[illegible]

[illegible]

[illegible] PÁGINA [illegible]

[illegible]

EU JÁ DIGITEI PARA
[illegible].net/
20[illegible] 2-GA.html

EU TIREI FOTOS DE
TODOS OS QUADROS
E COLOQUEI PRA
VOCÊS. TEM LINK
PRA ELES LÁ
(MAS SÓ DÁ PRA
FAZER ISSO COM
QUADRO BRANCO!!)

PRECISO DOS
E-MAILS DE VOCÊS!!

A OUTRA PROFESSORA
DE GA É A ANA ISABEL.
TEM UMA MONITORA
(MARINA [illegible])
A GENTE COMPARTILHA
BASTANTE MATERIAL,
PRINCIPALMENTE AS
LISTAS DE EXERCÍCIOS!!

AVISO DE VEZ EM
QUANDO EU VOU USAR
O TRUQUE DO
"ISTO VOCÊS VIRAM
NO ENSINO MÉDIO"

Lembrem que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

matriz 2×2 — vetor (matriz 2×1) — 2×1

Dá para multiplicar

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

matriz 9×4 — matriz 4×7 — matriz 9×7

Mas:

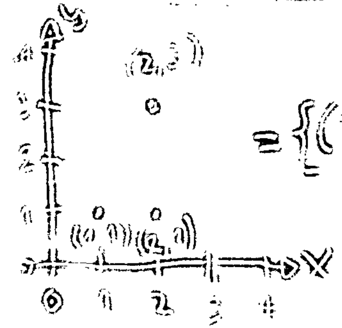
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 4}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \text{erro.}$$

GA

Geometria (figuras) — Analítica (contas, expressões).

A coisa mais importante do curso é tradução entre o geométrico e o algébrico.

Ex:



(geométrico)

$= \{(2,3), (1,1), (2,1)\}$

(algébrico, analítico)

[illegible]A 30/NOV/2015

EM ALGUM MOMENTO DO ENSINO FUNDAM. VOCÊS COMEÇARAM A LIDAR COM OBJETOS NOVOS = MATRIZES E VETORES E ÀS VEZES VOCÊS PODIAM SOMAR E MULTIPLICAR ESSES OBJETOS

É ASSIM: [illegible]

NOVOS OBJETOS NOVOS

$(2,3)$ É UM PAR ORD. (DE $\mathbb{R}^2$)

$\vec{(4,3)}$ É UM VETOR EM $\mathbb{R}^2$

ESCREVEMOS OS VETORES: <u>EM</u> [illegible] COMO $\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$

QUE OPERAÇÕES A GENTE SABE FAZER COM ELES?

1) $(a,b) + \vec{(c,d)} = (a+c, b+d)$

2) $\vec{(a,b)} + \vec{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$

3) $(a,b) - \vec{(c,d)} = (a-c, b-d)$

4) $\vec{(a,b)} - \vec{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$

5) $(a,b) - (c,d) = (a-c, \vec{b-d})$

6) $k \cdot \vec{(a,b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$

7) $\vec{(a,b)} \cdot \vec{(c,d)} = ac+bd$

OBS: A ORDEM IMPORTA.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ok}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{ERRO}$$

EXE

(PA

a)

EXERCÍCIOS (PARA AUTO-CORREÇÃO):

a) $\overrightarrow{(2,3)} + \left(\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}\right)$

$$\underbrace{\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}}_{\text{(REGRA 2 com } a=4,\ b=5,\ c=10,\ d=20)} = \overrightarrow{(14,25)}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{(2,3)} + \overrightarrow{(14,25)}}_{\text{(REGRA 1 com } a=2,\ b=3,\ c=14,\ d=25)} = \overrightarrow{(16,28)}$$

b) $\left(\overrightarrow{(2,3)} + \overrightarrow{(4,5)}\right) + ($ ...

c) $4 \cdot \left(\overrightarrow{(20,30)}\right) = (5, 1$ ...

d) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}$

e) $\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$

f) $\left(\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}\right) \cdot (10$ ...

g) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \left(\overrightarrow{(5,10)} \cdot (10\right.$ ...

h) $\left(\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(10,100)}\right) = ($ ...

$\ldots 5,$

$\ldots) \equiv 20)$

$\ldots 5)$

b) $((2,3) + (\overrightarrow{4,5})) + (\overrightarrow{10,20}) \equiv (16, 28)$

c) $4 \cdot ((20,30) - (5,10)) \equiv (\overrightarrow{60,80})$

d) $(\overrightarrow{2,3}) \cdot (\overrightarrow{5,10}) \equiv 40$

e) $(\overrightarrow{5,10}) \cdot (\overrightarrow{2,3}) \equiv 40$

f) $((\overrightarrow{2,3}) \cdot (\overrightarrow{5,10})) \cdot (\overrightarrow{10,100}) = (\overrightarrow{400,4000})$

g) $(\overrightarrow{2,3}) \cdot ((\overrightarrow{5,10}) \cdot (\overrightarrow{10,100}))$

h) $((\overrightarrow{2,3}) \cdot (\overrightarrow{10,100})) \cdot (\overrightarrow{5,10}) = (\overrightarrow{1600,3200})$

GA 30/nov/2015

g) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)}\right)}_{\text{REGRA 7}}$

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$

$\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)} = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 100$

$= 50 + 1000$

$= 1050$

1050

ERRO

(NÃO DÁ PRA USAR A REGRA 6!)

d) $\underbrace{\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}}_{\text{REGRA 7}}$

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$

$\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10$

$= 10 + 30$

$= 40$

[illegible]

$(2, 3) + ((4$ [illegible]

[illegible]

5) $((2, 3) + ($[illegible]$, 2)) =$

[illegible] $+ ((20, 30)) =$

[illegible]

$(2,3) + ((4,5) + (10,20))$

$(14,25)$

$\mathbb{R}^2)$

$\cdot\, \mathbb{R}^2)$

$(16,28)$

$(2,3) \cdot ((5,10) \cdot (10,100))$

1030

ERRO.

b) $((2,3) + (4,5)) + (10,20) = (16,28)$

c) $4 \cdot ((20,30) = (5,10)) = (60,80)$

d) $(2,3) \cdot (5,10) = 40$

e) $(5,10) \cdot (2,3) = 40$

f) $((2,3) \cdot (5,10)) \cdot (10$

h) $((2,3) \cdot (10,100)) \cdot ($

QUE PROPRIE

ESSAS OPERAÇÕ

VAMOS COMEÇ

AS PROPRIEDA

TÊM NOMES

COMUTATIVA: a

ASSOCIATIVA: (a

DISTRIBUTIVA: a

a

f) $((2, [illegible]) \circ ([illegible], 40)) \, (10, 10[illegible])$ = [illegible]

h) $((2, [illegible])) \circ ((10, 10[illegible])) \, ([illegible], [illegible])$ = [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Game [illegible]

[illegible]

[illegible]

Table [illegible]

b) [illegible]

Complete [illegible]

a) [illegible]

b) [illegible]

a) [illegible]

[illegible]

a) [illegible]

A 2/dez/2011

a) $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$

$(c,d)+(a,b)=(c+a,\ d+b)$

$=(a+c,\ b+d)$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$

$=(c+a,\ d+b)$

$=(c,d)+(a,b)$

Ex:

$(2,3)+(4,5)=(2+4,\ 3+5)$

$=(4+2,\ 5+3)$

$=(4,5)+(2,3)$

Exercícios (V, F, justifique):

c) $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$

d) $k\cdot(a,b)=(a,b)\cdot k$

e) $(a,b)=(c,d)\Rightarrow(c,d)=(a,b)$

f) $(a,b)=(c,d)$ e $(c,d)=(e,f)\Rightarrow(a,b)=(e,f)$

g) $(a,b)=(c,d)\Rightarrow(c,d)=(a,b)$

GA 7/DEZ/2015

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO PROVAR ALGEBRICAMENTE COISAS SOBRE PONTOS E VETORES... AGORA VAMOS VER O LADO GEOMÉTRICO. OBS: VAMOS CONSIDERAR QUE AS ÚNICAS PROVAS REALMENTE CONFIÁVEIS SÃO AS ALGÉBRICAS — A GEOMETRIA PODE NOS DAR "INTUIÇÃO" E NOS DAR IDÉIAS DE COMO FAZER UMA PROVA ALGÉBRICA

$$\underbrace{\underbrace{(2,3)}_{\text{PONTO}} + \underbrace{(\underbrace{4}_{\text{ESCALAR}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{(5,6)}}_{\text{VETOR}})}_{\text{VETOR}}}_{\text{PONTO}}$$

IDÉIA POR TRÁS DOS ESCALARES:

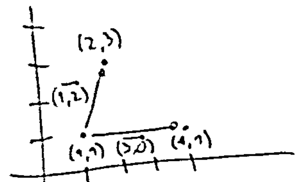
2 "O DOBRO"

1/2 "METADE"

ESCALARES VÃO TER A VER COM MULTIPLICAÇÃO E PROPORÇÕES.

PERGUNTA:
EM $(2,3)$, $\overrightarrow{(4,5)}$ - AS COMPONENTES DELES NÃO SÃO ESCALARES, JÁ QUE SÃO NÚMEROS?
MAIS OU MENOS !!
QUANDO A GENTE FIZER MUDANÇAS DE COORDENADAS — ESSES NÚMEROS VÃO MUDAR, MAS OS ESCALARES NÃO.

PONTOS E VETORES, GEOMETRICAMENTE



$(1,1)$, $(4,1)$, $(2,3)$ SÃO PONTOS, E OS VETORES VÃO SER DESLOCAMENTOS.

$$(1,1) + \overrightarrow{(1,2)} = (2,3)$$
$$(1,1) + \overrightarrow{(3,0)} = (4,1)$$

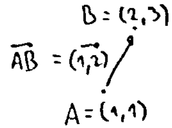
SOMAR UM VETOR A UM PONTO É EFETUAR UM DESLOCAMENTO.

UMA DAS NOSSAS REGRAS DIZ QUE:

$$(a,b) - (c,d) = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$$
$$(2,3) - (1,1) = \overrightarrow{(2-1,3-1)}$$
$$= \overrightarrow{(1,2)}$$

A DIFERENÇA (SUBTRAÇÃO) ENTRE DOIS PONTOS DIZ O DESLOCAMENTO NECESSÁRIO PRA IR DE UM PRO OUTRO.

EM QUE ORDEM?
TRUQUE PRA LEMBRAR DA ORDEM: ÁLGEBRA.



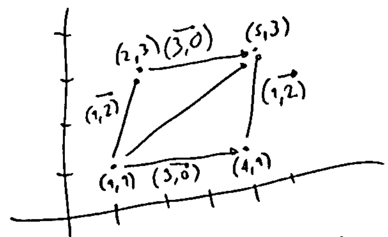
$\overrightarrow{AB}$ É O DESLOCAMENTO NECESSÁRIO PRA IR DE A PRA B,

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

OUTRAS REGRAS PARECIDAS:

$$A = B - \overrightarrow{AB}$$
$$B - A = \overrightarrow{AB}$$

UMA FIGURA MUITO IMPORTANTE



OBS: MUITAS VEZES VAMOS ABREVIAR A IGUALDADE ABAIXO COMO:

$$(A+\vec{v})+\vec{w} = (A+\vec{w})+\vec{v} = A+(\vec{v}+\vec{w})$$
$$= A+(\vec{w}+\vec{v})$$

PRA DEMONSTRAR ESTE TIPO DE COISA (COM ABREVIAÇÕES!) A GENTE PODE EXPANDIR AS ABREVIAÇÕES...

CONVENÇÕES:

$A, B, C, P, Q, \ldots$ SÃO PONTOS,

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ SÃO VETORES.

$A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$, ...

$\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, ...

A GENTE NÃO É OBRIGADO A USAR $A = (A_1, A_2)$, ETC, ...

SE A GENTE FAZ

$A = (a,b)$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(e,f)}$,

A GENTE TRANSFORMA (AAA
EM (AA).

$$((1,1)+\overrightarrow{(1,2)})+\overrightarrow{(3,0)} = ((1,1)+\overrightarrow{(3,0)})+\overrightarrow{(1,2)} = (1,1)+(\overrightarrow{(1,2)}$$
$$((a,b)+\overrightarrow{(c,d)})+\overrightarrow{(e,f)} \overset{\boxed{1}}{=} ((a,b)+\overrightarrow{(e,f)})+\overrightarrow{(c,d)} \overset{\boxed{2}}{=} (a,b)+(\overrightarrow{(c,d)}+$$
$$\overset{\boxed{3}}{=} (a,b)+(\overrightarrow{(e,f)}+$$

OBS: NA AULA PASSADA VOCÊS APRENDERAM A DEMONSTRAR COISAS COMO $\boxed{1}$ $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ VOCÊS MESMOS.

ORDEM?
PRA LEMBRAR
: ÁLGEBRA.
3)

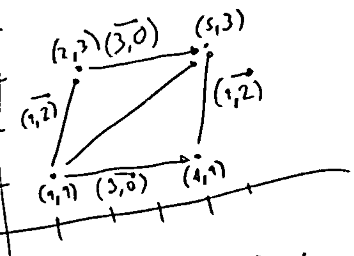
O DESLOCAMENTO
IO PRA IR DE A

$\overrightarrow{AB} = B$
S REGRAS
IDAS:

$B - \overrightarrow{AB}$

$A = \overrightarrow{AB}$

FIGURA MUITO
ORTANTE



$$((1,1)+\overrightarrow{(1,2)})+\overrightarrow{(3,0)} = ((1,1)+\overrightarrow{(3,0)})+\overrightarrow{(1,2)} = (1,1)+(\overrightarrow{(1,2)}+\overrightarrow{(3,0)}) \quad (\star)$$

$$((a,b)+\overrightarrow{(c,d)})+\overrightarrow{(e,f)} \overset{\boxed{1}}{=} ((a,b)+\overrightarrow{(e,f)})+\overrightarrow{(c,d)} \overset{\boxed{2}}{=} (a,b)+(\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(e,f)}) \quad (\star\star)$$
$$\overset{\boxed{3}}{=} (a,b)+(\overrightarrow{(e,f)}+\overrightarrow{(c,d)})$$

OBS: NA AULA PASSADA VOCÊS APRENDERAM A DEMONSTRAR COISAS COMO $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$

OBS: MUITAS VEZES VAMOS ABREVIAR A IGUALDADE ABAIXO COMO:

$$(A+\vec{v})+\vec{w} = (A+\vec{w})+\vec{v} = A+(\vec{v}+\vec{w}) \quad (\star\star\star)$$
$$= A+(\vec{w}+\vec{v})$$

PRA DEMONSTRAR ESTE TIPO DE COISA (COM ABREVIAÇÕES!) A GENTE PODE EXPANDIR AS ABREVIAÇÕES...

CONVENÇÕES:
$A, B, C, P, Q, \ldots$ SÃO PONTOS,
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ SÃO VETORES.

$A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$, ...
$\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, ...

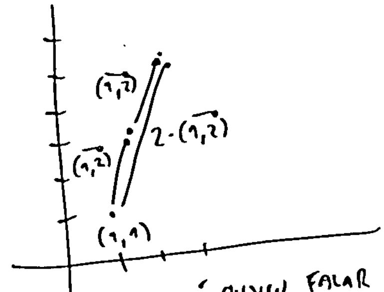
A GENTE NÃO É OBRIGADO A USAR $A = (A_1, A_2)$, ETC., ...
SE A GENTE FAZ
$A = (a,b)$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(e,f)}$,
A GENTE TRANSFORMA $(\star\star\star)$ EM $(\star\star)$.

ESCALARES

IDÉIA:
$$(A+\vec{v})+\vec{v} = A+(\vec{v}+\vec{v})$$
$$= A+(2\cdot\vec{v})$$

OBS: ISTO É EQUIVALENTE A
$$(a,b)+(\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(c,d)}) = (a,b)+(2\cdot\overrightarrow{(c,d)}),$$
QUE VOCÊS SABEM DEMONSTRAR...
OS DOIS LADOS DÃO $(a+2c, b+2d)$

VISUALMENTE:



PRA QUEM JÁ OUVIU FALAR DE COMPRIMENTO, DIREÇÃO E SENTIDO DE VETORES, MULTIPLICAR UM VETOR POR 2 DÁ OUTRO VETOR COM A MESMA DIREÇÃO E SENTIDO (E O DOBRO DO COMPRIMENTO).

GA 7/Dez/2015

Mais operações com vetores:

Norma de $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \qquad (8)$$

Projeção sobre $\vec{u}$ de $\vec{v}$:

$$Pr_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\,\vec{u} \qquad (9)$$

Primeiro a gente vai aprender a fazer contas com essas operações novas.

Exemplos:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{(3,4)}\| &= \sqrt{\overrightarrow{(3,4)}\cdot\overrightarrow{(3,4)}}\\ &= \sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Pr_{\overrightarrow{(2,0)}}\overrightarrow{(3,4)} &= \frac{\overrightarrow{(2,0)}\cdot\overrightarrow{(3,4)}}{\overrightarrow{(2,0)}\cdot\overrightarrow{(2,0)}}\cdot\overrightarrow{(2,0)}\\ &= \frac{2\cdot 3+0\cdot 4}{2\cdot 2+0\cdot 0}\cdot\overrightarrow{(2,0)}\\ &= \frac{6+0}{4+0}\cdot\overrightarrow{(2,0)}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{(2,0)}\\ &= \overrightarrow{\left(\frac{3}{2}\cdot 2,\frac{3}{2}\cdot 0\right)}\\ &= \overrightarrow{(3,0)}\end{aligned}$$

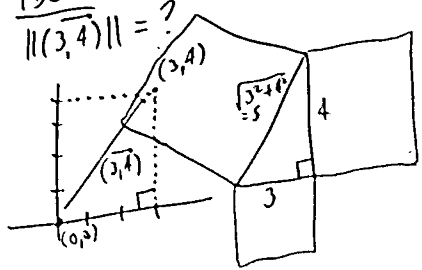
Reparem que eu só apliquei as definições (8) e (9) e a gente ainda não faz idéia do que "$\|\cdot\|$" e "Pr" querem dizer geometricamente...

