C2 30/NOV/2015

AVISOS:

O CURSO TEM UMA PÁGINA! PRA CHEGAR NELA PROCURE NO GOOGLE POR "EDUARDO OCHS" - AÍ QUASE TODOS OS RESULTADOS VÃO APONTAR PRA PÁGINAS COMEÇANDO COM "http://angg.twu.net/"... (ANGG.TWU.NET)

ESSAS PÁGINAS TÊM UMA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA; CLIQUE EM "C2". OU DIRETO:

http://angg.twu.net/2015.2-C2.html

LÁ TEM LINKS PRO LIVRO QUE VAMOS USAR (CRISTIANE FERNANDEZ) E PRAS FOTOS DOS QUADROS, EM JPGS SEPARADOS E UM PDF COM TODAS.

CÁLCULO 2 DEPENDE DE MUITA COISA DE CÁLCULO 1 - UMAS VOCÊS VÃO TER QUE REVISAR SOZINHOS, TIPO REGRAS DE DERIVAÇÃO; OUTRAS, QUE NÃO SÃO VISTAS DIREITO EM C1, E A GENTE VAI REVISAR (???) ELAS COM ATENÇÃO - POR EXEMPLO DIFERENCIAIS

(EX: $\frac{df(x)}{dx}$ OK; $df(x)$ E dx "SOZINHOS" SÃO "DIFERENCIAIS"...)

CÁLCULO 2 É SOBRE INTEGRAÇÃO E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (ORDINÁRIAS - "EDO"s)

A GENTE VAI VER INTEGRAÇÃO DE TRÊS JEITOS (±...) - E DÁ PRA VER INTEGRAÇÃO COMO SENDO UM CASO PARTICULAR DE EDO...

LEMBREM QUE TEMOS VÁRIAS NOTAÇÕES PRA DERIVADA - A GENTE VAI USAR TODAS EM MOMENTOS DIFERENTES...

$\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $f'(x)$, y' ⇦ (QUANDO $y=f(x)$) $\frac{dy}{dx}$.

PRA UMA FUNÇÃO f SER UMA SOLUÇÃO DE UMA EDO ELA TEM QUE OBEDECER A EDO PRA TODO x (OU NUM INTERVALO)

EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$f'(x) = 3$

$f'(x) = 3+2x$

$f''(x) + f'(x)$ ...

$f'(x) =$

is

00"s)

ntegração
...) -
egração
o particular

emos
es pra
gente
das em
diferentes...

(x), $\frac{d}{dx}(f(x))$,
⇦ (quando $y=f(x)$)

.

ção f ser
de uma EDO
e obedecer
todo x
tervalo ☠)

Equação diferencial	Algumas soluções (ou não!!)	
$f'(x)=3$	$f(x)=3x$	(ok)
	$f(x)=3x+20$	(ok)
	$f(x)=e^x$ ⇦ não!	
$f'(x)=3+2x$	$f(x)=3x+x^2$	(ok)
	$f(x)=3x+x^2+20$	(ok)
$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0$	$f(x)=e^{3x}$	(não)
	$f(x)=e^{2x}$	(ok)
	$f(x)=e^{-3x}$	(ok)
	$f(x)=e^{-2x}$	(não)
$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$	$f(x)=\sqrt{1-x^2}$	?
	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$	?

Revisão de regra da cadeia

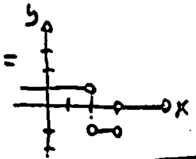
Se $f(x)=g(h(x))$
então $f'(x)=g'(h(x))\,h'(x)$.

$h(x)$	$g(y)$	$g(h(x))$	$g'(y)$	$h'(x)$	$g'(h(x))$	$g'(h(x))h'(x)$
$3x$	e^y	e^{3x}	e^y	3	e^{3x}	$3e^{3x}$
$1-x^2$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{y}}$	$-2x$	$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{C2 \quad 30/NOV/2015}$

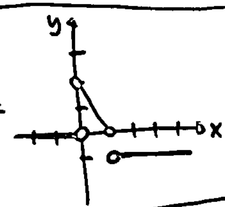
$\boxed{y' = 2}$

$y' = f_1(x) =$

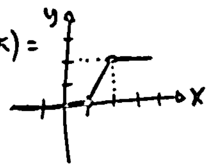


$\boxed{y' = 4 - 2x}$

$y' = f_2(x) =$

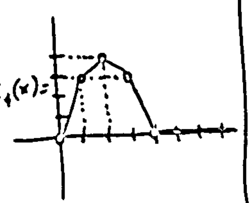


$y' = f_3(x) =$



$\boxed{y' = 4 - (x-2)^2}$

$y' = f_4(x) =$



$$f_5(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 2 \\ -1, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$$

x	$f_1(x)$	$f_5(x)$
-1	1	1
0	1	1
1	1	1
2	1	-1
2,5	-1	-1
3	0	0
4	0	0

x	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
-1	0	0	0
0	2	0	0
0,5	1	0	1,5
1	0	0	3
1,5	-1	1	3,5
2	-1	2	4
2,5	-1	2	3,5
3	-1	2	3
3,5	-1	2	1,5
4	-1	2	0
5	-1	2	0

$f_1(x) = \left\{ \right.$

$f_2(x) = \left\{ \right.$

$f_3(x) = \left\{ \right.$

$f_4(x) = \left\{ \right.$

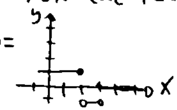
C2 2/dez/2015

Tem uma relação entre "fazer o inverso de derivar" e "calcular áreas"... Qual?
Vamos ver isto aos poucos.

A folha ("material pra exercícios) tem várias funções (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) e várias EDOs.

A gente vai interpretar as EDOs – por exemplo,

$y' = f_1(x) =$



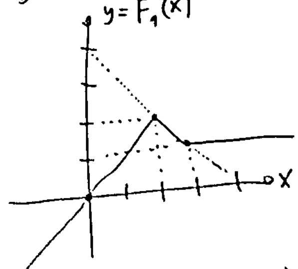
são pra serem resolvidas da seguinte forma:
encontre $F_1(x)$, contínua, tal que $y = F_1(x)$ obedeça $y' = f_1(x)$ em todos os pontos em que f_1 é contínua.

No caso da f_1, queremos encontrar uma F_1 contínua tal que $y' = f_1(x)$ exceto em $x=2$, $x=3$.
$F_1'(x) = y' = f_1(x)$.

Exercício:
Encontre os pontos de descontinuidade de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.
Confira com os colegas ("auto correção")

f_1: $x=2$, $x=3$.
f_2: $x=0$, $x=1$.
f_3 é contínua.
f_4 é contínua.
f_5: $x=2$, $x=3$.

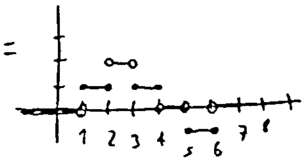
Digamos que $F_1(x)=0$.



$$F_1(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 2 \\ 4-x, & \text{se } 2<x\leq 3 \\ 1, & \text{se } 3<x. \end{cases}$$

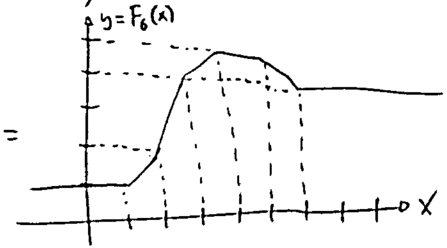
Exercício:
Resolva:

$y' = f_6(x) =$



(Encontre F_6 contínua tal que $F_6'(x) = f_6(x)$ exceto em $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, $x=6$.)

$F_6(x) =$



Definição:
$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é a

Exemplo:

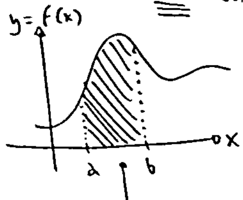
Por enqua[nto ...] sabe cal[cular] áreas e [...] poucas in[...] mas a [...] melhora[...]

Exercício:
Calcule:
a) $\int_{x=0}^{x=2} f_1($
b) $\int_{x=2}^{x=3} f_1$
c) $\int_{x=0}^{x=3} f_1(x$

Definição:

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é a "área sob a curva" f...

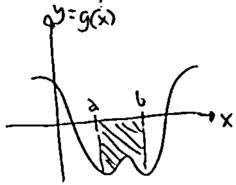
Exemplo:



Esta área é $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Importante:

Aqui,



$\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$ dá um número negativo!!!

Agora represente graficamente a função G_6. Faça o seguinte: comece marcando no gráfico os pontos que você sabe, depois discuta com seus colegas como deve ser o resto do gráfico.

Obs: a gente acabou de ver uma introdução a algumas ideias dos capítulos 1 e 2 do livro (obs: não é "capítulos", é "aulas")

Por enquanto a gente sabe calcular poucas áreas e portanto poucas integrais... Mas a gente vai melhorar. ☺

Exercícios:

Calcule:

a) $\int_{x=0}^{x=2} f_1(x)\,dx = 2$

b) $\int_{x=2}^{x=3} f_1(x)\,dx = -1$

c) $\int_{x=0}^{x=3} f_1(x)\,dx = 1$

Exercício:

Seja $G_6(b) = \int_{x=0}^{x=b} g_6(x)\,dx$.

Calcule:

b	$G_6(b)$
0	0
0.5	0
1	0
1.5	0.5
2	1
2.5	2
3	3
3.5	3.5
4	4
4.5	4
5	4
5.5	3.5
6	3
6.5	3
7	3

$$G_6(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x<1 \\ x-1, & \text{se } 1\leq x<2 \\ 2x-3, & \text{se } 2\leq x<3 \\ x, & \text{se } 3\leq x<4 \\ 4, & \text{se } 4\leq x<5 \\ 9-x, & \text{se } 5\leq x<6 \\ 3, & \text{se } 6\leq x \end{cases}$$

Obs:

$$G_6'(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x<1 \\ 1, & \text{se } 1<x<2 \\ 2, & \text{se } 2<x<3 \\ 1, & \text{se } 3<x<4 \\ 0, & \text{se } 4<x<5 \\ -1, & \text{se } 5<x<6 \\ 0, & \text{se } 6<x. \end{cases}$$

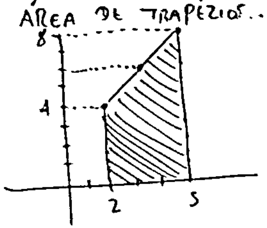
$G_6(x)$ não é derivável em $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\boxed{\text{C2 } 2/\text{DEZ}/2015}$

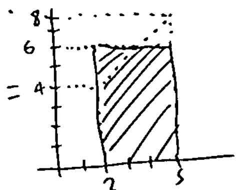
f_1, f_5 e f_6 são "funções escada" — seus gráficos são feitos de segmentos de retas horizontais.

Os gráficos de f_2, f_3, f_4 são feitos de segmentos também — mas agora não necessariamente horizontais...

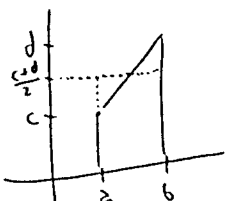
A gente sabe calcular área de trapézios...



=



$\text{ÁREA} = 6\cdot(5-2)$
$= \frac{4+8}{2}\cdot(5-2)$
$= 18$



$\text{ÁREA} = \frac{c+d}{2}(b-a).$

Exercícios:
Calcule:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f_2(x)\,dx = 1$

b) $\int_{x=0}^{x=2} f_2(x)\,dx = 0$

c) Seja $G_3(b) = \int_{x=0}^{x=b} f_3(x)\,dx$.

Calcule:

b	$G_3(b)$
0	0
1	0
2	1
3	3

d) $\int_{x=0}^{x=1} f_4(x)\,dx = 1.5$

e) $\int_{x=1}^{x=2} f_4(x)\,dx = 3.5$

f) $\int_{x=1}^{x=4} f_4(x)\,dx = 8.5$

C2 7/Dez/2015

AVISO: ESTOU COMEÇANDO A PREPARAR UM PDF CHAMADO "MATERIAL PARA EXERCÍCIOS". VOU FICAR ATUALIZANDO ELE CONTINUAMENTE. TEM LINK PRA ELE NA PÁGINA DO CURSO, E CADA FOLHA DELE TEM A VERSÃO - UMA DATA - NO RODAPÉ.

HOJE: INTEGRAL DE RIEMANN, OU: COMO INTERPRETAR E VISUALIZAR SOMATÓRIOS E COMO USÁ-LOS PRA CALCULAR ÁREAS.

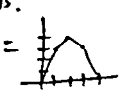
EXEMPLO:

SE $f(x) = x^2$

ENTÃO $\sum_{n=2}^{4} f(n) = f(2)+f(3)+f(4)$

E $\prod_{n=2}^{4} f(n) = f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$

NA AULA PASSADA A GENTE CALCULOU CERTAS ÁREAS FAZENDO SOMAS.

P. EX: $f_6(x) =$ 

$$\int_{x=0}^{x=4} f_6(x)\,dx = \frac{1+3}{2}(1-0)+\frac{3+4}{2}(2-1) + \frac{4+3}{2}(3-2)+\frac{3+1}{2}(4-3) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f_6(n)+f_6(n+1)}{2}((n+1)-n)$$

OS SOMATÓRIOS QUE A GENTE VAI USAR VÃO SER TODOS SOMATÓRIOS DE ÁREAS DE RETÂNGULOS, E SEMPRE DA FORMA ALTURA $\cdot (b-a)$, ONDE A BASE DO RETÂNGULO VAI SER O INTERVALO $[a,b]$.

EXERCÍCIO:
PARA CADA UM DOS SOMATÓRIOS ABAIXO EXPANDA-O E REPRESENTE GRAFICAMENTE A SOMA RESULTANTE.

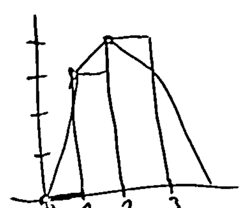
a) $\sum_{i=0}^{2} \underbrace{f_6(i)}_{\text{ALTURA}} (\underbrace{(i+1)}_{b}-\underbrace{i}_{a}) =$

$= f_6(0)\cdot((0+1)-0)+$
$f_6(1)\cdot((1+1)-1)+$
$f_6(2)\cdot((2+1)-2)$

$= f_6(0)\cdot(1-0)+$
$f_6(1)\cdot(2-1)+$
$f_6(2)\cdot(3-2)$

$= 0\cdot(1-0)+$
$3\cdot(2-1)+$
$4\cdot(3-2)$

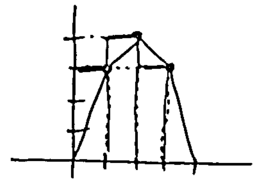
$= 7$



b) $\sum_{i=0}^{2} f_6(i+1)((i+1)-i) =$

$= f_6(1)(1-0)+$
$f_6(2)(2-1)+$
$f_6(3)(3-2)$

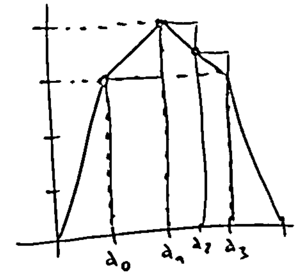
$= 3(1-0)+$
$4(2-1)+$
$3(3-2)$



DICA: TODA VEZ QUE O SOMATÓRIO PEDE PRA VOCÊ CALCULAR $f_6(x)$ PLOTE O PONTO $(x, f_6(x))$ NO GRÁFICO... ESTE PONTO PERTENCE AO GRÁFICO DE f_6.

c) SEJAM
$a_0 = 1,$
$a_1 = 2,$
$a_2 = 2.5,$
$a_3 = 3.$

$\sum_{i=0}^{2} f_6(a_i)(a_{i+1}-a_i) =$

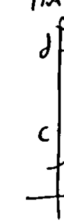


d) SE
a
a
a
a
$\sum_{i=0}^{2}$

O
SOM
SOM
$\sum_{i=0}^{N}$

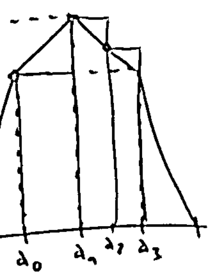
$\sum_{i=0}^{N}$

PRE
NOV
"IN
E
E
PRA



SEJAM
$a_0=1$,
$a_1=2$,
$a_2=2.5$,
$a_3=3$.

$$\sum_{i=0}^{2} f_6(a_i)(a_{i+1}-a_i)=$$



d) SEJAM
$a_0=0$,
$a_1=1$,
$a_2=3$,
$a_3=5$.

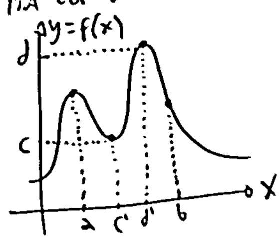
$$\sum_{i=0}^{2} f_6\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)(a_{i+1}-a_i)$$

O LIVRO FALA EM
SOMA DE RIEMANN SUPERIOR E
SOMA DE RIEMANN INFERIOR.

$\sum_{i=0}^{N} f(a_i)(a_{i+1}-a_i)$ É A
SOMA DE RIEMANN À ESQUERDA E

$\sum_{i=0}^{N} f(a_{i+1})(a_{i+1}-a_i)$ É A
SOMA DE RIEMANN À DIREITA.

PRECISAMOS DE UMAS OPERAÇÕES
NOVAS: inf E sup -
"ÍNFIMO" E "SUPREMO" -
E ELAS SÃO COMO MÁXIMO
E MÍNIMO, MAS ADAPTADAS
PRA CONJUNTOS INFINITOS.



O GRÁFICO DA FUNÇÃO
f ATINGE O VALOR
MÁXIMO d NO INTERVALO
[a,b], EM x=d', E O VALOR
MÍNIMO c NO INTERVALO
[a,b] EM x=c'.

ENTÃO

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)=d,$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)=c.$$

EXERCÍCIO:

$$\sup_{x\in[0,1]} f_6(x)=3$$

$$\sup_{x\in[0,3]} f_6(x)=4$$

$$\inf_{x\in[2,5]} f_6(x)=0$$

AGORA DÁ PRA GENTE
DEFINIR PRECISAMENTE O
QUE SÃO A SOMA DE
RIEMANN SUPERIOR E
INFERIOR...

SE $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_N$
E $a=a_0$, $b=a_N$,
ENTÃO $\{a_0,a_1,\ldots,a_N\}$
É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO
$[a,b]$ EM N SUBINTERVALOS,
E AS SOMAS DE RIEMANN
SUPERIOR E INFERIOR DE f
EM $\{a_0,a_1,\ldots,a_N\}$ SÃO:

$$SS=\sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\right)(a_i-a_{i-1})$$

$$SI=\sum_{i=1}^{N}\left(\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\right)(a_i-a_{i-1})$$

EXERCÍCIO:
SEJAM $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=5$.
CALCULE A SS E A SI DE f_6
EM $[1,5]$ COM A PARTIÇÃO
$\{a_0,a_1,a_2\}$.

PRÓXIMA AULA: REVISÃO RÁPIDA
DISSO AÍ PRAS PESSOAS QUE NÃO
VIERAM HOJE, E ALGUNS
MÉTODOS NUMÉRICOS SIMPLES
PRA CALCULAR APROXIMAÇÕES
DE INTEGRAIS NO COMPUTADOR.

C2 9/DEZ/2015

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS 4 COISAS COM "INTEGRAL DE RIEMANN" NO NOME...

SE $P=(N,\{a_0,a_1,\ldots,a_N\})$ É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM N SUBINTERVALOS (OBS: $a=a_0$, $b=a_N$, $a_0<a_1<\ldots<a_N$)

ENTÃO A INTEGRAL DE RIEMANN DE f À ESQUERDA NA PARTIÇÃO P É $\sum_{i=1}^{N} f(a_{i-1})(a_i-a_{i-1})$, (DEF 1)

A I.R. DE f À DIREITA NA PARTIÇÃO P É $\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(a_i-a_{i-1})$, (2)

A I.R. SUPERIOR DE f EM P É $\sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\right)(a_i-a_{i-1})$, (3)

A I.R. INFERIOR DE f EM P É $\sum_{i=1}^{N}\left(\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\right)(a_i-a_{i-1})$. (4)

AGORA VAMOS VER COMO TIRAR O "NA PARTIÇÃO P" DAS DEFINIÇÕES.

