiculares. Isto significa que o gráfico de (III) é a reta que contém (x_o, y_o) e tem a direção do vetor $(-B, A)$.

2.10 ÂNGULOS ENTRE RETAS

Exemplo. Determinar o menor dos ângulos entre as retas r e s, cujas equações são, respectivamente,

$$y = 2x - 2 \text{ e } y = -x + 4.$$

Solução. O vetor $(1, 2)$ tem a direção de r, assim como o vetor $(1, -1)$ tem a direção de s. Veja a Fig. 2.25.

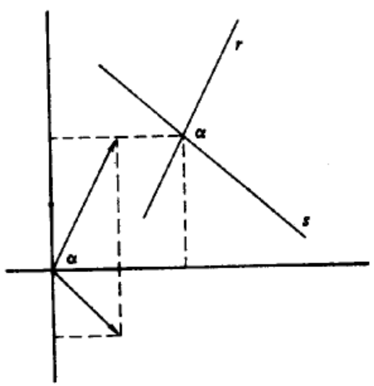


Fig. 2.25

O ângulo α entre os vetores $(1, 2)$ e $(1, -1)$ é um dos ângulos entre as retas r e s. Efetuando-se as contas, encontramos

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Logo,

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Como $\cos\alpha < 0$, encontramos o ângulo maior entre as duas retas. O ângulo menor entre r e s é, evidentemente, $\pi - \alpha$, cujo co-seno é

$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$

pois,

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

2.11 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

A distância do ponto $P\,(x_o, y_o)$ à reta r, de equação $y = mx + k$, é definida como sendo a distância de P a A, onde $A\,(x_1, y_1)$ é o pé da perpendicular baixada de P a r. (Veja a Fig. 2.26*a*.

Indicando-se por $d\,(P, r)$ a distância de P a r, temos

$$d\,(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\|.$$

Como o vetor $(1, m)$ tem a direção da reta r, os vetores $\overrightarrow{PA} = (x_1 - x_o, y_1 - y_o)$ e $(-m, 1)$ têm a mesma direção. Logo, existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{PA} = t\,(-m, 1)$$

e, portanto,

$$d\,(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\| = \|t\,(-m, 1)\| = |t|\sqrt{m^2 + 1}\,.$$

Desta forma, $d\,(P, r)$ estará determinada quando conhecermos t. A seguir, faremos o cálculo de t. De

$$\overrightarrow{PA} = (x_1 - x_o, y_1 - y_o) = t\,(-m, 1)$$

obtemos

$$x_1 = x_o - tm$$
$$y_1 = y_o + t.$$

Como (x_1, y_1) pertence à reta r, deve valer

$$y_o + t = m\,(x_o - tm) + k,$$

donde

$$t = \frac{-y_o + mx_o + k}{1 + m^2} \; .$$

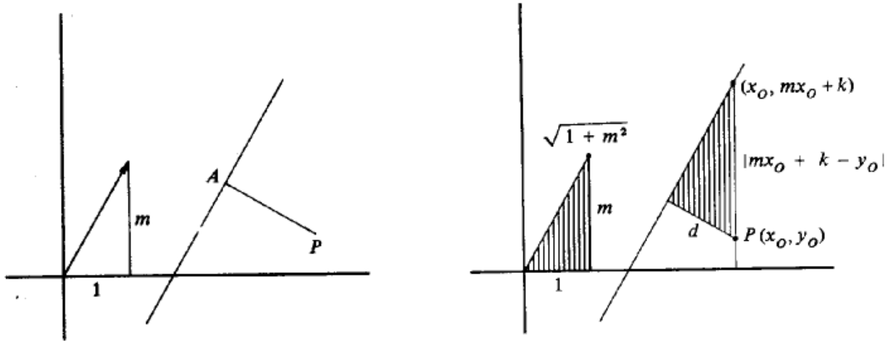
Sendo $d(P, r) = |t| \sqrt{1 + m^2}$, temos, finalmente,

$$d(P, r) = \left| \frac{-y_o + mx_o + k}{1 + m^2} \right| \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

ou

$$d(P, r) = \frac{|-y_o + mx_o + k|}{\sqrt{1 + m^2}} \; .$$

Esta fórmula também pode ser obtida da Fig. 2.26*b* usando a semelhança dos triângulos hachurados.



(*a*) (*b*)

Fig. 2.26

$$\frac{d}{1} = \frac{|mx_o + k - y_o|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Se a equação de r é da forma $x = c$ a fórmula deduzida acima não se aplica. Neste caso, a distância de $P(x_o, y_o)$ a r é dada por $d(P, r) = |c - x_o|$. A fórmula enunciada no Exerc. 2.58 aplica-se a todos os casos.

2.12 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA

Na Fig. 2.27 representamos uma circunferência de centro $C(x_o, y_o)$ e raio r.

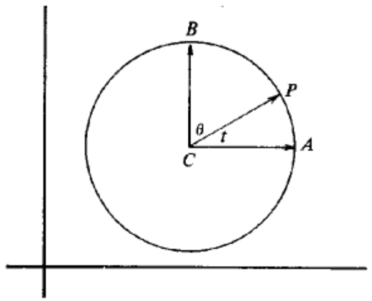


Fig. 2.27

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência e t o ângulo formado pelos vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CA}$, onde $A(x_o + r, y_o)$. Então,

$$\cos t = \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CA}}{\|\vec{CP}\| \, \|\vec{CA}\|} \; .$$

Como $\vec{CP} = (x - x_o, y - y_o)$, $\vec{CA} = (r, 0)$ e $\|\vec{CP}\| = \|\vec{CA}\| = r$, temos

$$\cos t = \frac{x - x_o}{r}$$

ou

$$x = x_o + r \cos t \, .$$

Procedendo-se de maneira análoga com os vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$, onde B é o ponto $(x_o, y_o + r)$, e tendo-se em conta que o co-seno do ângulo θ, formado por estes vetores, é igual ao seno do ângulo t, obtemos

$$y = y_o + r \operatorname{sen} t \, .$$

Reciprocamente, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz as equações $x = x_o + r \cos t$ e $y = y_o + r \operatorname{sen} t$, então $P(x, y)$ pertence à circunferência, pois

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t} = r \, .$$

As equações

$$x = x_o + r \cos t$$
$$y = y_o + r \operatorname{sen} t$$

são chamadas *equações paramétricas da circunferência* de centro $C(x_o, y_o)$ e raio r.

Como no caso da reta, eliminando-se t nas equações paramétricas, obtemos a equação cartesiana da circunferência. Aqui procedemos assim: das equações paramétricas obtemos

$$(x - x_o)^2 = r^2 \cos^2 t$$
$$(y - y_o)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 t,$$

e daí,

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

que é a *equação cartesiana da circunferência* de centro (x_o, y_o) e raio r.

Exemplo. Escrever uma equação cartesiana da circunferência definida pelos pontos $A\,(1, 1)$, $B\,(1, -2)$ e $C\,(2, 3)$.

Solução. A equação procurada é da forma

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

que também pode ser escrita assim

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo-se

$$-2x_o = a,\ -2y_o = b \ \text{ e } \ x_o^2 + y_o^2 - r^2 = c$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

que é outra forma de se escrever a equação cartesiana da circunferência.

Esta última equação deve ser verificada pelas coordenadas de cada um dos pontos A, B e C. Substituindo-se, pois, as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos o sistema.

$$\begin{aligned} a + b + c &= -2 \\ a - 2b + c &= -5 \\ 2a + 3b + c &= -13, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = -13,\ b = 1 \ \text{ e } \ c = 10.$$

Logo,

$$x^2 + y^2 - 13x + y + 10 = 0,$$

é a equação procurada.

Por outro lado, sendo

$$a = -2x_o,\ b = -2y_o \ \text{ e } \ c = x_o^2 + y_o^2 - r^2$$

segue-se que

$$x_o = \frac{13}{2},\ y_o = -\frac{1}{2} \ \text{ e } \ r^2 = \frac{65}{2}.$$

Logo, a equação da circunferência pode também ser escrita na forma

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

Observe que as equações paramétricas desta circunferência são

$$x = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \cos t$$
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t.$$

Exemplo. Descrever a trajetória de uma partícula animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 \cos 3t, 2 \operatorname{sen} 3t).$$

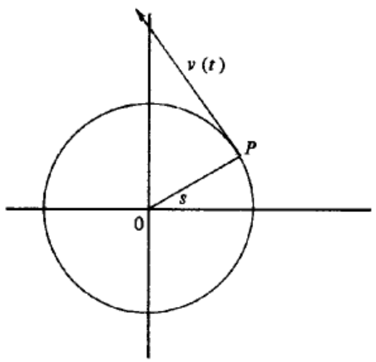


Fig. 2.28

Solução. A igualdade dada pode ser desdobrada em

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos 3t \\ y &= 2 \operatorname{sen} 3t \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} x &= 2 \cos s \\ y &= 2 \operatorname{sen} s, \end{aligned}$$

onde $s = 3t$. Comparando

$$x = 2 \cos s$$
$$y = 2 \operatorname{sen} s$$

com as equações paramétricas da circunferência de centro (x_o, y_o) e raio r, concluímos que a trajetória da partícula é a circunferência de centro na origem e raio 2.

Observe que $s = 3t$ é o ângulo descrito pela partícula no tempo t. O número 3 é a velocidade angular da partícula. Observe, ainda, que o vetor

$$v(t) = (-6 \operatorname{sen} 3t, 6 \cos 3t)$$

é perpendicular ao vetor $\vec{OP} = (2 \cos 3t, 2 \operatorname{sen} 3t)$, pois $v(t) \cdot \vec{OP} = 0$. Usando a definição de velocidade e o conceito de derivada podemos mostrar que $v(t)$ é, exatamente, a velocidade da partícula no instante t.

Exercícios

2.49. Escreva as equações da reta que
a) contém o ponto $(-1, 1)$ e tem a direção do vetor $(2, 3)$.
b) contêm os pontos A (3, 2) e B (– 3, 1).

OK! 2.50. Dados os vetores $u = (1, 5)$ e $v = (4, 1)$, escreva as equações paramétricas e cartesianas das retas que contêm as diagonais do paralelogramo definido por u e v.

2.51. *a*) Mostre que

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 7 - 5t$$

são equações paramétricas da reta definida pelos pontos A (3, 7) e B (5, 2).
b) Que valores se deve atribuir a t para se obter os pontos A e B?
c) Que valores de t dão os pontos entre A e B?
d) Localize na reta os pontos para os quais $t > 1$ e $t < 0$.

2.52. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto (1, 2) e faz com a reta $y = -2x + 4$ um ângulo de 60°.

OK! 2.53. Determine a projeção ortogonal do ponto P (2, 4) sobre a reta

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -1 + 3t.$$

OK! 2.54. Dado o ponto A (2, 3), ache o vetor $\vec{AP}$, onde P é o pé da perpendicular baixada de A à reta $y = 5x + 3$.

OK! 2.55. Determine a interseção da reta $y = 2x - 1$ com a reta definida pelos pontos (2, 1) e (0, 0).

OK! 2.56. Dados o ponto P (2, – 1) e a reta r de equação $y = 3x - 5$, escreva uma equação da reta que contém o ponto P e
a) seja paralela à reta r;
b) seja perpendicular à reta r.
OK!