Obs: pra gente "$\sqrt{\ }$" é uma operação com resultado bem-definido (não-negativo). Quando a gente quiser falar das duas soluções de $x^2 = 25$ vamos escrever

$$\begin{aligned}x &= \pm\sqrt{25}\\ &= \pm 5\end{aligned}$$

Idéia

$\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$



Depois eu mostro pra vocês uma demonstração geométrica de Pitágoras...

Alguns exercícios de V/F/justifique da lista que vocês vão receber cópia daqui a pouco ("Lista 1 do Reginaldo"):

2e) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano, então $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

(Se $\overrightarrow{(a,b)}$ e $\overrightarrow{(c,d)}$ são vetores no plano então $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = \|\overrightarrow{(a,b)}\|\|\overrightarrow{(c,d)}\|$)

Falsa:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(3,4)} &= 1\cdot 3+2\cdot 4\\ &= 3+8\\ &= 11 = \sqrt{121}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{(1,2)}\|\|\overrightarrow{(3,4)}\| &= \sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2}\sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4}\\ &= \sqrt{5}\cdot\sqrt{25}\\ &= \sqrt{125}\end{aligned}$$

2g) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano então $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(Dica: faça $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$).

Momento IHS

Se juntem em rodinhas com 4 pessoas em cada uma e discutam. Tentem resolver em grupo, ou pelo menos descobrir tudo o que os colegas sabem sobre os problemas!

$= \sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4}$

$= \sqrt{25}$

$$\|\overrightarrow{(1,2)}\| \overset{\text{por } (8)}{=} \sqrt{\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}} = \sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2}$$

Prop:

$$\left(k\cdot\overrightarrow{(a,b)}\right)\cdot\overrightarrow{(c,d)} = k\cdot\left(\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)}\right)$$

TRUQUE: SE VOCÊ TIVER UMA IDÉIA
E NÃO TEM CERTEZA SE ELA
FUNCIONA, ESCREVA "HIPÓTESE" ANTES.

SE VOCÊ ESCREVER "$(k\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = k\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$"
E ISTO ESTIVER ERRADO, OS OUTROS PODEM
TRATAR VOCÊ COMO UM BOBÃO.

SE VOCÊ ESCREVER "HIPÓTESE: $(k\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = k\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$"
ISTO QUER DIZER: "ME AJUDEM A VER SE ESTA
PROPOSIÇÃO É VERDADEIRA OU FALSA".

GA 9/DEZ/2015

AVISOS DA MARIANA IMBELLONI (MONITORA):

HORÁRIOS DA MONITORIA:

2ª 17:00-20:00 (SALA 5 POR ENQUANTO)

3ª 16:00-18:00 (SALA 6A POR ENQUANTO)

4ª 16:00-19:00 (SALA 6A POR ENQUANTO)

TELEGRAM:
(24) 98879-3529

HOJE A AULA AINDA VAI SER BEM MAIS SOBRE "ANALÍTICA" DO QUE SOBRE "GEOMETRIA".

TOU FAZENDO UM PDF COM MATERIAL DE VÁRIAS LISTAS DE EXERCÍCIOS, MAS ELE AINDA ESTÁ BEM NO INÍCIO. POR ENQUANTO ELE SÓ TEM UMA TRADUÇÃO (!!!) DOS EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE DO REGINALDO.

REPAREM QUE OS EXERCÍCIOS DA LISTA DO REGINALDO ESTÃO "MAIS EM PORTUGUÊS" DO QUE OS MEUS. PRA RESOLVER QUALQUER EXERCÍCIO DE GA, POR EXEMPLO OS DE V/F/JUSTIFIQUE, VOCÊS PRIMEIRO VÃO TER QUE TRADUZIR ELE PRA UMA PROPOSIÇÃO MATEMÁTICA COM O MÍNIMO DE PORTUGUÊS... E REPARE QUE OS EXERCÍCIOS 2a, 2d, 2f, 2m TEM "ENTÃO"S.

LEMBREM QUE TODA VEZ QUE A GENTE NÃO FAZ IDÉIA DO QUE UM EXERCÍCIO "QUER DIZER" A GENTE PODE COMEÇAR TESTANDO CASOS PARTICULARES - E A GENTE PODE ARRUMAR NOSSOS CASOS PARTICULARES NUMA TABELA COM VÁRIAS COLUNAS.

EU PRECISO TER CERTEZA DE QUE VOCÊS SABEM LIDAR COM "E", "OU", "NÃO", "IMPLICA".

SEJAM $P(x) = (x>0)$,
$Q(x) = (x^2<3)$

x	$x>0$	$P(x)$	x^2	$x^2<3$	$Q(x)$	$\neg P(x)$
-2		0			0	1
-1		0			1	1
0		0			1	1
1		1			1	0
2		1			0	0
3		1			0	0

DICA: USE 0 PARA FALSO E 1 PARA VERDADEIRO.

SE JUNTEM EM GRUPOS DE 4.

DICA: $\neg 0 = 1$
$\neg 1 = 0$

$0 \& 0 = 0$ $\quad$ $0 \vee 0 = 0$ $\quad$ $0 \to 0 = 1$
$0 \& 1 = 0$ $\quad$ $0 \vee 1 = 1$ $\quad$ $0 \to 1 = 1$
$1 \& 0 = 0$ $\quad$ $1 \vee 0 = 1$ $\quad$ $1 \to 0 = 0$
$1 \& 1 = 1$ $\quad$ $1 \vee 1 = 1$ $\quad$ $1 \to 1 = 1$

AVISOS SOBRE DATAS:

1. NÃO TOU ACHANDO O E-MAIL (OU A MENSAGEM) DA ANA ISABEL EM QUE ELA MARCA AS PROVAS
2. NÃO VOU DAR AULA NA 2ª 14/DEZ - A PRÓXIMA AULA É NA 4ª 16/DEZ.

X	x>0	P(x)	x^2	$x^2<3$	Q(x)	$\neg P(x)$	P(x)&Q(x)	$P(x)\vee Q(x)$	$P(x)\to Q(x)$
-2		0			0	1	0	0	1
-1		0			1	1	0	1	1
0		0			1	1	0	1	1
1		1			1	0	1	1	1
2		1			0	0	0	1	0
3		1			0	0	0	1	0

DICA: USE 0 PARA FALSO
E 1 PARA VERDADEIRO.

SE JUNTEM EM
GRUPOS DE 4.

DICA: $\neg 0 = 1$
$\neg 1 = 0$

$0\&0=0$ $\quad 0\vee 0=0$ $\quad 0\to 0=1$
$0\&1=0$ $\quad 0\vee 1=1$ $\quad 0\to 1=1$
$1\&0=0$ $\quad 1\vee 0=1$ $\quad 1\to 0=0$
$1\&1=1$ $\quad 1\vee 1=1$ $\quad 1\to 1=1$

AVISOS SOBRE DATAS:
(1) NÃO TÔ ACHANDO O E-MAIL (OU A MENSAGEM) DA ANA ISABEL EM QUE ELA MARCA AS PROVAS
(2) NÃO VOU DAR AULA NA 2ª 14/DEZ - A PRÓXIMA AULA É NA 4ª 16/DEZ.

AGORA A GENTE SABE
ENTENDER O EXERCÍCIO
2f DO REGINALDO!!!

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$	$\vec{u}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}\neq\vec{0})\&(\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w})\to\vec{v}=\vec{w}$
$\overrightarrow{(0,0)}$	$\overrightarrow{(1,1)}$	$\overrightarrow{(2,2)}$	0	1	1
$\overrightarrow{(1,0)}$	$\overrightarrow{(0,2)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	1	1	0
$\overrightarrow{(1,0)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$	$\overrightarrow{(2,4)}$	1	1	0
$\overrightarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$	$\overrightarrow{(4,5)}$	1	0	1

DEF: $\vec{u}\perp\vec{v}$ É A MESMA COISA QUE $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

O QUE QUER DIZER, GEOMETRICAMENTE, $\vec{u}\perp\vec{v}$?

EXERCÍCIOS:

a) ENCONTRE QUATRO SOLUÇÕES DIFERENTES PARA $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(1,0)}=0$.
CHAME-AS DE $\overrightarrow{(a_1,b_1)}, \overrightarrow{(a_2,b_2)}, \overrightarrow{(a_3,b_3)}, \overrightarrow{(a_4,b_4)}$.
REPRESENTE NUM PLANO SÓ OS VETORES $\overrightarrow{(1,0)}, \overrightarrow{(a_1,b_1)}, \ldots, \overrightarrow{(a_4,b_4)}$ (APÓIE-OS NA ORIGEM).

b) IDEM PARA $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(1,1)}=0$.

c) IDEM PARA $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=0$.

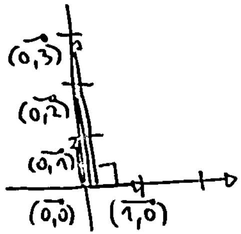
GA 9/DEZ/2015

a) $\overrightarrow{(0,0)} \cdot \overrightarrow{(1,0)} = 0$

$\overrightarrow{(0,1)} \cdot \overrightarrow{(1,0)} = 0$

$\overrightarrow{(0,2)} \cdot \overrightarrow{(1,0)} = 0$

$\overrightarrow{(0,3)} \cdot \overrightarrow{(1,0)} = 0$

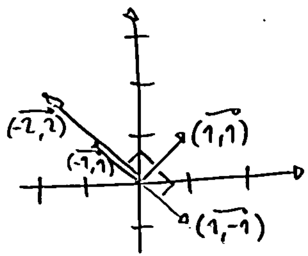


b) $\overrightarrow{(0,0)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 0$

$\overrightarrow{(1,-1)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 0$

$\overrightarrow{(-1,1)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 0$

$\overrightarrow{(-2,2)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 0$

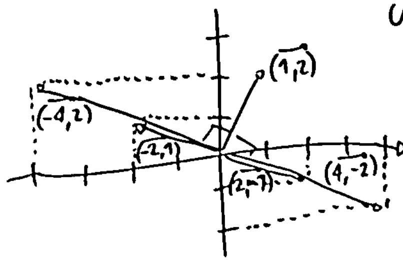


c) $\overrightarrow{(-2,1)} \cdot \overrightarrow{(1,2)} = 0$

$\overrightarrow{(2,-1)} \cdot \overrightarrow{(1,2)} = 0$

$\overrightarrow{(-4,2)} \cdot \overrightarrow{(1,2)} = 0$

$\overrightarrow{(4,-2)} \cdot \overrightarrow{(1,2)} = 0$

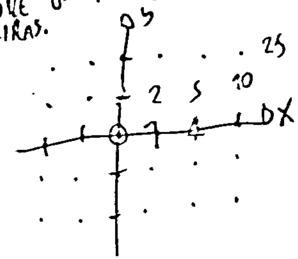


A GENTE ACABOU DE (COMEÇAR A) ENTENDER O QUE QUER DIZER (GEOMETRICAMENTE) $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.

O QUE QUER DIZER $\vec{U} \cdot \vec{V} = 1$, POR EXEMPLO, OU $\vec{U} \cdot \vec{V} = 20$, OU $\vec{U} \cdot \vec{V} = -3$?

AO INVÉS DE DAR UMA RESPOSTA COMPLETA PRA ISSO AGORA (ELA É COMPLICADA!) EU VOU MOSTRAR PRA VOCÊS UM MODO DE VISUALIZAR FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS.

EXEMPLO:
A GENTE PODE REPRESENTAR NO PLANO OS RESULTADOS DE $F(x,y) = x^2 + y^2$ ESCREVENDO OS RESULTADOS, COMO NÚMEROS, SOBRE OS PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS.



x	y	x^2+y^2
0	0	0
1	0	1
2	0	4
1	1	2
2	1	5
3	1	10
4	3	25

DEPOIS DE COLOCAR MUITOS NÚMEROS VOCÊS DEVEM SER CAPAZES DE FAZER HIPÓTESES SOBRE, P.EX., ONDE É QUE $x^2 + y^2 = 25$ (DICA: FAÇAM EM CASA - O RESULTADO É UM CÍRCULO).

EXERCÍCIOS PRA CASA:
FAÇA A MESMA COISA PARA $F(x,y) = x$, (a)
$F(x,y) = x+y$, (b)
$F(x,y) = x+2y$, (c)

E PESQUISE O QUE SÃO CURVAS DE NÍVEL.

GA 16/DEZ/2015

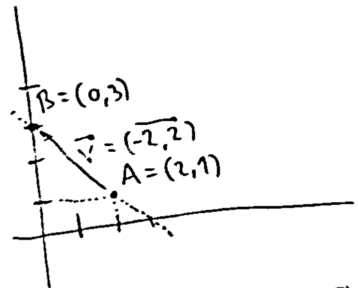
HOJE:

- RETAS
- ALGUMAS NOTAÇÕES PARA CONJUNTOS ("EDUARDISMOS")
- $\| \|\vec{u}\| \vec{v} \| = \| \|\vec{v}\| \vec{u} \|$
- O QUE MAIS COUBER NA AULA

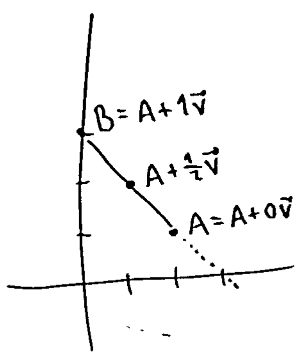
RETAS

Se $A, B \in \mathbb{R}^2$ e $A \neq B$, então existe uma reta "gerada" por A e B.
Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$, e seja r esta reta.
Então todos os pontos da forma $A + t\vec{v}$ pertencem a r.
Cada ponto de r está associado a um valor de t - a gente diz que
$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ é uma parametrização da reta r.

EXEMPLO:



$A + 0\vec{v} = (2,1) + 0(\overrightarrow{-2,2})$
$= (2,1)$
$A + 1\vec{v} = (2,1) + 1(\overrightarrow{-2,2})$
$= (2,1) + (\overrightarrow{-2,2})$
$= (0,3)$
$A + \frac{1}{2}\vec{v} = (2,1) + (\overrightarrow{-1,1})$
$= (1,2)$

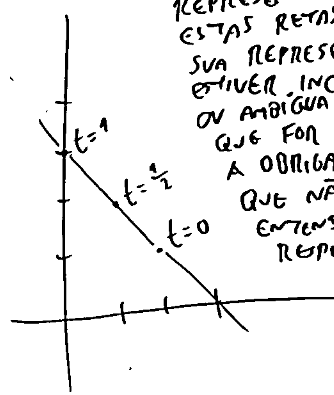


(OBS: ISTO TEM TUDO A VER COM "MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME")

Lembre que na aula passada, no final, eu pedi pra vocês representarem graficamente funções como $F(x,y) = x + 2y$,
$G(x,y) = 2x + 3y$,
$H(x,y) = ax + by$

e eu pedi pra vocês pesquisarem curvas de nível...
P. ex., $F(x,y) = x + 2y = 4$ é a equação de uma curva de nível da F (uma reta!)

Exercícios pra agora (em grupo, ou só com auto-correção):
Representem graficamente estas retas (obs: se a sua representação gráfica estiver incompreensível ou ambígua o colega que for corrigir tem a obrigação de dizer que não dá pra entender a sua resposta).



Exercícios (cont

a) $F(x,y) = 0$
b) $F(x,y) = 4$
c) $F(x,y) = 2$
d) $G(x,y) = 0$
e) $G(x,y) = 6$
f) $G(x,y) = 3$.

Além disto dê
coordenadas d
pontos de ca
destas retas.

ALGUMAS
DE CONJU

AVISO: NE
nem o An
notações e
mundo sa
notações -
precisar s
mas você
precisar e
Eu vou us
o tempo -
Fazem elas
seja muit
coisas e

...L,

...FICAMENTE

...$(x,y) = x+2y$,

...$(x,y) = 2x+3y$,

...$(x,y) = ax+by$

...OCÊS

...RVAS DE NÍVEL ...

... $x+2y=4$

...E UMA CURVA

...E (UMA RETA!)

... PRA AGORA

... OU SÓ COM

...EÇÃO):

...TEM GRAFICAMENTE

...RETAS (OBS: SE A

...PRESENTAÇÃO GRÁFICA

... INCOMPREENSÍVEL

...GUA O COLEGA

... FOR CORRIGIR TEM

...BRIGAÇÃO DE DIZER

...E NÃO DÁ PRA

...NTENDER A SUA

...RESPOSTA).

EXERCÍCIOS (CONT):

a) $F(x,y)=0$ (r_a) $(0,0)\in r_a$, $(2,-1)\in r_a$

b) $F(x,y)=4$ (r_b) $(2,1)\in r_b$, $(4,0)\in r_b$

c) $F(x,y)=2$ (r_c)

d) $G(x,y)=0$ (r_d) $(3,-2)\in r_d$ $(0,0)\in r_d$

e) $G(x,y)=6$ (r_e) $(3,0)\in r_e$ $(0,2)\in r_e$

f) $G(x,y)=3$. (r_f) $(3,-1)\in r_f$ $(0,1)\in r_f$

ALÉM DISTO DÊ AS COORDENADAS DE DOIS PONTOS DE CADA UMA DESTAS RETAS.

ALGUMAS NOTAÇÕES DE CONJUNTOS

AVISO: NEM A ANA ISABEL NEM O ANTÔNIO USAM ESTAS NOTAÇÕES EM GA.. TODO MUNDO SABE LER ESTAS NOTAÇÕES - VOCÊS VÃO PRECISAR SABER LÊ-LAS MAS VOCÊS NÃO VÃO PRECISAR ESCREVÊ-LAS. EU VOU USAR ESTAS NOTAÇÕES O TEMPO TODO PORQUE ELAS FAZEM ELAS FAZEM COM QUE SEJA MUITO FÁCIL VISUALIZAR COISAS E APONTAR ERROS.

ALGUMAS NOTAÇÕES DE CONJUNTOS, CONT.