DEF: A PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM N SUBINTERVALOS IGUAIS É

$P_N[a,b]=(N,\{a_0,a_1,\ldots,a_N\})$ ONDE $a_i=a+\frac{i}{N}(b-a)$.

POR EXEMPLO:

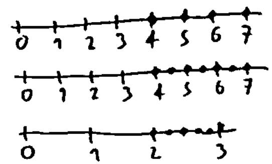
$P_4[3,5]=(4,\{3,3.5,4,4.5,5\})$.

EXERCÍCIOS:

$P_3[4,7]=?$

$P_6[4,7]=?$

$P_5[2,3]=?$



EM $P_3[4,7]$,

$N=3$ $\quad \frac{b-a}{N}=1$
$a=4$
$b=7$
$a_0=4$
$a_1=5$
$a_2=6$
$a_3=7$

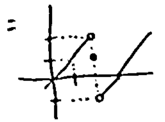
$P_3[4,7]=(3,\{4,5,6,7\})$

EM $P_5[2,3]$,

$N=5$ $\quad \frac{b-a}{N}=\frac{1}{5}=0{,}2$
$a=2$
$b=3$
$a_0=2$
$a_1=2{,}2$
$a_2=2{,}4$
$a_3=2{,}6$
$a_4=2{,}8$
$a_5=3$

UMA SUTILEZA SOBRE INF E SUP...

SEJA f =



$f(1)=1$
$f(2)=1$
$f(3)=0$

ENTÃO $\sup_{x\in[0,3]} f(x)=2$

$\inf_{x\in[0,3]} f(x)=-1$

x	f(x)
0	0
0.5	0.5
1	1
1.5	1.5
1.9	1.9
2	1
2.1	-0.9
2.5	-0.5
3	0
3.5	0.5
4	1

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-1$

A DEFINIÇÃO FORM[...] DE INTEGRAL DE RI[...] USA SUPS E INFS [...] MAS AO INVÉS DE [...] NUMA EXPRESSÃO [...]

$\sup_{x\in[0,3]} f(x)$, ON[...]

X VARIA SOBRE [...] INTERVALO, A G[...] VAI TER ALGO [...] MAIS COMPLI[...] A GENTE VAI [...]

$\sup_{P \text{ PART } [a,b]} (\ldots$

$\inf_{P \text{ PART } [a,b]} (\ldots$

ONDE O P V[...] SOBRE TODAS [...]

AS PARTIÇÕE[...]

DEF:

$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \ldots$

$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx$

...E ESSAS DE[...] A FORMALI[...] DA PÁGIN[...]

$\ldots f(x) = 2$

$\ldots] \; f(x) = -1$

$f(x)$
0
0.5
1
1.5
1.9
1
-0.9
-0.5
0
0.5
1

$f(x) = 2$

$f(x) = -1$

A DEFINIÇÃO FORMAL DE INTEGRAL DE RIEMANN USA SUPS E INFS — MAS AO INVÉS DE SER NUMA EXPRESSÃO COMO $\sup_{x\in[0,3]} f(x)$, ONDE O X VARIA SOBRE UM INTERVALO, A GENTE VAI TER ALGO BEM MAIS COMPLICADO... A GENTE VAI USAR

$$\sup_{P \text{ part } [a,b]} (\ldots), \quad \inf_{P \text{ part } [a,b]} (\ldots),$$

ONDE O P VAI VARIAR SOBRE TODAS AS PARTIÇÕES DE $[a,b]$.

DEF:

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \sup_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ P=(N,\{a_0,\ldots,a_N\})}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \Big(\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\Big)(a_i - a_{i-1})}_{\text{SOMA DE RIEMANN SUPERIOR}}$$

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \sup_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ P=(N,\{a_0,\ldots,a_N\})}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \Big(\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)\Big)(a_i - a_{i-1})}_{\text{SOMA DE RIEMANN INFERIOR}}$$

...E ESSAS DEFINIÇÕES SÃO SÓ A FORMALIZAÇÃO DAS FIGURAS DA PÁGINA 2 DO LIVRO.

TEOREMAS

(OBS: DEPOIS QUE A GENTE APRENDER ESSES TEOREMAS A GENTE NÃO VAI MAIS PRECISAR DOS SOMATÓRIOS!):

OOPS, ANTES DOS TEOREMAS, UMA DEFINIÇÃO:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \underbrace{\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx}_{(\star)} = \underbrace{\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)dx}_{(\star\star)}$$

SE $(\star)=(\star\star)$;

SE $(\star)\neq(\star\star)$ A GENTE DIZ QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ NÃO EXISTE, E QUE $f(x)$ NÃO É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$.

...LEMBRE QUE EXISTIAM FUNÇÕES NÃO DERIVÁVEIS — TAMBÉM VÃO EXISTIR FUNÇÕES NÃO INTEGRÁVEIS!

EXEMPLO:

SEJA $g: \mathbb{R} \to \{1,2\}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{QUANDO } x\in\mathbb{Q}, \\ 2 & \text{QUANDO NÃO.} \end{cases}$$

ENTÃO, P.EX.,

$g(1) = 1$,

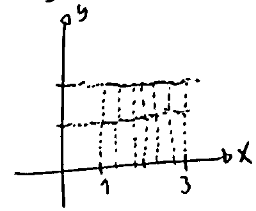
$g(1.1) = g\left(\frac{11}{10}\right) = 1$,

$g(1.234) = g\left(\frac{1234}{1000}\right) = 1$,

$g\left(\frac{2}{345}\right) = 1$

$g(\sqrt{2}) = 2$

$g(\sqrt{2}+0.123) = 2$



QUANTO VALE $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$?

EXERCÍCIO: SEJA $P=(4,\{\underset{a_0}{1}, \underset{a_1}{1.5}, \underset{a_2}{2}, \underset{a_3}{2.5}, \underset{a_4}{3}\})$.

CALCULE $\sum_{i=1}^{4} \Big(\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} g(x)\Big)(a_i - a_{i-1})$, IDEM COM INF.

OBS: O QUE A GENTE ACABOU DE VER CORRESPONDE AO "(1)" DA P.4 DO LIVRO — SÓ QUE EU USEI SOMAS DE RIEMANN SUPERIORES E INFERIORES AO INVÉS DE "PARTIÇÕES PONTILHADAS".

TEOREMA 1 (DO LIVRO) (P.4): TODA FUNÇÃO $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ QUE TEM UMA QUANTIDADE FINITA DE DESCONTINUIDADES É INTEGRÁVEL.

TODA FUNÇÃO $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTÍNUA TEM 0 DESCONTINUIDADES E PORTANTO É INTEGRÁVEL.

C2 9/Dez/2015

Os nossos próximos teoremas precisam de mais uma definição.

Seja $P=(N, \{a_0, a_1, \ldots, a_N\})$ uma partição (obs: $a_0 < a_1 < \ldots < a_N$)

Então $\|P\| = \max\{(a_1-a_0), (a_2-a_1), \ldots, (a_N-a_{N-1})\}$.

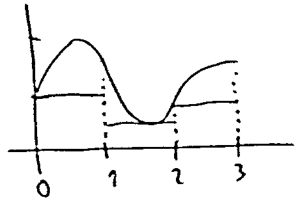
Exercício:

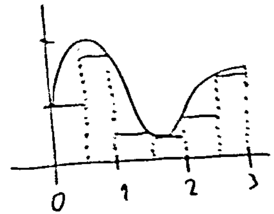
Seja $P=(3, \{1, 5, 5.5, 7\})$.

Então $\|P\| = 1.5$.

Sejam $P_1, P_2, P_3, \ldots$ uma sequência infinita de partições do intervalo $[a,b]$, tal que $\lim_{i\to\infty} \|P_i\| = 0$.

Estas partições são "cada vez mais finas", mas repare que a gente não está pedindo que P_{i+1} tenha todos os pontos de P_i...





Teorema:

Se f é integrável em $[a,b]$ então "todos os jeitos de aproximar $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ por somatórios" (nós vimos 4 jeitos) tendem ao mesmo valor.

Mais precisamente:

$\lim_{i\to\infty}$ S.R.ESQ. sobre P_i de $f(x)$ =

$\lim_{i\to\infty}$ S.R.DIR. sobre P_i de $f(x)$ =

$\lim_{i\to\infty}$ S.R.SUP. sobre P_i de $f(x)$ =

$\lim_{i\to\infty}$ S.R.INF. sobre P_i de $f(x)$ =

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

Isso dá pra gente vários "métodos numéricos" pra calcular integrais...

Por exemplo: podemos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ calculando as S.R.ESQ de $f(x)$ sobre $P_2[a,b]$, $P_4[a,b]$, $P_8[a,b]$, $P_{16}[a,b]$, $P_{32}[a,b]$...

Ou podemos simplesmente calcular algo como a S.R.ESQ de $f(x)$ sobre $P_{1000}[a,b]$ e torcer pro resultado ser próximo o suficiente de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Teorema (que a gente vai usar à beça):

"Teorema Fundamental do Cálculo"...

Seja $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ uma função com um número finito (talvez zero) de descontinuidades.

Seja $b\in[a,c]$.

Então f é integrável em $[a,c]$, e f é integrável em $[a,b]$...

Então podemos definir

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

(obs: o livro usa $g(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt$).

Então (Teorema!):

- F é contínua em $[a,c]$
- Se f é contínua em b então $\frac{dF}{dx}(b) = f(b)$...

Se você voltar pras primeiras aulas você vai ver um monte de <u>exemplos</u> disso.

Aviso:

Não aula 14/...

Nos 16/...

AVISO:

NÃO VOU DAR AULA NA 2ª FEIRA 14/DEZ!

NOS VEMOS NA 4ª, 16/DEZ!

$\boxed{\text{C2 } 16/12/2015}$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS O 1º TFC (TFC = "TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO").

2º TFC:
SEJAM $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
$\quad$ e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

TAIS QUE:

1) f é contínua em $[a,b]$ (exceto num conjunto $S\subset[a,b]$ finito)
2) F é contínua em $[a,b]$
3) F é derivável em $[a,b]$ e $F'(x)=f(x)$ (exceto num conjunto $S\subset[a,b]$ finito)

ENTÃO PARA QUAISQUER $a\le c\le d\le b$ TEMOS

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d} = F(d)-F(c).$$

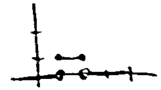
1º TFC:
SEJAM $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua (exceto num conjunto $S\subset[a,b]$ finito),

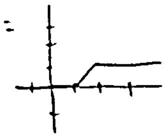
$$F:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$c\mapsto\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx.$$

ENTÃO:

1) F está definida para todo $c\in[a,b]$ (porque f é integrável em $[a,b]$ e em $[a,c]$)
2) F é contínua
3) $F'(x)=f(x)$ (exceto em S).

EXEMPLO:

$f=$ 

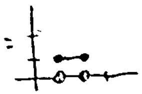
$F=$ 

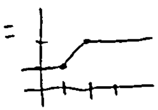
$S=\{1,2\}$
(descontinuidades de f / pontos em que F' não existe)

TFC 1:
$[a,b]=[0,4]$

Se $c=1.5$ então
$$F(c)=\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$
$$=\int_{x=0}^{x=1.5} f(x)\,dx$$
$$=0.5$$

EXEMPLO PRO TFC 2: SEJAM

$f=$ 

$F=$ 

$$F(x)=\begin{cases}1 & \text{quando } x\le 1\\ x & \text{quando } 1<x\le 2\\ 2 & \text{quando } 2<x\end{cases}$$

$S=\{1,2\}$,
$a=0$, $b=3$.

EXEMPLO:
$c=0.5$,
$d=1.5$,
$a\le c\le d\le d$
$0\le 0.5\le 1.5\le 3$

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d}$$
$$\int_{x=0.5}^{x=1.5} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=0.5}^{x=1.5}$$
$$=F(1.5)-F(0.5)$$
$$=1.5-1$$
$$=0.5$$

TERMINOLOGIA

QUANDO f e F OBEDECEM AS CONDIÇÕES DO TFC 2 (À ESQUERDA) DIZEMOS QUE:

1) "F é uma primitiva
2) "$F\in\int f(x)\,dx$" (
$\quad\Uparrow$
3) "$\int f(x)\,dx = F(x)+$

REPARE QUE ESTÁ AP
UMA NOTAÇÃO NOVA...

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ "INTE

$\int f(x)\,dx$ "INTE

AVISO: (☠!!!

DE INTEGRAL
FUNCIONA POR
A GENTE VAI AP
USÁ-LA AOS POUC
O SIGNIFICADO EX
TODOS OS DETALH
FICAR REALMENTE

(EU SÓ FUI A NOT
INTEGRAL INDE
BEM DEPOIS DE
CÁLCULO 2).

TERMINOLOGIA

Quando f e F obedecem as condições do TFC 2 (à esquerda) dizemos que:

QUANDO $x \leq 1$ — 1) "F é uma primitiva de f".

QUANDO $1 < x \leq 2$ — 2) "$F \in \int f(x)\,dx$" (incomum!)

QUANDO $2 < x$ — 3) "$\int f(x)\,dx = F(x) + C$" (comum)

Repare que está aparecendo uma notação nova...

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{"integral definida"}$$

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{"integral indefinida"}$$

AVISO: ( !!!) A notação de integral indefinida funciona por mágica (!!!) - a gente vai aprender a usá-la aos poucos - o significado exato dela, com todos os detalhes, só vai ficar realmente claro em EDO.

(Eu só fui a notação de integral indefinida bem bem depois de eu terminar Cálculo 2).

Agora vamos começar a usar o TFC 2...

Técnicas de integração:

1) Procurar primitivas (chutar e verificar)
2) Substituição.

Procurando primitivas

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} f(x)\,dx = ?$$

Usando o TFC 2, se a gente conseguir uma F com $F'(x) = f(x)$ (em $\mathbb{R}$), a gente tem:

$$\int_{x=0}^{x=\pi} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$F(x)$	$F'(x)$	$F'(x)=f(x)$?	$F(0)$	$F(\pi)$
x^4	$4x^3$	não	0	π^4
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	não	1	-1
$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	sim	-1	1
$6-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	sim	?	?

Exercício:

Use o TFC 2 pra calcular $\int_{x=0}^{x=\pi} f(x)\,dx$

a) usando $F(x) = -\cos x$

b) usando $F(x) = 6 - \cos x$

Outro exercício:

Use o TFC 2 pra calcular $\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} 3x\,dx$.

$f(x) = \operatorname{sen} 3x$

$F(x)$	$F'(x)$	$F'(x)=\operatorname{sen} 3x$?	$F(0)$	$F(\pi)$
x^4	$4x^3$	não	.	.
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	não	.	.
$\cos 3x$	$-3\operatorname{sen} 3x$	não	.	.
$-\frac{1}{3}\cos 3x$	$\operatorname{sen} 3x$	sim	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \underbrace{\operatorname{sen} 3x}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cos x\right)}_{F(x)}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{3}$$

Outros exercícios:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=2} x^3\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 4$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=b} x^3\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{b^4}{4}$

c) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} x^3 + \operatorname{sen} 3x\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$

C2 16/12/2015

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS O 1º TFC (TFC = "TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO").

2º TFC:

SEJAM $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ E $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

TAIS QUE:

1) f É CONTÍNUA EM $[a,b]$ (EXCETO NUM CONJUNTO $S\subset[a,b]$ FINITO)

2) F É CONTÍNUA EM $[a,b]$

3) F É DERIVÁVEL EM $[a,b]$ E $F'(x)=f(x)$ (EXCETO NUM CONJUNTO $S\subset[a,b]$ FINITO)

ENTÃO PARA QUAISQUER $a\le c\le d\le b$ TEMOS

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d} = F(d)-F(c).$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

OBS: ESTA É A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO MAIS IMPORTANTE DE TODAS - ELA É QUE MERECE MAIS TREINO, E ALGUMAS OUTRAS TÉCNICAS VÃO SER BASEADAS NELA.

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = g(h(b))-g(h(a))$$

$$g(y)\Big|_{y=h(a)}^{y=h(b)} = g(h(b))-g(h(a))$$

ENTÃO:

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$$

$$\|$$

$$g(y)\Big|_{y=h(a)}^{y=h(b)} = \int_{y=h(a)}^{y=h(b)} g'(y)\,dy$$

FÓRMULA DA INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (EM INTEGRAIS DEFINIDAS):

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$$

$$= \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

EXERCÍCIO:

O QUE ESTA FÓRMULA "DIZ" QUANDO

$g(u)=\text{sen } u$, $(g'(u)=\cos u)$

$h(x)=3x+4$, $(h'(x)=3)$

$a=5$,

$b=6$?

$$\int_{x=5}^{x=6} 3\cos(3x+4)\,dx$$

$$= \int_{u=3\cdot5+4}^{u=3\cdot6+4} \cos u\,dx$$

PRA CASA:

LEIA O CAP. 4 DO LIVRO (INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO).

$\boxed{\text{C2 21/DEZ/2015}}$

HOJE: INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, CONTINUAÇÃO...

A GENTE VIU QUE:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\|$$

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du, \qquad (☆)$$

OU SEJA,

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (☆☆)$$

ISTO É A FORMULA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO NA INTEGRAL DEFINIDA...

A FORMULA BEM NA INTEGRAL INDEFINIDA É:

$$\boxed{\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du} \quad \boxed{(u=g(x))} \qquad (☆☆☆)$$

DUAS COISAS SEPARADAS!

E EU AVISEI QUE O (☆☆☆) FUNCIONA POR MÁGICA...

DUAS MÁGICAS:

1) QUANDO A GENTE REESCREVE OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO, TUDO DÁ CERTO...

2) $g'(x)dx = du$

VAMOS COMEÇAR VENDO O (2),

$g'(x)\,dx = du$.

IDÉIA:

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$$

$$\frac{du}{dx}dx = g'(x)dx$$

$$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$$

$$du = \frac{du}{dx}dx = \frac{dg(x)}{dx}dx = g'(x)dx$$

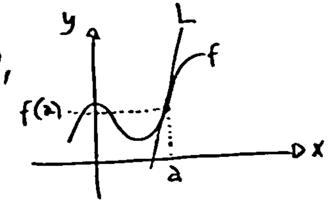
ISTO É UMA DAQUELAS COISAS QUE FAZEM PARTE DO PROGRAMA DE CÁLCULO 1, MAS QUE EM GERAL SÃO VISTAS SUPERFICIALMENTE...

NOME: DIFERENCIAIS.

ONDE: TEM UM SCAN DA SEÇÃO 3.10 DO THOMAS (CÁLCULO VOL 1, 11ª ED) NA PÁGINA DO CURSO DE C2.

IDÉIA (MAIS BÁSICA, DE ONDE AS DIFERENCIAIS APARECEM): LINEARIZAÇÃO.

SE $y=f(x)$,



COMO É QUE A GENTE APROXIMA ESSA CURVA POR UMA RETA NO PONTO $(a, f(a$

ESSA RETA VAI SER A LINEARIZAÇ DE f EM $x=a$.

A RETA VAI SER $y=L(x)$.

TANTO $f(x)$ QUANTO $L(x)$ PASSAM PELO PONTO $(a,f(a))$, E AS DUAS TÊM A MESMA INCLINAÇÃO, I.E., A MESMA DERIVADA, NESTE PONTO...

JÁ QUE $L(x)$ É UMA RETA

$$L(x) = \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{INCLINAÇÃO}\\ \text{(CONSTANTE!)}}}x + \beta \ldots$$

$$L'(x) = \underbrace{\alpha}_{\text{DERIVADA DE}}$$

ALIÁS, EM TO

QUEREMOS $\underset{\alpha}{\overset{}{L'(a)}} = f'(a)$,

$$\|$$

ENTÃO $L(x) = f'(a)x + \beta$

QUEREMOS $L(a) = f(a)$

$$\|$$

$$f'(a)a + \beta,$$

ENTÃO: $\beta = f(a) - f'(a)a$

$\boxed{\text{C2 21/dez/2015}}$

Hoje: integração por substituição, continuação...

A gente viu que:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\| \qquad\qquad\qquad (\star)$$

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du,$$

Ou seja,

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (\star\star)$$

Isto é a fórmula de integração por substituição na integral definida...

A fórmula bem na integral indefinida é:

$$\boxed{\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du} \quad \boxed{(u=g(x))} \quad (\star\star\star)$$

Duas coisas separadas!