2.57. Determine o ângulo menor entre as retas
a) $2x + 3y = 1$ e $y = -5x + 8$;
b) $x + y + 1 = 0$ e $x = 1 - 2t, y = 2 + 5t$.

2.58. Mostre que a distância do ponto $P(x_o, y_o)$ à reta $Ax + By + C = 0$ é dada por

$$\frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.59. Mostre que se a distância entre $P(a, b)$ e a origem é c, então a reta definida por P e $A(-c, 0)$ é perpendicular à reta definida por P e $B(c, 0)$.

OK! 2.60. Determine o comprimento do segmento OP da figura.

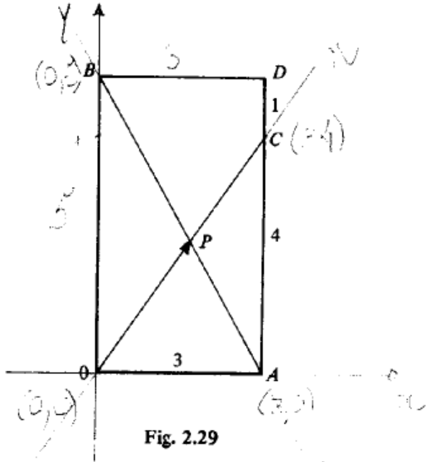


Fig. 2.29

OK! 2.61. Determine a distância entre as retas $2x - y = 6$ e $2x - y = -1$.

2.62. Escreva uma equação da circunferência que contém os pontos de interseção das retas $y = x + 1$, $y = 2x + 2$ e $y = -2x + 3$.

2.63. Escreva as equações paramétricas das seguintes circunferências:
a) $x^2 + y^2 - 11 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

2.64. Deduza uma equação da circunferência de centro na origem e tangente à reta $3x - 4y + 20 = 0$.

2.65. Determine uma equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos (3, 3) e (– 3, 3).

2.66. Determine um ponto na circunferência de centro (1, 2) e raio 3 que seja eqüidistante dos pontos A (6, 6) e B (2, 10).

2.67. *a*) Determine a interseção das circunferências

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$$

b) Escreva uma equação cartesiana da reta que contém a corda comum às circunferências do item (*a*).

2.68. *a*) Uma partícula percorre a reta definida pelos pontos $A\ (1,\ 2)$ e $B\ (3,\ -1)$ com velocidade constante. Sabendo-se que no instante $t = 0$ a partícula se encontra em A e que em $t = 2$ se encontra em B, determinar sua posição no instante t.
b) Em que instante a partícula se encontra mais próxima do ponto $C\ (4,\ -2)$?

2.69. Num determinado instante t as posições de duas partículas P e Q são dadas, respectivamente, por

$$(1 + 2t,\ 1 + t) \text{ e } (4 + t,\ -3 + 6t).$$

Elas se chocam?

2.70. Um móvel M_1 parte do ponto $A\ (0,\ 4)$ com velocidade $v = (1,\ -1)$ no mesmo instante em que um móvel M_2 parte de $O\ (0,\ 0)$, também com velocidade constante. Qual deve ser a velocidade de M_2 para que M_1 e M_2 se choquem uma unidade de tempo depois?

2.71. Uma partícula está animada de um movimento tal, que no instante t ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (1 + 2\cos t,\ 2 + 2\ \text{sen}\ t).$$

a) Descrever sua trajetória.
b) Verificar que sua velocidade no instante t é

$$v\,(t) = (-\,2\ \text{sen}\ t,\ 2\cos t).$$

2.72. Escreva as equações paramétricas da tangente à circunferência

$$x = x_0 + r\cos t$$
$$y = y_0 + r\ \text{sen}\ t,$$

no ponto (x_1, y_1).

2.73. A trajetória de uma partícula é dada por

$$x = 2 + 2\cos t$$

$$y = 1 + 2\ \text{sen}\ t,\ \frac{\pi}{8} \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Determine o menor valor de t para o qual a partícula se encontra a igual distância dos pontos $A\ (0,\ 4)$ e $B\ (1,\ 5)$.

2.74. Sejam r e s duas retas cujas equações são $Ax + By + C = 0$ e $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.
a) Mostre que, qualquer que seja λ,

$$Ax + By + C + \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \qquad (1)$$

é a equação de uma reta que contém a interseção de r e s.
b) Se $A^2 + B^2 = A_1^2 + B_1^2$, mostre que para $\lambda = \pm 1$ as retas dadas por (I) são as bissetrizes dos ângulos entre r e s.

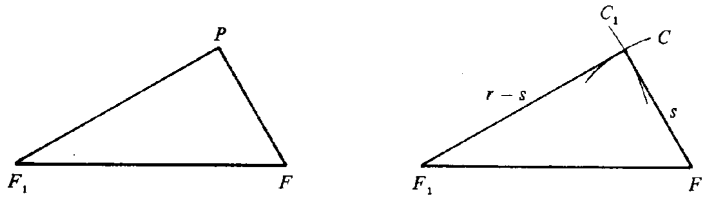
CÔNICAS 3

3.1 ELIPSE

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d\,(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d\,(P, F) + d\,(P, F_1) = r$$

é chamado elipse de focos F_1 e F e eixo maior r.



(*a*) (*b*)

Fig. 3.1

Graficamente podemos obter um ponto da elipse fazendo-se a seguinte construção: centramos o compasso em um dos focos e com abertura igual a $s\ (s < r)$ traçamos um arco C, depois, centramos no outro foco e com abertura igual a $r - s$ traçamos o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da elipse. Veja a Fig. 3.1.

Utilizando-se esta construção podemos obter tantos pontos da elipse quantos desejarmos. Ligando-se estes pontos obtemos a representação gráfica da elipse (Fig. 3.2).

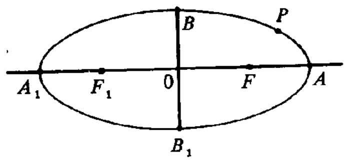


Fig. 3.2

Os pontos A_1 e A foram obtidos tomando-se $s = (r - d(F, F_1))/2$ e os pontos B e B_1 tomando-se $s = r/2$. Estes pontos são chamados *vértices* da elipse. Observe que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior da elipse e que o segmento BB_1 é perpendicular a A_1A. O ponto O, interseção de A_1A e BB_1, é o *centro* da elipse.

Na prática, podemos traçar uma elipse usando um laço completo de barbante e dois pregos. Fixam-se os pregos em dois pontos (focos) e faz-se um lápis deslizar sobre o papel de modo que o laço de barbante, apoiado nos pregos e na ponta do lápis, mantenha-se esticado.

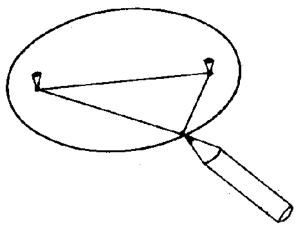
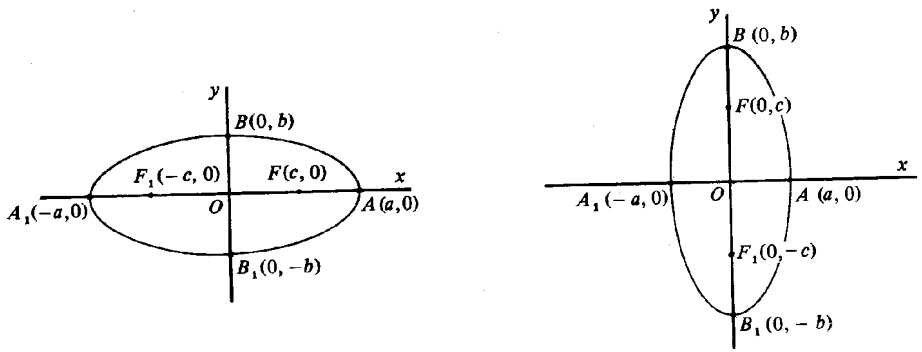


Fig. 3.3

A seguir, vamos deduzir uma equação da elipse na situação particular em que seu centro coincide com a origem do sistema e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, conforme ilustra a Fig. 3.4.



(a) (b)

Fig. 3.4

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$d(P,F) + d(P,F) = d(A_1, A),$$

onde $P(x, y)$ é um ponto qualquer da elipse.

Para maior simplicidade nas contas, estamos indicando o eixo maior por $2a$ e a distância focal $d(F_1, F)$ por $2c$. Com esta notação, em termos das coordenadas de F_1, F e P, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Elevando-se ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Novamente, elevando-se esta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (1)$$

Na Fig. 3.4*a*, por definição do ponto B, temos

$$d(B, F) = a \text{ e } d(O, F) = c.$$

Logo, do triângulo OBF, deduzimos que $a^2 - c^2 = b^2$.

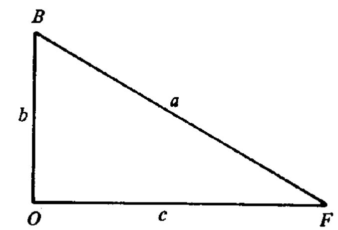


Fig. 3.5

Introduzindo-se este valor em (1), obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a ***equação*** da elipse.

Observação. Na verdade, demonstramos apenas que um ponto $P(x, y)$ que satisfaz a equação

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (1)$$

também satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, pode-se mostrar que todo ponto $P(x, y)$ que satisfaz (2) também satisfaz (1). Assim, as Eqs. (1) e (2) são equivalentes e (2) é, de fato, uma equação da elipse.

Quando os focos da elipse estão sobre o eixo y, como na Fig. 3.4*b*, sua equação é, também,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sendo agora $2b$ o seu eixo maior. Neste caso o vértice A é tal que $d(F, A) = b$ e, portanto, vale $b^2 - c^2 = a^2$ (Fig. 3.6).

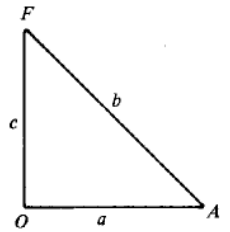


Fig. 3.6

Resumindo, temos: em ambos os casos a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $a > b$ os focos da elipse estão no eixo x e são $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Se $a < b$ os focos da elipse estão no eixo y e são $F_1(0, -c)$ e $F(0, c)$, onde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Exemplo. $9x^2 + 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita assim

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

é uma equação da elipse de vértices

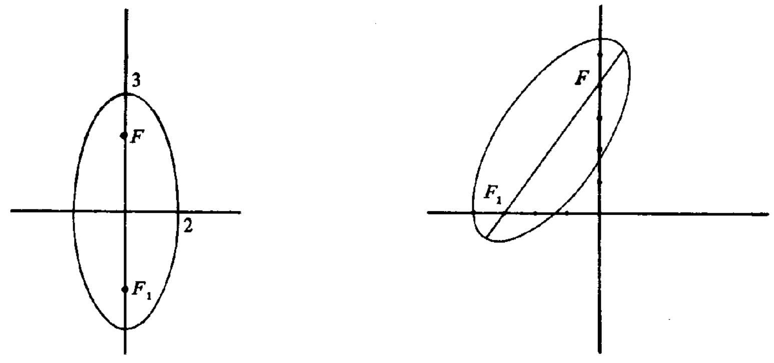
$$A_1(-2, 0), A(2, 0), B(0, 3), B_1(0, -3)$$

e focos

$$F(0, \sqrt{5}) \text{ e } F_1(0, -\sqrt{5}). \text{ (Veja a Fig. 3.7}a\text{).}$$

Em ~~geral, a equação de uma elipse é do segundo~~ grau. Quando os vértices da elipse não estão sobre os eixos do sistema de coordenadas, além dos termos em x^2 e y^2 a equação apresenta também termos em xy, x e y.