$\{-1,0,2,3\}$ (FAMILIAR)

$\{\underbrace{(x,x^2)}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{x^2\leq 3}_{\text{FILTRO}}\} = \ldots$

x	$x^2\leq 3$	(x,x^2)
-2	FALSO	
-1	VERD	$(-1,1)$
0	VERD	$(0,0)$
1	VERD	$(1,1)$
2	FALSO	
3	FALSO	

$\ldots = \{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$

OUTRO EXEMPLO:

$\{\underbrace{(2,1)+t\overrightarrow{(-2,2)}}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{t\in\{0, 0.5, 1\}}_{\text{GERADOR}}\} = \ldots$

t	$(2,1)+t\overrightarrow{(-2,2)}$
0	$(2,1)$
0.5	$(1,2)$
1	$(0,3)$

$\ldots \{(2,1),(1,2),(0,3)\}$

EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA:

$\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\} =$

$\{(2,1)+t\overrightarrow{(-2,2)} \mid \underbrace{t\in\mathbb{R}}_{\text{GERADOR}}\}$

COMPLICAÇÃO: $\mathbb{R}$ É INFINITO, O CONJUNTO ACIMA É INFINITO TAMBÉM (UMA RETA TEM INFINITOS PONTOS)

OUTRA NOTAÇÃO PARA CONJUNTOS

$\{\underbrace{x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{x^2\leq 3}_{\text{FILTRO}}\} =$

ISTO É UMA ABREVIAÇÃO PARA:

$\{\underbrace{x}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{x^2\leq 3}_{\text{FILTRO}}\} =$

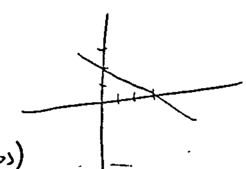
x	$x^2\leq 3$	x
-2	FALSO	-1
-1	VERD	0
0	VERD	1
1	VERD	
2	FALSO	
3	FALSO	

$= \{-1,0,1\}$

EXEMPLO:

$\{\underbrace{(x,y)\in\mathbb{R}^2}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{2x+3y=6}_{\text{FILTRO (EQUAÇÃO DA RETA)}}\}$

É UMA RETA (r_e)



GA 16/DEZ/2015

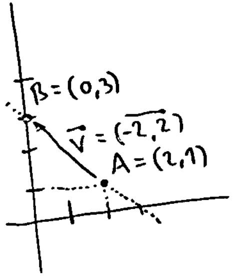
HOJE:

- RETAS
- ALGUMAS NOTAÇÕES PARA CONJUNTOS ("EDUARDISMOS")
- $\| \|\vec{u}\| \vec{v} \| = \| \|\vec{v}\| \vec{u} \|$
- O QUE MAIS COUBER NA AULA

RETAS

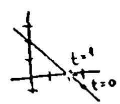
SE $A, B \in \mathbb{R}^2$ E $A \neq B$, ENTÃO EXISTE UMA RETA "GERADA" POR A E B.
SEJAM $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$, E SEJA r ESTA RETA.
ENTÃO TODOS OS PONTOS DA FORMA $A + t\vec{v}$ PERTENCEM A r.
CADA PONTO DE r ESTÁ ASSOCIADO A UM VALOR DE t - A GENTE DIZ QUE
$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ É UMA PARAMETRIZAÇÃO DA RETA r.

EXEMPLO:



SEJA:
$r = \{(2,1) + t\overrightarrow{(-2,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
ENTÃO:
$(2,1) + 0\overrightarrow{(-2,2)} \in r$
$(2,1) \in r$
$(2,1) + 1\overrightarrow{(-2,2)} \in r$
$(0,3) \in r$

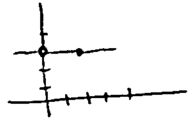
EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE AS RETAS ABAIXO:

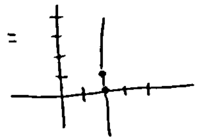
$r_g = \{(3,-1) + t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t \in \mathbb{R}\} =$ 

$r_h = \{(3,-1) + t\overrightarrow{(-2,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_i = \{(3,-1) + t\overrightarrow{(1,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$r_j = \{(0,3) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$r_k = \{(2,0) + t\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

(5 MIN - GRUPOS GRANDES)

$r_j =$ 

$r_k =$ 

DÁ PRA EXPRESSAR AS RETAS $r_a, r_b, r_c, r_d, r_e, r_f$ FORMALMENTE:
$r_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$
$r_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4\}$
$r_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6\}$

EXERCÍCIO PRA CASA
(IMPORTANTE - É PRA LEMBRAR A EQUAÇÃO MAIS COMUM QUE A GENTE CHAMA DE "EQUAÇÃO DA RETA"):

SEJAM
$r_l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$
$r_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x\}$
$r_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$.

ENCONTRE DOIS PONTOS DE CADA UMA DESSAS RETAS, E REPRESENTE r_l, r_m, r_n GRAFICAMENTE.

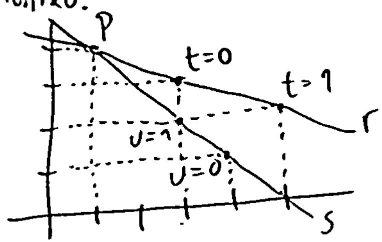
GA 21/DEZ/2015

Se vocês olharem as listas de exercícios 1, 2 e 3 da Ana Isabel vocês vão ver que estamos vendo a matéria numa ordem bem diferente...

Os exercícios de hoje (da lista de exercícios que não pude imprimir porque a xerox estava fechada) é sobre retas. Vocês vão ver que quando vocês souberem retas bem os exercícios sobre segmentos e polígonos vão ficar mais fáceis de formalizar (e resolver).

Exercício

Em cada um dos casos abaixo, represente r e s graficamente, marcando os pontos associados a $t=0$, $t=1$, $u=0$, $u=1$; encontre no olhômetro o ponto $P \in r \cap s$; encontre (também no olhômetro) os valores de t e u associados a P; e verifique que você encontrou o t e o u certos, fazendo como abaixo.



$r = \{(3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$s = \{(4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

$(1,4) = (3,3) + (-1)\overrightarrow{(2,-1)}$

$(1,4) = (4,1) + 3\overrightarrow{(-1,1)}$

$(1,4) \in r \cap s$

a) $r = \{(1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(0,4) + u\overrightarrow{(2,0)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

b) $r = \{(1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(0,2) + u\overrightarrow{(2,3)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

c) $r = \{(1+3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(2u, 2+3u) \mid u \in \mathbb{R}\}$

d) $r = \{(0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(1,0) + u\overrightarrow{(1,3)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

Aviso: no (d) o olhômetro não basta pra obter o resultado exato — vocês vão ter que resolver um sistema.

Exercício

(Tinha ficado pra casa na aula passada)

Represente graficamente:

$r_\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$

$r_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x\}$

$r_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$

Os problemas b e
são equivalentes —

$r = \{(1+3t, t) \mid t$

$= \{(1,0) + t(3,1$

e também dá pra
encontrar a equa
cartesiana da r...

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y$

Dica (pra
jeitos de
o ponto P
exercício d).

Encontre a
cartesianas

$r: y = ax + b$

$s: y = a'x + b'$

$r: y = -\frac{x}{2} + 3$

$s: y = 3x - 3$

No ponto $P =$

$(P \in r \cap s)$

as duas equaçõ

$y = -\frac{x}{2} + 3$ e

$y = 3x - 3$,

são obedecidas...
então

$-\frac{x}{2} + 3 = 3x -$

$3x + \frac{x}{2}$

$3)|t\in\mathbb{R}\},$
$0)|u\in\mathbb{R}\}$
$\overrightarrow{1})|t\in\mathbb{R}\},$
$\overrightarrow{3})|u\in\mathbb{R}\}$

$|t\in\mathbb{R}\},$
$3u)|u\in\mathbb{R}\}$

$(\overrightarrow{2,-1})|t\in\mathbb{R}\},$
$(\overrightarrow{1,3})|u\in\mathbb{R}\}$

) o olhômetro
ra obter o
xato – vocês
resolver um

do pra casa
da)
aficamente:
$^2 \mid y=4\}$
$^2 \mid y=4+x\}$
$^2 \mid y=4-2x\}$

Os problemas b e c
são equivalentes –

$r=\{(1+3t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$
$\quad=\{(1,0)+t(3,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$

E também dá pra gente
encontrar a equação
cartesiana da r...

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\}$

Dica (pra um dos
jeitos de encontrar
o ponto $P \in r\cap s$ no
exercício d)...

Encontre as equações
cartesianas de r e s.

$r: y=ax+b$
$s: y=a'x+b'$
$r: y=-\frac{x}{2}+3$
$s: y=3x-3$

No ponto $P=(x,y)$
$(P\in r\cap s)$
as duas equações,
$y=-\frac{x}{2}+3$ e
$y=3x-3,$
são obedecidas...
então

$-\frac{x}{2}+3=3x-3 \quad 3x+\frac{x}{2}=6 \quad \frac{7x}{2}=6 \quad 7x=12 \quad x=12/7$

Outro jeito:

$r=\{(0,3)+t(\overrightarrow{2,-1})\mid t\in\mathbb{R}\}$
$\quad=\{(2t,3-t)\mid t\in\mathbb{R}\}$
$s=\{(1,0)+u(\overrightarrow{1,3})\mid u\in\mathbb{R}\}$
$\quad=\{(1+u,3u)\mid u\in\mathbb{R}\}$

Quais são os valores
de t e u que fazem
com que:

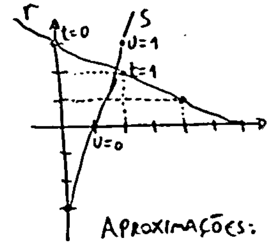
$(2t,3-t)=(1+u,3u)$
$2t=1+u$
$3-t=3u$
$3=3u-t$
$3-3u=t$
$2(3-3u)=1+u$
$6-6u=1+u$
$-7u=1-6=-5$
$7u=5$
$u=\frac{5}{7}$

$$\boxed{\begin{aligned}t&=3-3\tfrac{5}{7}\\&=\tfrac{21}{7}-\tfrac{15}{7}\\&=\tfrac{6}{7}\end{aligned}}$$

$y=3\,\frac{12}{7}-3$
$\quad=\frac{36}{7}-\frac{21}{7}$
$\quad=\frac{15}{7}$

$P=\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$

$(0,3)+\underbrace{\frac{6}{7}}_{t}(\overrightarrow{2,-1})=$
$(0,3)+\left(\frac{12}{7},\frac{-6}{7}\right)=$
$\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$
$(1,0)+\underbrace{\frac{5}{7}}_{u}(\overrightarrow{1,3})=$



Aproximações:
$t\approx 0.9,$
$u\approx 0.6$
Se as contas derem
algo como $t=-20,$
$u=3,$
então a gente
provavelmente errou
em algum lugar...

Agora vocês
começaram a ver
como encontrar
interseções de
retas..., são contas
parabéns,
chatas que todo mundo
vai ter que ter muita
prática em fazer!
Feliz Natal!
Bom ano novo!
Jingobéu!
:)

GA 4/JAN/2015

SE r E s SÃO DUAS RETAS PARAMETRIZADAS,

$r = \{(3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ E

$s = \{(4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\}$,

PODEMOS ENCONTRAR A INTERSEÇÃO DELAS ENCONTRANDO OS VALORES DE t E u ADEQUADOS...

$(1,4) = (3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$(1,4) = (4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

$(1,4) \in r \cap s$.

NOS EXERCÍCIOS a, b E c ABAIXO ENCONTRE O t E O u E O PONTO DE INTERSEÇÃO FAZENDO O GRÁFICO, USANDO O OLHÔMETRO E VERIFICANDO AS SUAS CONTAS. NO EXERCÍCIO d O OLHÔMETRO NÃO VAI SER SUFICIENTE E VOCÊ VAI PRECISAR RESOLVER UM SISTEMA.

a) $r = \{(1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(0,4) + u\overrightarrow{(2,0)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

b) $r = \{(1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$s = \{(0,2) + u\overrightarrow{(2,3)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) $r = \{(1+3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(2u, 2+3u) \mid u \in \mathbb{R}\}$

d) $r = \{(0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(1,0) + u\overrightarrow{(1,3)} \mid u \in \mathbb{R}\}$

EM GRUPO - 35 min (ATÉ 15:10)

PEÇA AJUDA DAS PESSOAS QUE VIERAM NA AULA DA SEMANA ANTES DO NATAL.

PRA QUE NÓS QUEREMOS RETAS PARAMETRIZADAS?

ANTES DA EXPLICAÇÃO GERAL, UM EXERCÍCIO.

NO EXERCÍCIO ANTERIOR VOCÊS MARCARAM EM ALGUNS PONTOS DAS RETAS OS VALORES DE t E u ASSOCIADOS A ELES. AGORA VAMOS MARCAR OUTROS VALORES.

1) ESCOLHA VÁRIOS PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS EM CADA UMA DAS RETAS ABAIXO E MARQUE SOBRE ELE O VALOR DE $d(P,B)^2$, ONDE P É O PONTO DA RETA.

a) $r = \{(0,4) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (3,4)$

b) $r = \{(0,4) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (3,3)$

c) $r = \{(0,4) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (3,0)$

d) $r = \{(2,0) + t\overrightarrow{(0,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (4,2)$

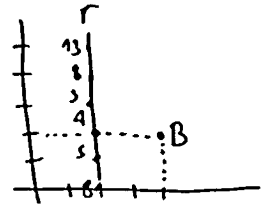
e) $r = \{(0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (2,2)$

f) $r = \{(0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (1,0)$

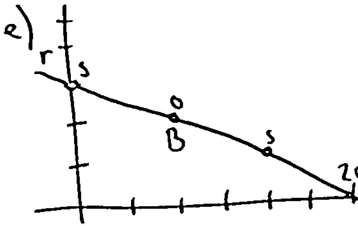
TRUQUE: CHAME DE C O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B.

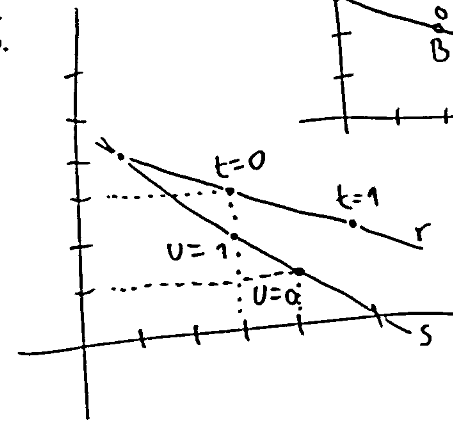
PRA CASA, URGENTE! RESOLVA OS EXERCÍCIOS LÁ DA ESQUERDA (ELES FORAM MATÉRIA DO DIA 21/DEZ - CONSULTE OS PDFS DOS QUADROS SE QUISER!) E CERTIFIQUE-SE DE QUE VOCÊ SABE RESOLVER SISTEMAS COMO AQUELES BEM E RÁPIDO.

1d)

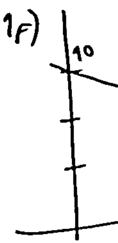


1e)

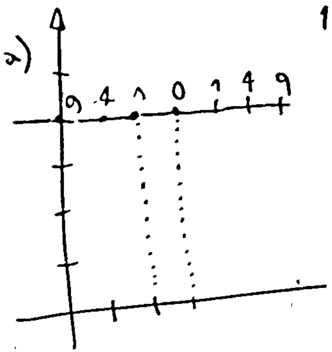




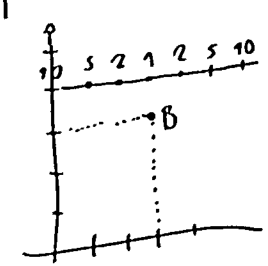
1f)



1a)

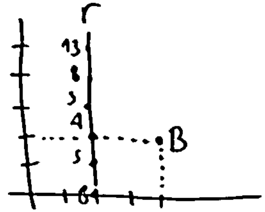


1b)

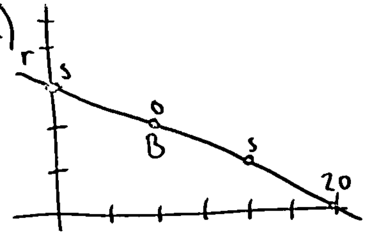


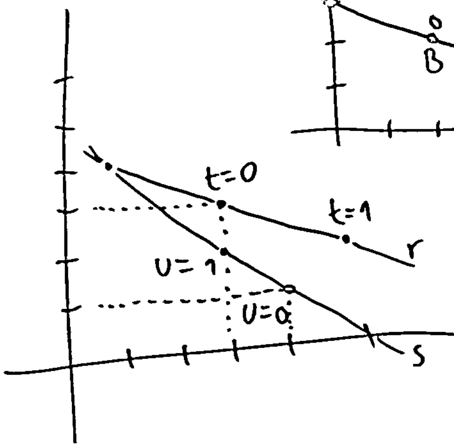
...ENTE!
...EXERCÍCIOS
...RDA (ELES
...IA DO
... CONSULTE
...QUADROS
...) E
...SE DE
...RE
...STEMAS
...ES
...DO.

1d)

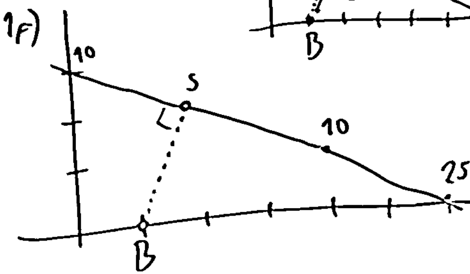


1e)

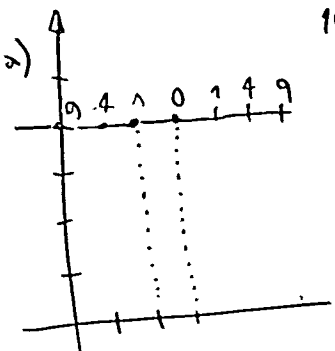




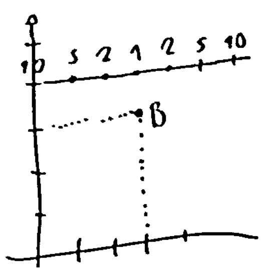
1f)



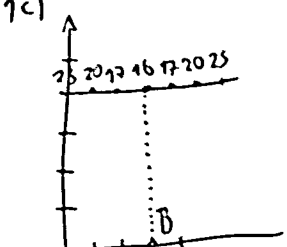
1a)



1b)



1c)



PRIMEIRA UTILIDADE PARA RETAS PARAMETRIZADAS

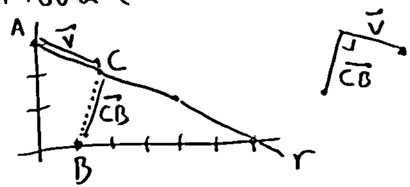
SEJA $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

SEJA $B\in\mathbb{R}^2$.