E eu avisei que o $(\star\star\star)$ funciona por mágica...

Duas mágicas:

1) Quando a gente reescreve os limites de integração, tudo dá certo...
2) $g'(x)dx = du$

Vamos começar vendo o (2),

$g'(x)\,dx = du.$

Idéia:

$u = g(x)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$$

$$\frac{du}{dx}dx = g'(x)dx$$

$$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$$

$$du = \frac{du}{dx}dx = \frac{dg(x)}{dx}dx = g'(x)dx$$

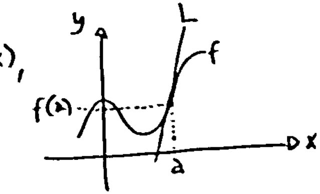
Isto é uma daquelas coisas que fazem parte do programa de Cálculo 1, mas que em geral são vistas superficialmente...

Nome: diferenciais.

Onde: Tem um scan da seção 3.10 do Thomas (Cálculo vol 1, 11ª ed) na página do curso de C2.

Idéia (mais básica, de onde as diferenciais aparecem): linearização.

Se $y = f(x)$,



A

Como é que a gente aproxima essa curva por uma reta no ponto $(a, f(a))$?

Essa reta vai ser a linearização de f em $x=a$.

A reta vai ser $y = L(x)$.

Tanto $f(x)$ quanto $L(x)$ passam pelo ponto $(a, f(a))$, e as duas têm a mesma inclinação, i.e., a mesma derivada, neste ponto...

Já que $L(x)$ é uma reta,

$$L(x) = \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{inclinação}\\ \text{(constante!)}}} x + \beta \ldots$$

$L'(x) = \alpha$ derivada de L em todo x, aliás,

Queremos $L'(a) = f'(a)$,

$$\begin{array}{c} \| \\ \alpha \end{array}$$

Então $L(x) = f'(a)x + \beta$.

Queremos $L(a) = f(a)$

$$\begin{array}{c} \| \\ f'(a)a + \beta, \end{array}$$

Então: $\beta = f(a) - f'(a)a \ldots$

$)dx$

TE

O 1,

TE...

IAIS.

ICAS DA

TO

CÁLCULO VOL 1,

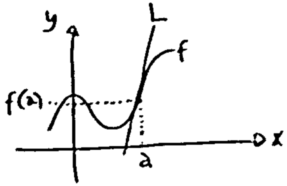
A PÁGINA DO

C2.

DE ONDE AS

RECEM):

Se $y=f(x)$,



Como é que a gente aproxima essa curva por uma reta no ponto $(a, f(a))$?

Essa reta vai ser a <u>LINEARIZAÇÃO</u> de f em $x=a$.

A reta vai ser $y=L(x)$.

Tanto $f(x)$ quanto $L(x)$ passam pelo ponto $(a, f(a))$, e as duas têm a mesma inclinação, i.e., a mesma derivada, neste ponto...

Já que $L(x)$ é uma reta,

$$L(x) = \underbrace{\alpha}_{\text{inclinação (constante!)}} x + \beta \ldots$$

$$L'(x) = \underbrace{\alpha}_{\text{derivada de } L \text{ em } x=a,\ \text{aliás, em todo } x,}$$

Queremos $L'(a) = f'(a)$,
$\qquad\quad \shortparallel$
$\qquad\quad \alpha$

Então $L(x) = f'(a)x + \beta$.

Queremos $L(a) = f(a)$
$\qquad\quad \shortparallel$
$\qquad f'(a)a + \beta$,

Então: $\beta = f(a) - f'(a)a \ldots$

Agora precisamos de um pouco de prática com isso...

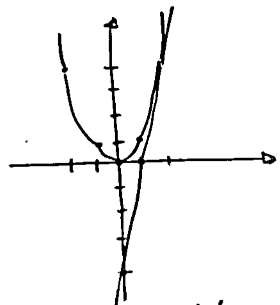
Exercícios:

a) $f(x) = x^2$.

Calcule a linearização L de $f(x)$ em $x=2$ e represente no mesmo gráfico $f(x)$ e $L(x)$.

$$\alpha = f'(2) = 2.2 = 4$$

$$\beta = f(2) - f'(2).2 = 4 - 4.2 = -4$$



Pra que servem essas linearizações? Elas aproximam muito bem $f(x)$ perto de $x=a$...

Exemplo: se $x = 2.001$,
$f(x) = x^2 = 4.004001$,
$L(x) = 4x - 4$
$= 8.004 - 4$
$= 4.004$
≈ 4.004001 !!!

Formalmente:

Seja $g(x) = f(x) - L(x)$.

Então $g(a) = 0$,
$g'(a) = 0$,

$$g'(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(a+\varepsilon) - g(a)}{\varepsilon} = 0$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f(a+\varepsilon) - L(a+\varepsilon)) - (f(a) - L(a))}{\varepsilon}$$

$$= \ldots$$

Lembre da idéia de Δx, Δy, $\Delta f(x)$, etc, de Cálculo 1...

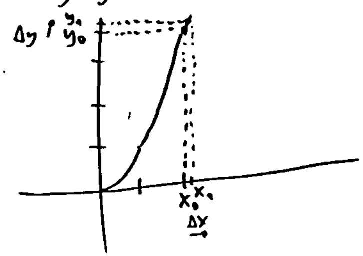
Vamos pensar só na f um instante, e esquecer a L.

Sejam: $x_0 = 2 \qquad x_1 = 2.001$

$y_0 = f(x_0) = 4 \qquad y_1 = f(x_1) = 4.004001$

$\Delta x = x_1 - x_0 = 0.001$

$\Delta y = y_1 - y_0 = 0.004001$



Idéia (mais óbvia):

$\Delta y \approx 4\Delta x$
$= f'(2)\Delta x$
$= f'(x_0)\Delta x$

$\boxed{\text{C2 21/DEZ/2015}}$

HOJE: INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, CONTINUAÇÃO...

A GENTE VIU QUE:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\|$$

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (☆)$$

OU SEJA,

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (☆☆)$$

ISTO É A FORMULA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO NA INTEGRAL DEFINIDA...

A FORMULA DELA NA INTEGRAL INDEFINIDA É:

$$\boxed{\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du} \quad \boxed{(u=g(x))} \quad (☆☆☆)$$

DUAS COISAS SEPARADAS!

E EU AVISEI QUE O (☆☆☆) FUNCIONA POR MÁGICA...

DUAS MÁGICAS:

1) QUANDO A GENTE REESCREVE OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO, TUDO DÁ CERTO...
2) $g'(x)dx = du$

IDÉIA ($\underline{\text{NADA}}$ ÓBVIA):

QUEREMOS FORMALIZAR O $\frac{du}{dx}dx = du$ QUE APARECE NA INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO...

USANDO Δx, Δy, ETC, TEMOS

$f'(x)\Delta x \approx \Delta y$...

PRA TERMOS

$f'(x)dx = dy$,

COM "=", NÃO "≈", A GENTE PRECISA DE UM TRUQUE (INDIGESTO - p.243 DO SCAN DO THOMAS)...

A GENTE VAI $\underline{\text{DEFINIR}}$

$dy := f'(x)dx$.

COMO ASSIM???

TRUQUE: VAMOS COMEÇAR FAZENDO UNS EXERCÍCIOS!

EXERCÍCIO:

SEJA $y = f(x) = x^5 + 37x$.

DETERMINE O VALOR DE dy QUANDO $x=1$ E $dx = 0.2$.

$f'(x) = 5x^4 + 37$

$f'(1) = 5 + 37 = 42$

$f'(1)\cdot 0.2 = 42\cdot 0.2 = 8.4$

E QUANDO dx É UMA VARIÁVEL:

$dy = f'(x)dx$
$= f'(1)dx$
$= 42\,dx$

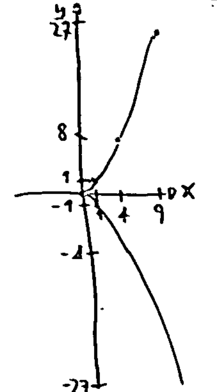
IMPORTANTE: dy E dx SÃO PROPORCIONAIS.

IDÉIA IMPORTANTE (A GENTE VAI APRENDER AOS POUCOS A SABER LIDAR COM ELA): NOSSAS VARIÁVEIS "VARIAM JUNTAS".

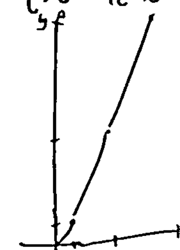
POR EXEMPLO:

$x = t^2$
$y = t^3$

t	x	y
-3	9	-27
-2	4	-8
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	8
3	9	27
0.1	0.01	0.001



ESSA CURVA NÃO É UMA FU[...] MAS SE A GE[...] SE RESTRINGI[...] $t>0$ TEMOS



$y = x^{3/2}$.

EXERCÍCIO:

SEJA $y = f(x) = x^5 + 37x$.

DETERMINE O VALOR DE dy QUANDO $x = 1$ E $dx = 0.2$.

$f'(x) = 5x^4 + 37$

$f'(1) = 5 + 37 = 42$

$f'(1) \cdot 0.2 = 42 \cdot 0.2 = 8.4$

E QUANDO dx É UMA VARIÁVEL:

$$dy = f'(x)\,dx = f'(1)\,dx = 42\,dx$$

IMPORTANTE: dy E dx SÃO PROPORCIONAIS.

IR

SAR

CIOS!

IDÉIA IMPORTANTE (A GENTE VAI APRENDER AOS POUCOS A SABER LIDAR COM ELA):

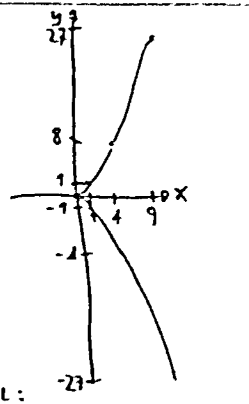
NOSSAS VARIÁVEIS "VARIAM JUNTAS".

POR EXEMPLO:

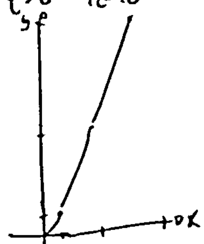
$x = t^2$

$y = t^3$

t	x	y
-3	9	-27
-2	4	-8
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	8
3	9	27
0.1	0.01	0.001



ESSA CURVA NÃO É UMA FUNÇÃO... MAS SE A GENTE SE RESTRINGIR A $t > 0$ TEMOS:



$y = x^{3/2}$.

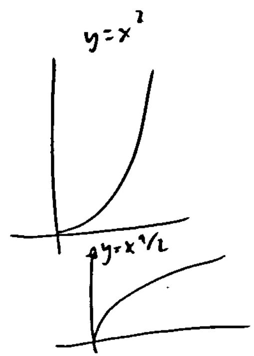
VAMOS TENTAR ENTENDER O COMPORTAMENTO DE $f(x) = x^{3/2}$ EM x^2...

VAMOS CALCULAR A DERIVADA DE f E A LINEARIZAÇÃO DE f EM $x = 4$!

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$f'(4) = \frac{3}{2} 4^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{4} = \frac{3}{2} 2 = 3$$

$$f(4) = 4^{3/2} = 4\sqrt{4} = 8$$



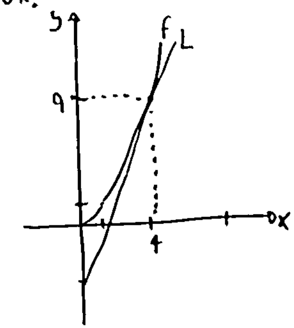
SE $L(x) = 3 \cdot x - 4$

ENTÃO

$L'(4) = 3 = f'(4)$

$L(4) = 8 = f(4)$

OK.



...E VÁRIOS OUTROS ASSUNTOS ☺.

PRÓXIMA AULA (4ª ÀS 14:00 A NÃO SER QUE VOCÊ ME AVISE QUE NÃO VEM!):

RELAÇÕES ENTRE dx, dy, dt

(EM $x = 4, y = 9$ TEMOS $t = 2$!)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}\,dt = dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

TUDO ISTO VAI FAZER SENTIDO, E A GENTE VAI USAR ISTO PRA INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, PRA DERIVAÇÃO IMPLÍCITA, ETC...

C2 4/JAN/2016

FÓRMULA DA SUBSTITUIÇÃO PARA A INTEGRAL INDEFINIDA:

$$\int g'(h(x))h'(x)\,dx = \int g'(u)\,du \quad (u=h(x))$$

SÓ QUE A GENTE VAI VOLTAR PRA ALGUNS TÓPICOS AVANÇADOS (?) DE CÁLCULO 1 QUE GERALMENTE NÃO SÃO BEM DADOS NO CURSO, PORQUE ELES VÃO NOS AJUDAR MUITO COM ESSA HISTÓRIA DE du, dx, ETC.

AULA PASSADA: LINEARIZAÇÃO E DIFERENCIAIS.

AGORA: DERIVAÇÃO IMPLÍCITA, DERIVADA DE FUNÇÃO INVERSA

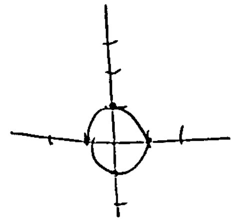
(P.EX., PARA $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$)

DOIS JEITOS ("COISAS AVANÇADAS DE C1") DE DEFINIR CURVAS EM $\mathbb{R}^2$:

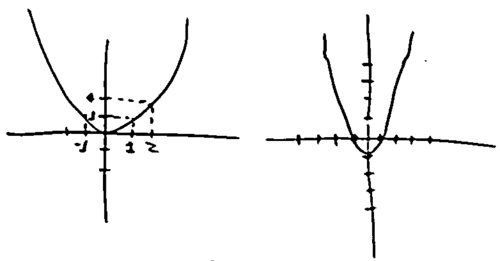
1) $x=t^2$
$y=t^3$
VARIANDO t A GENTE TEM UMA CURVA.

2) $G(x,y)$, $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
ESCOLHA UMA CURVA DE NÍVEL DA G (OU UM PEDAÇO DELA)

EXEMPLO PRO 2:
$G(x,y)=x^2+y^2$.

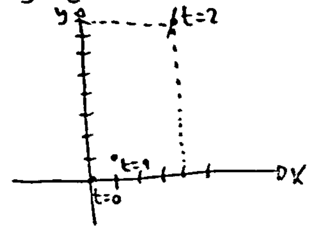


OUTRO:
$H(x,y)=x^2-y$.
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=0\} = ?$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=1\} = ?$



IDÉIA: $z=G(x,y)$
$=x^2+y^2$
SUPERFÍCIE EM $\mathbb{R}^3$:
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2+y^2\}$
(PARABOLÓIDE).

VAMOS VOLTAR PRO 1...
$x=t^2$
$y=t^3$

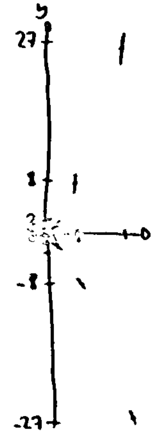


AGORA A GENTE TEM QUE LEMBRAR DE LINEARIZAÇÕES... ELAS VÃO NOS PERMITIR CALCULAR $\frac{dy}{dx}$.

CALCULE $\frac{dy}{dt}$ E $\frac{dx}{dt}$ EM $t=2$.

$\frac{dy}{dt}=3t^2$, $\frac{dx}{dt}=2t$
$dy=3t^2dt$, $dx=2t\,dt$
E QUANDO $t=2$,
$dy=3\cdot2^2dt$ $dx=2\cdot2\,dt$
$\frac{dy}{dx}=\frac{12\,dt}{4\,dt}=3$

AGORA CALCULE x, y, $\frac{dy}{dx}$ PARA $t=1,3,-1,-2,-3,0$, E USE ISTO PRA DESENHAR A CURVA $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3.\end{cases}$



AGORA VAMOS VOLTAR PRO $G(x,y)$

DIGAMOS QUE $y=f($

$h(x)=G(x,f(x))$.

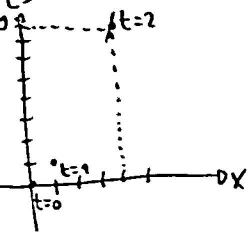
EXERCÍCIO BOBO:
SE $f(x)=x^2$, $\frac{d}{dx}h($
$h(x)=G(x,f(x))$
$=x^2+f(x)^2$
$=x^2+(x^2)^2$
$=x^2+x^4$
$h'(x)=2x+4x^3$

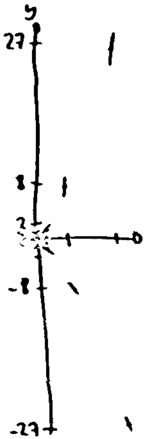
E EM GERAL,
$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{d}{dx}G($
$=\frac{d}{dx}(x^2$
$=2x+2$

...os voltar pro 1...

t^2

t^3





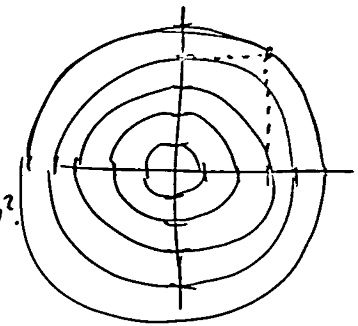
Agora digamos que a gente sabe que $h(x)$ é constante, ou seja, $\frac{d}{dx}h(x)=0$.

Digamos que $f(3)=4$.

Descubra $f'(3)$.

OBS: $x=3$, $y=4$, $G(x,y)=x^2+y^2=25$

Estamos na curva de nível de $G(x,y)=25$.



Agora a gente tem que lembrar de linearizações... Elas vão nos permitir calcular $\frac{dy}{dx}$.

Calcule $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ em $t=2$.

$$\frac{dy}{dt}=3t^2,\quad \frac{dx}{dt}=2t$$

$$dy=3t^2dt,\quad dx=2t\,dt$$

E quando $t=2$,

$$dy=3\cdot 2^2dt \quad dx=2\cdot 2\,dt$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12\,dt}{4\,dt}=3$$

Agora calcule $x, y, \frac{dy}{dx}$ para $t=1, 3, -1, -2, -3, 0$, e use isto pra desenhar a curva $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$

Agora vamos voltar pro $G(x,y)=x^2+y^2$.

Digamos que $y=f(x)$, $h(x)=G(x,f(x))$.

Exercício bobo:

Se $f(x)=x^2$, $\frac{d}{dx}h(x)=?$

$$\begin{aligned} h(x) &= G(x,f(x)) \\ &= x^2+f(x)^2 \\ &= x^2+(x^2)^2 \\ &= x^2+x^4 \end{aligned}$$

$$h'(x)=2x+4x^3$$

E em geral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}h(x) &= \frac{d}{dx}G(x,f(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2+f(x)^2\right) \\ &= 2x+2f(x)f'(x) \end{aligned}$$

Se $f(4)=3$, $f'(4)=?$

Se $f(1)=2$, $f'(1)=?$

Se $f(-1)=2$, $f'(-1)=?$

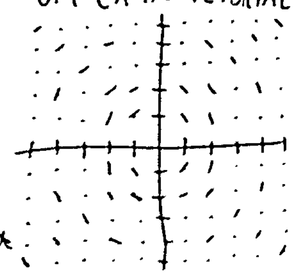
Se $f(2)=1$, $f'(2)=?$

Estes pontos, $(4,3)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, $(2,1)$, podem estar em curvas de nível diferentes... mas use o que você calculou pra representar graficamente os coefs angulares destas curvas nestes pontos.

Você deve ter percebido um padrão -

$$f(99)=200 \Rightarrow f'(x)=-\frac{99}{200}.$$

Use isto para esboçar um campo vetorial.



C2 6/JAN/2015

LEMBRE QUE:

$$\int g(h(x))\,h'(x)\,dx = \int g(u)\,du, \quad u = h(x) \ldots$$

TAMBÉM VALE

$$\int g(h(x))\,h'(x)\,dx = \int g(u)\,du, \quad x = h^{-1}(u),$$

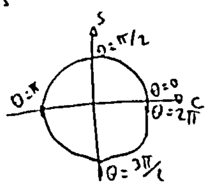
OU SEJA, DÁ PRA GENTE USAR A FÓRMULA DA ESQUERDA SÓ CONSIDERANDO QUE X E U "VARIAM JUNTOS", E DEPOIS A GENTE DECIDE QUAL É A VARIÁVEL "BÁSICA" E QUAIS AS "DEPENDENTES"...