Exemplo. Equação da elipse cujos focos são $F_1(-3, 0)$ e $F(0, 4)$ e o eixo maior é 7. (Fig. 3.7*b*.)



(*a*) (*b*)

Fig. 3.7

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse. Então, por definição,

$$d(P, F) + d(P, F_1) = 7$$

ou

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 7.$$

Na verdade já obtivemos uma equação da elipse. Contudo, vamos transformar a equação acima a fim de eliminar os radicais que nela figuram. Transpondo o termo

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$

para o segundo membro e elevando a equação resultante ao quadrado, obtemos

$$(x+3)^2 + y^2 = 49 + x^2 + (y-4)^2 - 14\sqrt{x^2 + (y-4)^2},$$

que pode ser simplificada e escrita assim

$$3x + 4y - 28 = -7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\,.$$

Elevando-se ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos, finalmente,

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y - 200 = 0,$$

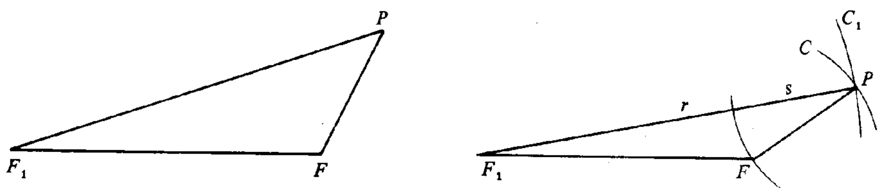
que não contém radicais e é do segundo grau.

3.2 HIPÉRBOLE

Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos F do plano tais que

$$|d(F,P) - d(F_1,P)| = r$$

é chamado hipérbole de focos F_1 e F e eixo r.



(a) (b)

Fig. 3.8

Graficamente, para se obter um ponto da hipérbole é suficiente centrar o compasso em um dos focos e com abertura s traçar um arco C; depois, centrar no outro foco e com abertura $s + r$ traçar o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da hipérbole. Unindo-se os pontos assim obtidos temos o traçado da hipérbole.

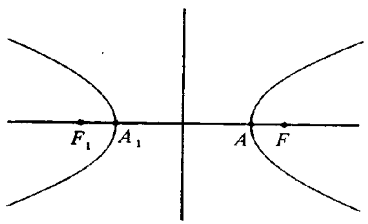
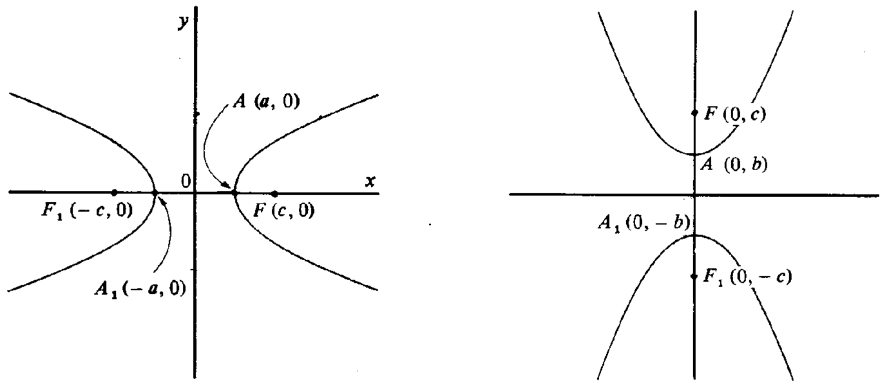


Fig. 3.9

Os pontos A_1 e A, chamados *vértices* da hipérbole, foram obtidos tomando-se $s = (d(F_1, F) - r)/2$. Observe que $d(A_1, A) = r$ e que se $s < (d(F_1, F) - r)/2$ os arcos C e C_1 não se interceptam. Da construção, é fácil ver que a hipérbole é composta de dois ramos e simétrica em relação à reta que contém os focos e em relação à mediatriz do segmento F_1F.

Com o objetivo de obter uma equação mais simples para a hipérbole, vamos eleger um sistema de coordenadas onde um dos eixos contém os focos e a origem seja o ponto médio do segmento F_1F. Como para a elipse, temos, também, dois casos.



(a) (b)

Fig. 3.10

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$|d(P,F_1) - d(P,F)| = d(A,A_1),$$

onde $P(x,y)$ é um ponto qualquer da hipérbole. Como mostra a Fig. 3.10*a*, estamos chamando a distância focal $d(F_1, F)$ de $2c$ e a distância entre os vértices de $2a$. Logo,

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (1)$$

Depois de eliminarmos os radicais de (1), podemos escrevê-la assim

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo-se

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é equivalente a (1) e, portanto, é uma equação da hipérbole.

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, como na Fig. 3.10b, sua equação é

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

onde $2b$ é a distância entre os vértices e a é tal que

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Mesmo quando os focos da hipérbole não estão sobre os eixos, ou não são simétricos em relação à origem, sua equação é também do segundo grau. Por exemplo, uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 1)$ e $F(1, 3)$ e eixo 2 é

$$20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0,$$

como o leitor pode verificar.

Exemplo. Determine condições sobre a, b e m para que a reta $y = mx$ intercepte a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução. Suponhamos que (x_o, y_o) seja um ponto da interseção da reta com a hipérbole. Veja a Fig. 3.11a.

Então, devemos ter

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1,$$

$$y_o = mx_o.$$

Destas duas equações, obtemos

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{m^2x_o^2}{b^2} = 1,$$

que, resolvida em x_o, nos dá

$$x_o = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}.$$

Para que x_o tenha valor real, isto é, para que a reta intercepte a hipérbole, é necessário e suficiente que

$$\frac{b^2}{a^2} - m^2 > 0 \text{ ou que } m^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

Sendo a e b números positivos, segue-se que

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Assim, a reta $y = mx$ intercepta a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, sua declividade estiver compreendida entre $-b/a$ e b/a. A parte (b) da Fig. 3.11 mostra a hipérbole e as retas de declividade b/a e $-b/a$, que contém a origem.

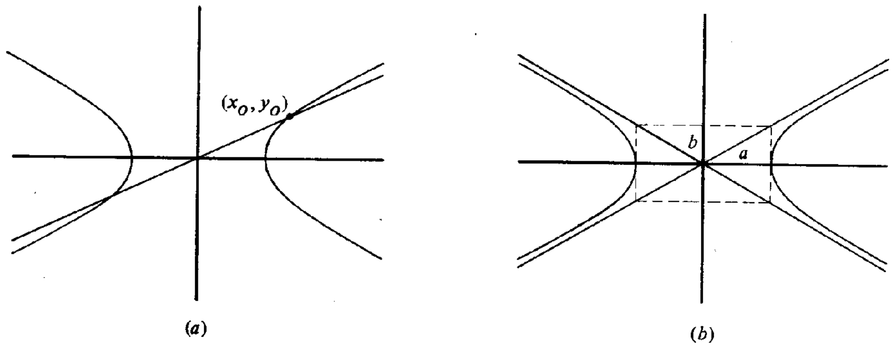


Fig. 3.11

Cada uma das retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

é chamada *assíntota* da hipérbole. Portanto, as assíntotas são posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem. Ainda mais, da expressão

$$x_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}$$

vemos que, quando a declividade da secante tende para b/a, a abscissa x_o do ponto de interseção tende para mais ou menos infinito. Isto significa que a hipérbole (ambos os ramos) tende para as assíntotas, à medida que se afasta da origem. Esta interpretação geométrica sugere um procedimento cômodo para se esboçar uma hipérbole, a saber, primeiro traçamos as assíntotas e, depois, os ramos da hipérbole tendendo às assíntotas, como mostra a Fig. 3.11*b*.

Procedendo-se de forma análoga, em relação à reta $y = mx$ e a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

podemos deduzir que a reta intercepta a hipérbole se, e somente se, $m > b/a$ ou $m < -b/a$. Portanto, as retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

também ocupam as posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem, isto é, a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

tende ao par de retas $y = bx/a$ e $y = -bx/a$ que são as assíntotas.

Exemplo. As assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

são (Fig. 3.12*a*)

$$y = \frac{2}{3}x \text{ e } y = -\frac{2}{3}x$$

e as da hipérbole

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

são (Fig. 3.12*b*)

$$y = 2x \text{ e } y = -2x.$$

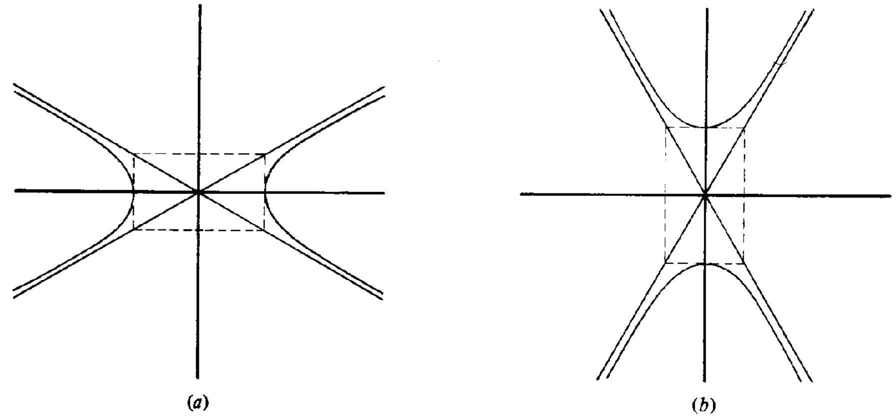


Fig. 3.12

3.3 PARÁBOLA

Dados um ponto F e uma reta r, chama-se parábola de foco F e diretriz r ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Construção. Pelo foco F traçamos a perpendicular à diretriz r e tomamos sobre esta perpendicular (chamada *eixo* da parábola) um ponto C. Por C traçamos uma paralela a r e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em F determinamos nesta paralela os pontos P e P' da parábola. Unindo-se os pontos assim construídos obtemos a parábola (Fig. 3.13).

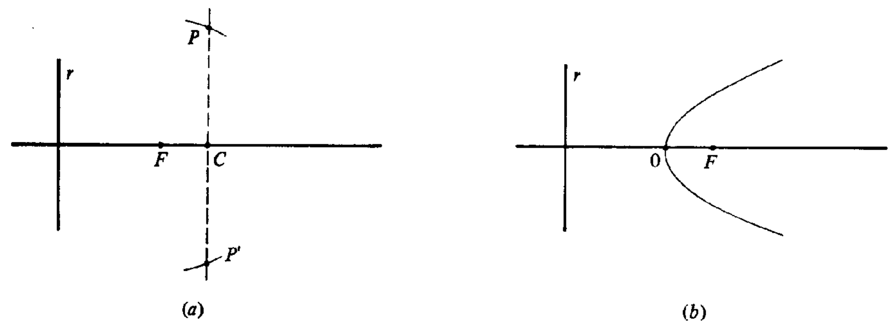


Fig. 3.13

Observe que se escolhermos o ponto C, sobre o eixo, de modo que $d\,(C,r) < d\,(C,F)$, o arco traçado com centro em F e raio $d\,(C,F)$ não intercepta a paralela à diretriz traçado por C. O ponto da parábola mais próximo de r é o ponto 0 (veja a Fig. 3.13*b*) tal que, $d\,(0,C) = d\,(0,F)$. Este ponto é chamado *vértice* da parábola.