SEJA C O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B.

TEOREMA: $\overrightarrow{CB}\perp\vec{V}$.

FIGURA (INSPIRADA NO 1F):



SEJA $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

SEJA $B\in\mathbb{R}^2$.

DIGAMOS QUE QUEREMOS ENCONTRAR O PONTO $C\in r$ MAIS PRÓXIMO DO PONTO B.

PODEMOS FAZER ISSO ENCONTRANDO O t CERTO.

LEMBRANDO DA SEGUNDA COLUNA, SEJA

$$P=A+t\vec{V}.$$

VAMOS PROCURAR t TAL QUE $\overrightarrow{PB}\perp\vec{V}$,

OU SEJA, $B-P\perp\vec{V}$,

OU SEJA $(B-P)\cdot\vec{V}=0$,

OU SEJA $(B-(A+t\vec{v}))\cdot\vec{V}=0$.

ISTO DÁ UMA EQUAÇÃO (EM t) QUE PODEMOS RESOLVER.

$\boxed{\text{GA } 4/\text{JAN}/2015}$

EXEMPLO (INSPIRADO NO 1f):

SEJAM

$$r = \{\underbrace{(0,3)}_{A} + t\underbrace{\overrightarrow{(2,-1)}}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$B = (1,0).$$

ENTÃO
$$\begin{aligned} P &= A + t\vec{v} \\ &= (0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \\ &= (2t, 3-t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - P &= (1,0) - (2t, 3-t) \\ &= \overrightarrow{(1-2t, t-3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B-P)\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{(1-2t, t-3)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} \\ &= 2(1-2t) - (t-3) \\ &= 2 - 4t - t + 3 \\ &= 5 - 5t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B-P)\cdot\vec{v} = 0 &\Rightarrow t = 1 \\ &\Rightarrow P = A + 1\vec{v} \\ &\quad\;\; = (0,3) + \overrightarrow{(2,-1)} \\ &\quad\;\; = (2,2) \end{aligned}$$

$$\boxed{C = (2,2).}$$

$\boxed{\text{GA 6/JAN/2016}}$

Sejam $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$B \in \mathbb{R}^2$?

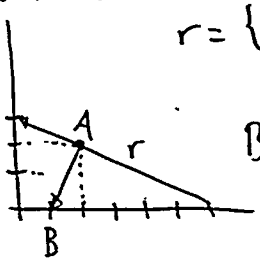
Qual é o ponto de r mais próximo de B? E qual é o t associado a ele?

Vamos começar com uma coisa mais básica.
Sejam $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$B \in \mathbb{R}^2$.

Teorema: Se $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$ então $d(A+t\vec{v}, B)^2 = \|t\vec{v}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2$ $(\forall t)$. $(\star)$

Exemplo:

$$r = \{\underbrace{(2,2)}_{A} + t\underbrace{(-2,1)}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\},$$



$B = (1,0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) - (1,0)$
$= (-1,-2)$

$\vec{v} = (-2,1)$

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2,1) \cdot (-1,-2)$
$= 2 - 2$
$= 0,$

$\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$.

$t = 1 \Rightarrow$

$d(A+1\vec{v}, B)^2 = \ldots$

$\|1\vec{v}\| = 2^2 + 1 \ldots$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1^2 \ldots$

Na 1ª list...
o problem...
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \ldots$

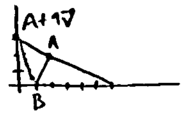
A gent...
era v...

$d(A+ \ldots$

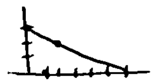
$d(A+ \ldots$

$t=1 \Rightarrow$

$$d(A+1\vec{v},B)^2 = 1^2+3^2 = 10$$



$$\|1\vec{v}\| = 2^2+1^2 = 5$$
$$\|\vec{AB}\|^2 = 1^2+2^2 = 5$$



Na 1ª lista do Reginaldo o problema 2g era:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|$$

A gente provou que isto era verdade... Então:

$$d(A+t\vec{v},B) = \|B-(A+t\vec{v})\| = \|(B-A)+t\vec{v}\| = \|\vec{AB}+t\vec{v}\|$$

$$\begin{aligned} d(A+t\vec{v},B)^2 &= \|\vec{AB}+t\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB}\cdot t\vec{v} + \|t\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + 2t(\vec{AB}\cdot\vec{v}) + \|t\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + 2t\cdot 0 + \|t\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + \|t\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Pra casa: Compare isto com as demonstrações dos problemas da lista do Reginaldo.

(Isto demonstra o (☆)).

A gente vai ver algumas demonstrações hoje.

Uma coisa pendente: Lista do Reginaldo, 2c:

$$\|\,\|\vec{u}\|\,\vec{v}\,\| = \|\,\|\vec{v}\|\,\vec{u}\,\|$$

Isto é consequência fácil de um <u>lema</u>...

(Um lema é um mini-teorema que a gente prova pra demonstrar um teorema - a gente <u>usa</u> o lema na demonstração do teorema).

Lema (☆☆):
Para $k,a,b \in \mathbb{R}$,
$$\|k\,\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$$

Obs: calculem:

$\|2\,\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$ $= 10$

$2\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$ $= 10$

$\|(-2)\,\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$ $= 10$

$(-2)\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$ $= -10$

$|-2|\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ?$ $= 10$

Repare:

$$\begin{aligned} \|k\,\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(ka,kb)}\| \\ &= \sqrt{(ka)^2+(kb)^2} \\ &= \sqrt{k^2a^2+k^2b^2} \\ &\overset{(!)}{=} \sqrt{k^2(a^2+b^2)} \\ &\overset{(!)}{=} \sqrt{k^2}\,\sqrt{a^2+b^2} \\ &\overset{(!)}{=} |k|\,\sqrt{a^2+b^2} = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\| \end{aligned}$$

$$|k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\sqrt{a^2+b^2}$$

Corolário (☆☆☆)
(Um corolário é uma consequência mais ou menos óbvia de um teorema, ou lema):

Para $k\in\mathbb{R}$, $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$,
$$\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$$

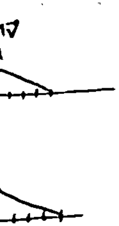
Dem: Seja $\overrightarrow{(a,b)} = \vec{v}$.

Então:

$$\|\underbrace{\|\vec{u}\|}_{k}\,\vec{v}\,\| = |\underbrace{\|\vec{u}\|}_{k}|\,\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

$$\|\underbrace{\|\vec{v}\|}_{k}\,\underbrace{\vec{u}}_{\vec{v}}\,\| = |\,\|\vec{v}\|\,|\,\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

Ma
Sa
C
An
en
$r=$
$r'=$
r''
ex
$r,$
de



$\vec{v}$

$-\|\vec{v}\|$

to

ão:

$+t\vec{v})\|$

$+t\vec{v}\|$

$t\vec{v}\|$

$-t\vec{v}\|^2$

$+2\overrightarrow{AB}\cdot t\vec{v} + \|t\vec{v}\|^2$

$2t(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}) + \|t\vec{v}\|^2$

$+2t\cdot 0 \quad + \|t\vec{v}\|^2$

$2 \quad + \|t\vec{v}\|^2$

e isto com as
problemas
naldo.

o (☆)).

A gente vai ver algumas demonstrações hoje.

Uma coisa pendente:
Lista do Reginaldo, 2c:

$\|\,\|\vec{u}\|\,\vec{v}\,\| = \|\,\|\vec{v}\|\,\vec{u}\,\|$

Isto é consequência fácil de um <u>lema</u>...

(Um lema é um mini-teorema que a gente prova pra demonstrar um teorema — a gente <u>usa</u> o lema na demonstração do teorema).

Lema (☆☆):
Para $k, a, b \in \mathbb{R}$,
$\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

Obs:
Calculem:

$\|2\overrightarrow{(3,4)}\| = ? \qquad = 10$

$2\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ? \qquad = 10$

$\|(-2)\overrightarrow{(3,4)}\| = ? \qquad = 10$

$(-2)\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ? \qquad = -10$

$|-2|\,\|\overrightarrow{(3,4)}\| = ? \qquad = 10$

Repare:

$$\begin{aligned}
\|k\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(ka,kb)}\| \\
&= \sqrt{(ka)^2+(kb)^2} \\
&= \sqrt{k^2a^2+k^2b^2} \\
&\overset{(!)}{=} \sqrt{k^2(a^2+b^2)} \\
&\overset{(!)}{=} \sqrt{k^2}\,\sqrt{a^2+b^2} \\
&\overset{(!)}{=} |k|\sqrt{a^2+b^2} = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|
\end{aligned}$$

$|k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\sqrt{a^2+b^2}$

Corolário (☆☆☆)
(Um corolário é uma consequência mais ou menos óbvia de um teorema, ou lema):

Para $k \in \mathbb{R}$, $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$,
$\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$

Dem: seja $\overrightarrow{(a,b)} = \vec{v}$.

Então:

$$\begin{aligned}
\|\underbrace{\|\vec{u}\|}_{k}\,\vec{v}\,\| &= \big|\underbrace{\|\vec{u}\|}_{k}\big|\;\|\vec{v}\| \\
&= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\underbrace{\|\vec{v}\|}_{k}\,\underbrace{\vec{u}}_{\vec{v}}\,\| &= \big|\,\|\vec{v}\|\,\big|\;\|\vec{u}\| \\
&= \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| \\
&= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|
\end{aligned}$$

Mais um corolário:
Sabemos que $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$.

Então:
$$\begin{aligned}
\|k\vec{v}\|^2 &= (|k|\,\|\vec{v}\|)^2 \\
&= |k|^2\,\|\vec{v}\|^2 \\
&= k^2\,\|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

E lá no teorema (☆), com $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$,
$$\begin{aligned}
d(A+t\vec{v}, B)^2 &= \|t\vec{v}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 \\
&= t^2\,\|\vec{v}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|
\end{aligned}$$

Antes da gente usar isso pra encontrar o ponto de r mais próximo de B...

$r = \{(2,2) + t\overrightarrow{(-2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r' = \{(2,2) - 2\overrightarrow{(-2,1)} + t\overrightarrow{(-2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \{(6,0) + t\overrightarrow{(-2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r'' = \{(6,0) + t\overrightarrow{(-6,-3)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Exercício: representem graficamente r, r', r'', e indiquem os pontos delas correspondentes a $t=0$ e $t=1$.

GA 6/JAN/2016

SEJAM
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=5-2x\}$,
$S'=\{(x,5-2x) \mid x\in\mathbb{R}\}$,
$S''=\{(0,5)+t\overrightarrow{(1,-2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

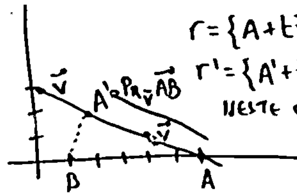
REPRESENTE GRAFICAMENTE
S, S', S''.

AGORA SEJAM
$r=\{(2,5)+t\overrightarrow{(3,6)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$r'=\{(2,5)+t\overrightarrow{(1,2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$r''=\{(0,1)+t\overrightarrow{(1,2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$r'''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1+2x\}$ $r''''=\{(x,1+2x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

ISTO MOSTRA UM MODO DE TRANSFORMAR UMA RETA PARAMETRIZADA NUMA DADA POR UMA EQUAÇÃO CARTESIANA.

EXERCÍCIO (MAIS DIFÍCIL, FAÇAM EM GRUPO):
SEJA $r=\{(2,7)+t\overrightarrow{(-3,9)} \mid t\in\mathbb{R}\}$.
ENCONTRE A EQUAÇÃO CARTESIANA DESTA r.

IDÉIA IMPORTANTE:



$r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$r'=\{A'+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$???
NESTE CASO $A'=A+2\vec{v}$
(DÁ PRA VER NO OLHÔMETRO)

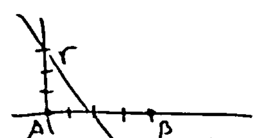
NA AULA QUE VEM:
COMO CALCULAR O 2 ("???")
SEM SER NO OLHÔMETRO...

$$2=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

$$\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$$

$$A'=A+\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$$

... E A GENTE VAI VER QUE DA MESMA FORMA QUE A GENTE ENCONTROU O t "CERTO" AQUI (2) TEM VÁRIOS OUTROS PROBLEMAS QUE A GENTE PODE RESOLVER "ENCONTRANDO O t CERTO"...
P. EX., NAS LISTAS DA BEL TEM PROBLEMAS TIPO: ENCONTRE $C\in r$ TAL QUE A ÁREA DO TRIÂNGULO ABC SEJA 10.



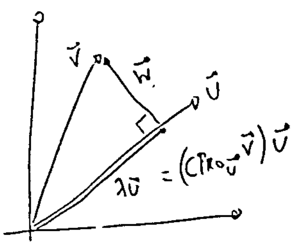
NA AULA QUE VEM A GENTE VAI MUITOS PROBLEMAS DA ANA ISABEL DE UMA VEZ MUITO RÁPIDO NA AULA E VOCÊS VÃO TER QUE ESTUDAR ELES DIREITO EM CASA (LISTAS 1, 2, E 3)

GA 11/JAN/2016

ESTAMOS SEM XEROX!
O CONTRATO ANTERIOR ACABOU E AINDA NÃO HÁ UM NOVO PERMISSIONÁRIO...
EU TROUXE UMAS CÓPIAS DAS 3 PRIMEIRAS LISTAS DE EXERCÍCIOS DA ANA ISABEL — COMPARTILHEM-NAS, NÃO ESCREVAM NADA NELAS, E ME DEVOLVAM NO FINAL DA AULA.

ANTES DA GENTE VER OS EXERCÍCIOS DAS LISTAS VAMOS VOLTAR A UM ASSUNTO DA AULA PASSADA.

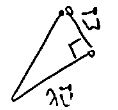
VAMOS DEFINIR $\mathrm{Pro}_{\vec{u}}\vec{v}$ E $\mathrm{CPro}_{\vec{u}}\vec{v}$ ("PROJEÇÃO NO OLHÔMETRO" E "COEFICIENTE DA PROJEÇÃO NO OLHÔMETRO") DA SEGUINTE FORMA:



$\mathrm{Pro}_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (UM MÚLTIPLO DE $\vec{u}$)

$\lambda = \mathrm{CPro}_{\vec{u}}\vec{v}$

E λ É TAL QUE ESTE ÂNGULO É 90°.



OBS: $\vec{w} = \vec{v} - \lambda\vec{u}$.

CALCULE (FAÇA OS GRÁFICOS!):

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\lambda\,(=\mathrm{CPro}_{\vec{u}}\vec{v})$	$\lambda\vec{u}\,(=\mathrm{Pro}_{\vec{u}}\vec{v})$	$\vec{w}\,(=\vec{v}-\lambda\vec{u})$
a)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(1,3)}$	$1/2$	$\overrightarrow{(1,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$
b)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(2,6)}$	1		
c)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(4,1)}$	2		
d)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	0		
e)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(-1,-3)}$	$-1/2$		
f)	$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(1,2)}$			
g)	$\overrightarrow{(0,4)}$	$\overrightarrow{(1,2)}$			
h)	$\overrightarrow{(1,1)}$	$\overrightarrow{(0,2)}$			
i)	$\overrightarrow{(1,1)}$	$\overrightarrow{(2,0)}$	1		
j)	$\overrightarrow{(1,1)}$	$\overrightarrow{(1,0)}$	$1/2$		
k)	$\overrightarrow{(2,1)}$	$\overrightarrow{(0,5)}$	1		
l)	$\overrightarrow{(2,1)}$	$\overrightarrow{(0,4)}$			

TERMINEM O RESTO EM CASA!

SE VOCÊ TIVER OBTIDO O λ CERTO, VOCÊ VAI TER $\lambda\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ ...

MAS REPARE QUE $\lambda\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ TAMBÉM COSTUMA TER OUTRA SOLUÇÃO, QUE É $\lambda=0$.

A OUTRA SOLUÇÃO É A SOLUÇÃO DE $(\vec{u}\cdot\vec{v}) - \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 0$ ...

$$\lambda\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$$
$$\lambda\vec{u}\cdot(\vec{v}-\lambda\vec{u}) = 0$$
$$\lambda\vec{u}\cdot\vec{v} - \lambda\vec{u}\cdot\lambda\vec{u} = 0$$
$$\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) - \lambda^2(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 0$$
$$\lambda((\vec{u}\cdot\vec{v}) - \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u})) = 0$$

QUE É:

$$\lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	λ
a)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(3,3)}$	$3/2$
b)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$	1
c)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(1,3)}$	$1/2$
d)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	0
e)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(-1,3)}$	$-1/2$

DEF:
$$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$
$$\mathrm{CPr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

ISTO É A "VERSÃO CONTAS" DO QUE VOCÊS ESTAVAM FAZENDO NO OLHÔMETRO.

Se você tiver obtido o λ certo, você vai ter $\lambda\vec{U}\cdot\vec{W}=0$ ...

Mas repare que $\lambda\vec{U}\cdot\vec{W}=0$ também costuma ter outra solução, que é $\lambda=0$.