ANTES DA GENTE COMEÇAR A FAZER MUITAS CONTAS COM SUBSTITUIÇÃO VAMOS VER ALGUNS TRUQUES IMPORTANTES BASEADOS NA IDÉIA DE "VARIÁVEIS QUE VARIAM JUNTAS".

1) θ = ÂNGULO EM RADIANOS (VARIÁVEL BÁSICA)

$c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

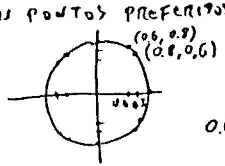


θ	c	s
0	1	0
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1
2π	1	0

$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$c^2 + s^2 = 1$

MEUS PONTOS PREFERIDOS DO CÍRCULO:



$0.6^2 = 0.36$

$0.8^2 = 0.64$

$0.6^2 + 0.8^2 = 1$

ENTÃO:

$c^2 = 1 - s^2$

$c = \sqrt{1-s^2}$ ÀS VEZES,

$c = -\sqrt{1-s^2}$ OUTRAS VEZES.

IDEM AQUI:

$s = \sqrt{1-c^2}$ OU

$s = -\sqrt{1-c^2}$.

TUDO DEPENDE DO QUADRANTE...

$s=\sqrt{1-c^2}$ $c=-\sqrt{1-s^2}$	$s=\sqrt{1-c^2}$ $c=\sqrt{1-s^2}$
$s=-\sqrt{1-c^2}$ $c=-\sqrt{1-s^2}$	$s=-\sqrt{1-c^2}$ $c=\sqrt{1-c^2}$

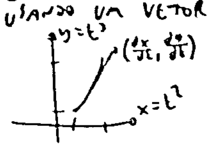
AGORA A GENTE PODE DESCOBRIR UM MONTE DE RELAÇÕES BACANAS ENTRE $c, s, dc, ds, d\theta, \ldots$

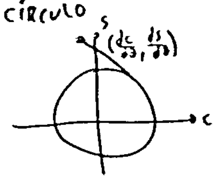
LEMBRANDO DA AULA PASSADA, COMPLETE:

c	s	dc	ds
0.8	0.6	_ds	_dc
0.6	0.8	_ds	_dc

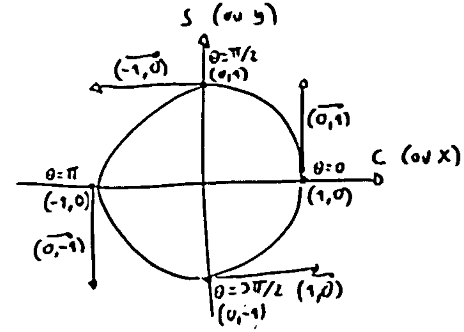
(DICA: $dc = \frac{dc}{d\theta}d\theta$, $ds = \frac{ds}{d\theta}d\theta$, $\frac{ds}{dc} = ?$ $\frac{dc}{ds} = ?$)

DÁ PRA GENTE REPRESENTAR A VELOCIDADE DA TRAJETÓRIA EM CADA PONTO DO CÍRCULO USANDO UM VETOR.





θ	c (x)	s (y)	$\frac{dc}{d\theta}$	$\frac{ds}{d\theta}$
0	1	0	0	1
$\pi/2$	0	1	-1	0
π	-1	0	0	-1
$3\pi/2$	0	-1	1	0
2π	1	0	0	1



SE (X,Y) É UM PONTO DO CÍRCULO UNITÁRIO, O VETOR VELOCIDADE NAQUELE PONTO VAI SER (-Y, X)...

VAMOS VOLTAR A ISTO, COM EXERCÍCIOS, DEPOIS.

ESTAS FÓRMULAS VÃO SER IMPORT

$\frac{ds}{d\theta} = c \qquad ds =$

$\frac{dc}{d\theta} = -s \qquad dc =$

$s = \sqrt{1-c^2}$

$c = \sqrt{1-s^2}$

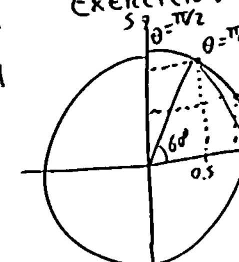
$ds = c\,d\theta = \sqrt{1}$

$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{1-s^2}$

$dc = -s\,d\theta =$

$\frac{dc}{d\theta} = -\sqrt{1-c^2}$

EXERCÍCIO:

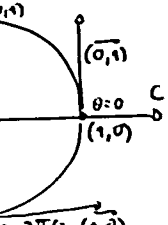


θ	c	s	$\frac{dc}{d\theta}$
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	-0.5
$\pi/3$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

VERIFIQUE QUE TO LÁ DE CIMA (AS VALEM PARA $\theta=\pi/$ E $\theta=\pi/$

$\frac{dc}{d\theta}$	$\frac{ds}{d\theta}$
0	1
1	0
0	-1
1	0
0	1

(ou y)



E (X,Y) É UM PONTO
O CÍRCULO UNITÁRIO,
O VETOR VELOCIDADE
NAQUELE PONTO VAI SER
$(-y, x)$...

VAMOS VOLTAR A ISTO, COM EXERCÍCIOS, DEPOIS.

ESTAS FÓRMULAS VÃO SER IMPORTANTES:

$$\frac{ds}{d\theta} = c \qquad ds = c\,d\theta$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -s \qquad dc = -s\,d\theta$$

$$s = \sqrt{1-c^2}$$

$$c = \sqrt{1-s^2}$$

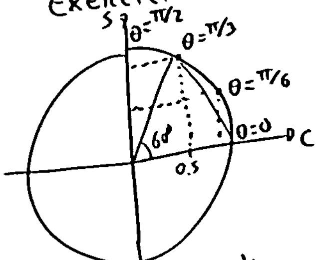
$$ds = c\,d\theta = \sqrt{1-s^2}\,d\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{1-s^2}$$

$$dc = -s\,d\theta = -\sqrt{1-c^2}\,d\theta$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -\sqrt{1-c^2}$$

EXERCÍCIO:



θ	c	s	$\frac{dc}{d\theta}$	$\frac{ds}{d\theta}$	dc	ds
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-0.5\,ds$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,dc$
$\pi/3$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\,ds$	$0.5\,dc$

VERIFIQUE QUE TODAS AS FÓRMULAS LÁ DE CIMA (AS "IMPORTANTES") VALEM PARA $\theta=\pi/6$ E $\theta=\pi/3$.

VAMOS VOLTAR A θ, c, s DEPOIS.

DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

DIGAMOS QUE

$$f(x) = g(h(x))$$

E QUE SEMPRE VALE

$$f(x) = x.$$

ENTÃO

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dx}}\, g(h(x)) = g'(h(x))\,h'(x).$$

DIGAMOS QUE:

$h(2)=3$,

$h'(2)=5$.

ENCONTRE $g(3)$ E $g'(3)$.

AGORA DIGAMOS QUE

$h(x) = e^x$.

ENTÃO $g(y) = \ln y$,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dx}}\, g(h(x)) = g'(h(x))\,h'(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dx}} \ln e^x = \overset{\shortparallel}{\ln'(e^x)\,e^x}$$

$$\ln'(e^x)\,e^x = 1$$

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$$

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

CONSEQUÊNCIA:

$$\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\,dx = ?$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{x=e^2}^{x=e^3} \left(\frac{d}{dx}\ln x\right) dx =$$

PRA CASA:

a) $\displaystyle\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{4x+5}\,dx = ?$

USE O TFC.

NO ITEM b, USE SUBSTITUIÇÃO ($u=4x+5$).

C2 11/JAN/2016

EXERCÍCIOS DO FIM DA AULA PASSADA:

a) $\displaystyle\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{4x+5}\,dx = ?$

$f(x)$	$F(x)$	a	b	$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_{x=a}^{x=b}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	e^2	e^3	$\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big\vert_{x=e^2}^{x=e^3}$

$$= \ln(e^3) - \ln(e^2)$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

DICAS:

TFC1:

TFC2:

a	b	$g(x)$	$g'(x)$	$h(x)$
2	3	$\frac{\ln x}{4}$	$\frac{1}{4x}$	$4x+5$

SUBSTITUIÇÃO (INTEGRAL DEF.): $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$

SUBSTITUIÇÃO (INTEGRAL INDEF.): $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \quad (u=g(x))$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ?$

2)

QUEREMOS QUE ISTO SEJA

$$\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{4x+5}\,dx$$

$$\overbrace{\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

a	b	$g(x)$	$g'(x)$	$h(x)$	$h'(x)$	
2	3	$\frac{\ln x}{4}$	$\frac{1}{4x}$	$4x+5$	4	$\int_{x=2}^{x=3}$

QUEREMOS QUE ISTO SEJA

$$\int \frac{1}{4x+5}\,dx$$

$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$	$\overbrace{\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx} = \int f'(u)\,du$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	x^3	$3x^2$	$\int (\cos x^3)(3x^2)\,dx = \int \cos u\,du$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$
$\frac{\ln x}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4x}$	$4x+5$	4	$\int \frac{1}{\cancel{4}\cdot(4x+5)}\cdot\cancel{4}\,dx = \int \frac{1}{4u}\,du$

C2 18/JAN/2016

ESTAMOS VENDO A MATÉRIA DO LIVRO EM OUTRA ORDEM...

REPARE QUE SABÍAMOS INTEGRAR POLINÔMIOS:

$$\int ax^3+bx^2+cx+99\,dx = \ldots$$

AGORA VAMOS VER — AOS POUCOS! — COMO INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS, I.E. QUOCIENTES DE POLINÔMIOS.

$$\int (\underbrace{x+4}_{u})^5 dx = \int u^5\,du \qquad \begin{pmatrix} u=x+4 \\ du=dx \\ dx=du \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}u^6$$

$$= \frac{1}{6}(x+4)^6$$

$$\int (3+4x)^5 dx = ?$$

$$= \frac{(3+4x)^6}{24}$$

$$\int (3+4x)^{-2} dx = ? \qquad -\frac{1}{12+16x} = -\frac{1}{4(3+4x)}$$

REVISÃO

a) $\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\,dx = ?$

b) $\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{4x+5}\,dx = ?$

TFC1:

TFC2:

SUBST (D):

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

SUBST (I):

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \quad (u=g(x))$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$

$$\int \frac{1}{4x+5}\,dx = \int \frac{1}{u}$$

$$= \frac{1}{4}\ell$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\boxed{6}$

o em

...amot
...ios:

$\dots 9\, dx = \dots$

R -
o integrar
..., i.e.
...linômios.

$\int u^5\, du \quad \begin{pmatrix} u = x+4 \\ du = dx \\ dx = du \end{pmatrix}$

$\frac{1}{6} u^6$

$\frac{1}{6}(x+4)^6$

$\frac{\dots 4x)^6}{\dots 24}$

$-\frac{1}{12+16x} = -\frac{1}{4(3+4x)}$

Revisão

a) $\int_{x=e^2}^{x=e^3} \frac{1}{x}\, dx = ?$

b) $\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{4x+5}\, dx = ?$

TFC 1:

TFC 2:

SUBST (D):

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\, h'(x)\, dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\, du$$

SUBST (I):

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du \quad (u = g(x))$$

$\int \frac{1}{x}\, dx = ?$

$$\int \frac{1}{4x+5}\, dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{4}\, du \quad \begin{pmatrix} u = 4x+5 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4} du \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{4} \ln u$

$= \frac{1}{4} \ln 4x+5$

$\boxed{C2 \quad 18/\text{JAN}/2016}$

ESTAMOS VENDO A MATÉRIA DO LIVRO EM OUTRA ORDEM...

AGORA SABEMOS CALCULAR COISAS COMO:

$$\int 99x^{-4} + 66x^{-2} + 13x^{-1} + 5 + 9x + 10x^2\,dx =$$

$$= 99\left(-\tfrac{1}{3}x^{-3}\right) + 66\left(-\tfrac{1}{1}x^{-1}\right) + 13\ln x + 5x + 9\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) + 10\left(\tfrac{1}{3}x^3\right) + C$$

$$\int 99(x-2)^{-4}dx = 99\left(-\tfrac{1}{3}(x-2)^{-3}\right)$$

$$\int 66(x-5)^{-2}dx = 66\left(-1(x-5)^{-1}\right)$$

$$\int 13(x-8)^{-1}dx = 13\,.\ln(x-8)$$

$$\int 10(x-4)^2dx = 10\left(\tfrac{1}{3}(x-4)^3\right)$$

(OK)

$$\int 99(4x+5)^{-6}dx = \ldots$$

SABEMOS INTEGRAR
- POTÊNCIAS DE x,
- POTÊNCIAS DE $x+a$,
- POTÊNCIAS DE $ax+b$.

EXEMPLO:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+5}.$$

$$\int \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+5}dx = 3\ln(x-2) + 4\ln(x+5) + C$$

$$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+5} = \frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{(x-2)\cdot 4}{(x-2)(x+5)}$$
$$= \frac{3(x+5)+4(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$
$$= \frac{3x+15+4x-8}{x^2+3x-10}$$
$$= \frac{7x+7}{x^2+3x-10}$$

$$\int \frac{7x+7}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+5}dx$$
$$= 3\ln(x-2) + 4\ln(x+5) + C$$

PRA INTEGRAR ALGO DA FORMA

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx$$

A GENTE REESCREVE COMO

$$\int \frac{ax+b}{(x-e)(x-f)}dx,$$

DEPOIS COMO

$$\int \frac{g}{x-e} + \frac{h}{x-f}dx$$ E PRONTO !!

EXE

x^2

QU

x^2

A

$\lim_{x\to}$

$\ldots x = 3\ln(x-2) + 4\ln(x+5) + C$

$$\frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{(x-2)\cdot 4}{(x-2)(x+5)}$$

$$\frac{3(x+5)+4(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

$$= \frac{3x+15+4x-8}{x^2+3x-10}$$

$$= \frac{7x+7}{x^2+3x-10}$$

$$\ldots dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+5}\, dx$$

$$= 3\ln(x-2) + 4\ln(x+5) + C$$

…AR ALGO DA FORMA

$\ldots dx$

…SCREVE COMO

$\ldots dx$,

$\ldots dx$ E PRONTO ☺.

EXERCÍCIO:

$$x^2 - x - 6 = (x-a)(x-b).$$

QUEM SÃO a E b?

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$a = 3$$
$$b = -2.$$

AGORA UM TRUQUE <u>NADA</u> ÓBVIO PRA GENTE FAZER O PASSO

$$\frac{ax+b}{(x-e)(x-f)} \rightsquigarrow \frac{g}{x-e} + \frac{h}{x-f}.$$

MÉTODO DE HEAVISIDE

(OBS: $a, b, c \in \mathbb{R}$, DIFERENTES).

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}} + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c} = \frac{\cancel{(x-a)}\,p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)(x-c)}$$

$$A + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c} = \frac{p(x)}{(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}\left(A + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}\right) = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{(x-b)(x-c)} = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$\parallel$$

$$A + \frac{\cancel{(a-a)}B}{a-b} + \frac{\cancel{(a-a)C}}{\cancel{x-c}}$$

$$\parallel$$

$$A$$

OU SEJA:

PRA DESCOBRIRMOS A, B, C EM

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

BASTA:

$$A = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$B = \frac{p(b)}{(b-a)(b-c)}$$

$$C = \frac{p(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

EXERCÍCIO:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5} = \frac{5x^2+20x+1}{(x-2)(x-3)(x+5)}.$$

(I) CALCULE A, B, C

(II) VERIFIQUE O SEU RESULTADO.

C2 20/jan/2016

Mais sobre frações parciais

Pra gente aprender o que falta sobre frações parciais a gente vai ter que ficar bom em soma, multiplicação e divisão de polinômios.

Idéia principal: operações com polinômios são parecidas com operações sobre números de vários dígitos, só que sem "vai um".

Exemplo:
$(x^2+2x+3)\cdot(2x^2+5x+10)=?$

$$\begin{array}{r}
x^2+2x+3 \\
\cdot\, 2x^2+5x+10 \\
\hline
10x^2+20x+30 \\
5x^3+10x^2+15x \\
2x^4+4x^3+6x^2 \\
\hline
2x^4+9x^3+26x^2+35x+30
\end{array}$$

Eu gosto de usar uma notação (não-padrão) pra visualizar estas operações com polinômios.

$x^2+2x+3 \equiv \boxed{1|2|3}$

$4x^2 + 5 =$
$4x^2+0x+5x^0 = \boxed{4|0|5}$
$\equiv \boxed{4|\;|5}$
$\equiv \boxed{\;|4|\;|5}$

A caixinha da direita é sempre o coeficiente do x^0.

Aí:

$$\begin{array}{r}
\boxed{1|2|3} \\
\cdot\ \boxed{2|5|10} \\
\hline
\boxed{10|20|30} \\
+\ \boxed{5|10|15} \\
+\ \boxed{2|4|6} \\
\hline
\boxed{2|9|26|35|30}
\end{array}$$

Outro exemplo:
$(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1)(x-1)=x^7-1$

$$\begin{array}{r}
\boxed{1|1|1|1|1|1|1} \\
\cdot\ \boxed{1|-1} \\
\hline
\boxed{-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1} \\
+\ \boxed{1|1|1|1|1|1|1}
\end{array}$$

Exercício:
Seja $f(x)=\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{5}{x+5}$.

Expresse $f(x)$ na forma $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^3+ex^2+fx+g}$.

Dica: comece calculando $\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|-3}$ $\left(=\boxed{1|-5|6}\right)$
e $\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|5}$
$\left(= \boxed{1|-5|6}\cdot\boxed{1|5} = \boxed{1|0|-19|30}\right)$

$$f(x)=\frac{4(x-3)(x+5)+(x-2)\cdot 1\cdot(x+5)+(x-2)(x-3)\cdot 5}{(x-2)(x-3)(x+5)}$$

$$=\frac{4\,\boxed{1|2|-15}+\boxed{1|3|-10}+5\,\boxed{1|-5|6}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

$$=\frac{\boxed{4|8|-60}+\boxed{1|3|-10}+\boxed{5|-25|30}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

$$=\frac{\boxed{10|-14|-40}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

Repare que até agora nós só vimos casos em que o grau do polinômio de cima (do numerador) era estritamente menor que o do polinômio de baixo (do denominador)...

("Funções racionais próprias")

Repare:
$$\int \frac{4}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{5}{x+5}\,dx =$$
$$4\ln|x-2|+\ln|x-3|+5\ln|x+5|+($$

E isto?
$$\int\frac{2x^2+3x+4}{x-2}\,dx=?$$

Truque: $\dfrac{2x^2+3x+4}{x-2}=\dfrac{a(x-2)^2+b(x-2}{x-2}$
$=a(x-2)+b+\dfrac{c}{x}$
$=ax-2a+b+\dfrac{c}{x}$

Aliás, é melhor fazer deste =

$$\frac{2x^2+3x+4}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+}{x-2}$$
$$=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

ERCÍCIO:

A $f(x) = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{5}{x+5}$.

PRESSE $f(x)$ NA FORMA $\frac{ax^2+bx+c}{dx^3+ex^2+fx+g}$.

DICA: COMECE CALCULANDO $\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|-3}$ $\left(= \boxed{1|-5|6}\right)$

E $\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|5}$

$\left(= \boxed{1|-5|6}\cdot\boxed{1|5} = \boxed{1|0|-19|30}\right)$

$$f(x) = \frac{4(x-3)(x+5) + (x-2)\cdot 1\cdot(x+5) + (x-2)(x-3)\cdot 5}{(x-2)(x-3)(x+5)}$$

$$= \frac{4\,\boxed{1|2|-15} + \boxed{1|3|-10} + 5\,\boxed{1|-5|6}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

$$= \frac{\boxed{4|8|-60} + \boxed{1|3|-10} + \boxed{5|-25|30}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

$$= \frac{\boxed{10|-14|-40}}{\boxed{1|0|-19|30}}$$

x^7-1

REPARE QUE ATÉ AGORA NÓS SÓ VIMOS CASOS EM QUE O GRAU DO POLINÔMIO DE CIMA (DO NUMERADOR) ERA ESTRITAMENTE MENOR QUE O DO POLINÔMIO DE BAIXO (DO DENOMINADOR)...