Em geral, a equação de uma parábola é do segundo grau, isto é, contém termos em x^2, y^2, xy, x e y. Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, como veremos, sua equação é muito simples. Existem quatro casos.

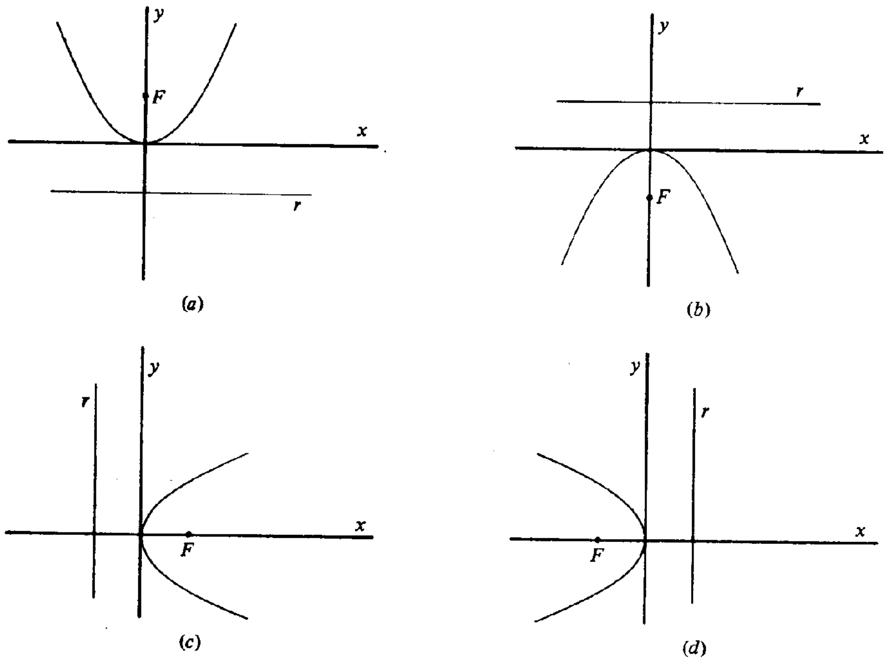


Fig. 3.14

Na Fig. 3.14*a* o foco está sobre o eixo y e a diretriz é paralela ao eixo x. Se $d\,(F,r) = 2a$, então o foco é $F\,(0,a)$ e a equação da diretriz é

$$y = -a.$$

Um ponto $P\,(x,y)$ pertence à parábola se, e somente se,

$$d\,(P,F) = d\,(P,r)$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y + a|.$$

Eliminando-se o radical desta equação e simplificando o resultado, obtemos a sua equivalente

$$4ay = x^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4a}\,x^2,$$

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando-se contas semelhantes, obtemos

$$y = -\frac{1}{4a}\,x^2$$

$$x = \frac{1}{4a}\,y^2$$

$$x = -\frac{1}{4a}\,y^2$$

que são, respectivamente, as equações das parábolas das Figs. 3.14*b*, *c* e *d*. Em todos os casos

$$a = \frac{1}{2}\,d\,(F,r).$$

Exemplo. O gráfico da equação

$$x = -y^2,$$

é a parábola de foco $F\,(-1/4,\,0)$ e diretriz $x = 1/4$ pois, neste caso, $1/4a = 1$, donde $a = 1/4$. Veja a Fig. 3.15.

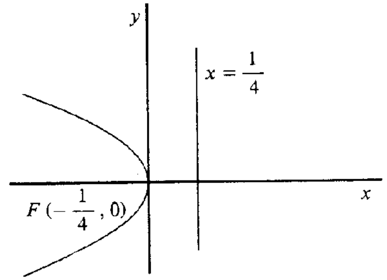


Fig. 3.15

Exercícios

3.1. O que acontece com a elipse da Fig. 3.3 quando os pregos são fixados cada vez mais próximo um do outro? Que curva se obtém se fixarmos os dois pregos no mesmo ponto?

3.2. Utilizando-se régua e compasso construir:

a) uma elipse conhecendo-se seus quatro vértices;
b) uma parábola conhecendo-se seu foco e seu vértice;
c) uma hipérbole conhecendo-se seus dois vértices e um de seus focos.

3.3. Esboce e determine os elementos principais (focos, vértices, assíntotas, diretriz) das curvas cujas equações são

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; *b*) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

c) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; *d*) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$;

e) $x = y^2$; *f*) $y = x^2$;

g) $4x^2 + 9y^2 = 36$; *h*) $x^2 - y^2 + 4 = 0$.

3.4. Deduzir uma equação

a) da elipse cujos focos são $F_1\,(-1, -1)$ e $F\,(1, 1)$ e o eixo maior é $4\sqrt{2}$;
b) da hipérbole cujos focos são $F_1\,(-1, -1)$ e $F\,(1, 1)$ e o eixo é $\sqrt{2}$;
c) da parábola de foco $F\,(0, 0)$ e diretriz $y = 2$.

3.5. Deduza uma equação da parábola com vértice em $V\,(6, -3)$ e cuja diretriz é a reta $3x - 5y + 1 = 0$.

3.6. Determine uma equação da hipérbole cujas assíntotas são $y = x$ e $y = -x$, sabendo-se que um de seus vértices é o ponto $(2, 0)$.

3.7. Escrever uma equação da elipse cujos focos são $F_1\,(-2, 1)$ e $F\,(2, 3)$ e o eixo menor mede 4.

3.8. Demonstre que a reta

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

é tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto $P\,(x_o, y_o)$.

3.9. Determine o valor de k para que a reta

$$\frac{2x}{9} + \frac{kx}{4} = 1$$

seja tangente à elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.10. Determine o ponto da elipse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

mais próximo da reta $2x - 3y + 25 = 0$.

3.11. Considere uma semi-elipse e uma semi-reta como mostra a Fig. 3.16. Se girarmos a semi-reta no sentido horário, em torno de P, em qual ponto da elipse ela tocará?

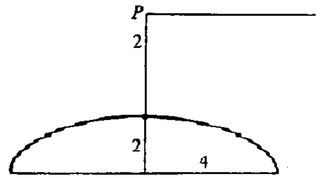


Fig. 3.16

3.12. Determine os valores de m para os quais a reta

$$y = \frac{5}{2}x + m$$

é tangente a hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

3.13. Seja P o pé da perpendicular baixada do foco F da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a uma das assíntotas. Demonstre que $\overline{PF} = b$ e $\overline{PO} = a$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

3.14. Prove que toda parábola cujo eixo é paralelo ao eixo y tem uma equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Qual é a forma geral das equações das parábolas cujo eixo é paralelo ao eixo x?

3.15. Deduzir uma equação da parábola que contém o ponto $(1, 4)$, sabendo-se que seu eixo é paralelo ao eixo y e que seu vértice é o ponto $(2, 3)$.

3.16. Deduza uma equação da parábola que contém os pontos $(-1, 12)$, $(1, 2)$ e $(2, 0)$ e tem eixo paralelo ao eixo y.

3.17. Prove que numa parábola o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo é duas vezes a distância do foco à diretriz.

3.18. *a*) Prove que a reta $x - 2ay_o y + x_o = 0$ é tangente à parábola $x = ay^2$ no ponto $P\,(x_o, y_o)$.
b) Mostre que a perpendicular à tangente em $P\,(x_o, y_o)$ é bissetriz do ângulo formado por PF (onde F é o foco da parábola) e a paralela ao eixo da parábola, que contém $P\,(x_o, y_o)$.

3.19. Mostre que, qualquer que seja o valor de t, o ponto

$$(a \cos t,\ b \operatorname{sen} t)$$

pertence à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observação. Quando t varia de 0 a 2π o ponto $(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ percorre a elipse, a partir do vértice $A\,(a, 0)$, uma vez.

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$

são equações paramétricas da elipse.

3.20. Uma partícula se move de modo que no instante t seu vetor posição é

$$\vec{OP}(t) = (t, 4t - t^2).$$

Determine:

a) uma equação cartesiana da trajetória da partícula;

b) o instante em que a partícula se encontra mais próxima da reta $y = 5$.

3.4 ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Nos parágrafos anteriores vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do segundo grau, isto é, é da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Vimos, ainda, que quando o sistema de coordenadas é convenientemente escolhido a equação da cônica reduz-se a uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(E)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(H)}$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2,\ y = -\frac{1}{4a}x^2,\ x = \frac{1}{4a}y^2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4a}y^2. \qquad \text{(P)}$$

Dizemos que estas equações estão na forma *reduzida* ou *canônica*.

Na Seç. 3.5 provaremos que, exceto em certos casos particulares, o gráfico de uma equação do segundo grau, em duas variáveis, é uma cônica. Em geral, a técnica utilizada para identificar e esboçar esta cônica consiste em simplificar sua equação efetuando-se mudanças do sistema de coordenadas. Estas mudanças são translação e rotação de eixos e serão introduzidas a seguir.

TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Na Fig. 3.17*a* estão representados dois sistemas de coordenadas: o sistema $x0y$, como de costume, e o sistema $x_1 0_1 y_1$, que pode ser imaginado como uma translação de $x0y$ tal que a origem 0 coincide com o ponto 0_1.

Se P é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas. Como mostra a Fig. 3.17*b*, se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$ e (x_1, y_1) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$, temos

$$x = x_1 + a$$
$$y = y_1 + b, \qquad \text{(s)}$$

onde (a, b) são as coordenadas de 0_1 em relação ao sistema $x0y$. Explicitando-se x_1 e y_1 em (s) obtemos

$$x_1 = x - a$$
$$y_1 = y - b.$$

Estas equações permitem passar das coordenadas de um ponto P, dadas no sistema $x0y$, para as coordenadas de P com relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$.

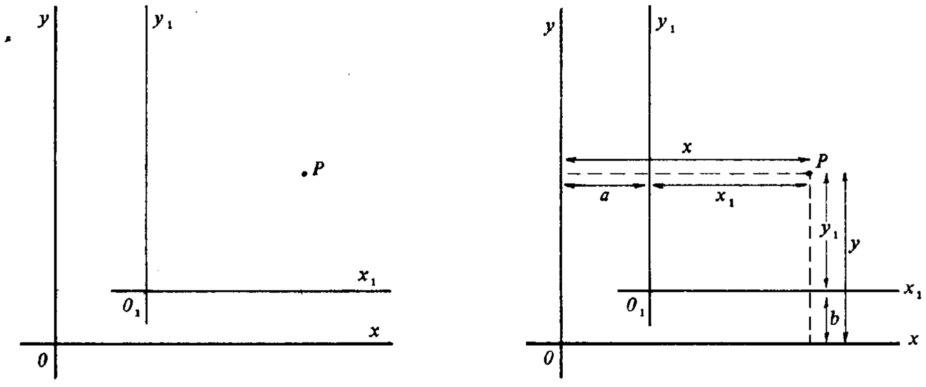


Fig. 3.17

Exemplo. Seja o ponto $P(4, -1)$. Efetuando-se uma translação tal que a nova origem é $0_1(-2, 3)$, em relação ao novo sistema, as coordenadas de P passam a ser

$$x_1 = 4 - (-2) = 6$$
$$y_1 = -1 - 3 = -4,$$

ou seja, $P(6, -4)$. Veja a Fig. 3.18.