A outra solução é a solução de $(\vec{U}\cdot\vec{V})-\lambda(\vec{U}\cdot\vec{U})=0$ ...

$$\lambda\vec{U}\cdot\vec{W}=0$$
$$\lambda\vec{U}\cdot(\vec{V}-\lambda\vec{U})=0$$
$$\lambda\vec{U}\cdot\vec{V}-\lambda\vec{U}\cdot\lambda\vec{U}=0$$
$$\lambda(\vec{U}\cdot\vec{V})-\lambda^2(\vec{U}\cdot\vec{U})=0$$
$$\lambda((\vec{U}\cdot\vec{V})-\lambda(\vec{U}\cdot\vec{U}))=0$$

Que é:
$$\lambda(\vec{U}\cdot\vec{U})=(\vec{U}\cdot\vec{V})$$
$$\lambda=\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$$

	$\vec{U}$	$\vec{V}$	λ	$\vec{W}(=\vec{V}-\lambda\vec{U})$
a)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(3,3)}$	$3/2$	$\overrightarrow{(0,3)}$
b)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(2,3)}$	1	
c)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(1,3)}$	$1/2$	
d)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	0	
e)	$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(-1,3)}$	$-1/2$	

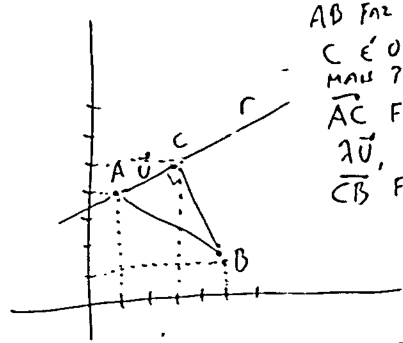
Def: $$Pr_{\vec{U}}\vec{V}=\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}\vec{U}$$
$$CPr_{\vec{U}}\vec{V}=\frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$$

Isto é a "versão contas" do que vocês estavam fazendo no olhômetro.

Repare que em todos os desenhos até agora nós estávamos apoiando os vetores na origem pra desenhá-los...

Mas num problema como
$$r=\{\underbrace{(1,4)}_{A}+t\underbrace{\overrightarrow{(2,1)}}_{\vec{U}} \mid t\in\mathbb{R}\},$$
$B=(5,1)$

faz mais sentido apoiar $\vec{U}$ e $\overrightarrow{AB}$ em $(1,4)$...



$\overrightarrow{AB}$ faz papel de $\vec{V}$,
C é o ponto de r mais próximo de B,
$\overrightarrow{AC}$ faz o papel de $\lambda\vec{U}$,
$\overrightarrow{CB}$ faz o papel de $\vec{W}$.

Exercício:
Sejam $r=\{(1,4)+t\overrightarrow{(1,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$B=(6,3)$
Encontre o ponto de r mais próximo de B. Sugestão: use olhômetro e fórmulas.

Pra casa:
Façam os seguintes problemas das listas da Ana Isabel:
- Lista 1: problemas 5, 11, 12
- Lista 3: problemas 8, 15.

GA 13/JAN/2016

Só temos esta aula e mais duas antes da prova!!! Fiquem concentrados, façam MUITOS exercícios em casa, e tirem dúvidas nas aulas de monitoria! A matéria vai ser tudo que aparece nas listas 1, 2 e 3!!!

Devolvam as cópias das listas no final da aula!!!

Algumas coisas importantes que estão nas listas e a gente ainda não viu:

- Ângulos
- Bissetrizes
- Distância entre ponto e reta
- Círculos
- Intersesão de círculo e reta
- Tangência
- Posições relativas entre retas
- Vetores unitários ("versores").

Um vetor $\vec{V}$ é unitário se $\|\vec{V}\|=1$.
Pra $\vec{V}\neq\vec{0}$ podemos "unitarizá-lo"...
Seja $\vec{V}' = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$. Então $\vec{V}'$ é unitário,
e $\vec{V} = \|\vec{V}\|\,\vec{V}'$. Exemplos: Se $\vec{V}=\overrightarrow{(0,4)}$ então $\vec{V}'=\overrightarrow{(0,1)}$.
Se $\vec{W}=\overrightarrow{(-3,4)}$ então $\vec{W}'=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

Ângulos

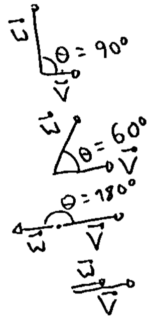
Como é que a gente mede $\measuredangle(\vec{V},\vec{W})$?

Truques:

$\vec{V}\cdot\vec{W} = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{W}\|\cdot\cos\theta$ (*)

onde $\theta = \measuredangle(\vec{V},\vec{W})$.

Exemplos:



$\theta=90°$ $\cos\theta=0$

$\theta=60°$ $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=180°$ $\cos\theta=-1$

$\theta=0°$ $\cos\theta=1$

Uma "quase-demonstração" desta fórmula:

$(a\vec{V})\cdot(b\vec{W}) = ab(\vec{V}\cdot\vec{W})$

Em particular, se $\|\vec{V}'\|=\|\vec{W}'\|=1$ então

$\underbrace{(a\vec{V}')}_{\text{compr } a}\cdot\underbrace{(b\vec{W}')}_{\text{compr } b} = ab\underbrace{(\vec{V}'\cdot\vec{W}')}_{\text{dois vetores unitários.}}$

Fato:

Se $\|\vec{V}'\|=\|\vec{W}'\|=1$
então $\vec{V}'\cdot\vec{W}' = \cos\measuredangle(\vec{V}',\vec{W}')$

Como é que a gente verifica isto?

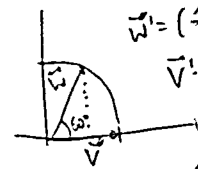
Se o $\vec{V}'=\overrightarrow{(1,0)}$
e o $\vec{W}'=\overrightarrow{(a,b)}$
então $\|\vec{W}'\|=1$

$\|\vec{W}'\| = \sqrt{\vec{W}'\cdot\vec{W}'}$

$\vec{W}'\cdot\vec{W}'=1$

$\vec{W}'\cdot\vec{W}' = a^2+b^2$

e $a^2+b^2=1$.



$\vec{W}' = \overrightarrow{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\vec{V}'\cdot\vec{W}' = \overrightarrow{(1,0)}\cdot\overrightarrow{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.

Caso geral (com $\vec{V}'=\overrightarrow{(1,0)}$):

$\vec{W} = \overrightarrow{(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta)}$

$\vec{V}\cdot\vec{W} = 1\cdot\cos\theta + 0\cdot\mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta$.

Caso geral mesmo ($\|\vec{V}'\|=\|\vec{W}'\|=1$):

OBS: aqui eu não vou fazer uma demonstração formal - a formal exige identidades trigonométricas...

Lembre que:

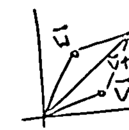
$\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 = (\vec{V}+\vec{W})\cdot$
$= \vec{V}\cdot\vec{V}+$
$= \|\vec{V}\|^2 +$

$\|\vec{V}+\vec{W}\|^2 - \|\vec{V}\|^2 -$

$\vec{V}\cdot\vec{W} = \|\vec{V}+\vec{W}\|^2$

Moral:

Digamos q



Sabendo
a gente
$\vec{V}\cdot\vec{W}$!

Exercíc
Sejam

Calcule

e usem
pra obt
compare
com $\vec{V}\cdot$

ATO:

Se $\|\vec{v}'\| = \|\vec{w}'\| = 1$

então $\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \cos \measuredangle(\vec{v}', \vec{w}')$

Como é que a gente verifica isto?

Se o $\vec{v}' = \overrightarrow{(1,0)}$

e o $\vec{w}' = \overrightarrow{(a,b)}$

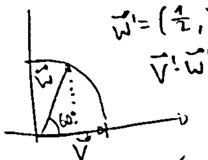
então $\|\vec{w}'\| = 1$

$\quad = \sqrt{\vec{w}' \cdot \vec{w}'}$

$\vec{w}' \cdot \vec{w}' = 1$

$\quad = a^2 + b^2$

e $a^2 + b^2 = 1$.



$\vec{w}' = \overrightarrow{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \overrightarrow{(1,0)} \cdot \overrightarrow{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.

Caso geral (com $\vec{v}' = \overrightarrow{(1,0)}$):

$\vec{w} = \overrightarrow{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \operatorname{sen}\theta$
$\quad = \cos\theta$.

Caso geral mesmo ($\|\vec{v}'\| = \|\vec{w}'\| = 1$):

OBS: Aqui eu não vou fazer uma demonstração formal - a formal exige identidades trigonométricas...

Lembre que:

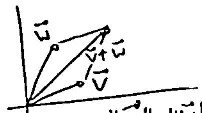
$$\begin{aligned}\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 &= (\vec{v}+\vec{w}) \cdot (\vec{v}+\vec{w}) \\ &= \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{w} + \|\vec{w}\|^2\end{aligned}$$

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 = 2\vec{v}\cdot\vec{w}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2}{2} \quad (**)$$

Moral:

Digamos que



sabendo $\|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|, \|\vec{v}+\vec{w}\|$ a gente consegue calcular $\vec{v}\cdot\vec{w}$!

Exercício:

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(3,0)}$
$\quad \vec{w} = \overrightarrow{(4,3)}$.

Calculem $\vec{v}+\vec{w}$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{v}+\vec{w}\|$,
$\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$,
e usem a fórmula acima (**)
pra obter $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
Comparem o seu resultado com $\vec{v}\cdot\vec{w} = 3\cdot4+0\cdot3 = 12$.

Resp:

$\vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{(7,3)}$

$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = 49+9 = 58$

$\|\vec{v}+\vec{w}\| = \sqrt{58}$

$\|\vec{v}\|^2 = 9$

$\|\vec{v}\| = 3$

$\|\vec{w}\|^2 = 16+9 = 25$

$\|\vec{w}\| = 5$

$$\frac{\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2}{2} = \frac{58 - 9 - 25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

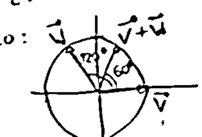
Mais um exercício:

Digamos que $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \|\vec{v}+\vec{w}\| = 1$.

Calcule $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2}{2} = \frac{1-1-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Exemplo:



Se $\vec{w} = \overrightarrow{(\cos 120°, \operatorname{sen} 120°)}$
$\quad = \overrightarrow{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

Se eu pedisse pra você "calcule $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ sabendo que $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 1$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = -\frac{1}{2}$"

aí você teriam que usar a fórmula (*)

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta$

$-\frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

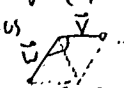
$\boxed{\theta = \arccos -\frac{1}{2}}$

Vimos o caso

...

Vamos passar pro caso geral, p.ex,

Se a gente rodar esta segunda figura pra fazer $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$, obtemos



...

Truque: $\|\vec{v}+\vec{w}\|$ não muda!

GA 13/JAN/2016

SÓ TEMOS ESTA AULA E MAIS DUAS ANTES DA PROVA!!! FIQUEM CONCENTRADOS, FAÇAM <u>MUITOS</u> EXERCÍCIOS EM CASA, E TIREM DÚVIDAS NAS AULAS DE MONITORIA! A MATÉRIA VAI SER TUDO QUE APARECE NAS LISTAS 1, 2 E 3!!!

DEVOLVAM AS CÓPIAS DAS LISTAS NO FINAL DA AULA!!!

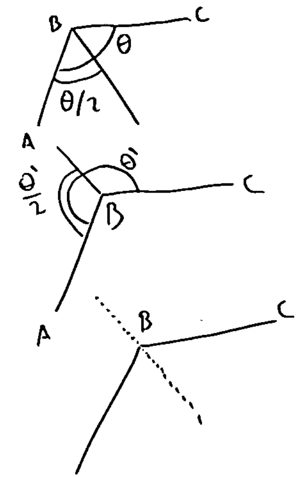
ALGUMAS COISAS IMPORTANTES QUE ESTÃO NAS LISTAS E A GENTE AINDA NÃO VIU:

- ÂNGULOS
- BISSETRIZES
- DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA
- CÍRCULOS
- INTERSEÇÃO DE CÍRCULO E RETA
- TANGÊNCIA
- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS
- VETORES UNITÁRIOS ("VERSORES")

UM VETOR $\vec{v}$ É UNITÁRIO SE $\|\vec{v}\|=1$. PRA $\vec{v}\neq\vec{0}$ PODEMOS "UNITARIZÁ-LO"... SEJA $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. ENTÃO $\vec{v}'$ É UNITÁRIO, E $\vec{v}=\|\vec{v}\|\,\vec{v}'$. EXEMPLOS: SE $\vec{v}=\overrightarrow{(0,4)}$ ENTÃO $\vec{v}'=\overrightarrow{(0,1)}$.
SE $\vec{w}=\overrightarrow{(-3,4)}$ ENTÃO $\vec{w}'=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

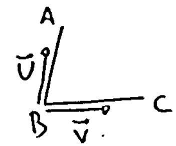
BISSETRIZES

A BISSETRIZ DE UM ÂNGULO $A\hat{B}C$ É UMA SEMI-RETA (OU RETA) QUE CORTA O ÂNGULO $A\hat{B}C$ EM DOIS.



ÀS VEZES VOCÊS VÃO VER PROBLEMAS COMO "ENCONTRE O VETOR QUE DIVIDE O ÂNGULO ENTRE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ EM DOIS". (AÍ ESCOLHER O ÂNGULO "INTERNO" - O QUE FAZ MENOS DE 180°).

TRUQUE PRA CALCULAR BISSETRIZES:



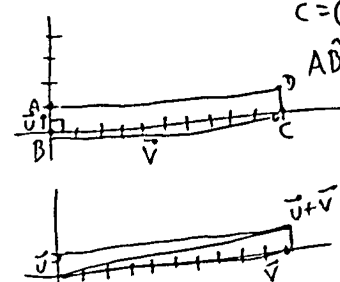
<u>SE $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$!!</u>

ENTÃO $\vec{u}+\vec{v}$ BISSECTA O ÂNGULO ENTRE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ (OU ENTRE BA E BC, OU $A\hat{B}C$).

A CONDIÇÃO $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ É <u>MUITO</u> IMPORTANTE!

EXEMPLO:

$A=(0,1)$
$B=(0,0)$
$C=(10,1)$
$A\hat{B}C=90°$



NESTE CASO O $\vec{u}+\vec{v}$ ESTÁ DIVIDINDO UM ÂNGULO DE 90° EM UM ÂNGULO BEM PEQUENO E UM BEM PRÓXIMO DE 90°...

POSIÇÕES RELATIVA[S]
ENTRE RETAS

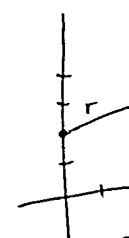
r E s SÃO <u>COINCI[DENTES]</u> SE TÊM OS MESMO[S ...]

r E s SÃO <u>CONCO[RRENTES]</u> SE r ∩ s TEM UM [...]

E SÃO PARALELAS [...] COINCIDENTES) [...]

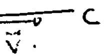
REPARE:

SE $r=\{(0,2$ [...]
$s=\{(3,$ [...]



DUAS R[...] VETOR[...] PARALE[...] SER [...]

...que pra calcular
...etrizes:



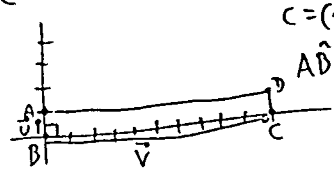
$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$

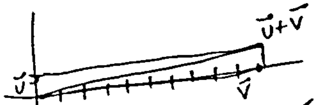
...ntão $\vec{U}+\vec{V}$ bissecta
... ângulo entre $\vec{U}$ e $\vec{V}$
ou entre BA e BC,
ou $A\hat{B}C$).

A condição $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$
é muito importante!

Exemplo:

$A = (0,1)$
$B = (0,0)$
$C = (10,1)$
$A\hat{B}C = 90°$





Neste caso o $\vec{U}+\vec{V}$ está dividindo
um ângulo de 90° em um ângulo
bem pequeno e um bem próximo
de 90°...

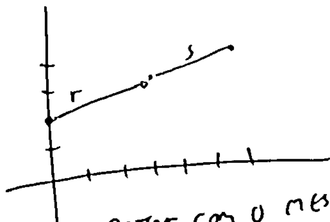
Posições relativas

entre retas

r e s são **coincidentes**
se têm os mesmos pontos;
r e s são **concorrentes**
se $r \cap s$ tem um ponto só;
e são paralelas (e não
coincidentes) se $r \cap s = \emptyset$.

Repare:

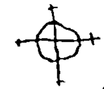
Se $r = \{(0,2) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$s = \{(3,3) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$



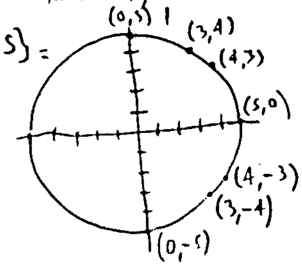
Duas retas com o mesmo
vetor diretor são
paralelas... mas podem
ser coincidentes ou não.

Círculos:

Exemplos:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} =$ 

(centro (0,0),
raio 1)

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\} =$ 

Grande truque pra desenhar círculos dadas as suas equações:

1) Procure os "quatro pontos óbvios" - o ponto mais baixo, o ponto mais alto, o mais à esquerda, e o mais à direita.

2) Como fazer isto algebricamente?
Exemplo:
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overbrace{(x-3)^2}^{4} + \overbrace{(y-4)^2}^{0} = 4\}$$
Truque: procure os jeitos de fazer $(x-3)^2 = 4$ e $(y-4)^2 = 0$,
depois os jeitos de fazer
$(x-3)^2 = 0$ e $(y-4)^2 = 4$.

$(y-4)^2 = 0$
$y - 4 = 0$
$y = 4$
$(x-3)^2 = 4$
$x - 3 = \pm\sqrt{4}$
$x = 3 \pm \sqrt{4}$
$= 3 \pm 2$
$x = 5$ ou $x = 1$.
$(5,4) \in S$?

GA 13/JAN/2016

O PROBLEMA 22 DA LISTA 3 TEM QUATRO EQUAÇÕES DE CÍRCULOS.

d) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ (☆☆☆)

ISTO ESTÁ NUM FORMATO DIFERENTE DO QUE VIMOS NO EXEMPLO...

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-8y+16)=4$$

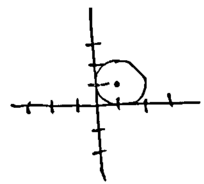
$$x^2-6x+y^2-8y+9+16-4=0$$

$$x^2\underbrace{-6x}_{\substack{-6=\\2\cdot(-3)}}+y^2\underbrace{-8y}_{\substack{-8=\\2\cdot(-4)}}+21=0$$

EXERCÍCIO:
CONVERTA A EQUAÇÃO
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$
PRO FORMATO
$(x-a)^2+(x-b)^2=R^2$,
ENCONTRE OS 4 PONTOS ÓBVIOS DO CÍRCULO E TESTE-OS.