("FUNÇÕES RACIONAIS PRÓPRIAS")

REPARE:

$$\int \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{5}{x+5}\,dx =$$

$$4\ln|x-2| + \ln|x-3| + 5\ln|x+5| + C$$

E ISTO?

$$\int \frac{2x^2+3x+4}{x-2}\,dx = ?$$

TRUQUE:

$$\frac{2x^2+3x+4}{x-2} = \frac{a(x-2)^2+b(x-2)+c}{x-2}$$
$$= a(x-2) + b + \frac{c}{x-2}$$
$$= ax - 2a + b + \frac{c}{x-2}$$

ALIÁS, É MELHOR FAZER DESTE JEITO:

$$\frac{2x^2+3x+4}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$$
$$= ax + b + \frac{c}{x-2}.$$

COMO É QUE A GENTE OBTÉM a, b, c?

TRUQUE: DIVISÃO COM RESTO.

$$\begin{array}{r|l} \boxed{2|3|4} & \boxed{1|-2} \\ -\boxed{2|-4} & \boxed{2|7} \\ \hline \boxed{7|4} & \\ -\boxed{7|-14} & \\ \hline \boxed{18} & \end{array}$$

VAMOS VERIFICAR:

$\boxed{1|-2}\cdot\boxed{2|7} = \boxed{2|3|-14}$

$\boxed{1|-2}\cdot\boxed{2|7} + \boxed{18} = \boxed{2|3|4}$

ENTÃO: $(x-2)(2x+7)+18 = 2x^2+3x+4$

$(2x+7)(x-2)+18 = 2x^2+3x+4$

$$\frac{(2x+7)(x-2)+18}{x-2} = \frac{2x^2+3x+4}{x-2}$$
$$\shortparallel$$
$$2x+7+\frac{18}{x-2}$$

EXERCÍCIO:

$$\frac{x^4}{x^2+2x+3} = ax^2+bx+c+\frac{dx+e}{x^2+2x+3}.$$

ENCONTRE a, b, c, d, e.

PRA CASA:

$$\int \frac{x^4}{(x-2)(x+3)}\,dx = ?$$

$\boxed{\text{GA 25/JAN/2016}}$

DEVER DE CASA DA AULA PASSADA:

$$\int \frac{x^4}{(x-2)(x+3)}\,dx = ?$$

$$\begin{array}{c} x^4 \\ \shortparallel \\ \boxed{1|0|0|0|0} \\ \vdots \\ \hline \boxed{-13|42} \end{array} \qquad \begin{array}{|c} (x-2)(x+3) \\ \shortparallel \\ \boxed{1|1|-6} \\ \hline \boxed{1|-1|7} \end{array}$$

$$x^4 = (x-2)(x+3)(x^2-x+7) + (-13x+42)$$

$$\frac{x^4}{(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)(x^2-x+7)+(-13x+42)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}(x^2-x+7)}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}} + \frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)}$$

$$= x^2-x+7 + \frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

PRA CASA:
TREINE ESTES MÉTODOS BEM -
VOCÊ VAI PRECISAR SER
CAPAZ DE RESOLVER ESTAS
COISAS RÁPIDO!

AULA QUE VEM:

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^m (\cos\theta)^n\,d\theta$$

$$\int x^n e^x\,dx$$

$$\int (\operatorname{sen}\theta)\, e^x\,dx$$

$$\int (\cos\theta)\, e^x\,dx$$

$\vdots$

ETC.

C2 27/JAN/2016

HOJE:

$\int (\cos\theta)^m (\operatorname{sen}\theta)^n \, d\theta$,

$\int x^n e^x \, dx$,

$\int \cos x \, e^x \, dx$,

ETC... E UMA INTRODUÇÃO A COMO INTEGRAR USANDO TABELAS DE INTEGRAIS.

QUANDO OS EXPOENTES DO C E DO S SÃO AMBOS ÍMPARES DÁ PRA USAR TANTO $d\theta = \frac{ds}{c}$ QUANTO $d\theta = -\frac{dc}{s}$ ...

QUANDO SÓ UM DOS DOIS É ÍMPAR SÓ UM DOS DOS MÉTODOS VAI FUNCIONAR, E QUANDO NENHUM DOS DOIS EXPOENTES É ÍMPAR A GENTE VAI PRECISAR DE OUTROS MÉTODOS.

CONVENÇÃO (NÃO-PADRÃO):

$c = \cos\theta$,

$s = \operatorname{sen}\theta$.

$\int c^3 s^5 \, d\theta = ?$

LEMBRE QUE:

$\frac{d \operatorname{sen}\theta}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = c, \quad ds = c\,d\theta, \quad d\theta = \frac{ds}{c}$

$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{dc}{d\theta} = -s, \quad dc = -s\,d\theta, \quad d\theta = -\frac{dc}{s}$

$$\begin{aligned}
\int c^3 s^5 \, d\theta &= \int c^3 s^5 \frac{ds}{c} \\
&= \int c^2 s^5 \, ds \\
&= \int (1-s^2) s^5 \, ds \\
&= \int s^5 - s^7 \, ds \\
&= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} + C \\
&= \frac{(\operatorname{sen}\theta)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen}\theta)^8}{8} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int c^3 s^5 \, d\theta &= \int c^3 s^5 \left(-\frac{dc}{s}\right) \\
&= -\int c^3 s^4 \, dc \\
&= -\int c^3 (1-c^2)^2 \, dc \\
&= -\int c^3 (1-2c^2+c^4) \, dc \\
&= -\int c^3 - 2c^5 + c^7 \, dc \\
&= -\frac{c^4}{4} + 2\frac{c^6}{6} - \frac{c^8}{8} + C \\
&= -\frac{(\cos\theta)^4}{4} + 2\frac{(\cos\theta)^6}{6} - \frac{(\cos\theta)^8}{8} + C
\end{aligned}$$

$s^2 = 1 - c^2$

$s^4 = (1-c^2)^2$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$f'(x)g(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - f(x)g'(x)$

$\int f'(x)g(x)\,dx = \int \left(\frac{d}{dx} f(x)g(x)\right) dx - \int f(x)g'(x)\,dx$

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \quad (+C)$

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (+C)$

EM $\int x^n e^x \, dx$ O x^n É "FÁCIL DE DERIVAR" E O e^x É "FÁCIL DE INTEGRAR"...

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx &= \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx \\
&= xe^x - \int e^x \, dx \\
&= xe^x - e^x + C
\end{aligned}$$

IDÉIA: $\int x e^x \, dx$ É "MAIS COMPLICADA" QUE $\int e^x \, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx &= ? \\
&= \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C_1) \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C_1 \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C_2
\end{aligned}$$

(ONDE $C_2 = -2C_1$)

OBS:

$\int f(x)\,dx = F(x$

$\int g(x)\,dx = G(x$

$\int f(x) + g(x)\,d$

$\int \underbrace{x^3}_{f} \underbrace{e^x}_{g'}$

A GENTE

OU, MELHO

UMA INT

"REDUÇÕES

NECESSÁR

EXPLÍCITA

$\int x e^x$

$\int x^2 e^x$

$\int x^3 e^x$

EM AL

COMO

$\int x$

RESP: $\int x$

$\int$

$\int$

$x)$

$'(x)$

$- \int f(x) g'(x) dx$

$f(x) g'(x) dx \ (+C)$

$\int f'(x) g(x) dx \ (+C)$

"FÁCIL DE DERIVAR"

"FÁCIL DE INTEGRAR"...

$\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx$

$x e^x - \int e^x dx$

$x e^x - e^x + C$

x é "mais complicada"

?

$\underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx$

$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

$= x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x + C_1)$

$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x - 2C_1$

$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C_2$

(onde $C_2 = -2C_1$)

OBS:

$\int f(x) dx = F(x) + C_1$

$\int g(x) dx = G(x) + C_2$

$\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$

$= F(x) + G(x) + C_3$

$\int \underbrace{x^3}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = x^3 e^x - \int \underbrace{3x^2}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx$

$= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$

A gente pode "resolver" (entre aspas) ou, melhor, mostrar como se resolve uma integral mostrando as "reduções" (a integrais mais simples)" necessárias pra uma solução explícita completa...

$\int x e^x dx = x e^x - e^x \ (+C)$ (1)

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x \ e^x dx$ (2)

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$ (3)

Em algumas situações uma resposta como esta vai ser aceitável:

$\int x^3 e^x dx = ?$

Resp: $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$, onde

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$ e

$\int x e^x dx = x e^x - e^x$.

IMPORTANTE!!!

Integração por partes com truques

$\int \underbrace{\cos x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{\cos x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{-\operatorname{sen} x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g'} dx$

$\int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{\cos x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx$

Mas se combinamos as duas

(abreviação: $c = \cos x$, $s = \operatorname{sen} x$)

$\int c e^x dx = c e^x + \int s e^x dx$

$= c e^x + s e^x - \int c e^x dx$

$2 \int c e^x dx = c e^x + s e^x$ (4)

$\int c e^x dx = \frac{c e^x + s e^x}{2}$

Exercícios: $\int \operatorname{sen} x \ e^x dx = ?$ (a)

$\int s e^x dx = ?$ $= \frac{s e^x - c e^x}{2}$

(b)

$\frac{d}{dx} \frac{c e^x + s e^x}{2} = ?$

Tabelas de integrais

Dê uma olhada nas tabelas do final do Thomas, nos itens 102 a 108...

Eles listam fórmulas mais gerais que as que obtemos, com constantes a, b, etc...

Vamos chamar uma fórmula como as nossas (1), (2), (3), (4), que não têm estas constantes, de fórmula "normalizada", e as que têm as constantes de "não-normalizadas" ou "(fórmulas) gerais".

$\boxed{\text{C2 27/JAN/2016}}$

HOJE:

$\int (\cos\theta)^m (\text{sen}\,\theta)^n \, d\theta$,

$\int x^n e^x \, dx$,

$\int \cos x \, e^x \, dx$,

ETC... E UMA INTRODUÇÃO A COMO INTEGRAR USANDO <u>TABELAS DE INTEGRAIS.</u>

ESSES EXERCÍCIOS SÃO PRA VOCÊ COMEÇAR A VER COMO A GENTE PODE INTEGRAR EXPRESSÕES "NÃO-NORMALIZADAS" A PARTIR DAS "NORMALIZADAS".

USE A DICA DO RETÂNGULO QUE EU MARQUEI COMO "IMPORTANTE" AGORA HÁ POUCO!!!

$$\int e^{ax} dx = \int e^u \tfrac{1}{a} du \qquad \begin{pmatrix} u = ax \\ du = a\,dx \\ dx = \tfrac{1}{a} du \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{a} e^u$$

$$= \tfrac{1}{a} e^{ax} \qquad (5)$$

$$\int e^{ax+b} dx = \int e^{ax} e^b dx$$

$$= e^b \int e^{ax} dx$$

$$= e^b \tfrac{1}{a} e^{ax} \qquad (6)$$

$$\int (ax+b) e^{cx+d} dx = \int ax e^{cx+d} dx + b \int e^{cx+d} dx$$

EXERCÍCIOS:

(a) $\int x^2 e^{ax+b} dx = ?$

(b) $\int \cos ax \, e^x \, dx = ?$

C2 1º/FEV/2016

NA AULA PASSADA A GENTE COMEÇOU A VER COMO USAR TABELAS DE INTEGRAIS, E COMO FAZER AS NOSSAS PRÓPRIAS...

MUITAS FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO IMPORTANTES ENVOLVEM COISAS COM

$\sqrt{1-x^2}$,

$\sqrt{1+x^2}$, OU

$\sqrt{x^2-1}$, OU

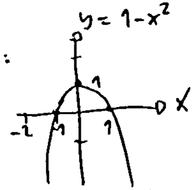
AS VERSÕES "NÃO-NORMALIZADAS" DESTAS FÓRMULAS.

O TRUQUE PRA RESOLVÊ-LAS É A SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

(OBS: UM MONTE DE INTEGRAIS QUE APARECEM EM FÍSICA PRECISAM DE S.T. ...)

VAMOS COMEÇAR COM O CASO EM QUE A "PARTE MALVADA" DO INTEGRANDO TEM $\sqrt{1-x^2}$, E QUEREMOS NOS LIVRAR DISTO.

REPARE:



$1-x^2 \geq 0$ SE E SÓ SE $x \in [-1,1]$...

ENTÃO ALGO COMO

$$\int_{x=0}^{x=4} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

É RUIM...

O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO TEM QUE ESTAR CONTIDO EM $[-1,1]$...,

$$\int_{x=-1/2}^{x=1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

É OK.

IDÉIA SUPER IMPORTANTE:
SEN $\theta \in [-1,1]$,
COS $\theta \in [-1,1]$,

ABREVIAÇÃO:
$s = \operatorname{sen}\theta$,
$c = \cos\theta$.

$$\int_{x=-1/2}^{x=1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{s=-1/2}^{s=1} s^3\sqrt{1-s^2}\,ds = \int_{s=-1/2}^{s=1} s^3 c\,ds$$

... E A GENTE JÁ TEM TÉCNICAS PRA INTEGRAR $s^n c^m$...

$$\frac{ds}{d\theta} = c \Rightarrow ds = c\,d\theta$$

$$\int s^3 c\,ds = \int s^3 c\cdot c\,d\theta = \int s^3 c^2\,d\theta = \int s^3(1-s^2)\,d\theta$$

ETC...

A IDÉIA POR TRÁS DAS TABELAS DE INTEGRAÇÃO É REDUZIR INTEGRAIS A COISAS QUE A GENTE JÁ VIU ANTES...

TRUQUE:

LEMBRE:

$$\int e^{4x+5}\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{4}\,du \qquad \left(\begin{array}{l} u=4x \\ du=4 \\ dx= \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{4x+5} + C$$

VAMOS PREPARAR AS "INSTRUÇÕES DE SUBSTITUIÇÃO" PARA AS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

CONVENÇÕES:
$s = \operatorname{sen}\theta$,
$c = \cos\theta$,
$t = \tan\theta \; \left(= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$
$z = \sec\theta \; \left(= \frac{1}{\cos\theta}\right)$,

E PRA DEIXAR AS COISAS MAIS CLARAS A GENTE VAI COMEÇAR SEMPRE "JÁ" COM AS LETRAS CERTAS"...

OBS: $c^2+s^2=1$
$\sqrt{1-c^2}=s$
$\sqrt{1-s^2}=c$

$t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{1-c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$

$t^2 = z^2-1$ $\quad$ $z^2 = 1+t^2$
$t = \sqrt{z^2-1}$ $\quad$ $z = \sqrt{1+t^2}$

$$= \int_{s=-1/2}^{s=1} s^3\sqrt{1-s^2}\,ds$$

$$= \int_{s=-1/2}^{s=1} s^3 c\,ds$$

A GENTE JÁ TEM ...NICAS PRA INTEGRAR

$\ldots c^m \ldots$

$$\frac{\ldots}{\theta} = c \Rightarrow ds = c\,d\theta$$

$$\int s^3 c\,ds = \int s^3 c\cdot c\,d\theta$$
$$= \int s^3 c^2\,d\theta$$
$$= \int s^3(1-s^2)\,d\theta$$

ETC...

A IDÉIA POR TRÁS DAS TABELAS DE INTEGRAÇÃO É REDUZIR INTEGRAIS A COISAS QUE A GENTE JÁ VIU ANTES...

TRUQUE:

LEMBRE:

$$\int e^{4x+5}\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{4}\,du \qquad \begin{pmatrix} u = 4x+5 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}du \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{4}e^u + C$$
$$= \frac{1}{4}e^{4x+5} + C$$

VAMOS PREPARAR AS "INSTRUÇÕES DE SUBSTITUIÇÃO" PARA AS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

CONVENÇÕES:

$s = \operatorname{sen}\theta$,

$c = \cos\theta$,

$t = \tan\theta \ \left(= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$

$z = \sec\theta \ \left(= \frac{1}{\cos\theta}\right)$,

E PRA DEIXAR AS COISAS MAIS CLARAS A GENTE VAI COMEÇAR SEMPRE "JÁ COM AS LETRAS CERTAS"...

OBS: $c^2 + s^2 = 1$

$\sqrt{1-c^2} = s$

$\sqrt{1-s^2} = c$

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{1-c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} - 1 = z^2 - 1$$

$t^2 = z^2 - 1 \qquad z^2 = 1 + t^2$

$t = \sqrt{z^2-1} \qquad z = \sqrt{1+t^2}$

PRA $\sqrt{1-x^2}$,

USE $\sqrt{1-s^2}$ $(=c)$ OU $\sqrt{1-c^2}$ $(=s)$

PRA $\sqrt{1+x^2}$

USE $\sqrt{1+t^2}$ $(=z)$;

PRA $\sqrt{x^2-1}$

USE $\sqrt{z^2-1}$ $(=t)$...

VAMOS FICAR SÓ NO CASO $\sqrt{1-s^2} = c$ (OU $\sqrt{1-c^2} = s$) ATÉ A GENTE TER PRÁTICA.

EXEMPLO (HERNANDEZ, P. 60, EXERC 1):

OBS: ...VI O s É ... VARIÁVEL,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \qquad \begin{pmatrix} x = s, \\ dx = ds \end{pmatrix}$$
$$= \int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,c\,d\theta \qquad \left.\right\} \begin{matrix} \text{AQUI} \\ s = \operatorname{sen}\theta, \\ c = \cos\theta \end{matrix}$$
$$= \int \frac{s^3}{c}\,c\,d\theta$$
$$= \int s^3\,d\theta \qquad \begin{pmatrix} dc = s\,d\theta \\ d\theta = \frac{1}{s}dc \end{pmatrix}$$

$dc = s\,d\theta$

$$= \int s^2\,dc$$
$$= \int (1-c^2)\,dc$$

AQUI O c É UMA VARIÁVEL

$\boxed{\text{C2 1º/FEV/2016}}$

$$\int (1-c^2)\,dc = c - \frac{c^3}{3} \quad (+C)$$
$$= \cos\theta - \frac{(\cos\theta)^3}{3}$$

E AGORA?

$$\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,c\,d\theta$$
$$= \int \frac{s^3}{c}\,c\,d\theta$$
$$= \int s^3\,d\theta$$
$$= \int s^2\,dc$$
$$= \int (1-c^2)\,dc$$
$$= c - \frac{c^3}{3} \quad (+C)$$

$$\int_{s=\frac{1}{2}}^{s=6} \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = ?$$

$$\int_{s=0}^{s=1} \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = ?$$

A GENTE MUDOU DE VARIÁVEL DUAS VEZES...

ANTES DE RESOLVER ISTO VAMOS APRENDER A "NORMALIZAR" INTEGRAIS PARECIDAS COM ESTA.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = ?$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{4}\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$
$$= 2\,\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \ldots$$

VAMOS FAZER A SUBSTITUIÇÃO $s = \frac{x}{2}$.

EXERCÍCIO:
REDUZA $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ A ALGUMA EXPRESSÃO COM $\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$ ...

TRUQUE: $s = \frac{x}{2}$;
VAMOS FINGIR QUE SABEMOS $\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$.

SOLUÇÃO...

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(2s)^3}{\sqrt{4-(2s)^2}}\,2ds \quad \left(\begin{array}{l} s = x/2 \\ x = 2s \\ dx = 2ds \end{array}\right)$$
$$= \int \frac{8s^3}{\sqrt{4-4s^2}}\,2ds$$
$$= \int \frac{16s^3}{2\sqrt{1-s^2}}\,ds$$
$$= 8\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

VAMOS AGORA SEGUIR O EXEMPLO DA P. 580 DO THOMAS.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

ANTES DE RESOLVER ISTO
VAMOS APRENDER A
"NORMALIZAR" INTEGRAIS
PARECIDAS COM ESTA.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = ?$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{4}\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = 2\,\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ldots$$

VAMOS FAZER A SUBSTITUIÇÃO
$s=\frac{x}{2}$.

EXERCÍCIO:
REDUZA
$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ A ALGUMA
EXPRESSÃO COM $\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$ ...

TRUQUE: $s=\frac{x}{2}$;
VAMOS FINGIR QUE
SABEMOS $\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$.

SOLUÇÃO...