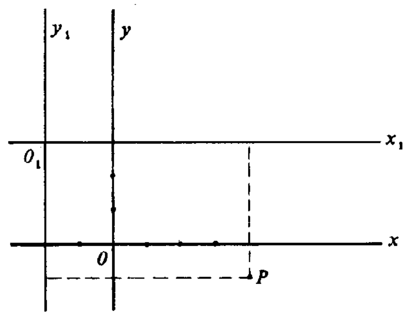


Fig. 3.18

Neste caso, as equações de mudança de coordenadas são:

$$x_1 = x + 2 \quad\quad x = x_1 - 2$$
$$\quad\quad\text{ou}$$
$$y_1 = y - 3 \quad\quad y = y_1 + 3.$$

Se, relativamente ao sistema $x0y$, a equação de uma reta é

$$y = mx + b,$$

no sistema $x_1 0_1 y_1$ sua equação é

$$y_1 + 3 = m(x_1 - 2) + b$$

ou

$$y_1 = mx_1 + b - 2m - 3.$$

Observe que a declividade da reta não se alterou.

Exemplo. Usando uma translação conveniente elimine os termos do primeiro grau da equação

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

Solução. Completando os quadrados, em x e y, na equação dada, obtemos

$$4(x^2 - 2x + \underbrace{1}) + 9(y^2 - 4y + \underbrace{4}) + 4 = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4$$

ou

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Observe que para obtermos um quadrado perfeito no interior dos parênteses, somamos 1 no primeiro e 4 no segundo. Para mantermos a igualdade, estas mesmas parcelas, multiplicadas pelo coeficiente do parêntese, foram somadas no segundo membro. Depois disto, efetuamos a translação de eixos definidas pelas equações

$$x_1 = x - 1$$
$$y_1 = y - 2$$

e escrevemos a equação

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

assim

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36,$$

que é a solução do problema.

Escrevendo-se a última equação acima na forma

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1,$$

vemos que seu gráfico é uma elipse cujos vértices, no sistema $x_1 0_1 y_1$, onde $0_1(1, 2)$, são

$$A_1(-3, 0), A(3, 0), B(0, 2) \text{ e } B_1(0, -2).$$

Esta elipse está mostrada na Fig. 3.19.

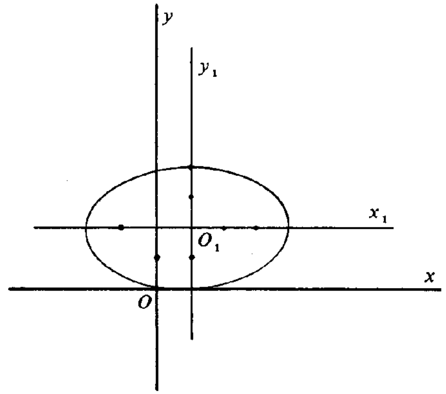


Fig. 3.19

Observe que a elipse acima é também o gráfico da equação

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

em relação ao sistema $x0y$, pois quando se efetua uma translação o gráfico não se altera, apenas a equação muda.

ROTAÇÃO DE EIXOS

Consideremos o sistema de coordenadas $x0y$, e seja $x_1 0 y_1$ o sistema de coordenadas obtido de $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, como mostra a Fig. 3.20.

Sejam (x, y) e (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas $x0y$ e $x_1 0 y_1$, respectivamente. Nosso objetivo é escrever x_1 e y_1 em função de x, y e do ângulo θ.

Uma rotação de um ângulo θ transforma os vetores

$$e_1 = (1, 0) \text{ e } e_2 = (0, 1)$$

nos vetores u_1 e u_2, onde

$$u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$
$$u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Para o vetor $\vec{OP}$ temos

$$\vec{OP} = (x, y) = xe_1 + ye_2,$$

onde x e y são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$. Por outro lado, como u_1 e u_2 são unitários e perpendiculares, temos também

$$\vec{OP} = (x_1, y_1) = x_1 u_1 + y_1 u_2,$$

sendo x_1 e y_1 as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 0 y_1$.

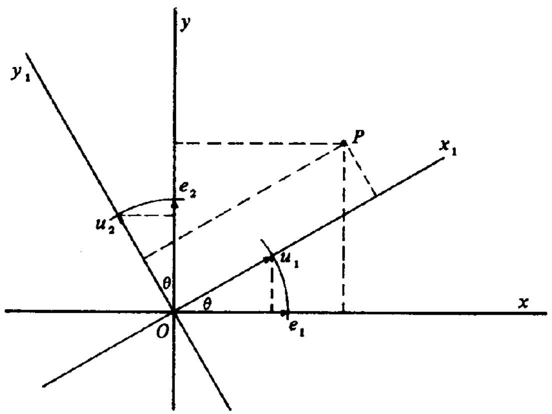


Fig. 3.20

Temos, então, a igualdade

$$xe_1 + ye_2 = x_1 u_1 + y_1 u_2$$

ou

$$xe_1 + ye_2 = x_1(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2) + y_1(-\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2)$$

de onde obtemos

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta$$

ou

$$x_1 = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$$
$$y_1 = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Exemplo. Seja o ponto $P(6, 4)$. Efetuando-se uma rotação de um ângulo de $\pi/3$ radianos nos eixos, em relação ao novo sistema, suas coordenadas passam a ser

$$x_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = -3\sqrt{3} + 2,$$

ou seja,

$$P(3 + 2\sqrt{3}\,, 2 - 3\sqrt{3}).$$

Exemplo. Usando uma rotação de eixos convenientes transforme a equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em uma que não contenha o termo em xy.

Solução. Substituindo x e y na equação dada por

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta,$$

obtemos

$$4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)^2 +$$
$$+ 4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) +$$
$$+ (x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta) - 2(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) = 0,$$

que é a equivalente da equação inicial em relação ao sistema $x_1 0 y_1$, obtido do sistema $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ. Desenvolvendo-a, obtemos

$$\begin{aligned}&4(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)x_1^2 + (4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)y_1^2 +\\ &(-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta)x_1y_1 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)x_1 +\\ &+ (-\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta)y_1 = 0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Como nosso objetivo é obter uma equação que não contenha o produto das variáveis, igualamos o coeficiente de x_1y_1 a zero, ou seja, impomos para θ a condição

$$-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Lembrando que $\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 1/2\operatorname{sen}2\theta$ e que $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, obtemos

$$-3\operatorname{sen}2\theta + 4\cos 2\theta = 0$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{4}{3}.$$

A partir desta igualdade deduzimos que

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(θ é aproximadamente 26°33').

Substituindo-se os valores de sen θ e cos θ na Eq. (1) e efetuando-se as contas, obtemos

$$y_1 = \sqrt{5}\, x_1^2.$$

O gráfico desta equação, como já vimos, é uma parábola. Ela está representada, juntamente com os dois sistemas de coordenadas, na Fig. 3.21.

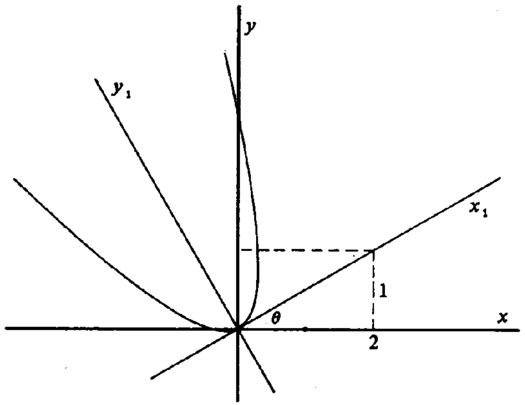


Fig. 3.21

Observe que esta parábola é também o gráfico da equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em relação ao sistema xy.

Como vimos nos exemplos anteriores, dada uma equação do segundo grau nas variáveis x e y, usando uma rotação de eixos podemos eliminar o termo em xy. O ângulo desta rotação é

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{c}{a-b},$$

onde c é o coeficiente de xy, a o coeficiente de x^2 e b o coeficiente de y^2, desde que $a \neq b$. Se $a = b$, θ é 45°. (Veja o Exerc. 3.30.) Após eliminarmos o termo em xy, completamos os

quadrados na equação resultante para determinarmos a translação que elimina os termos do primeiro grau. Vejamos mais um exemplo.

Considere a equação

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y + 32 = 0.$$

Como o coeficiente de x^2 é igual ao de y^2, a rotação é de 45° e suas equações são

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y_1$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,y_1.$$

Substituindo-se estes valores na equação dada e simplificando-a, obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0.$$

Depois de completarmos os quadrados em x_1 e y_1, podemos escrever esta última equação assim

$$\frac{(x_1-2)^2}{16} - \frac{(y_1-1)^2}{4} = 1,$$

que se transforma em

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1,$$

após efetuarmos a translação de eixos definida por

$$x_2 = x_1 - 2$$
$$y_2 = y_1 - 1.$$

O gráfico desta equação é uma hipérbole. Ela está representada na Fig. 3.22, juntamente com os três sistemas de coordenadas.

A construção da Fig. 3.22 obedeceu à seguinte ordem: primeiro desenhamos o sistema de coordenadas xy; girando-se tal sistema de 45° obtivemos o sistema x_1y_1; o sistema x_2y_2 foi obtido conforme a translação definida pelas equações

$$x_2 = x_1 - 2$$
$$y_2 = y_1 - 1,$$

isto é, é uma translação de x_1y_1 onde o ponto (2, 1), relativamente ao sistema x_1y_1, é a nova origem. O esboço da hipérbole foi feito no sistema x_2y_2.

Observe que com a rotação o eixo x_1 ficou paralelo ao eixo da hipérbole e com a translação a origem do novo sistema x_2y_2 coincidiu com o centro da hipérbole.

$a = b$

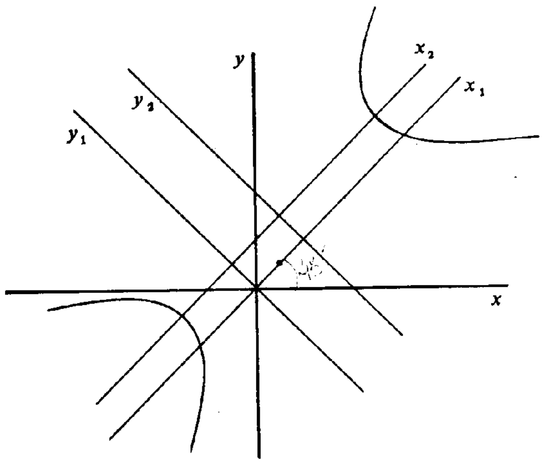


Fig. 3.22

Exercícios

3.21. Efetua-se uma translação de eixos de modo que a nova origem seja o ponto $(-2, 3)$.

a) Determine as coordenadas dos pontos $(3, 2)$ e $(5, 7)$ com respeito ao novo sistema.

b) Escrever uma equação da reta $y = 2x + 7$ com respeito ao novo sistema.