HIP: (☆☆☆) É EQUIVALENTE A
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ (☆☆☆☆).

$$S'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-1)^2=1\}.$$



QUATRO PONTOS ÓBVIOS:
$(1,2)\in S'$
$(0,1)\in S'$
$(2,1)\in S'$
$(1,0)\in S'$

$$S''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x-2y+1=0\}$$

$(1,2)\in S''$? $\underbrace{1^2+2^2}_{5}\underbrace{-2\cdot1-2\cdot2}_{-6}+1=0$? SIM!

$(0,1)\in S''$? $0^2+1^2-2\cdot0-2\cdot1+1=0$? SIM!

$(2,1)\in S''$? SIM

$(1,0)\in S''$? SIM

S' E S'' TÊM QUATRO PONTOS EM COMUM...

S' E S'' TÊM CENTRO EM $(1,1)$ E RAIO 1.

$S'=S''$ - AMBOS TÊM

PRA CASA: REPRESENTE GRAFICAMENTE OS CÍRCULOS DO PROBLEMA 22 DA LISTA 3.

(E FAÇAM TODOS OS EXERCÍCIOS DAS LISTAS QUE VOCÊS PUDEREM!!!!!!!!!!)

GA 18/JAN/2016

Coisas que faltam a gente ver (ou rever) e que são necessárias pra fazer problemas das três primeiras listas de exercícios:

- Distância entre ponto e reta
- Interseção de reta e círculo
- Tangência entre reta e círculo
- Áreas

(e outras)

Sejam

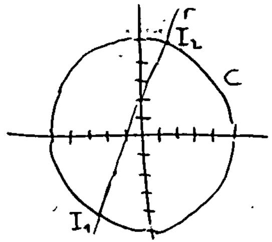
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=25\}$,

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+2\}$.

Encontre as interseções de C e r.

(Comece representando C e r graficamente e tente obter os dois pontos, ou aproximações pra eles, no olhômetro).

Dica: tente substituir o y em $x^2+y^2=25$ por $2x+2$.



$I_1 \approx (-3,-4)$

$I_2 \approx (1.8, 4.9)$

(Obs: na prova a gente só quer resultados exatos - vocês só vão poder usar aproximações pra fazer gráficos).

Se $I_2 = (x,y)$ então x e y obedecem

$x^2+y^2=25$

$y = 2x+2$

$x^2+(2x+2)^2=25$

$x^2+4x^2+8x+4=25$

$\underset{a}{5}x^2 + \underset{b}{8}x \underbrace{-21}_{c} = 0$

$x^2+\frac{8}{5}x-\frac{21}{5}=0$

$a=5$
$b=8$
$c=-21$

$\Delta = \sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{64-4\cdot5\cdot(-21)}$
$= \sqrt{64-20(-21)}$
$= \sqrt{64+420}$
$= \sqrt{484} = 22$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \frac{-8\pm22}{10}$

$\frac{-8-22}{10} = -\frac{30}{10} = -3 \Rightarrow y = 2(-3)+2 = -6+2 = -4$

$\frac{-8+22}{10} = \frac{14}{10} = 1.4 \Rightarrow y = 2(1.4)+2 = 2.8+2 = 4.8$

Moral:

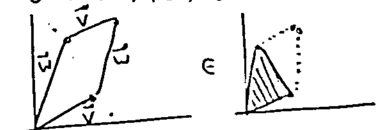
Às vezes nossos problemas vão ter duas soluções;

às vezes a gente vai começar encontrando a coordenada x (ou y) da solução.

Determinantes

Motivação:

Qual a área disto?



Truque: determinantes calculam áreas (com sinal).

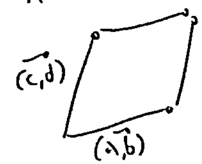
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: matriz

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$: determinante da matriz

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

Fato:

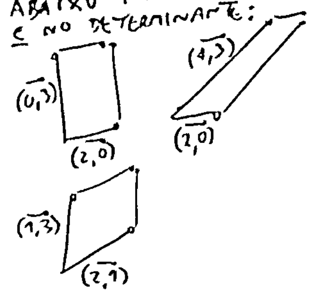
A área disto



é o módulo de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\left(\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|\right)$

Exercício: calcule as áreas abaixo no olhômetro e no determinante:

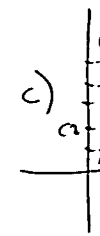


Calculem ...
dos tri...

Em cad...
casos ...

a)

c)



Probl...
já ca...
provas...

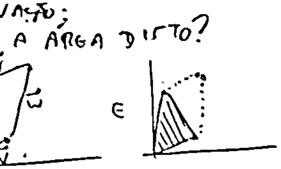
Sejam...

Encon...
tais ...

...sos problemas
... soluções;
... gente vai
...contrando a
... x (ou y)

...rminantes

...ação;
... a área disto?



...que:
...terminantes calculam
...eas (com sinal).

Δ

2

$\ldots = \frac{-30}{10} = -3 \Rightarrow y = 2(-3)+2 = -6+2 = -4$

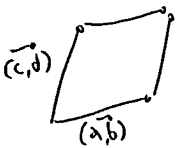
$\ldots = \frac{14}{10} = 1.4 \Rightarrow y = 2(1.4)+2 = 2.8+2 = 4.8$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: matriz

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$: determinante da matriz

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

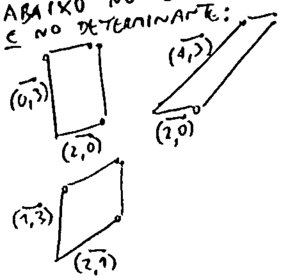
Fato:
A área disto



é o módulo de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

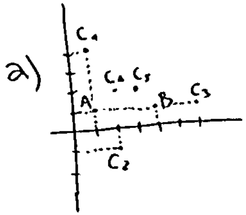
$\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$

Exercício:
calcule as áreas abaixo no olhômetro e no determinante:

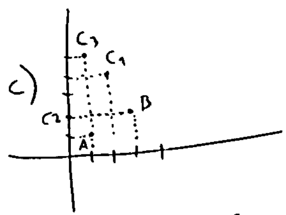


Calculem as áreas dos triângulos ABC_1, ABC_2, ABC_3 em cada um dos casos abaixo:

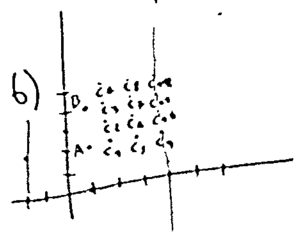
a)



c)

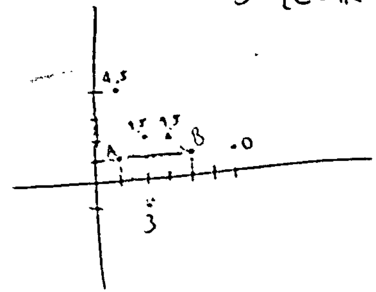


b)



Problemas deste tipo já caíram em várias provas:

Sejam $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $r=\{(2,2)+t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$.
Encontre os pontos $C\in r$ tais que área$(ABC)=10$.



① Sejam $A=(1,2)$, $B=(1,4)$.
Representem graficamente o conjunto
$S=\{C\in\mathbb{R}^2 \mid \text{área}(ABC)=3\}$.

$(4,2)\in S$
$(4,3)\in S$
$(4,4)\in S$
$(-2,2)\in S$
$(-2,3)\in S$
$(-2,4)\in S$

② Sejam $A=(1,1)$, $B=(3,2)$,
$S=\{C\in\mathbb{R}^2 \mid \text{área}(ABC)=5\}$
Represente graficamente S.

③ Sejam $A=(1,2)$, $B=(1,4)$,
$S=\{C\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{B}C=45^\circ\}$.
Represente graficamente S.

GA 18/JAN/2016

COISAS QUE FALTAM A GENTE VER (OU REVER) E QUE SÃO NECESSÁRIAS PRA FAZER PROBLEMAS DAS TRÊS PRIMEIRAS LISTAS DE EXERCÍCIOS:

- DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA
- INTERSEÇÃO DE RETA E CÍRCULO
- TANGÊNCIA ENTRE RETA E CÍRCULO
- ÁREAS

(E OUTRAS)

NÃO VIMOS AINDA

AULA EXTRA (DÚVIDAS):

5^{a} 14:00-16:00 NO LLARC (DENTRO DA BIBLIOTECA)

QUESTÕES DA LISTAS EM QUE VOCÊS TÊM MAIS DÚVIDAS:

1.7
3.2
PROJEÇÃO
ÂNGULO

(4) SEJAM

$A = (1,1)$,

$B = (4,1)$,

$S = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(2,0)}\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE O CONJUNTO S.

GA 20/JAN/2016

AVISO: A P1 FOI TRANSFERIDA PRO OUTRO SÁBADO, 30/JAN!

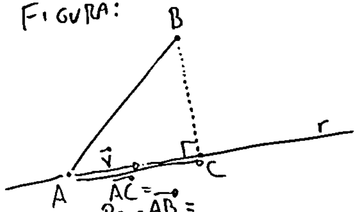
A AULA EXTRA DE DÚVIDAS DE AMANHÃ ESTÁ MANTIDA (14:00-16:00).

NÃO VOU PODER TRANSFERIR A AULA EXTRA PRA SEMANA QUE VEM!!!

HOJE:
DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA; DISTÂNCIA ENTRE CÍRCULO E RETA; TANGÊNCIA; REVISÃO DE ÂNGULOS.

SEJAM $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B \in \mathbb{R}^2$.
SEJA C É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B.

FIGURA:



$\vec{AC} = Pr_{\vec{v}} \vec{AB} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

SABEMOS CALCULAR C...
A GENTE CALCULA PRIMEIRO

$\vec{AC} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

DEPOIS:

$$C = A + \vec{AC} = A + \frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$$

TRUQUE:
$d(B,r) = d(B,C)$

MUITAS CONTAS SÃO MAIS FÁCEIS AO QUADRADO.

$$\begin{aligned} d(B,r)^2 &= d(B,C)^2 \\ &= \|\vec{BC}\|^2 \\ &= \|\vec{CB}\|^2 \\ &= \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2 \\ &= \|\vec{AB}\|^2 - 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 \quad (\star) \end{aligned}$$

OBS: $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$
$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$

DÁ PRA GENTE SIMPLIFICAR $(\star)$.

DÁ PRA GENTE SIMPLIFICAR (★).
ISTO É UM EXERCÍCIO — TRABALHOSO MAS VALE A PENA FAZER!

TRUQUE PRA DEIXAR AS CONTAS MENORES:

$\alpha := \vec{AB}\cdot\vec{AB}$
$\beta := \vec{v}\cdot\vec{AB}$
$\gamma := \vec{v}\cdot\vec{v}$

ENTÃO:

$$\begin{aligned} \|\vec{AC}\|^2 &= \left\|\frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}\right\|^2 \\ &= \left\|\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right\|^2 \\ &= \left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right) \\ &= \frac{\beta^2}{\gamma^2}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) \\ &= \frac{\beta^2}{\gamma^2}\cdot\gamma \\ &= \frac{\beta^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = \alpha$

$$\begin{aligned} \vec{AB}\cdot\vec{AC} &= \vec{AB}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right) \\ &= \frac{\beta}{\gamma}\cdot(\vec{AB}\cdot\vec{v}) \\ &= \frac{\beta}{\gamma}\cdot\beta \\ &= \frac{\beta^2}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\star)\quad d(B,r)^2 &= \|\vec{AB}\|^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 \\ &= \alpha - 2\frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma} \\ &= \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \end{aligned}$$

$$d(B,r) = \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}} = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 - \frac{(\vec{v}\cdot\vec{AB})^2}{\|\vec{v}\|^2}} \quad (\star\star)$$

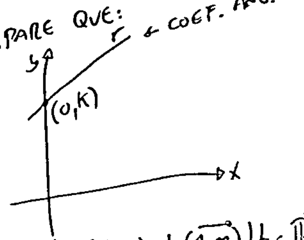
DÁ UM TRABALHÃO DEDUZIR $(\star\star)$ —
ENTÃO:
1) REFAÇAM ESSAS CONTAS EM CASA
2) DECOREM $(\star\star)$
3) COMPAREM $(\star\star)$ COM AS DOS LIVROS (REIS/SILVA, CEDERJ)

NO REIS/SILVA (p.47, SEÇÃO 2.11) APARECE UMA VARIAÇÃO DESTA FÓRMULA...

SEJAM $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + k\}$ E $P = (x_0, y_0)$.

$$d(P,r) = \frac{|-y_0 + mx_0 + k|}{\sqrt{1+m^2}} \quad (\star\star\star)$$

REPARE QUE:



$r = \{\underbrace{(0,k)}_{A} + t\underbrace{(1,m)}_{\vec{v}} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

EXERCÍCIO
SEJA $r =$
PARA CA
CALCULE
E OLH
a) $P =$
b) $P =$
c) $P = ($
d) $P = ($

CALCULAR C...

[S]E CALCULA PRIMEIRO

$= \frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

:

$A + \vec{AC}$

$A + \frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

...UE:

$d(B,r) = d(B,C)$

...AS CONTAS SÃO MAIS ...IS AO QUADRADO.

$$d(B,r)^2 = d(B,C)^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 - 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 \quad (★).$$

OBS: $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$

...É PRA GENTE SIMPLIFICAR (★).

...TO É UM EXERCÍCIO — TRABALHOSO MAS ...ALE A PENA FAZER!

...TRUQUE PRA DEIXAR AS CONTAS ...MENORES:

$\alpha := \vec{AB}\cdot\vec{AB}$

$\beta := \vec{v}\cdot\vec{AB}$

$\gamma := \vec{v}\cdot\vec{v}$

ENTÃO:

$$\|\vec{AC}\|^2 = \left\|\frac{\vec{v}\cdot\vec{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}\right\|^2 = \left\|\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right\|^2 = \left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right) = \frac{\beta^2}{\gamma^2}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{\beta^2}{\gamma^2}\cdot\gamma = \frac{\beta^2}{\gamma}.$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = \alpha$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\vec{v}\right) = \frac{\beta}{\gamma}\cdot(\vec{AB}\cdot\vec{v}) = \frac{\beta}{\gamma}\cdot\beta = \frac{\beta^2}{\gamma}$$

$$(★)\quad d(B,r)^2 = \|\vec{AB}\|^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 = \alpha - 2\frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma} = \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}$$

$$d(B,r) = \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}} = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 - \frac{(\vec{v}\cdot\vec{AB})^2}{\|\vec{v}\|^2}} \quad (★★)$$

DÁ UM TRABALHÃO DEDUZIR (★★) -

ENTÃO:

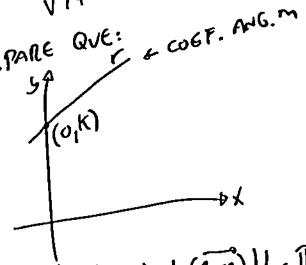
1) REFAÇAM ESSAS CONTAS EM CASA
2) DECOREM (★★)
3) COMPAREM (★★) COM AS DOS LIVROS (REIS/SILVA, CEDERJ)

NO REIS/SILVA (p.47, SEÇÃO 2.11) APARECE UMA VARIAÇÃO DESTA FÓRMULA...

SEJAM $r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = mx + k\}$ E $P = (x_0, y_0)$.

$$d(P,r) = \frac{|-y_0 + mx_0 + k|}{\sqrt{1+m^2}} \quad (★★★)$$

REPARE QUE:



$$r = \{\underbrace{(0,k)}_{A} + t\underbrace{(1,m)}_{\vec{v}} \mid t\in\mathbb{R}\}.$$

EXERCÍCIO:

SEJA $r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x}{2} + 4\}$.

PARA CADA UM DOS PONTOS ABAIXO CALCULE $d(P,r)$ USANDO (★★), (★★★) E OLHÔMETRO.

a) $P = (2,5)$
b) $P = (3,3)$
c) $P = (2,0)$
d) $P = (-1,6)$.

GA 20/JAN/2016

A CORREÇÃO DA PROVA CORRIGE AS RESPOSTAS E AS JUSTIFICATIVAS.

AS JUSTIFICATIVAS PRECISAM ESTAR BEM ESCRITAS... SENÃO A PONTUAÇÃO VAI DEPENDER TOTALMENTE DO BOM HUMOR DO PROFESSOR... PORQUE A GENTE VAI TER QUE "ADIVINHAR" O QUANTO VOCÊS ESTÃO SABENDO.

TRUQUE MUITO IMPORTANTE PRA VOCÊS ESCREVEREM BOAS JUSTIFICATIVAS É:
- NOMEIEM OS OBJETOS
- ESCREVAM OS "="
- USEM COISAS TIPO "SEJA" QUANDO PRECISAR ("PORTUGUÊS")

DICAS: RELEIAM TODOS OS QUADROS ATÉ AGORA - EU FUI SUPER CUIDADOSO COM OS NOMES, OS "="S E OS "SEJAM" E OS "ENTÃO"; FAÇAM "AUTO-CORREÇÃO"; DISCUTAM NA MONITORIA.

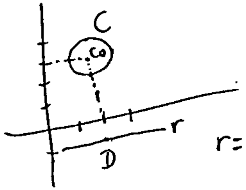
$\frac{42}{2} = 21$ ⇦ OK, VERDADE

$\left.\begin{matrix}\frac{42}{2} \\ 21\end{matrix}\right\}$ ⇦ NÃO TEM AFIRMAÇÃO NENHUMA, ALGUÉM PODE ACHAR ISTO SEM PÉ NEM CABEÇA E DAR 0

$\left.\begin{matrix}99 \\ 200\end{matrix}\right\}$ ⇦ IDEM - DOIS NÚMEROS SOLTOS

DISTÂNCIA ENTRE RETA E CÍRCULO (E TANGÊNCIA).

EXEMPLO:



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\}$

$C_0 = (2,3)$, $R = 1$.