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(2s)^3}{\sqrt{4-(2s)^2}}\,2ds \quad \begin{pmatrix} s = x/2 \\ x = 2s \\ dx = 2ds \end{pmatrix}$$

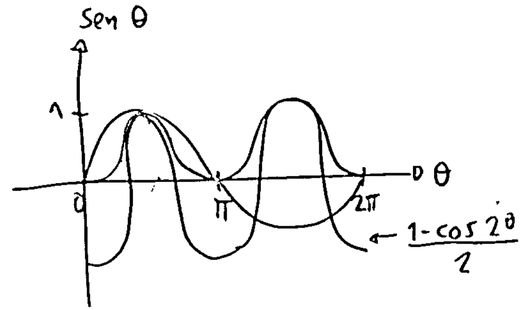
$$= \int \frac{8s^3}{\sqrt{4-4s^2}}\,2ds$$

$$= \int \frac{16s^3}{2\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$= 8\int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

VAMOS AGORA SEGUIR O
EXEMPLO DA P. 580
DO THOMAS.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$



OBS: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

VAMOS VER ESTES
TRUQUES DEPOIS!!!

C2 3/FEV/2015

MAIS UM MODO DA GENTE ENTENDER SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA...

LEMBRE QUE A REGRA DA SUBSTITUIÇÃO EM INTEGRAIS INDEFINIDAS É UMA ABREVIAÇÃO, QUE EXIGE QUE A GENTE ANOTE ENTRE PARÊNTESES ALGUNS DETALHES...

ACREDITO (OBS: EU LEVEI ANOS PRA ENTENDER SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA DIREITO, E NESTE TEMPO MUDEI MEU MODO DE ENTENDÊ-LA VÁRIAS VEZES...) QUE SE A GENTE VOLTA PRA COISAS MAIS ELEMENTARES — SUBSTITUIÇÃO É CONSEQUÊNCIA DO TFC — TUDO SE ESCLARECE.

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (\star)$$
$$\parallel$$
$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$f(s)\Big|_{s=\text{sen}\,\alpha}^{s=\text{sen}\,\beta} = \int_{s=\text{sen}\,\alpha}^{s=\text{sen}\,\beta} f'(s)\,ds \qquad (\star\star)$$
$$\parallel$$
$$f(\text{sen}\,\theta)\Big|_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f'(\text{sen}\,\theta)\underbrace{\text{sen}'\,\theta}_{\cos\theta}\,d\theta$$

EXEMPLO (HERNANDEZ, P.60, EXERC 1):

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ? \qquad \int_{s=\text{sen}\,\alpha}^{s=\text{sen}\,\beta} \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \qquad \left(f'(s) = \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\right) \qquad (\star\star\star)$$

$\parallel$ (POR $\star\star$)

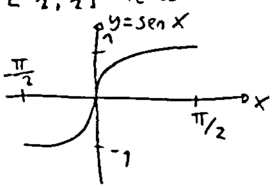
$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{(\text{sen}\,\theta)^3}{\sqrt{1-(\text{sen}\,\theta)^2}}\cos\theta\,d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{(\text{sen}\,\theta)^3}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta}\,d\theta$$

AGORA VAMOS PASSAR PARA INTEGRAIS INDEFINIDAS..

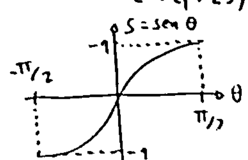
$$(\star\star') \quad \int f'(s)\,ds = \int f'(\text{sen}\,\theta)\cos\theta\,d\theta \quad \begin{pmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \theta = \text{arcsen} \\ ds = \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(\star\star\star') \quad \int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \int (\text{sen}\,\theta)^3\,d\theta \quad \begin{pmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \theta = \text{arcsen}\,s \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{pmatrix}$$

LEMBRE QUE NO INTERVALO $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ TEMOS:

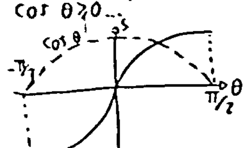


E EM $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$,



$$\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \underset{\text{arcsen}}{\overset{\text{sen}}{\rightleftarrows}} s \in [-1, 1]$$

TRUQUE EXTRA: EM $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ TEMOS $\cos\theta \geq 0$...



$$\cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

EXERCÍCIO:

$$\int_{s=-1}^{s=1/2} \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = ?$$

PRIMEIRA DICA: VIMOS QUE

$$\int s^3\,d\theta = \int \underbrace{s^2}_{1-c^2}\underbrace{(s\,d\theta)}_{-dc} = \ldots$$

REESCREVA ISTO USANDO INTEGRAL DEFINIDA E (☆...

SEGUNDA DICA: A PARTE ONDE AC... A SUBSTITUIÇÃO É...

$$\int ((\cos\theta)^2 - 1)\cos\ldots$$

$$\int c^2 - 1\,dc$$
$$\parallel$$
$$\int ((\cos\theta)^2 - 1)\ldots$$

QUEM SÃO...

$(\star)$

x

ds

$(\star\star)$

$) \underbrace{\text{sen}'\theta}_{\overset{\shortparallel}{\cos\theta}} d\theta$

rc 1):

$\left(f'(s) = \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\right)$

ds

$(\star\star\star)$

por $\star\star$)

$\cos\theta\, d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{(\text{sen}\,\theta)^3}{\cancel{\cos\theta}} \cancel{\cos\theta}\, d\theta$

$n\,\theta)^2$

AGORA VAMOS PASSAR PARA INTEGRAIS INDEFINIDAS..

$(\star\star') \quad \int f'(s)\,ds = \int f'(\text{sen}\,\theta)\cos\theta\,d\theta \quad \begin{pmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \theta = \text{arcsen}\,s \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{pmatrix}$

$(\star\star\star') \quad \int \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \int (\text{sen}\,\theta)^3\,d\theta \quad \begin{pmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \theta = \text{arcsen}\,s \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{pmatrix}$

mos

$\pi/2$

$\text{en}^2\theta$

EXERCÍCIO:

$$\int_{s=-1}^{s=1/2} \frac{s^3}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = ?$$

PRIMEIRA DICA:
VIMOS QUE

$$\int s^3\,d\theta = \int \underbrace{s^2}_{1-c^2}\underbrace{(s\,d\theta)}_{-dc} = \int c^2-1\,dc = \frac{c^3}{3} - c \;(+C).$$

REESCREVA ISTO USANDO INTEGRAL DEFINIDA E $(\star)$.

SEGUNDA DICA:
A PARTE ONDE ACONTECE
A SUBSTITUIÇÃO É

$$\int ((\cos\theta)^2-1)\cos'\theta\,d\theta = \int c^2-1\,dc$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int c^2-1\,dc \\ \shortparallel \\ \int ((\cos\theta)^2-1)\cos'\theta\,d\theta \\ \text{Quem são } f' \text{ e } g? \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int f'(u)\,du \quad (\star') \\ \shortparallel \\ \int f'(g(x))\,g'(x)\,dx \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int f'(c)\,dc \quad (\star'') \\ \shortparallel \\ \int f'(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int c^2-1\,dc \quad (\star''') \\ \shortparallel \\ \int ((\text{sen}\,\theta)^2-1)\cos\theta\,d\theta \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_{c=\cos\alpha}^{c=\cos\beta} c^2-1\,dc \quad (\star'''') \\ \shortparallel \\ \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} ((\text{sen}\,\theta)^2-1)\cos\theta\,d\theta \end{array}}$$

FAZENDO
$f'(c) = c^2-1$
$g(\theta) = \text{sen}\,\theta$
$g'(\theta) = \cos\theta$
TEMOS...

PRA CASA...

ACHO FIZ ALGUM ERRO DE CONTA EM ALGUM LUGAR NESSAS PASSAGENS ENTRE INTEGRAL INDEFINIDA COM NOTAÇÃO ABREVIADA E COISAS COMO $(\star)$ E $(\star\star)$... VERIFIQUE & CONSERTE!

C2 15/FEV/2016

HOJE A GENTE VAI FAZER UMA PAUSA NA MATÉRIA DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA PRA VER OUTRA COISA... DEPOIS A GENTE VOLTA.

SÉRIE DE TAYLOR

DIGAMOS QUE A GENTE CONHECE $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$

$$\underset{f^{(0)}(0)}{\parallel} \quad \underset{f^{(1)}(0)}{\parallel} \quad \underset{f^{(2)}(0)}{\parallel}$$

FATO:

$$f(x) = \lim_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (\star)$$

(ISTO VALE QUASE SEMPRE)

FATO 2:
QUANDO A FUNÇÃO f É UM POLINÔMIO AS DERIVADAS DELA SÃO TODAS ZERO A PARTIR DE UM CERTO PONTO, E $(\star)$ DÁ RESULTADOS EXATOS... VAMOS USAR ISTO PRA ENTENDER $(\star)$.

EXEMPLO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + bx + cx^2. & f^{(0)}(0) &= f(0) = a \\
f'(x) &= \quad b + 2cx & f^{(1)}(0) &= f'(0) = b \\
f''(x) &= \quad 2c & f^{(2)}(0) &= f''(0) = 2c \\
f'''(x) &= 0 & f^{(3)}(0) &= f'''(0) = 0 \\
f''''(x) &= 0 & f^{(4)}(0) &= f''''(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 \qquad = a$$

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 \qquad = a + bx$$

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 = a + bx + \frac{2c}{2} x^2$$

$$= a + bx + cx^2$$

SE f É UM POLINÔMIO,

$$f(x) = \lim_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{f \text{ TRUNCADO, I.E., SÓ COM OS TERMOS ATÉ } x^n.}$$

A SÉRIE DE TAYLOR NOS PERMITE CALCULAR APROXIMAÇÕES PRA e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, ...

$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
e^{ax}	ae^{ax}	a^2e^{ax}	a^3e^{ax}	a^4e^{ax}	a^5e^{ax}	a^6e^{ax}
$\operatorname{sen} ax$						

A GENTE DEFINIU e^x EM CÁLCULO 1 COMO A FUNÇÃO QUE OBEDECE $\frac{d}{dx} e^x =$ [illegible]
E $e^0 = 1$...

O $(\star)$ COM $f(x) = e^x$ DÁ:

$$e^x = \lim_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k}$$

$$\begin{aligned}
n=0 &\Rightarrow 1 \\
n=1 &\Rightarrow 1 + x \\
n=2 &\Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
n=3 &\Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \\
n=4 &\Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

E SE A GENTE DEF

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \;?$$

AÍ COISAS COMO e^{2+} FAZEM SENTIDO...

LEMBRANDO:

$(a+bi) + (c+di) = ($

$(a+bi) \cdot (c+di) = a$

$= (a$

EXERCÍCIOS:

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3!} +$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2}{2} x^2 + \frac{i}{3}$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2} x^2 - \frac{i}{3}$$

$$= (1 \quad - \frac{1}{2} x^2 \quad + \frac{1}{4!} x^4 \quad -$$

$$+ i(x \quad - \frac{1}{3!} x^3 \quad + \frac{1}{5!} x^5$$

$= a$

$= a + bx$

$\ldots^{)}(0)/\ldots! \, x^2 = a + bx + \frac{2c}{\ldots} x^2$

$= a + bx + cx^2$

	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
	e^x	e^x
	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
	a^5e^{ax}	a^6e^{ax}

A GENTE DEFINIU e^x EM CÁLCULO 1 COMO A FUNÇÃO QUE OBEDECE $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ E $e^0 = 1$...

O (☆) COM $f(x) = e^x$ DÁ:

$$e^x = \lim_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k}$$

$n=0 \Rightarrow 1$

$n=1 \Rightarrow 1 + x$

$n=2 \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$n=3 \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$

$n=4 \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

E SE A GENTE <u>DEFINIR</u>

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \ ? \qquad (☆☆)$$

AÍ COISAS COMO e^{2+3i} FAZEM SENTIDO...

LEMBRANDO:

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$

EXERCÍCIOS:

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3!} + \frac{i^4}{4!} + \frac{i^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2}{2}x^2 + \frac{i^3}{3!}x^3 + \frac{i^4}{4!}x^4 + \ldots$$
$$= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \ldots \\ +i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots\right) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \cos x \\ + i \operatorname{sen} x \end{matrix}$$

EXERCÍCIO:

(a) O (☆) COM $f(x) = \operatorname{sen} x$ DÁ: ...

(b) O (☆) COM $f(x) = \cos x$ DÁ: ...

(a) $$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{\operatorname{sen}^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{\operatorname{sen}^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\operatorname{sen}^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$= \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

(b) $$\cos x = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

... DAÍ: $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$ (☆☆☆)

EXERCÍCIO:

CALCULE (USANDO (☆☆☆)):

$e^0 =$

$e^{i\frac{\pi}{2}} =$

$e^{i\pi} =$

$e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$e^{i \cdot 2\pi} =$

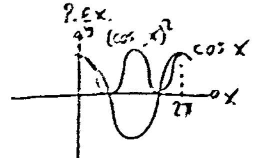
A FÓRMULA (☆☆☆) VAI TER VÁRIAS UTILIDADES.

(NOTAÇÃO: $E = e^{ix}$... DAÍ $e^{-ix} = (e^{ix})^{-1} = E^{-1}$, $e^{2ix} = E^2$, ETC...)

- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{E + E^{-1}}{2}$
- $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{E - E^{-1}}{2i}$
- $\cos 2x = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \frac{E^2 + E^{-2}}{2}$

... DAÍ A GENTE CONSEGUE MONTES DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS, P.EX.

$$(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$



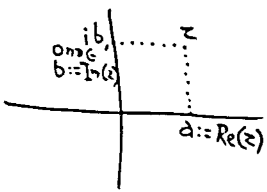
$\boxed{\text{C2 17/FEV/2016}}$

NO FINAL DA AULA PASSADA A GENTE VIU QUE $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

E QUE $e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta}$
$= e^a(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$...

E A GENTE LEMBROU TAMBÉM QUE $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$,
$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad-bc)$...

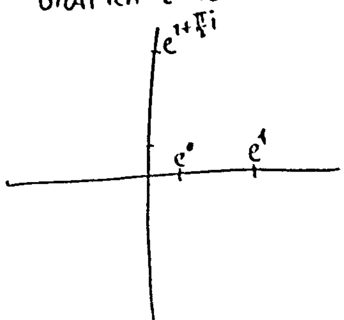
LEMBRE QUE $\mathbb{C}$ É O <u>PLANO</u> COMPLEXO, E QUE CADA $z \in \mathbb{C}$ PODE SER SEPARADO EM "PARTE REAL" E "PARTE IMAGINÁRIA" DE UM ÚNICO JEITO...



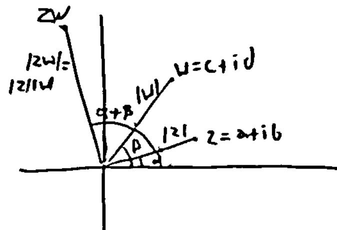
EXERCÍCIO:
COMPLETE:

$e^{0i} =$ $\qquad$ $e^{1+0i} =$
$e^{\frac{\pi}{2}i} =$ $\qquad$ $e^{1+\frac{\pi}{2}i} =$
$e^{\pi i} =$ $\qquad$ $e^{1+\pi i} =$
$e^{\frac{3\pi}{2}i} =$ $\qquad$ $e^{1+\frac{3\pi}{2}i} =$
$e^{2\pi i} =$ $\qquad$ $e^{1+2\pi i} =$

E REPRESENTE GRAFICAMENTE...

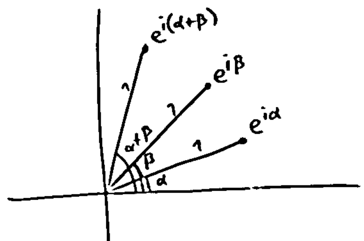


OUTROS FATOS IMPORTANTES SOBRE COMPLEXOS:



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
$|w| = \sqrt{c^2+d^2}$

EM PARTICULAR,



$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta}$
$= e^{i(\alpha+\beta)}$

A GENTE PODE USAR COMPLEXOS PRA DEDUZIR COISAS SOBRE SOMAS DE ÂNGULOS...

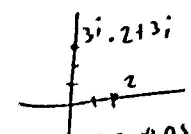
TEM UM MONTE DE FÓRMULAS - AS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DA P.47 DO LIVRO, QUE A GENTE PODE DEDUZIR OU POR GEOMETRIA BÁSICA OU POR OPERAÇÕES COM COMPLEXOS...

EXEMPLO:

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$
$e^{i\beta} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$
$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$
$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$
$= (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta +$
$= (\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}_{\cos(\alpha+\beta)})$

EU TOU CORRENDO DE PROPÓSITO! PENSE NESTAS COISAS EM CASA!

$e^2 =$
$e^{3i} =$
$e^{2+3i} =$



NAS FÓRMULAS AN
E EM MUITAS OUTRA
USAR - MUITA CO
<u>IMPLICITAMENTE</u> RE

EM $e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

IR

P. 47

EXEMPLO:

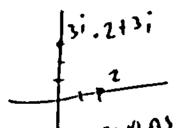
$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$$
$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$$
$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)$$
$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$
$$= (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$$
$$= \underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + \underbrace{(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha)}_{\text{sen}(\alpha+\beta)}i$$

EU TOU CORRENDO DE PROPÓSITO! PENSE NESTAS COISAS EM CASA!

$e^2 =$ — 2: REAL

$e^{3i} =$ — 3i: IMAGINÁRIO PURO

$e^{2+3i} =$ — 2+3i: COMPLEXO, NEM REAL NEM IM. PURO



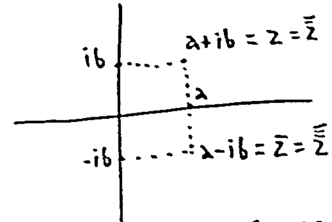
NAS FÓRMULAS ANTERIORES — E EM MUITAS OUTRAS QUE VOU USAR — MUITA COISA É IMPLICITAMENTE REAL...

EM $e^{i\alpha}e^{i\beta}$ α É REAL, β É REAL...

VOLTANDO...

DEF: O CONJUGADO DE z, $\bar{z}$, É:

$$\overline{(a+ib)} = (a-ib)$$



E A GENTE PODE EXTRAIR AS PARTES REAIS E IMAGINÁRIAS DE z USANDO CONJUGADOS...

$$(a+ib) + \overline{(a+ib)} =$$
$$(a+ib) + (a-ib) =$$
$$2a =$$
$$2\,\text{Re}(a+ib)\ldots$$

DAÍ: $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ ...

E $(a+ib) - \overline{(a+ib)} =$

$$(\cancel{a}+ib) - (\cancel{a}-ib) =$$
$$2ib =$$
$$2\,\text{Im}(a+ib)\ldots$$

VAMOS VOLTAR PR...

MENOS GERAL. ...

COMEÇA COM "ID...

TRIGONOMÉTRICAS" ...

DELAS RELACION...

$\cos\theta$, s...

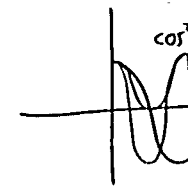
$\cos 2\theta$, s...

$\cos 3\theta$, ...

TEM UMA Q...

JÁ VIU (EU...

GRÁFICO...)



$\cos^2\theta =$

AGORA VAMO...

PRA DEDUZIR...

A PARTIR DE...

$e^{i\theta} = \cos$ ...

VOU USAR ...

$C = \cos\theta$,

$S = \text{sen}\,\theta$,

$E = e^{i\theta}$.

$E = C + iS$ ...

$C = \text{Re}(E)$ ...

$S = \text{Im}(E)$ ...

$\bar{E} = \underbrace{\cos\theta}_{\cos -\theta}$ - ...

$\ldots n\,\alpha$

$\ldots n\,\beta$

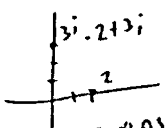
$\ldots + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$

$\ldots i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$

$\underbrace{\ldots s\,\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + \underbrace{(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha)}_{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\,i$

...ENDO DE
...PENSE
...AS EM

$e^2 =$ | 2: REAL
$e^{3i} =$ | 3i: IMAGINÁRIO PURO
$e^{2+3i} =$ | 2+3i: COMPLEXO, NEM REAL NEM IM. PURO



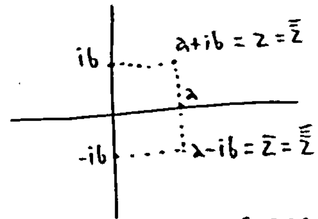
NAS FÓRMULAS ANTERIORES — E EM MUITAS OUTRAS QUE VOU USAR — MUITA COISA É IMPLICITAMENTE REAL...