3.22. Efetuar uma translação de eixos tal, que em relação ao novo sistema, as equações das retas $y = 2x - 1$ e $x + 3y = 11$ não contenham o termo constante. Escreva as equações destas retas em relação ao novo sistema.

3.23. Seja $x_1O_1y_1$ um sistema obtido de xOy por uma translação. Determine a nova origem O_1, sabendo-se que um determinado ponto tem coordenadas $(3, 4)$ no sistema xOy e $(-2, 3)$ no sistema $x_1O_1y_1$.

3.24. Seja $x_1O_1y_1$ uma translação de xOy cuja a nova origem é $O_1(4, 1)$ e $x_2O_2y_2$ uma translação de $x_1O_1y_1$ cuja nova origem (no sistema $x_1O_1y_1$) é $O_2(1, 2)$.

a) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{O_1O_2}$ e $\overrightarrow{OO_2}$ em relação a cada um dos três sistemas.

b) Verifique que $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2}$, em qualquer um dos três sistemas.

3.25. Mostre que quando se efetua uma translação de eixos as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{AB}$ (sendo A e B dois pontos quaisquer) não se alteram.

3.26. Efetua-se uma rotação de eixos de um ângulo θ no sistema xOy. Sabendo-se que, em relação ao sistema xOy, o ponto P é dado por $(5, \sqrt{3})$ e que, em relação ao novo sistema, é dado por $(4, -2\sqrt{3})$, determinar o ângulo θ.

3.27. Determine as coordenadas do ponto $P(2, 5)$ em relação ao sistema obtido do sistema xOy por uma rotação de um ângulo θ tal que $\operatorname{tg} \theta = 1/3$.

3.28. Seja x_1Oy_1 o sistema obtido de xOy por uma rotação de $30°$ no sentido anti-horário, e $x_2O_2y_2$ o sistema obtido de x_1Oy_1 por uma translação tal que a nova origem (no sistema x_1Oy_1) é o ponto $O_2(3, 2)$.

a) Determine as coordenadas do ponto P nos sistemas xOy e $x_2O_2y_2$, sabendo-se que no sistema x_1Oy_1 ele é dado por $(2, 1)$.

b) Determine as coordenadas do ponto Q no sistema xOy, sabendo-se que no sistema $x_2O_2y_2$ ele é dado por $(1, 2)$.

ok!

3.29. Se xOy e $x_1O_1y_1$ são os sistemas de coordenadas mostrados na Fig. 3.23, determine as equações de mudança de xOy para $x_1O_1y_1$.

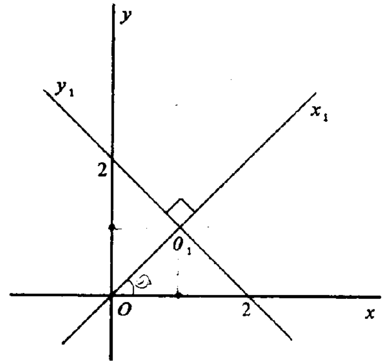


Fig. 3.23

3.30. Dada a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

demonstre que se pode eliminar o termo em xy com uma rotação de eixos de um ângulo igual a $\pi/4$ radianos, se $A = B$, e igual a

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{C}{A - B}, \text{ se } A \neq B.$$

3.31. Esboce o gráfico das seguintes equações:

a) $4(x-1)^2 + 9y^2 = 36$;

b) $x^2 - y^2 - 22x = 0$;

c) $x^2 - 16y^2 - 32y - 32 = 0$;

d) $16y = x^2 + 8x + 32$;

e) $xy = 1$;

f) $xy - 2y - 4x = 0$;

g) $x^2 + y^2 + xy = 3$;

h) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x - 6y = 0$; confirmar

i) $41x^2 + 41y^2 - 18xy - 384x - 384y + 1\,504 = 0$.

3.32. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $x = 1$, $y = 2$ e a tangente à cônica

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

no ponto $\left(2, \dfrac{4 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

3.5 EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU

Já vimos que as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) são subconjuntos do plano cujas equações são do segundo grau. Nos exemplos seguintes apresentaremos outros subconjuntos do plano cujas equações são, também, do segundo grau.

Exemplo. Determine uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto constituído das retas

$$r: ax + by + c = 0$$
$$s: a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Solução. Indiquemos por $r \cup s$ o subconjunto constituído das retas r e s. Como um ponto (x_o, y_o) pertence a $r \cup s$ se, e somente se,

$$ax_o + by_o + c = 0$$

ou

$$a_1x_o + b_1y_o + c_1 = 0$$

e uma destas equações se anula se, e somente se,

$$(ax_o + by_o + c)(a_1x_o + b_1y_o + c) = 0,$$

segue que $r \cup s$ é o gráfico de

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

que, evidentemente, é uma equação do segundo grau em x e y. Por exemplo, o gráfico da equação

$$(x + y + 1)(2x - y + 4) = 0$$

ou

$$2x^2 - y^2 + xy + 6x + 3y + 4 = 0$$

é o par de retas mostrado na Fig. 3.24*a*.

Observe que se $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ são equações da mesma reta,

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

é uma equação do segundo grau cujo gráfico é uma única reta. Por exemplo, o gráfico de

$$(x + y - 1) \cdot (2x + 2y - 2) = 0$$

ou

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$$

é a reta representada na Fig. 3.24*b*.

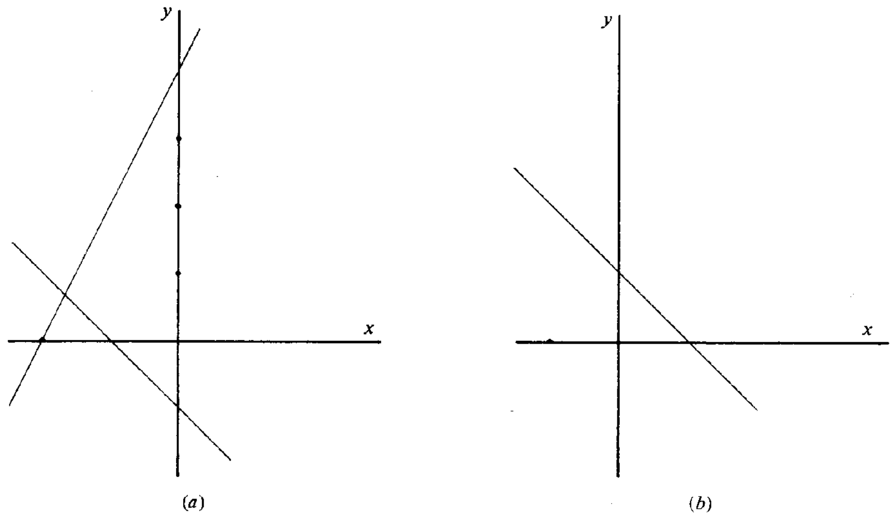


Fig. 3.24

Pode também acontecer que o gráfico de uma equação do segundo grau seja um único ponto ou o conjunto vazio. Por exemplo, o gráfico de

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

é o ponto $(1, -3)$ e o gráfico de

$$4x^2 + 9y^2 + 5 = 0$$

é o conjunto vazio.

Portanto, até agora, vimos que o gráfico de uma equação do segundo grau pode ser:

uma elipse,
uma hipérbole,
uma parábola,
um par de retas,
uma única reta,
um ponto ou
o conjunto vazio.

Nas páginas seguintes, demonstraremos que o gráfico de qualquer equação do segundo grau, com duas variáveis, é um destes subconjuntos. Eles, exceto o subconjunto vazio, são as possíveis interseções de um cone (veja Cone de Revolução, Seç. 1, Cap. 5) com um plano e, por isto, são chamados cônicas. Veja a Fig. 3.25.

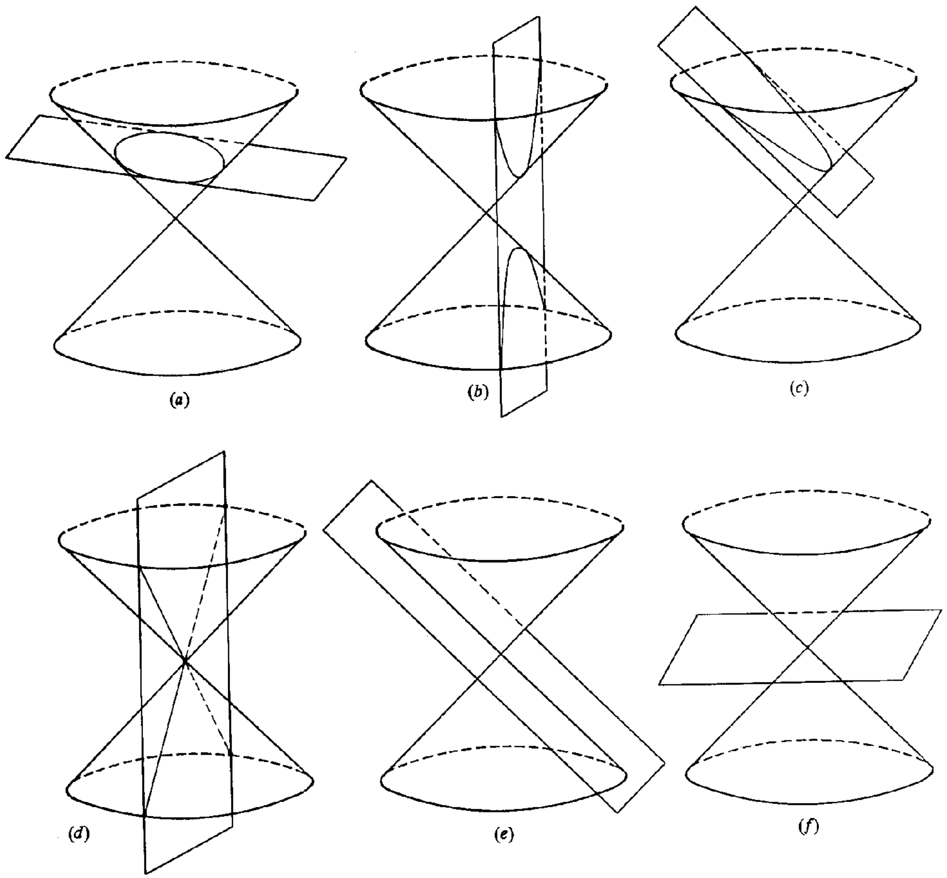


Fig. 3.25

No caso das Figs. 3.25*d*, *e* e *f* a cônica é dita degenerada.

Observação. O estudo das cônicas sob este ponto de vista, isto é, como interseção de um plano e um cone, data do Séc. III a.c. e precede a própria Geometria Analítica que só surgiu no Séc. XVII.

Proposição 3.1 – *O gráfico de uma equação do segundo grau, isto é, o gráfico de uma equação da forma*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, a, b \text{ ou } c \neq 0,$$

é uma cônica.