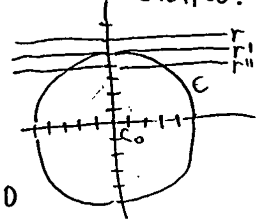
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1\}$

SEJA D O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE C_0.

NESTE CASO, $d(C_0, D) = 4$,

$r(C, D) = 4 - R$
$= 4 - 1$
$= 3$

OUTRO EXEMPLO:



$C_0 = (0,0)$,
$R = 5$.

$d(r, C_0) = 6$ $d(r, C) = 1$
$d(r', C_0) = 5$ $d(r', C) = 0$
$d(r'', C_0) = 4$ $d(r'', C) = 0$!!
(PORQUE r'' E C SE INTERCEPTAM).

A GENTE DIZ QUE UMA RETA r É TANGENTE AO CÍRCULO C QUANDO $d(r, C_0) = R$, OU, EQUIVALENTEMENTE, QUANDO $r \cap C$ TEM EXATAMENTE UM PONTO.

EXERCÍCIO (PRA AGORA, EM GRUPO; LISTA 3, PROBLEMA 23):
DETERMINE A EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO NA ORIGEM E TANGENTE À RETA $3x - 4y + 20 = 0$.

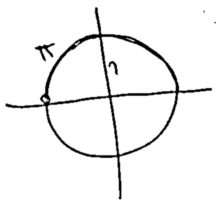
DICAS:
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y + 20 = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \underbrace{m}_{?}x + \underbrace{k}_{?}\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \underbrace{R^2}_{?}\}$

GA 25/JAN/2016

HOJE: REVISÃO DE ÂNGULOS (E PROJEÇÃO E SIMETRIA); DÚVIDAS EM GERAL

LEMBREM QUE
$0^\circ = 0$ RAD
$90^\circ = \pi/2$ RAD
$180^\circ = \pi$ RAD
$270^\circ = 3\pi/2$ RAD
$360^\circ = 2\pi$ RAD



NORMALMENTE A GENTE NÃO ESCREVE O "RAD"...

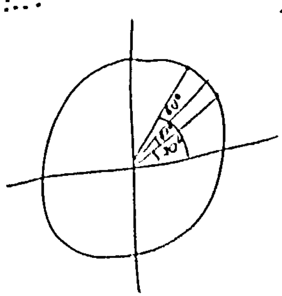
$180^\circ = \pi$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$234^\circ = 234 \cdot \frac{\pi}{180}$

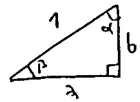
OUTRA COISA IMPORTANTE SOBRE ÂNGULOS: COS/SEN/ARCCOS/ARCSEN ?...

θ	$\cos\theta$	$\text{sen}\,\theta$
0°	1	0
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/2$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$1/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	0	1
120°	$-1/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/2$
180°	-1	0



TRIÂNGULOS (RETÂNGULOS)

SE



É UM TRIÂNGULO RETÂNGULO ENTÃO

β FAZ O PAPEL DO θ NA TABELA ANTERIOR,

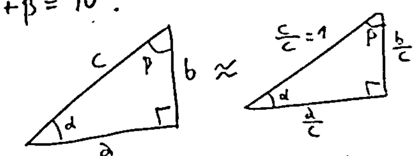
$b = \cos\beta = \cos\theta,$

$a = \text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\theta,$

$a^2 + b^2 = 1$

$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ,$

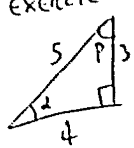
$\alpha + \beta = 90^\circ.$



$\frac{a}{c} = \cos\alpha,$

$\frac{b}{c} = \text{sen}\,\alpha.$

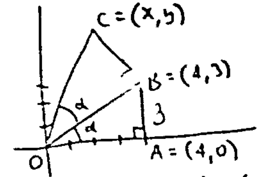
EXERCÍCIO:



DETERMINE α E β.
(USEM ARCCOS E ARCSEN SE PRECISAR)

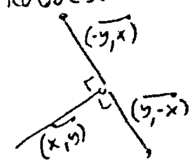
PROBLEMAS
(OBS: "PROBLEMA" É ALGO MAIS DIFÍCIL QUE "EXERCÍCIO"):

(1)



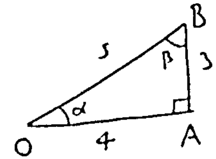
ENCONTRE $d(O,A)$, $(=4)$
$d(O,B)$, $(=5)$
$d(A,B)$, $(=3)$
$d(O,C)$, $(=\frac{25}{4})$
$d(B,C)$ $(=\frac{15}{4})$
E AS COORDENADAS DO PONTO C.

TRUQUES:



$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ TEM A MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\vec{v}$, E NORMA 1.

(2) VERIFIQUEM QUE $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (ONDE $C=(x,y)$ É O PONTO QUE VOCÊ ENCONTROU) USANDO A FÓRMULA $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$.

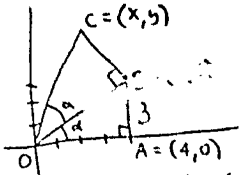


≈

arc cos
arc cos
α =

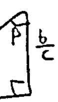
...OBLEMAS

...: "PROBLEMA" É ... MAIS DIFÍCIL QUE ... EXERCÍCIO!"):

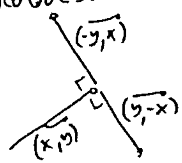


ENCONTRE $d(O,A)$, $(=4)$
$d(O,B)$, $(=5)$
$d(A,B)$, $(=3)$
$d(O,C)$, $(=\frac{25}{4})$
$d(B,C)$ $(=\frac{15}{4})$

E AS COORDENADAS DO PONTO C.

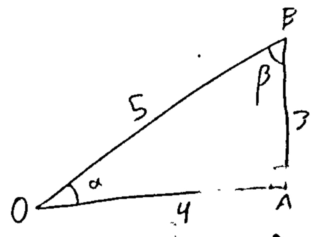


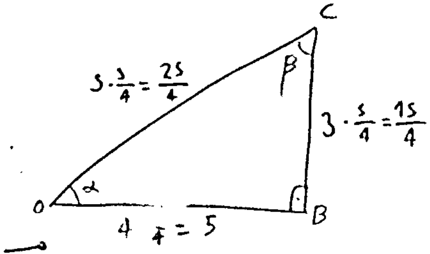
TRUQUES:

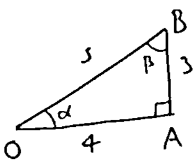


$\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ TEM A MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\vec{V}$, E NORMA 1.

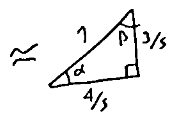
(2) VERIFIQUEM QUE $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (ONDE $C=(x,y)$ É O PONTO QUE VOCÊ ENCONTROU) USANDO A FÓRMULA $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$.





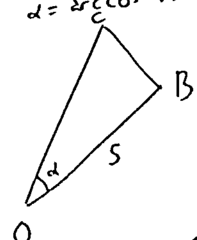


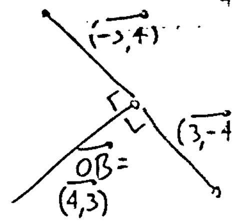
$\approx$



$\cos\alpha = 4/5$
$\text{sen}\ \alpha = 3/5$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$
$\arccos(\cos\alpha) = \arccos 4/5$
$\alpha = \arccos 4/5$





O VETOR $\overrightarrow{(-3,4)}$ TEM A MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE O VETOR $\overrightarrow{BC}$... MAS $\|\overrightarrow{(-3,4)}\| = 5$,
$\|\overrightarrow{BC}\| = d(B,C) = \frac{15}{4}$.

$\overrightarrow{BC} = \lambda\cdot\overrightarrow{(-3,4)}$
$\lambda = ?$

$\overrightarrow{BC} = \lambda\,\overrightarrow{(-3,4)}$
$\|\overrightarrow{BC}\| = \|\lambda\,\overrightarrow{(-3,4)}\|$
$\overset{\frac{15}{4}}{\|} \quad = |\lambda|\,\underbrace{\|\overrightarrow{(-3,4)}\|}_{5}$

MAIS UM PROBLEMA DE ÂNGULOS (MAIS COMPLICADO):

(3) SEJAM $A=(0,0)$, $B=(2,1)$.
ENCONTRE DOIS PONTOS $C, C' \in \mathbb{R}^2$ TAIS QUE: $C\hat{A}B = C'\hat{A}B = \arccos\frac{4}{5}$,
A, C E C' NÃO SÃO COLINEARES.

GA 27/JAN/2016

HOJE É A ÚLTIMA AULA ANTES DA PROVA!!!

EU MARQUEI ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA 3 COMO SUGESTÕES DE COISAS PRA DISCUTIR...

14,
16,
21,
22,
28

E ALÉM DISSO UM PROBLEMA PRA CASA DO FINAL DA AULA DE 18/JAN:

SEJAM $A=(1,2)$, $B=(1,4)$,

③ $S=\{C\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{B}C=45^\circ\}$. REPRESENTE GRAFICAMENTE S.

EXERCÍCIO: SEJA $\vec{v}=(1,2)$.

a) ENCONTRE VÁRIOS VETORES $\vec{w}$ TAIS QUE $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=45^\circ$

b) ENCONTRE VÁRIOS VETORES $\vec{w}$ TAIS QUE $\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=\frac{1}{3}$.

b) $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$
$=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cdot\frac{1}{3}$

$(1,2)\cdot\vec{w}=\sqrt{5}\,\|\vec{w}\|\cdot\frac{1}{3}$

Se $\vec{w}=(x,y)$ então...

... A CONTA É UM POUCO DIFÍCIL, ENTÃO VAMOS USAR UMAS IDÉIAS GEOMÉTRICAS (E UNS PROBLEMAS PARECIDOS MAS MAIS FÁCEIS).

c) ENCONTRE VÁRIOS VETORES $\vec{w}$ TAIS QUE $\cos\measuredangle((1,0),\vec{w})=\frac{1}{3}$. ⇦ FÁCIL

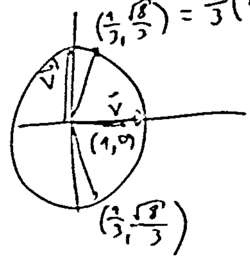
d) V, F, JUSTIFIQUE: $\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=\cos\measuredangle(\vec{v},2\vec{w})$. ⇦ OK (VERDADE)

c) DIGAMOS QUE $\|\vec{w}\|=1$...
$\vec{w}=(x,y)$, $x^2+y^2=1$.

$$\underbrace{(1,0)\cdot\vec{w}}_{\underbrace{=(x,y)}_{x}}=\underbrace{\|(1,0)\|}_{1}\,\underbrace{\|\vec{w}\|}_{1}\cdot\underbrace{\cos\measuredangle((1,0),\vec{w})}_{=1/3}$$

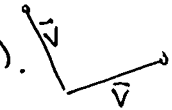
$x=\frac{1}{3}$, $x^2+y^2=1$
$\frac{1}{9}+y^2=1$
$y^2=\frac{8}{9}$
$y=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

$(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{8}}{3})=\frac{1}{3}(1,0)+\frac{\sqrt{8}}{3}(0,1)$



$(\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{8}}{3})$

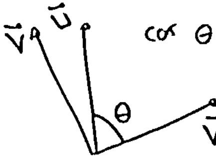
SEJAM $\vec{v}=(a,b)$
$\vec{v}'=(-b,a)$.



ENTÃO (PENSEM NISTO EM CASA!):

SEJA $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{\sqrt{8}}{3}\vec{v}'$.

ENTÃO



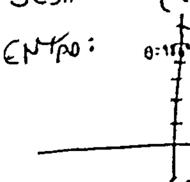
$\cos\theta=\frac{1}{3}$ ⇦

IMPORTANTE:
NOS PROBLEMAS ...
AULA ESTAMOS ...
MISTURAR CONHE...
ALGÉBRICO E CON...
GEOMÉTRICO!

EQUAÇÕES PARAM...
CIRCUNFERÊNCIAS ...

SEJA $C=\{($...

ENTÃO:



ENTÃO $C=\{($...

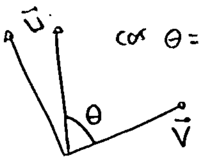
SEJAM $\vec{V} = \overrightarrow{(a,b)}$

$\vec{V}' = \overrightarrow{(-b,a)}$.

ENTÃO (PENSEM NISTO EM CASA!):

SEJA $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{V} + \frac{\sqrt{8}}{3}\vec{V}'$.

ENTÃO



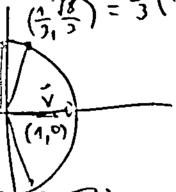
$\cos\theta = \frac{1}{3}$ ⇐ PENSEM NISTO EM CASA!!!

⇐ FÁCIL

= OK (VERDADE)

$\underbrace{\langle\overrightarrow{(1,0)}, \vec{u}\rangle}_{\frac{1}{3}}$

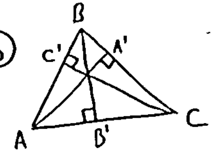
$\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{(1,0)} + \frac{\sqrt{8}}{3}\overrightarrow{(0,1)}$

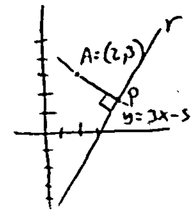


$\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$

$\boxed{\text{IMPORTANTE: NOS PROBLEMAS DESTA AULA ESTAMOS TENTANDO MISTURAR CONHECIMENTO ALGÉBRICO E CONHECIMENTO GEOMÉTRICO!}}$

16





SEJA : A RETA PERPENDICULAR A QUE PASSA POR A; SEJA P = ...

DICA: RESOLVA EM CASA USANDO PROJEÇÕES.

22 b $x^2 - x + y^2 + 3y - 2 = 0$

$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 2 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \frac{10}{4} = \frac{8}{4} + \frac{10}{4} = \frac{18}{4} = \frac{2\cdot 9}{4} = \frac{9}{2} = \frac{3^2}{\sqrt{2}^2} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

CENTRO: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

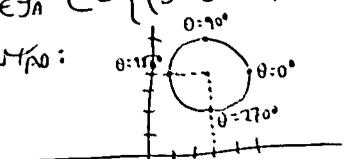
RAIO: $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$C = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, -\frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE CIRCUNFERÊNCIAS

SEJA $C = \{(3 + 2\cos\theta, 4 + 2\,\text{sen}\,\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

ENTÃO:



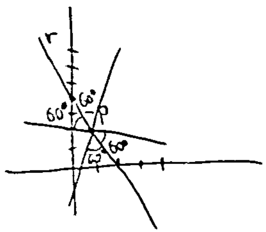
θ	$\cos\theta$	$\text{sen}\,\theta$	$(3+2\cos\theta, 4+2\,\text{sen}\,\theta)$
0	1	0	(5,4)
90°	0	1	(3,6)
180°	-1	0	(1,4)
270°	0	-1	(3,2)

ENTÃO $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4\}$

GA 27/JAN/2016

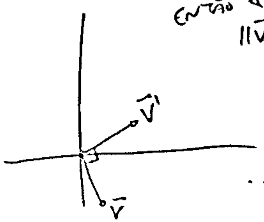
(14) ESCREVA AS EQS PARAMÉTRICAS DA RETA s QUE CONTÉM O PONTO (1,2) P E FAZ COM A RETA r $y=-2x+4$ UM ÂNGULO DE 60°.

OLHOMETRICAMENTE...



SEJA $\vec{v}$ O VETOR DIRETOR DE r. ENTÃO $\vec{v}=(1,-2)$ (OU ALGUM MÚLTIPLO DISTO.)

SEJA $\vec{v}'=(2,1)$. ENTÃO $\measuredangle(\vec{v},\vec{v}')=90°$, $\|\vec{v}\|=\|\vec{v}'\|$.



DIGAMOS QUE
$\vec{v}=(a,b)$,
$\vec{v}'=(-b,a)$,
$\vec{w}=(\cos\theta)\vec{v}+(\operatorname{sen}\theta)\vec{v}'$.

ENTÃO (VERIFIQUEM EM CASA!):

$\|\vec{w}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{v}'\|$

$\cos(\measuredangle\vec{v},\vec{w})=?$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$

$\| \quad \vec{v}\cdot(\cos\theta\,\vec{v}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{v}')$

$\cos\theta(\vec{v}\cdot\vec{v})+\operatorname{sen}\theta(\vec{v}\cdot\vec{v}')$

$\cos\theta\,\|\vec{v}\|^2+\operatorname{sen}\theta(0)$

$\cos\theta\,\|\vec{v}\|^2$

COMO $\|\vec{w}\|=\|\vec{v}\|$ ENTÃO

$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))=$

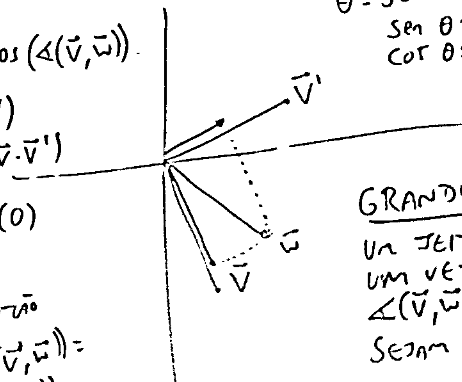
$\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))=$

$\|\vec{v}\|^2\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$

OU SEJA:

$\cos\theta\,\|\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$

$\cos\theta=\cos(\measuredangle(\vec{v},\vec{w}))$



$\theta=30°$
$\operatorname{sen}\theta=1/2$
$\cos\theta\approx0.87$

GRANDE TRUQUE:

UM JEITO DE OBTER UM VETOR $\vec{w}$ TAL QUE $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=\theta$ É O SEGUINTE:

SEJAM $(a,b)=\vec{v}$,
$\vec{v}'=(-b,a)$,
$\vec{w}=\cos\theta\,\vec{v}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{v}'$.