Em $e^{i\alpha}e^{i\beta}$ α É REAL, β É REAL...

VOLTANDO...

DEF: O CONJUGADO DE z, $\bar{z}$, É:

$$\overline{(a+ib)} = (a-ib)$$



E A GENTE PODE EXTRAIR AS PARTES REAIS E IMAGINÁRIAS DE z USANDO CONJUGADOS...

$$(a+ib) + \overline{(a+ib)} =$$
$$(a+\cancel{ib}) + (a-\cancel{ib}) =$$
$$2a =$$
$$2\,\mathrm{Re}(a+ib)\ldots$$

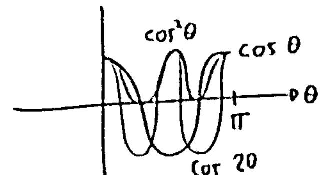
DAÍ: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}\ldots$

E $(a+ib) - \overline{(a+ib)} =$
$$(\cancel{a}+ib) - (\cancel{a}-ib) =$$
$$2ib =$$
$$2\,\mathrm{Im}(a+ib)\ldots$$

VAMOS VOLTAR PRA ALGO BEM MENOS GERAL. A "AULA 6" COMEÇA COM "IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS", E AS PRINCIPAIS DELAS RELACIONAM

$\cos\theta$, $\mathrm{sen}\,\theta$,
$\cos 2\theta$, $\mathrm{sen}\,2\theta$,
$\cos 3\theta$, $\mathrm{sen}\,3\theta$, ...

TEM UMA QUE A GENTE JÁ VIU (EU SÓ MOSTREI O GRÁFICO...):

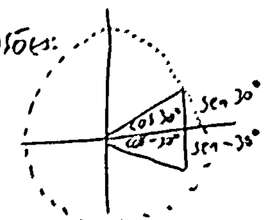


$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

AGORA VAMOS VER OS TRUQUES PRA DEDUZIR ESSAS COISAS A PARTIR DE $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\ldots$

VOU USAR ABREVIAÇÕES:

$C = \cos\theta$,
$S = \mathrm{sen}\,\theta$,
$E = e^{i\theta}$.



$$E = C + iS$$
$$C = \mathrm{Re}(E) = \frac{E+\bar{E}}{2}$$
$$S = \mathrm{Im}(E) = \frac{E-\bar{E}}{2i}$$
$$\bar{E} = \underbrace{\cos\theta}_{\cos -\theta} - i\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad -\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,-\theta$$

C2 17/FEV/2016

GRANDE TRUQUE!

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$
$\quad = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{a}e^{-a} = e^{a-a} = e^{0} = 1$

$e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$

$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

$E = C + iS$
$\quad = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{-i\theta} = E^{-1} = \bar{E}$!!!!!

EXERCÍCIO:
"TRADUZA" A FÓRMULA

$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad (*)$

PARA EXPRESSÕES SÓ COM POTÊNCIAS DE E, E TENTE DEDUZIR $(*)$..

SUGESTÃO: COMECE ESCREVENDO $\cos\theta$, $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos 2\theta$, $\mathrm{sen}\,2\theta$, etc EM FUNÇÃO DE $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $e^{2i\theta}$, $e^{-2i\theta}$,

E VÁ ESCREVENDO TODAS AS IDEIAS QUE VOCÊ TIVER - TANTO PROPRIEDADES CONHECIDAS, QUANTO PROPOSIÇÕES E HIPÓTESES, QUANTO NOVOS TEOREMAS...

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{(e^{i\theta})}}{2} = \frac{E + \bar{E}}{2} = \frac{E + E^{-1}}{2}$$

$$(\cos\theta)^2 = (\mathrm{Re}(e^{i\theta}))^2 = \left(\frac{E + \bar{E}}{2}\right)^2 = \frac{(E + E^{-1})^2}{4} = \frac{E^2 + 2E^0 + E^{-2}}{4} = \frac{E^2 + E^{-2} + 2}{4}$$

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{E^2 + E^{-2}}{4}$$

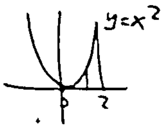
$\boxed{\text{GA 22/FEV/2016}}$

ANTES DA GENTE TERMINAR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA (E PORTANTO INTEGRAÇÃO — EXCETO QUE A GENTE VAI VER POR ALTO INTEGRAIS IMPRÓPRIAS)

VAMOS VER UMAS APLICAÇÕES "CLÁSSICAS"...

- COMPRIMENTO DE CURVAS
- VOLUME DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO
- ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

EXEMPLO:



O COMPRIMENTO DESTA CURVA ENTRE $x=0$ E $x=2$ É...

E O COMPRIMENTO ENTRE $x=0$ E $x=2$ DE $y=3$? 2; $2\sqrt{2}$

E DE $y=x$?

E DE $y=2x$?

E DE $y=f(x)=ax+b$?

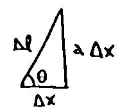
E ENTRE $x=\alpha$ E $x=\beta$?

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(f(\beta)-f(\alpha))^2} =$$

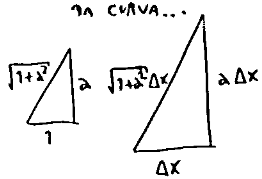
$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+((a\beta+b)-(a\alpha+b))^2} =$$

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+a^2(\beta-\alpha)^2} = \sqrt{(1+a^2)(\beta-\alpha)^2}$$

TRUQUE:



$\frac{\Delta l}{\Delta x}$ SÓ DEPENDE DE θ, OU SEJA, DA INCLINAÇÃO DA CURVA...



O "$\sqrt{1+a^2}$" É UM "AJUSTE" QUE NOS PERMITE CALCULAR A HIPOTENUSA A PARTIR DA BASE...

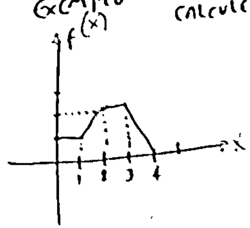
SEJA $f(x)$ UMA CURVA.

SEJA $L(x)$ UMA FUNÇÃO TAL QUE: (COMPRIMENTO CURVA $f(x)$ ENTRE $x=\alpha$ E $x=\beta$) $= L(x)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}$.

O QUE ACONTECE SE A GENTE DERIVA $L(x)$?

$(= L(1)-L(0))$

EXEMPLO:



CALCULE: $L(x)\Big|_{x=0}^{x=1} = 1$

$L(x)\Big|_{x=1}^{x=2} = \sqrt{2}$

$L(x)\Big|_{x=2}^{x=3} = 1$

$L(x)\Big|_{x=3}^{x=4} = \sqrt{5}$

AGORA DIGAMOS QUE $L(0)=0$.

ENTÃO: $L(1) = L(0) + (L(1)-L(0))$

$= 0 + L(x)\Big|_{x=0}^{x=1}$

$= 0 + 1$

$= 1$

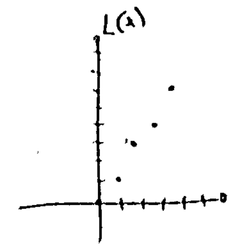
$L(2) = 1+\sqrt{2}$

$L(3) = 2+\sqrt{2}$

$L(4) = 2+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

SEJA $l(x) = L'(x)$.

FAÇA OS GRÁFICOS DE $L(x)$ E $l(x)$.



PRA CASA:

TENTE ENTENDER PELO MENOS OS CONCEITOS BÁSICOS DAS SEÇÕES 6.1, 6.2, 6.3 E 8.1 DO STEWART!

C2 24/FEV/2016

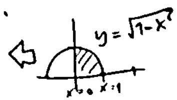
HOJE: VAMOS TERMINAR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

NO SITE TEM (NA VERDADE, VAI TER) UM LINK PRA UM CAPÍTULO DO STEWART EM QUE AS EXPLICAÇÕES ESTÃO BEM BOAS E TEM MUITOS EXERCÍCIOS.

O QUE A GENTE VAI VER DE EXTRA É A "TRADUÇÃO" ENTRE A LINGUAGEM MUITO ABREVIADA E A "COMPLETA".

O STEWART COMEÇA COM:

$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$



ÁREA $= \frac{\pi}{4}$

DEPOIS:

$$\int \sqrt{1-4x^2}\,dx = ?$$

$$\int \sqrt{9-4x^2}\,dx = ?$$

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = ?$$

TRUQUE:

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad c^2+s^2=1$

$c = \cos\theta$

$t = \tan\theta = \frac{s}{c}$

$z = \sec\theta = \frac{1}{c}$

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1+t^2$$

$$z^2 = 1+t^2$$

DAÍ, NOS INTERVALOS CERTOS:

$c = \sqrt{1-s^2}$

$s = \sqrt{1-c^2}$

$t = \sqrt{z^2-1}$

$z = \sqrt{1+t^2}$

$\frac{ds}{d\theta} = c$

$\frac{dc}{d\theta} = -s$

$\frac{dz}{d\theta} = zt$

$\frac{dt}{d\theta} = z^2$

EXERCÍCIOS (REVISÃO - STEWART, P.5):

1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = ?$

2) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ?$

SE $x = \sec\theta = z$,

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \frac{1}{\sec\theta\tan\theta} = \frac{1}{zt}$$

$$dx = dz = zt\,d\theta,$$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{z^2\sqrt{z^2-1}}\,dz = \frac{1}{zt}\,zt\,d\theta$$

A GENTE AINDA NÃO CONSEGUIU TERMINAR UM DOS OBJETIVOS DA AULA DE HOJE, QUE ERA RESOLVERMOS (1), (2), (3) DO JEITO "COM ABREVIAÇÕES" E DO JEITO "COMPLETO"...

DÊ UMA OLHADA NO SITE (AMANHÃ) E TENTE FAZER (1), (2) E (3) (DO JEITO QUE QUISER).

$\boxed{\text{C2 21/março/2016}}$

Hoje: EDOs! (introdução)

"EDO" = "equação diferencial ordinária"

(As "não-ordinárias" são as "parciais". EDP é um assunto bem mais difícil.)

Lembre que sabemos resolver coisas como

$y' = x^2e^x$,

que também podemos escrever como

$\frac{d}{dx}f(x) = x^2e^x$,

$Df = x^2e^x$,   ($f = ?$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$!!!)

etc...

A gente sabe resolver os casos em que a gente tem "Df" à esquerda do "=" e o "f" não aparece à direita do "=".

Idéia: o pessoal que inventou os modos de resolver EDOs sabia muito de álgebra linear.

Idéias principais de AL:

$M\vec{v} = \vec{w}$ $v = ?$

matriz (p.ex., 99x99), vetores (99, 99)

Linearidade:

Multiplicação por matrizes obedece:

- $M(\vec{u}+\vec{v}) = M\vec{u} + M\vec{v}$
- $M(200\vec{v}) = 200(M\vec{v})$

"pra qualquer valor de 200" - mas o 200 é um número.

$200 \in \mathbb{R}$

$\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^{99}$

$M \in \mathbb{R}^{99\times 99}$

Matrizes quadradas

Pra matrizes quadradas sabemos coisas tipo:

- comutatividade (será que $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$?)
- autovetores e autovalores

Se $\underbrace{M}_{\text{matriz}}\vec{v} = \underbrace{\lambda}_{\text{número}}\vec{v}$ então λ é um dos autovalores de M, e λ é um dos autovetores de M associados ao autovalor λ.

Algumas operações sobre funções (de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) que se comportam como matrizes quadradas...

- Multiplicar por uma constante:

$99(f+g) = (99f + 99g)$

$99(\operatorname{sen} x + x^4) = 99\operatorname{sen} x + 99x^4$

Parêntese: notação!

Se sabemos o valor de x então:

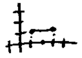
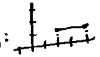
$$99(\underbrace{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x^4}_{\in\mathbb{R}}}_{\in\mathbb{R}}) = \underbrace{99\operatorname{sen} x}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{99x^4}_{\in\mathbb{R}}$$

Se não sabemos o valor de x e queremos encarar sen x como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ("$\operatorname{sen} x \in (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$") então

$$\underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}(\underbrace{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} + \underbrace{x^4}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})})}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} + \underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{x^4}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}$$

Exercício:

Vamos tentar entender isto com funções-escada...

Sejam f =  e g: 

Faça o gráfico de f(x)+g(x),
o de 2f(x),
o de 2g(x),
e o de f(x)-g(x).

Idem para: f:  e g = 

Vamos esclarecer a conexão disso com vetores...

Se $\vec{v} = (0,1,1,0,0)$

então $\vec{v}_1=0, \vec{v}_2=1, \vec{v}_3=1, \vec{v}_4=0, \vec{v}_5=0$

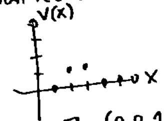
e podemos pensar que $\vec{v}$ é uma função:

$V: \{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{R}$
$\quad i \mapsto \vec{v}_i$

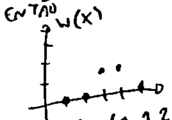
Então: $V(1) = \vec{v}_1 = 0$,
$V(2) = \vec{v}_2 = 1$,
$V(3) = \vec{v}_3 = 1$, ...

$\vec{v}_6$ = erro,
$\vec{v}_{-3}$ = erro,
$\vec{v}_{\sqrt{2}}$ = erro

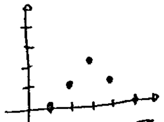
E dá pra fazer um gráfico da função V...



E se $\vec{w} = (0,0,1,1,0)$ então



E $\vec{v}+\vec{w} = (0,1,2,1,0)$, cujo gráfico é:



Quando a gente trabalha com funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a gente tem algo parecido com isso, mas com "vetores" com infinitas componentes...

Defs: (notação engraçada)

$\underbrace{(f+g)}_{\text{nome (engraçado) pra uma função de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}...}(x) = f(x)+g(x)$

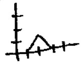
$\underbrace{(2f)}_{\text{função de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}}(x) = 2(f(x))$

Obs:
$(2f)(x) = 2(f(x))$
$= f(x)+f(x)$
$= (f+f)(x)$

A função 2f dá as mesmas respostas, tem o mesmo gráfico, [...] é "igual" à função f[...]

Além disso, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

Exercício:

Sejam f = , g[...]

Faça os gráficos de 2(f-g) - faça pr[...] os gráficos de 2f, 2[...] depois faça o gráfic[...]

h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x \mapsto 2f(x) - 2g($[...]

Idéias principais de AL:

$M\vec{v} = \vec{w}$ $\quad v = ?$

[illegible] de vetores

([illegible], (99,99) [illegible])

Linearidade:

Multiplicação por matriz obedece:

- $M(\vec{u}+\vec{v}) = M\vec{u} + M\vec{v}$
- $M(200\vec{v}) = 200(M\vec{v})$

"pra qualquer valor de 200" - mas o 200 é um número.

$200 \in \mathbb{R}$
$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{99}$
$M \in \mathbb{R}^{99 \times 99}$

[illegible]!!!)

Matrizes quadradas

Pra matrizes quadradas sabemos coisas tipo:

- Comutatividade (sem que $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$?)
- Autovetores e autovalores

Se $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$

matriz, número

então λ é um dos autovalores de M, e λ é um dos autovetores de M associados ao autovalor λ.

Algumas operações sobre funções (de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) que se comportam como matrizes quadradas...

- Multiplicar por uma constante:

$99(f+g) = (99f + 99g)$

$99(\operatorname{sen} x + x^4) = 99 \operatorname{sen} x + 99x^4$

Parêntese: notação!

Se sabemos o valor de x então:

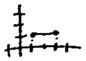
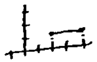
$$\underbrace{99(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x^4}_{\in\mathbb{R}})}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{99 \operatorname{sen} x}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{99x^4}_{\in\mathbb{R}}$$

Se não sabemos o valor de x e queremos encarar $\operatorname{sen} x$ como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ("$\operatorname{sen} x \in (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$") então

$$\underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}(\underbrace{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} + \underbrace{x^4}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})})}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} + \underbrace{\underbrace{99}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{x^4}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}}_{\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})}$$

Exercício:

Vamos tentar entender isto com funções-escada...

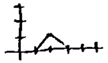
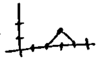
Sejam $f =$  e $g:$ 

Faça o gráfico de $f(x)+g(x)$,

o de $2f(x)$,

o de $2g(x)$,

e o de $f(x)-g(x)$.

Idem para: $f:$  e $g=$ 

Vamos esclarecer a conexão disso com vetores...

Se $\vec{v} = (0,1,1,0,0)$

então $\vec{v}_1 = 0$, $\vec{v}_2 = 1$, $\vec{v}_3 = 1$, $\vec{v}_4 = 0$, $\vec{v}_5 = 0$

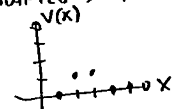
e podemos pensar que $\vec{v}$ é uma função:

$V: \{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{R}$
$\quad i \mapsto \vec{v}_i$

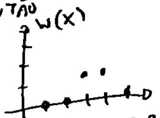
então: $V(1) = \vec{v}_1 = 0$,
$V(2) = \vec{v}_2 = 1$,
$V(3) = \vec{v}_3 = 1$, ...

$\vec{v}_6 = $ erro,
$\vec{v}_{-3} = $ erro,
$\vec{v}_{\sqrt{2}} = $ erro

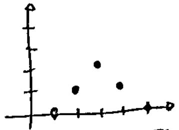
e dá pra fazer um gráfico da função V...



e se $\vec{w} = (0,0,1,1,0)$ então



e $\vec{v}+\vec{w} = (0,1,2,1,0)$, cujo gráfico é:



Quando a gente trabalha com funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a gente tem algo parecido com isso, mas com "vetores" com infinitas componentes...

Defs:

(notação engraçada)

$\underbrace{(f+g)}(x) = f(x) + g(x)$

nome (engraçado) pra uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$...

$\underbrace{(2f)}_{\text{função de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}}(x) = 2(f(x))$

Obs:

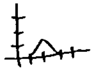
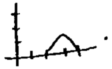
$(2f)(x) = 2(f(x))$
$\quad = f(x) + f(x)$
$\quad = (f+f)(x)$

A função $2f$ dá as mesmas respostas, i.e., tem o mesmo gráfico, i.e., é "igual" à função $f+f$.

Além disso,

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Exercício:

Sejam $f =$ , $g =$ .

Faça os gráficos de $2f-2g$ e $2(f-g)$ - faça primeiro os gráficos de $2f$, $2g$ e $f-g$ - depois faça o gráfico de

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto 2f(x) - 2g(x)$.

C2 7/MARÇO/2016

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER COMO TRATAR FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$ COMO VETORES, E ALGUMAS OPERAÇÕES COMO MATRIZES...

UMA "MATRIZ" IMPORTANTE:

ABUSO DE LINGUAGEM!

$$\underbrace{D}_{\text{"MATRIZ"}}\ \underbrace{f}_{\text{"VETOR"}} = \underbrace{f'}_{\text{"VETOR"}}$$

MINI-INTRODUÇÃO À NOTAÇÃO LAMBDA...

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ← DOMÍNIO E CONTRA-DOMÍNIO

$x \mapsto 10x+4$ ← COMPORTAMENTO

NOME

VARIÁVEL (ENTRADA)

EXPRESSÃO (SAÍDA)

$f(2+3) \rightsquigarrow f(5)$

$10(2+3)+4 \rightsquigarrow 10 \cdot 5+4$

$50+4 \rightsquigarrow 54$

$\lambda x. 10x+4$

VARIÁVEL (ENTRADA) EXPRESSÃO (SAÍDA)

$D\ e^x = e^x$

$D\ e^{4x} = 4e^{4x}$

$D\ x^3 = 3x^2$

$\underbrace{D}_{\text{"MATRIZ"}}\ \underbrace{200}_{\text{"VETOR"}} = 0$

DIGAMOS QUE QUEREMOS RESOLVER ISTO.

$(D+3)f = 0$

VAMOS COMEÇAR CHUTANDO "f"S...