Demonstração. Inicialmente efetuamos uma rotação de eixos de um ângulo θ, onde

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{c}{a-b}, \text{ se } a \neq b,$$

$$\theta = 45°, \text{ se } a = b.$$

De acordo com o Exerc. 3.30, após esta rotação a equação dada se transforma numa equação da forma

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F_1 = 0, \tag{I}$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Se $A \neq 0$ e $B = 0$, temos

$$Ax_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0. \tag{II}$$

Neste caso, se $E = 0$, esta equação se reduz a

$$Ax_1^2 + Dx_1 + F = 0,$$

cujo gráfico é um par de retas paralelas ao eixo y_1, uma reta paralela ao eixo y_1 ou o conjunto vazio, conforme $D^2 - 4AF$ seja, respectivamente, maior, igual ou menor que zero. Se $E \neq 0$, temos, de (II),

$$y_1 = -\frac{A}{E}x_1^2 - \frac{D}{E}x_1 - \frac{F}{E},$$

cujo gráfico é (veja Exerc. 3.14) uma parábola. Portanto, a proposição está provada no caso $A \neq 0$ e $B = 0$. A prova do caso $A = 0$ e $B \neq 0$ é análoga.

Continuando, suponhamos A e B não-nulos. Completando-se os quadrados em x_1 e y_1 na Eq. (I), obtemos

$$A\left(x_1^2 + \frac{D}{A}x_1 + \frac{D^2}{4A^2}\right) + B\left(y_1^2 + \frac{E}{B}y_1 + \frac{E^2}{4B^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

ou

$$A\left(x_1 + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y_1 + \frac{E}{2B}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}. \tag{1}$$

Efetuando a translação de eixos definida pelas equações

$$x_2 = x_1 + \frac{D}{2A}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E}{2B}$$

reduzimos a Eq. (1) a

$$Ax_2^2 + By_2^2 = \Delta, \tag{2}$$

onde

$$\Delta = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}.$$

Se $\Delta = 0$, o gráfico de (2) é um par de retas concorrentes, se A e B tiverem sinais contrários ou um ponto, se A e B tiverem o mesmo sinal.

Se $\Delta \neq 0$, obtemos, de (2)

$$\frac{x_2^2}{\frac{\Delta}{A}} + \frac{y_2}{\frac{\Delta}{B}} = 1,$$

cujo gráfico é uma elipse, se A, B e Δ tiverem o mesmo sinal, ou uma hipérbole, se os sinais de A e B forem contrários.

Exercícios

3.33. *a*) Deduza uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto formado pelas retas r e s da Fig. 3.26.

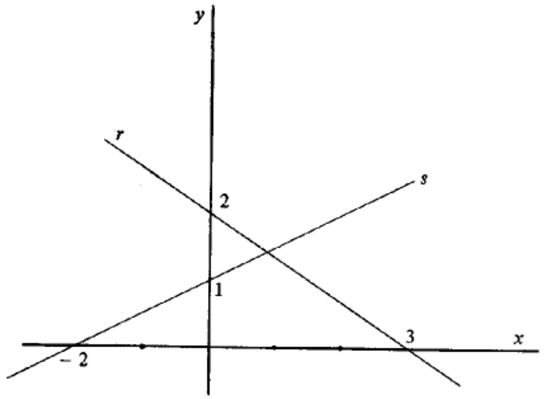


Fig. 3.26

b) Deduza duas equações do segundo grau, (E_1) e (E_2), cujos gráficos sejam, respectivamente, as retas r e s.

c) Multiplique (E_1) por (E_2) e obtenha uma equação do quarto grau em x e y cujo gráfico é o par de retas formado por r e s.

34. Dê exemplo de uma equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde os coeficientes A, B, C, D, E e F sejam todos não-nulos, cujo gráfico seja o conjunto vazio.

3.35. Mostre que o gráfico de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

é o par de assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.36. Dada a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

demonstre que o número

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

é invariante por rotação ou translação, isto é, se

$$A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0$$

é a equação que se obtém de (I) efetuando-se uma rotação ou translação de eixos, então

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

Demonstre, ainda, que conforme Δ seja menor, maior ou igual a zero, o gráfico de (I) é, respectivamente, uma elipse ou um ponto, uma hipérbole ou um par de retas concorrentes, uma parábola ou um par de retas paralelas ou uma única reta.

3.6 DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS

Exemplo. Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a d, determinar o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = e\, d(P, d),$$

onde e é um número positivo.

Solução. Como mostra a Fig. 3.27, introduzimos um sistema de coordenadas onde o eixo y coincide com a reta d e o eixo x é a perpendicular traçada de F à reta d. O ponto F tem coordenadas $(p, 0)$, onde $p = d(F, d)$. Relativamente a este sistema, o conjunto de pontos procurado é caracterizado pela equação

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e\,|x|,$$

que é equivalente a

$$(1 - e^2)\,x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0. \qquad (1)$$

O gráfico de (1), independentemente dos valores (positivos) de e e p, é uma cônica não degenerada (veja Seç. 3.5). Se $e < 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 são ambos positivos e a cônica, cuja equação é (1), é uma elipse. Se $e = 1$, o coeficiente de x^2 é zero e o gráfico é uma parábola. Por último, se $e > 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 têm sinais contrários e o gráfico é uma hipérbole.

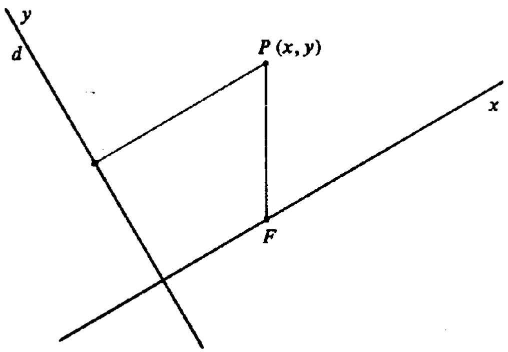


Fig. 3.27

Em vista dos resultados acima podemos unificar a definição de cônica da seguinte forma:

Dados uma reta d *e um ponto* F *não pertencente a* d, *e um número positivo* e, *chama-se cônica de diretriz* d, *foco* F *e excentricidade* e, *o conjunto dos pontos* P, *do plano definido por* d *e* F, *tais que*

$$d(P, F) = e\, d(P, d).$$

A cônica é uma elipse, hipérbole ou parábola, conforme o número e *seja, respectivamente, menor, maior ou igual a 1.*

Exemplo. Equação da cônica (elipse) de foco $F(1, 0)$, excentricidade $1/2$ e que tem por diretriz a reta de equação $x = 4$.

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da cônica. Aplicando a definição unificada, temos

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|x - 4|,$$

que é equivalente a

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

que é a equação procurada. Observe que reescrevendo-se a última equação assim

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

vemos que a cônica é, de fato, uma elipse e que seu outro foco é $F_1(-1, 0)$. Veja a Fig. 3.28. A reta d', de equação $x = -4$, é também uma diretriz da elipse.

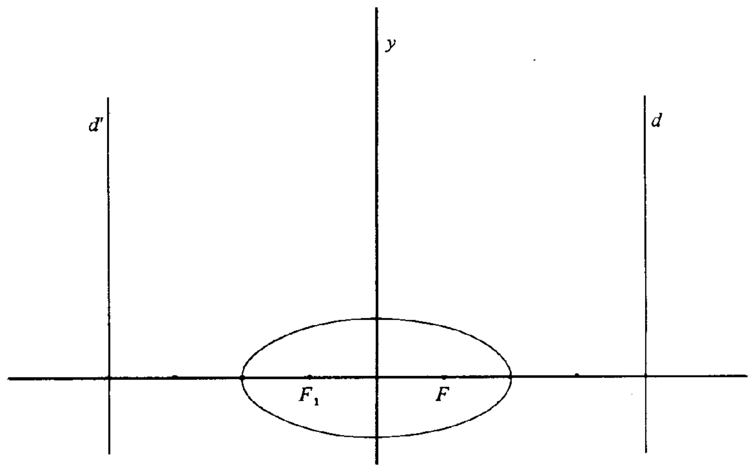


Fig. 3.28

Exercícios

3.27. Deduzir uma equação da cônica de foco $F(2, 0)$ com excentricidade e diretriz

a) $e = \dfrac{1}{4}$, $x = 8$;

b) $e = 4$, $x = \dfrac{1}{2}$;

c) $e = 1$, $x = -2$.

3.38. Demonstre que a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b < a$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

3.39. Demonstre que a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3.40. Demonstre que a parábola

$$y = \frac{1}{4a} x^2$$

é a cônica de foco $F(0, a)$, excentricidade $e = 1$ e diretriz $y = -a$.

O ESPAÇO 4

4.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Inicialmente nosso objetivo é estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e as ternas ordenadas (x, y, z) de números reais. Para isto, tomamos três retas x, y e z perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O como mostra a Fig. 4.1*a*.

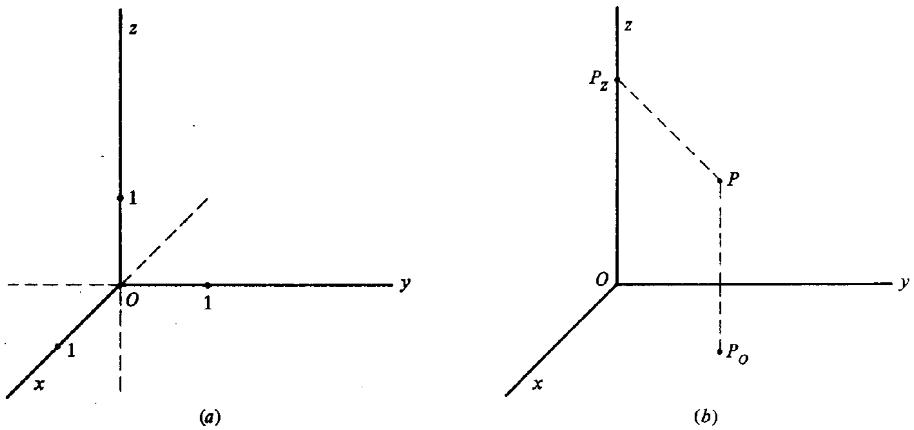


Fig. 4.1

Considerando O como origem, tomemos sobre x, y e z unidades iguais e arbitremos em cada uma um sentido positivo. Observe que os eixos x, y e z definem três planos cada um munido de um sistema de coordenadas. Os eixos x e y, por exemplo, definem o plano horizontal xOy. Seja P um ponto qualquer do espaço. Traçando-se por P perpendiculares a z e ao plano horizontal xOy determinamos os pontos P_z e P_o, veja Fig. 4.1*b*. O ponto P_o, por sua vez, determina nos eixos x e y os pontos P_x e P_y, veja Fig. 4.2*a*. Sejam x, y e z as coordenadas de P_x, P_y e P_z. Ao ponto P associaremos a terna (x, y, z).

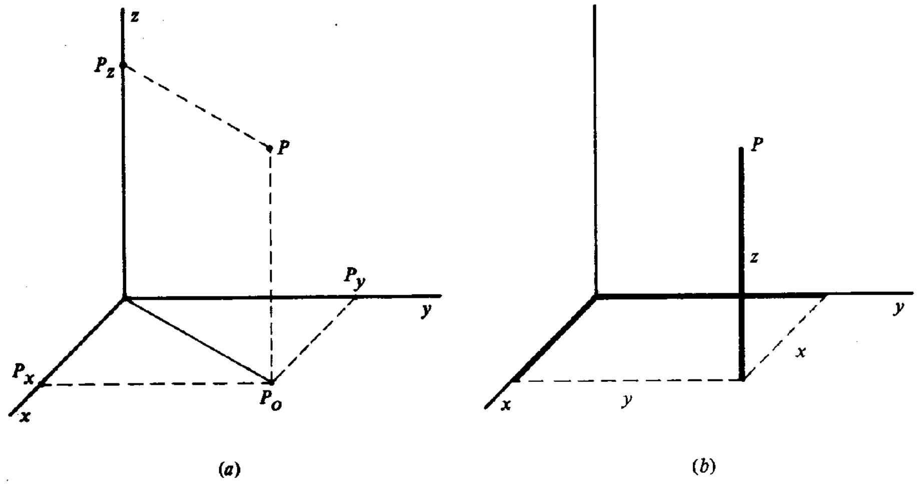


Fig. 4.2

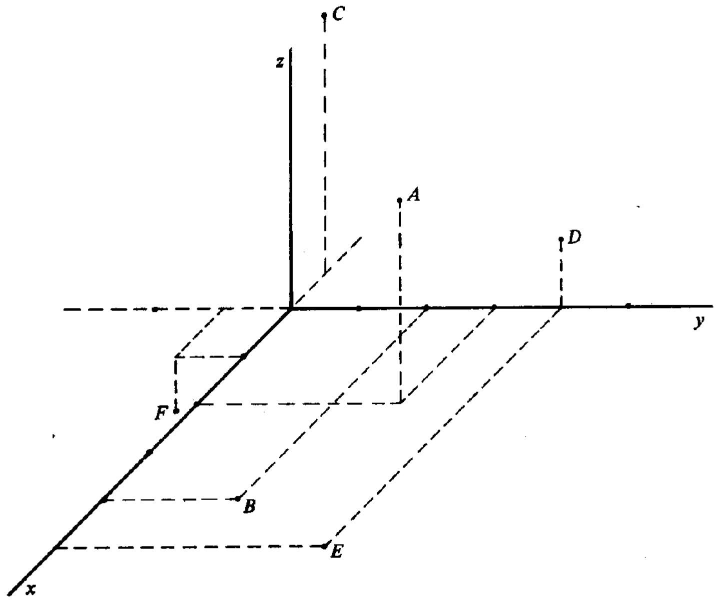


Fig. 4.3

Para indicarmos que P tem coordenadas x, y e z usaremos a notação

$$P(x, y, z).$$

Como a construção que acabamos de descrever pode ser feita no sentido inverso, isto é, partindo-se do terno ordenado determinar o ponto, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais, como queríamos. A Fig. 4.2*b* é uma simplificação da Fig. 4.2*a*. Nela aparecem somente os elementos essenciais na representação de P. Na Fig. 4.3, estão representados os pontos $A\,(2, 3, 4)$, $B\,(4, 2, 0)$, $C(-1, 0, 5)$, $D\,(0, 4, 1)$, $E\,(5, 4, 0)$ e $F\,(1, -1, -1)$.

Exemplo. Uma sala tem 6 m de largura por 8 m de comprimento e 4 m de altura. Estabelecer um sistema e dar as coordenadas dos seguintes pontos:

a) dos oito cantos da sala;

b) do ponto de interseção das diagonais do piso;

c) de um ponto situado a 2 m de altura e sobre a vertical que contém a interseção das diagonais do piso.

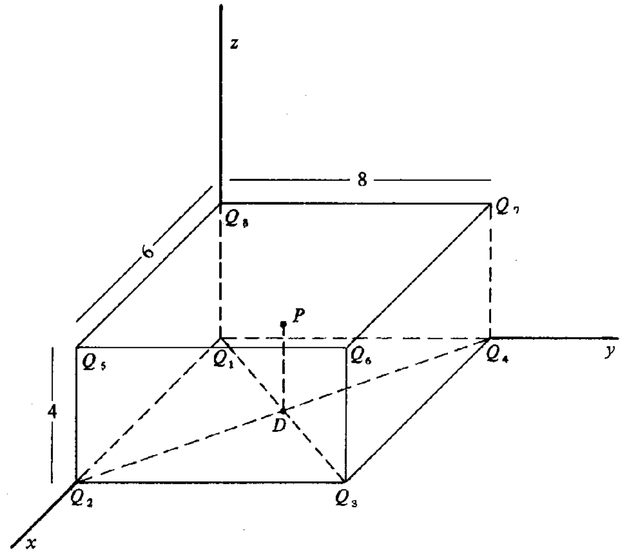


Fig. 4.4

Solução. *a*) Embora tenhamos total liberdade para eleger o sistema de coordenadas, por uma questão de simplicidade, nossa escolha deve recair sobre um que tenha um dos cantos da sala como origem. Outra condição, que também simplificará bastante as coordenadas, é que as arestas da sala coincidem com os eixos do sistema. Um sistema que satisfaz estas duas condições está mostrado na Fig. 4.4. Em relação a tal sistema temos as seguintes coordenadas para os cantos da sala:

$$Q_1\,(0,0,0),\ Q_2\,(6,0,0),\ Q_3\,(6,8,0),\ Q_4\,(0,8,0),\ Q_5\,(6,0,4),$$
$$Q_6\,(6,8,4),\ Q_7\,(0,8,4),\ Q_8\,(0,0,4).$$

b) Como o ponto D pertence ao plano xy, sua terceira coordenada é nula, isto é, $z = 0$. As coordenadas x e y de D são, respectivamente, 3 e 4, como mostra a Fig. 4.5. Logo, $D\,(3,4,0)$.

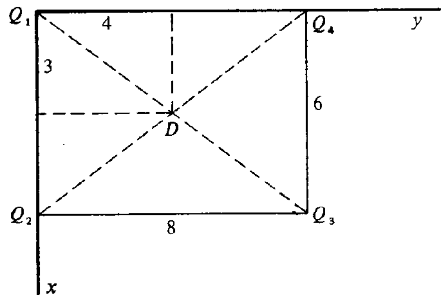


Fig. 4.5

c) As duas primeiras coordenadas de P coincidem com as de D, pois P e D estão numa mesma vertical. A terceira coordenada de P é 2 porque P está duas unidades acima do plano xy. Logo, $P\,(3,4,2)$.

Exercícios

4.1. Representar graficamente os seguintes pontos: $A\,(1,\ 3,\ 2)$, $B\,(0,\ -1,\ 0)$, $C\,(-1,\ -2,\ -3)$, $D\,(0,-3,-5)$, $E\,(0,0,8)$ e $F\,(-2,0,1)$.

4.2. Representar graficamente
a) a reta definida pelos pontos $A\,(2,1,3)$ e $B\,(4,5,-2)$;
b) o plano definido pelos pontos $A\,(0,0,3)$, $B\,(2,3,1)$ e $C\,(0,3,4)$.

4.3. Descreva e represente graficamente os seguintes conjuntos de pontos:

$$A = \{(x,y,z) : x = y = 0\},$$
$$B = \{(x,y,z) : x = 2 \text{ e } y = 3\},$$
$$C = \{(x,y,z) : z = 1\},$$
$$D = \{(x,y,z) : x = 0\},$$
$$E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

4.4. Escreva na forma dos conjuntos $A, B, C, \ldots$, do Exerc. 4.3, os pontos pertencentes
a) a um plano paralelo ao plano xOy e duas unidades acima deste;
b) a uma reta paralela ao eixo x e que intercepta o plano yOz no ponto $(0, 2, 3)$.

4.5. Um tanque de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base 5×6, altura 3. Dois terços do volume do tanque são ocupados por água. Na superfície superior da água forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha está a igual distância das superfícies das paredes de 5 m de base, e em relação às paredes de 6 m de base, sua posição é tal, que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabelecer um sistema de coordenadas, tendo como origem um dos cantos inferiores do tanque e como um dos planos de coordenadas a parede, de base 6 m, mais próxima da bolha, e dar, em relação a este sistema, as coordenadas do ponto onde se encontra a bolha.

4.6. Determine as coordenadas dos pontos de interseção dos conjuntos

$$A = \{(x,y,z) : z = -1\} \text{ e } B = \{(x,y,z) : x = 2, y = -1\}.$$

4.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e P_o e Q_o suas projeções no plano xOy. Traçando-se por P o segmento $\overline{PS}$ paralelo a P_oQ_o, obtemos o triângulo retângulo PSQ. A hipotenusa $\overline{PQ}$ deste triângulo é dada por

$$\sqrt{\overline{SP}^2 + \overline{SQ}^2}\,. \tag{1}$$

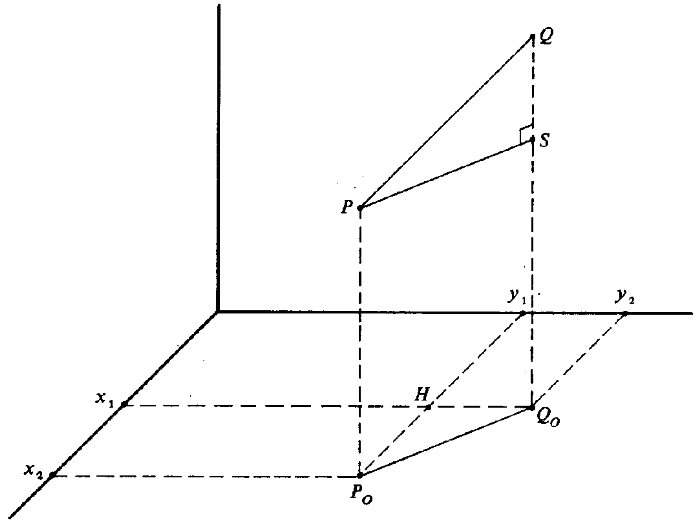


Fig. 4.6

Como o quadrilátero SQ_oP_oP é um retângulo, temos que

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 \tag{2}$$

e que

$$\overline{SP}^2 = \overline{Q_oP_o}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{3}$$

A última igualdade foi obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo P_oHQ_o. Substituindo-se (2) e (3) em (1), obtemos

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Este número, que é a medida da hipotenusa do triângulo PSQ, é chamado distância entre P e Q e indicado por $d\,(P, Q)$. Isto é, por definição,

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Exemplo. A distância entre os pontos $P\,(2, -1, 0)$ e $Q\,(-3, 4, 2)$ é

$$d\,(P, Q) = \sqrt{(-3-2)^2 + (4+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{54}.$$

A distância entre o ponto $A\,(x, y, z)$ e a origem $O\,(0, 0, 0)$ é

$$d\,(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

4.3 ESFERA

Uma esfera de centro em $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos $P\,(x, y, z)$ do espaço tais que

$$d\,(P, C) = r.$$

Como $d\,(P, C) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$, temos que um ponto $P\,(x, y, z)$ pertence à esfera de centro $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio r se, e somente se,

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} = r.$$

Esta igualdade é equivalente a

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

ue é chamada *equação cartesiana da esfera* de centro $C\,(x_o, y_o, z_o)$ e raio r. Por exemplo, na equação da esfera de centro em $(2, 1, -3)$ e raio 3 é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 9.$$