$(D+3)e^x = (De^x)+(3e^x)$
$= e^x + 3e^x$
$= 4e^x$
$\neq 0$

$f := \lambda x. 10x+4$

$f(2+3) \rightsquigarrow f(5)$

$(\lambda x. 10x+4)(2+3) \rightsquigarrow (\lambda x. 10x+4)(5)$

$10(2+3)+4 \rightsquigarrow 10 \cdot 5+4$

$50+4 \rightsquigarrow 54$

$(D+3)x^2 = 2x+3x^2$
$\neq 0$

$(D+3)e^{ax} = ae^{ax}+3e^{ax}$
$= (a+3)e^{ax}$

$(D+3)e^{-3x} = 0e^{-3x}$
$= 0$

$(D+3)200e^{-3x} = 200 \cdot 0$
$= 0$

IDÉIA:

$M(200\vec{v}) = 200(M\vec{v})$

PRA QUE QUE A GENTE QUER ISTO?

$(D+3)f = 0$

$\shortparallel$

$f'+3f$

EDO: $f'+3f=0$ (☆)

ENCONTRAMOS PRIMEIRO UMA SOLUÇÃO PRA ELA: $f=e^{-3x}$

DEPOIS VIMOS QUE TODAS AS FUNÇÕES DA FORMA $K \cdot e^{-3x}$ ERAM SOLUÇÕES DE (☆)...

EXERCÍCIOS: ENCONTRE SOLUÇÕES DE (☆) TAIS QUE:

a) $f(0)=20$,
b) $f'(0)=4$,
c) $f(1)=2$.

DICA: $f(x)=Ke^{-3x}$.

PRÓXIMO PASSO...

$(D+a)f=0$

TEM SOLUÇÃO BÁSICA $f(x)=e^{-ax}$

E SOLUÇÃO GERAL $f(x)=Ke^{-ax}$.

$(D-2)(D+3)f=0$?

$\shortparallel$

$(D+3)(D-2)f=0$

$\shortparallel$

$(D^2+D-6)f=0$

$\shortparallel$

$f''+f'-6f=0$ (☆☆)

SE $(D+3)f=0$
ENTÃO $(D-2)\underbrace{(D+3)f}_{0}=0$

E SE $(D-2)f=0$
ENTÃO $(D+3)\underbrace{(D-2)f}_{0}=0$

SE $f=e^{-3x}$ ENTÃO
$(D+3)f=0$,
$(D-2)(D+3)f=0$,
$f''+f'-6f=0$;

SE $f=e^{2x}$ ENTÃO
$(D-2)f=0$,
$(D+3)(D-2)f=0$,
$f''+f'-6f=0$...

...CONSEGUIMOS DU
SOLUÇÕES BÁSICAS

CONSEGUIMOS $\vec{u}$
TAIS QUE $M\vec{u}$
E $M\vec{v}$
ENTÃO $M(a\vec{u}$

SOLUÇÃO GE
$f=ae^{-3x}+be$

OBS (NÃO
COM TODO
AGORA,
CONSIGA

TODAS
DE (☆)
ae^{-3x},
TODAS
DE (☆☆
ae^{-3x},
EM OUTR
$\{e^{-3x}\}$
ESPAÇO
$\{f:\mathbb{R}\to$
$\{e^{-3x}, e$
ESPAÇO
$\{f:\mathbb{R}\to$

$3x^2$

$x + 3e^{ax}$

$3)e^{ax}$

e^{-3x}

$= 200.0$

$= 0$

$200(M\vec{v})$

E A ISTO?

0

$+3f=0 \quad (\star)$

amos uma solução
o uma
: $f=e^{-3x}$
mos que todas
is da forma
ram soluções

mos: encontre
s de $(\star)$ tais que:
$20,$ c) $f(1)=2.$
$-4,$ Dica: $f(x)=ke^{-3x}$.

Próximo passo...

$(D+a)f=0$

tem solução básica

$f(x)=e^{-ax}$

e solução geral

ke^{-ax}.

$(D-2)(D+3)f=0$?

$\shortparallel$

$(D+3)(D-2)f=0$

$\shortparallel$

$(D^2+D-6)f=0$

$\shortparallel$

$f''+f'-6f=0 \quad (\star\star)$

Se $(D+3)f=0$

então $(D-2)\underbrace{(D+3)f}_{0}=0$

e se $(D-2)f=0$

então $(D+3)\underbrace{(D-2)f}_{0}=0$

Se $f=e^{-3x}$ então

$(D+3)f=0,$

$(D-2)(D+3)f=0,$

$f''+f'-6f=0$;

Se $f=e^{2x}$ então

$(D-2)f=0,$

$(D+3)(D-2)f=0,$

$f''+f'-6f=0$...

...conseguimos duas soluções básicas para $(\star\star)$...

Conseguimos $\vec{u}$ e $\vec{v}$

tais que $M\vec{u}=0$

e $M\vec{v}=0$...

então $M(a\vec{u}+b\vec{v})=0$!

Solução geral de $(\star\star)$:

$f=ae^{-3x}+be^{2x}$.

Obs (não posso prová-la com todos os detalhes agora, mas talvez você consiga acreditar):

Todas as soluções de $(\star)$ são da forma

ae^{-3x}, e

todas as soluções de $(\star\star)$ são da forma

$ae^{-3x}+be^{2x}$...

Em outros termos,

$\{e^{-3x}\}$ é uma base pro espaço de soluções

$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f'+3f=0\}$, e

$\{e^{-3x},e^{2x}\}$ é uma base pro espaço de soluções

$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f''+f'-6f=0\}$.

Exercício:

Encontre a e b tais que

$f=ae^{-3x}+be^{2x}$

obedeça

I) $f(0)=0,\ f(1)=1$

$f(0)=a+b=0 \Rightarrow b=-a$

$f(1)=ae^{-3}+be^{2}$

$=ae^{-3}-ae^{2}$

$=a(e^{-3}-e^{2})=1$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{e^{-3}-e^{2}}$

II) $f(0)=1,\ f(1)=0$

$f(0)=a+b=1 \Rightarrow b=1-a$

$f(1)=ae^{-3}+(1-a)e^{2}$

$=e^{2}+a(e^{-3}-e^{2})=0$

$\Rightarrow a(e^{-3}-e^{2})=-e^{2}$

$a=-\dfrac{e^{2}}{e^{-3}-e^{2}}$ (conferir)

III) $f(0)=99,\ f(1)=200$

(cam!)

$\boxed{\text{P1: 14/março/2016}}$

Matéria: integração.

Chegue no horário!

C2 9/MAR/2016

NA AULA PASSADA VIMOS QUE A EDO

$$(D-2)(D+3)f=0$$
$$\| $$
$$(D^2+D-6)f$$
$$\|$$
$$f''+f'-6f$$

TEM SOLUÇÕES BÁSICAS $f=e^{2x}$ E $f=e^{-3x}$...

E VOCÊ APRENDEU A GERAR TODAS AS OUTRAS SOLUÇÕES COMO COMBINAÇÕES LINEARES DAS BÁSICAS.

E NESTE CASO?

$$f''=-f \qquad (☆)$$

SABEMOS QUE $f=\operatorname{sen} x$ E $f=\cos x$ SÃO SOLUÇÕES DA (☆)...

$$f''+f=0$$
$$\|$$
$$(D^2+1)f$$
$$\|$$
$$(D+i)(D-i)f$$

EXERCÍCIOS:

a) ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE: $(D+i)f=0$
$(D-i)f=0$

b) ENCONTRE UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS SOLUÇÕES BÁSICAS ACIMA QUE DÊ $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

E NESTE CASO?

$$f''=-\tfrac{1}{4}f\ ?$$

E NESTE?

$$f''=b^2f\ ? \qquad (☆☆)$$
$$(b\in\mathbb{R})$$

$$f''-b^2f=0$$
$$\|$$
$$(D^2-b^2)f$$
$$\|$$
$$(D+ib)(D-ib)f$$

SOLUÇÕES BÁSICAS DE (☆☆):

$f_1=e^{ibx}$,

$f_2=e^{-ibx}$.

$$\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}=\cos bx = f_3$$

$$\frac{f_1-f_2}{2i}=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}=\operatorname{sen} bx = f_4$$

EM ALGUNS LIVROS / EM ALGUMAS ABORDAGENS AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA (☆☆) SÃO $\cos bx$ E $\operatorname{sen} bx$...

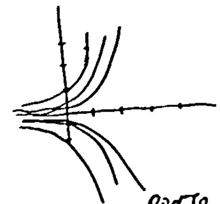
OBS: $f_1=f_3+if_4$

$f_2=$ ...

OBS:

AS SOLUÇÕES DE $(D-1)f=0$ SÃO: $f=ke^x$...

ELAS "COBREM O PLANO":



E CADA PONTO DO PLANO ESTÁ EM EXATAMENTE UMA DESTAS CURVAS (OU SEJA, $\exists! k$ ...)

NA AULA PASSADA VOCÊ RESOLVEU ALGUNS PROBLEMAS TIPO "ENCONTRE K"...

E NO FINAL DA AULA VOCÊ RESOLVEU ISTO:

ENCONTRE a E b TAIS QUE $f=ae^{-3x}+be^{2x}$ OBEDEÇA:

I) $f(0)=0,\ f(1)=1$,

II) $f(0)=1,\ f(1)=0$,

III) $f(0)=99,\ f(1)=200$.

AGORA ENCONTRE a E b TAIS QUE

$$f=a\cos 3x+b\operatorname{sen} 3x \qquad (☆☆☆)$$

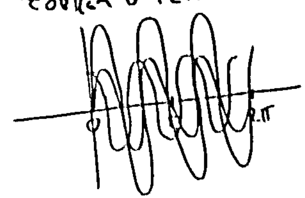
OBEDEÇA:

I) $f(0)=0,\ f'(0)=1 \Rightarrow a=0,\ b=\frac{1}{3}$

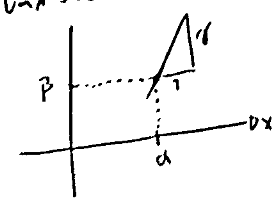
II) $f(0)=1,\ f'(0)=0, \Rightarrow a=1,\ b=0$

III) $f(0)=99,\ f'(0)=200 \Rightarrow a=99,\ b=\frac{200}{3}$

AS SOLUÇÕES DE (☆☆☆) "COBREM O PLANO MUITAS VEZES"...



MAS QUALQUER PROBLEMA DO TIPO $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=\gamma$ TEM EXATAMENTE UMA SOLUÇÃO...



E SE ... FOSSE ...

$(D-$ ...

$(D^2-$ ...

$(D$ ...

EXE...

$(D$ ...

$($ ...

E...

a)

caso?

$\frac{1}{4} f$?

te?

$^2 f$? (☆☆)

R)

$^2 f = 0$

$^2) f$

$) (D - ib) f$

ões básicas

☆☆):

ibx

$-ibx$

$= \dfrac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$

$= \cos bx \qquad = f_3$

$= \dfrac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \qquad = f_4$

$= \text{sen } bx$

Alguns livros / algumas abordagens

soluções básicas da (☆☆)

cos bx

e sen bx...

Obs: $f_1 = f_3 + i f_4$

$f_2 = \ldots$

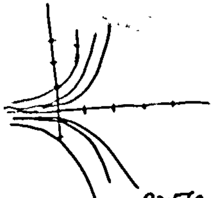
Obs:

As soluções de

$(D-1) f = 0$

são: $f = k e^x$...

Elas "cobrem o plano":



E cada ponto do plano está em exatamente uma destas curvas

(ou seja, $\exists! k \ldots$)

Na aula passada você resolveu alguns problemas tipo "encontre k"...

E no final da aula você resolveu isto:

Encontre a e b tais que $f = a e^{-3x} + b e^{2x}$

obedeça:

I) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

II) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$,

III) $f(0) = 99$, $f(1) = 200$.

Agora encontre a e b tais que

$f = a \cos 3x + b \text{ sen } 3x$ (☆☆☆)

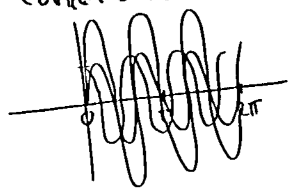
obedeça:

I) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ $\Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{3}$

II) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $\Rightarrow a = 1, b = 0$

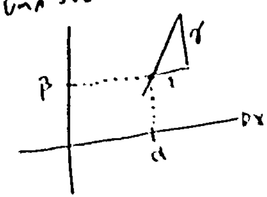
III) $f(0) = 99$, $f'(0) = 200$ $\Rightarrow a = 99, b = \frac{200}{3}$

As soluções de (☆☆☆) "cobrem o plano muitas vezes"...



Mas qualquer problema do tipo $f(\alpha) = \beta$, $f'(\alpha) = \gamma$

tem exatamente uma solução...



E se a nossa EDO fosse esta?

$a - ib = \overline{a + ib}$ ("conjugados")

$$\big(D - (a+ib)\big)\big(D - (a-ib)\big) f = 0$$

$$\Big(D^2 - \big((a+ib) + (a-ib)\big) D + (a+ib)(a-ib)\Big) f$$

$$\big(D^2 - (2a) D + (a^2 - b^2)\big) f$$

Exemplo:

$$\big(D - (2+5i)\big)\big(D - (2-5i)\big) f$$

$$(D^2 - 4D - 21) f$$

$$f'' - 4f' - 21$$

Exercícios:

a) Encontre as soluções básicas de

$(D - (2+5i)) f = 0$ e

$(D - (2-5i)) f = 0$

Resp: $f_1 = e^{(2+5i)x} = e^{2x} e^{5ix}$

$f_2 = e^{(2-5i)x} = e^{2x} e^{-5ix}$

Então: $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = e^{2x} \dfrac{(e^{5ix} + e^{-5ix})}{2}$

$= e^{2x} \cos 5x$

$\dfrac{f_1 - f_2}{2i} = e^{2x} \text{ sen } 5x$

C2 16/mar/2016

Hoje: EDOs com variáveis separáveis (introdução?)

Lembre que quando tínhamos

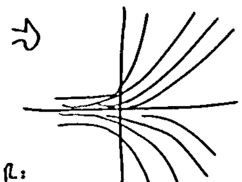
$f' - 3f = 0 \Rightarrow (D-3)f = 0$

As soluções da EDO cobriam o plano... (uma vez só).

$\Rightarrow f(x) = e^{3x}$ (sol. básica)

$\Rightarrow f(x) = ae^{3x}$

$\Rightarrow$



Variáveis separáveis

(numa ordem bem diferente do livro)

Caso geral:

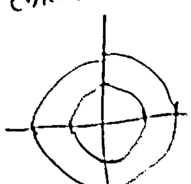
$F(x,y) = G(x) + H(y)$

Caso particular:

$F(x,y) = \underbrace{x^2}_{G(x)} + \underbrace{y^2}_{H(y)}$

Vamos tentar encontrar EDOs que tenham estas curvas de nível como soluções.

Curvas de nível:



Uma solução da EDO: $x^2+y^2=1$

$\Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

Outra solução: $\Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2}$

Outra: $\Rightarrow y = -\sqrt{4-x^2}$

$x^2+y^2=4$

$y^2 = 4-x^2$

$y = \sqrt{4-x^2}$

Obs: repare que

$f_1: [-1,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$f_2: [-1,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$

$f_3: [-2,2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{4-x^2}$

Até agora só tínhamos visto EDOs cujas soluções eram funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$...

"f_3 é solução da EDO (☆)" quer dizer: $\forall x \in (-2,2)$, $f(x)$ obedece (☆).

Seja $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ou $s: I \to \mathbb{R}$)

uma função tal que $y = s(x)$ faz com que $F(x,y)$ seja constante...

No caso particular,

$F(x,s(x)) = 4$ ⇐ constante! (☆☆)

$F(x,s(x)) = x^2 + s(x)^2$

$4 = x^2 + s(x)^2$

$s(x)^2 = 4 - x^2$

$s_1(x) = \sqrt{4-x^2}$ obedece (☆☆),

$s_2(x) = -\sqrt{4-x^2}$ também.

Como $F(x,s(x))$ é constante,

$\frac{d}{dx} F(x,s(x)) = 0$ ... (☆☆☆)

$\frac{d}{dx}\left(x^2 + s(x)^2\right) = 0$

$\|$

$2x + 2s'(x)s(x)$

$2s'(x)s(x) = -2x$

$s'(x)s(x) = -x$

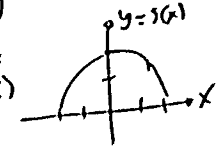
$s'(x) = -\frac{x}{s(x)}$ (4☆)

Fato: as soluções de $\frac{d}{dx}F(x,s(x)) = 0$ são exatamente as soluções de uma EDO... Qual? No caso particular, $s'(x) = -\frac{x}{s(x)}$

E no caso geral? (daqui a pouco!)

Repare:

$y = s(x)$



$y' = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\frac{y\,dy}{dx} = -x$

$y\,dy = -x\,dx$ (5☆)

Truque:

Digamos que t... uma EDO que ... pôr numa f...

$y\,dy = -x\,d$...

Generalizan...

$f(y)\,dy = g($...

Então:

$\int f(y)\,dy =$ ...

$\|$

$F(y)$

Temos:

$F(y) =$ ...

$y = F$ ...

Isto ... ex... Exc... use... ac... y... e ... a s... vo... $\frac{d}{dx}$

...ortante,

... (☆☆☆)

0

)

2x

x

(4☆)

...oluções

...$s(x)) = 0$

...mente as

...e uma EDO...

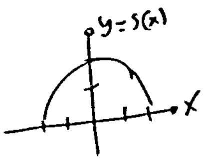
...caso particular,

$-\frac{x}{s(x)}$

...aso geral?

... pouco!)

Repare:
$y = s(x)$



$y' = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y\frac{dy}{dx} = -x$

$y\,dy = -x\,dx$ (5☆)

Truque:
Digamos que temos uma EDO que conseguimos pôr numa forma como
$y\,dy = -x\,dx$

Generalizando:
$f(y)\,dy = g(x)\,dx$

Então:
$\underbrace{\int f(y)\,dy}_{F(y)} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)}$

Temos:
$F(y) = G(x)$
$y = \underbrace{F^{-1}(G(x))}_{s(x)}$

Isto resolve a EDO!!!

Exercício:
Use a técnica acima pra resolver
$y\,dy = x\,dx$ $\left(\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\right)$
e verifique que a solução $y = s(x)$ que você obteve obedece
$\frac{d}{dx}s(x) = \frac{x}{s(x)}$.

Hipótese:
$S(x) = |x|$
$S_+(x) = x$ $\quad \frac{d}{dx}S_+(x) = 1$
$S_-(x) - x$ $\quad \frac{d}{dx}S_-(x) = -1$

$\underbrace{\frac{d}{dx}S_+(x)}_{1} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{x}{S_+(x)}}_{\frac{x}{x} = 1}$ ok!

$\underbrace{\frac{d}{dx}S_-(x)}_{-1} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{x}{S_-(x)}}_{\frac{x}{-x} = -1}$ ok!

$\underbrace{\int y\,dy}_{\frac{y^2}{2}+C_1} = \underbrace{\int x\,dx}_{\frac{x^2}{2}+C_2}$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_3$

$y^2 = x^2 + C_4$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + C_4}$

ou $y = -\sqrt{x^2 + C_4}$

Def: $S_a^+(x) = \sqrt{x^2 + a}$
$S_a^-(x) = -\sqrt{x^2 + a}$

Verifiquem que:
(a) $S_1^+(x)$ obedece $\frac{d}{dx}S_1^+(x) = \frac{x}{S_1^+(x)}$
(b) $S_{-1}^+(x)$ obedece $\frac{d}{dx}S_{-1}^+(x) = \frac{x}{S_{-1}^+(x)}$
(c) $S_a^-(x)$ obedece $\frac{d}{dx}S_a^-(x) = \frac{x}{S_a^-(x)}$

Obs: A técnica pra resolver EDOs com variáveis separáveis tá no livro, no cap. 7 (p. 136 em diante) e tem vários exercícios no final do cap. 7. ⇦ Façam!!!

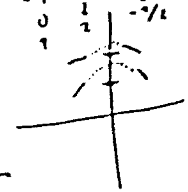
Aulas que a gente ainda tem:
P2 21/mar 23/mar
28/mar 30/mar VS

P2, VR, VS
↑
Falta marcar

Visualizando...

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (I)

x	y	$\frac{dy}{dx}$
-1	1	1
0	1	0
1	1	-1
1	2	-1/2
-1	2	0
0	2	-1/2
1		



$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (II)

x	y	$\frac{dy}{dx}$