GA 1º/FEV/2015

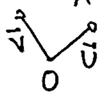
HOJE:
- SISTEMAS DE COORDENADAS
- INTRODUÇÃO A CÔNICAS

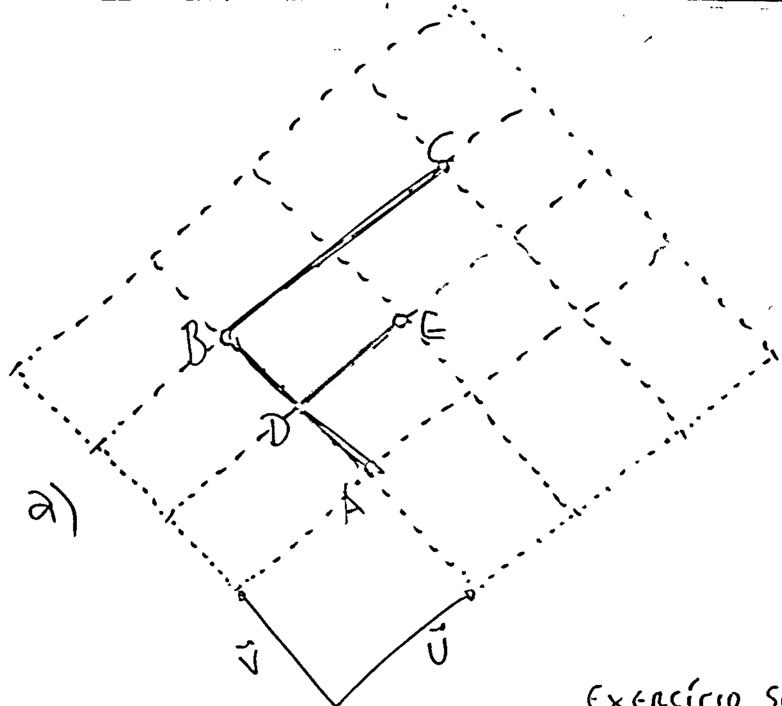
DICA PROS EXERCÍCIOS DA FOLHA:

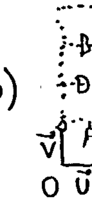
$B = O + 1\vec{u} + 3\vec{v} = (1,3)_\Sigma$

$\vec{AB} = 2\vec{v}$

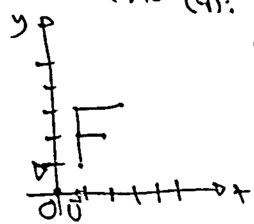
$A = O + 1\vec{u} + 1\vec{v} = (1,1)_\Sigma$







ÁGORA VAMOS IMAGINAR QUE ESTE ITEM AQUI É ANTERIOR AO (a):



$O = (0,0) \leftarrow O_0$

$\vec{u} = (1,0) \leftarrow \vec{u}_0$

$\vec{v} = (0,1) \leftarrow \vec{v}_0$

VAMOS COMPLICAR A NOTAÇÃO UM POUCO...

$(a,b)_{\Sigma_i} = O_i + a\vec{u}_i + b\vec{v}_i$,

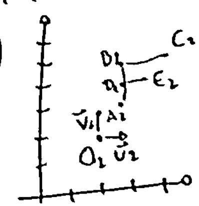
ONDE:

$O_0 = (0,0)$, $\vec{u}_0 = (1,0)$, $\vec{v}_0 = (0,1)$ (ITEM ACIMA)

$O_1 = (3,1)$, $\vec{u}_1 = (2,1)$, $\vec{v}_1 = (-1,1)$ (ITEM a)

POR EXEMPLO, O ITEM (b) VIRA:

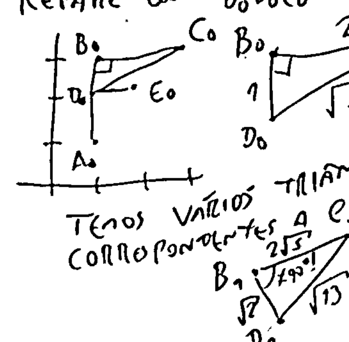
b)



PRA QUE QUE A GENTE QUER ISSO?
AGORA A GENTE PODE FALAR DAS COORDENADAS DE A_0, A_1, A_2 SEM AMBIGUIDADE, E ATÉ PODEMOS DESENHAR VÁRIAS FIGURAS NO MESMO GRÁFICO!

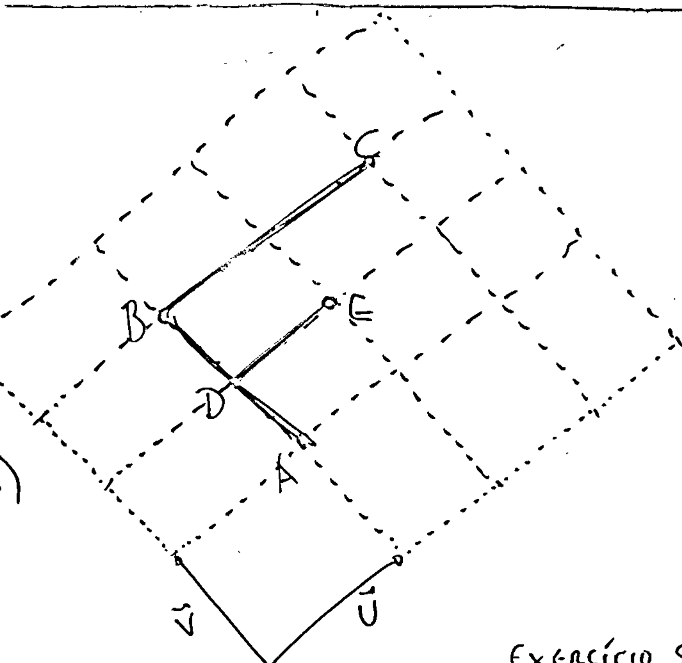
EXERCÍCIO SEGUINTE

REPARE QUE $D_0\hat{B}_0C_0 =$

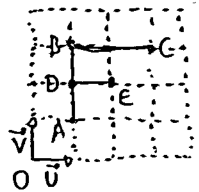


TEMOS VÁRIOS TRIÂN
CORRESPONDENTES A E

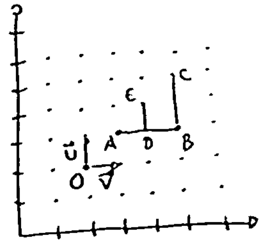
- CALCULEM
- EM QUE C



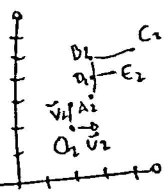
b)



e)



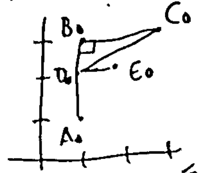
...EMPLO, O
(b) UMA:

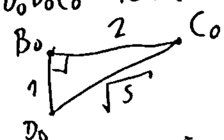


...RA QUE QUE A GENTE
QUER ISSO?
AGORA A GENTE PODE FALAR
DAS COORDENADAS DE A_0, A_1, A_2
SEM AMBIGUIDADE, E ATÉ
PODEMOS DESENHAR VÁRIAS FIGURAS NO MESMO GRÁFICO!

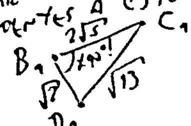
EXERCÍCIO SEGUINTE (!!!)

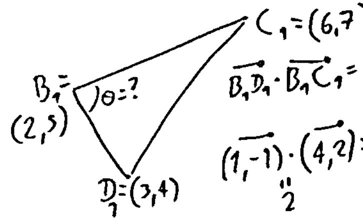
REPARE QUE $D_0\hat{B}_0C_0 = 90°$...





TEMOS VÁRIOS TRIÂNGULOS
CORRESPONDENTES A ESTE...





$\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{B_1C_1} = \|\overrightarrow{B_1D_1}\|\cdot\|\overrightarrow{B_1C_1}\|\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{B_1D_1},\overrightarrow{B_1C_1}))$

$\underbrace{(1,-1)\cdot(4,2)}_{=2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos 90° = 0$

$\theta \neq 90°$!

• CALCULEM AS DISTÂNCIAS $d(D_i,B_i)$, $d(B_i,C_i)$, $d(C_i,D_i)$

• EM QUE CASOS $D_0\hat{B}_0C_0 = D_i\hat{B}_iC_i$, $B_0\hat{C}_0D_0 = B_i\hat{C}_iD_i$, $C_0\hat{D}_0B_0 = C_i\hat{D}_iB_i$?

GA 1º/FEV/2015

HOJE:
- SISTEMAS DE COORDENADAS
- INTRODUÇÃO A CÔNICAS

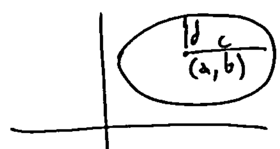
MINI-INTRODUÇÃO A CÔNICAS

JÁ VIMOS:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ ← CÍRCULO UNITÁRIO (NOSSO CÍRCULO PREFERIDO)

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\}$ ← CÍRCULO DE RAIO R E CENTRO (a,b)

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-a}{c}\right)^2+\left(\frac{y-b}{d}\right)^2=1\}$ ← ELIPSE COM CENTRO EM (a,b):



UM CÍRCULO AMASSADO!

A GENTE JÁ CONHECE BEM TODAS ESTAS FIGURAS:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$

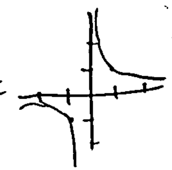
SÃO RETAS, EXCETO NOS CASOS $0x+0y+c=0$, EM QUE O RESULTADO VAI SER $\emptyset$ OU $\mathbb{R}^2$. "RETAS DEGENERADAS"

AGORA A GENTE VAI COMEÇAR A ENTENDER ESTAS EQUAÇÕES:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\}$ ← TERMOS DE 2º GRAU

NOSSAS CÔNICAS PREFERIDAS:
- CÍRCULOS,
- ELIPSES
- HIPERBÓLES:

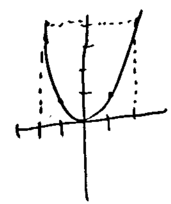
$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ =



EM CÁLCULO ISTO É $y=\frac{1}{x}$

- PARÁBOLAS:

$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$ =



SISTEMAS DE C
VÃO SER O GR
PRA GERAR FA
TODAS AS CÔ

JÁ CONHECE
DAS ESTAS FIGURAS:

$\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$

RETAS, EXCETO NOS
OS $0x+0y+c=0$,
QUE O RESULTADO
SER $\emptyset$ OU $\mathbb{R}^2$.
"RETAS DEGENERADAS"

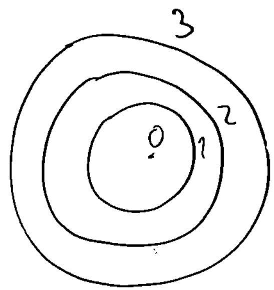
SISTEMAS DE COORDENADAS
VÃO SER O GRANDE TRUQUE
PRA GERAR FACILMENTE
TODAS AS CÔNICAS TORTAS...

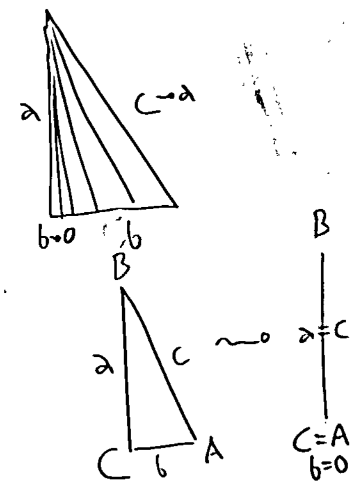
AGORA A GENTE VAI
COMEÇAR A ENTENDER
ESTAS EQUAÇÕES:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\}$

TERMOS DE 2º GRAU

FIGURAS DEGENERADAS:

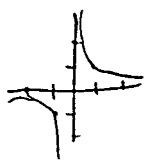




NOSSAS CÔNICAS PREFERIDAS:

- CÍRCULOS,
- ELIPSES
- HIPÉRBOLES:

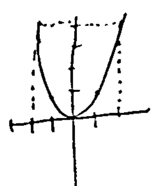
$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}=$



EM CÁLCULO ISTO É $y=\frac{1}{x}$

- PARÁBOLAS:

$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}=$



GA 3/fev/2016

Hoje: sistemas de coordenadas!

As pessoas que não vieram nem na aula passada nem hoje vão achar uma parte da matéria de cônicas uma decoreba sem pé nem cabeça, mas vocês não!

Exercício da aula passada:

$\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$,

$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$

$B = (1,3)_\Sigma$ $\quad C = (3,3)_\Sigma$

$D = (1,2)_\Sigma$ $\quad E = (2,2)_\Sigma$

$A = (1,1)_\Sigma$

Explicação sobre os "i"s e "j"s dos exercícios sobre os triângulos...

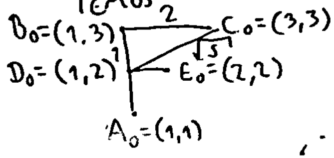
Se queremos saber se a transformação entre as figuras 1 e 2 preservam distâncias e ângulos, queremos saber se

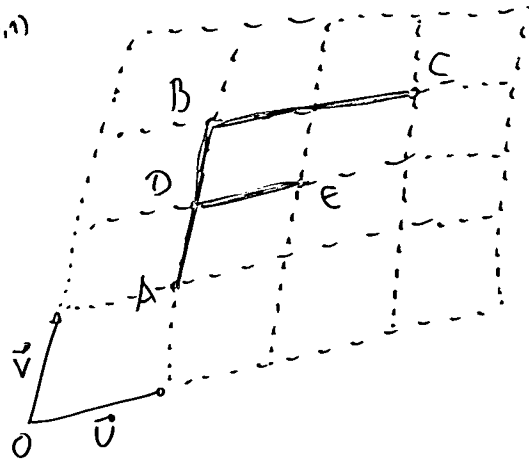
$d(P_1,Q_1) = d(P_2,Q_2) \Rightarrow d(A_1,B_1) = d(A_2,B_2)$

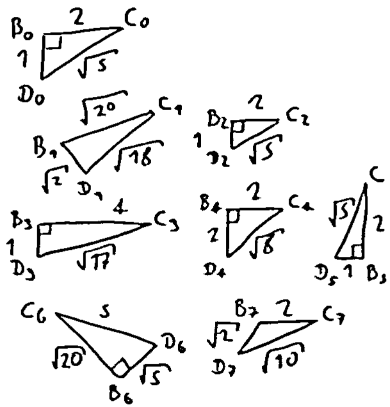
$P_1\hat{Q}_1R_1 = P_2\hat{Q}_2R_2 \Rightarrow D_1\hat{B}_1C_1 = D_2\hat{B}_2C_2$

Sugestão pro exercício dos triângulos:

Temos







Vamos agora tentar classificar esses triângulos...

$B_0C_0D_0 \equiv B_2C_2D_2$

"$\equiv$" quer dizer "são congruentes" — mesmo tamanho e forma.

$B_0C_0D_0 \approx B_6C_6D_6$

"$\approx$" quer dizer "são semelhantes" — mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

$B_0C_0D_0 \equiv B_5C_5D_5$ —

$d(B_0,C_0) = d(B_5,C_5)$,

$d(B_0,D_0) = d(B_5,D_5)$,

$d(C_0,D_0) = d(C_5,D_5)$

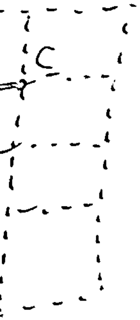
são congruentes — mas têm "orientações" diferentes, como F e ꟻ.

$B_0C_0D_0 \approx B_6C_6D_6$

$d(B_6,C_6) = \sqrt{5}\, d(B_0,C_0)$

$d(B_6,D_6) = \sqrt{5}\, d(B_0,D_0)$

$d(C_6,D_6) = \sqrt{5}\, d(C_0,D_0)$



Vamos agora tentar classificar esses triângulos...

$B_0C_0D_0 \equiv B_2C_2D_2$

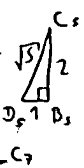
"$\equiv$" quer dizer "são congruentes" — mesmo tamanho e forma.

$B_0C_0D_0 \approx B_6C_6D_6$

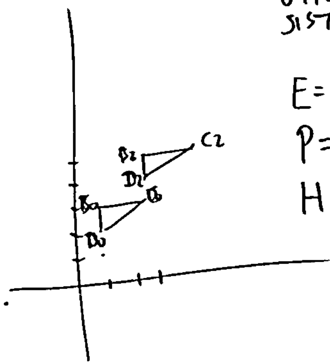
"$\approx$" quer dizer "são semelhantes" — mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

$B_0C_0D_0 \equiv B_5C_5D_5$ —
$d(B_0,C_0) = d(B_5,C_5)$,
$d(B_0,D_0) = d(B_5,D_5)$,
$d(C_0,D_0) = d(C_5,D_5)$

São congruentes — mas tem "orientações" diferentes, como F e 7.



$B_0C_0D_0 \approx B_6C_6D_6$
$d(B_6,C_6) = \sqrt{5}\, d(B_0,C_0)$
$d(B_6,D_6) = \sqrt{5}\, d(B_0,D_0)$
$d(C_6,D_6) = \sqrt{5}\, d(C_0,D_0)$

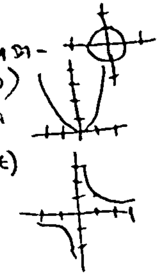


Na aula passada, no final, eu defini as seguintes cônicas canônicas:

$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ elipse (degenerada — círculo)

$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$ (parábola)

$H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ (hipérbole)



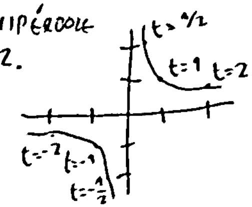
(☆)

Uma primeira utilidade para sistemas de coordenadas...

$E = \{O+\cos\theta\,\vec{u}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{v} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$ (☆☆)
$P = \{O+t\vec{u}+t^2\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$
$H = \{O+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R},\ t\neq 0\}$.

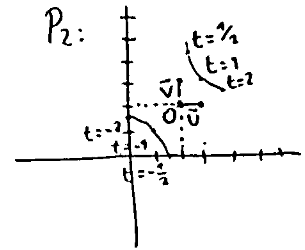
Reparem que quando
$O=(0,0)$,
$\vec{u}=(1,0)$,
$\vec{v}=(0,1)$
então o E, o P e o H do (☆☆) são parametrizações do E, P, H do (☆).

Exercício:
Nossos pontos preferidos da hipérbole são os com $t=-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,2$.



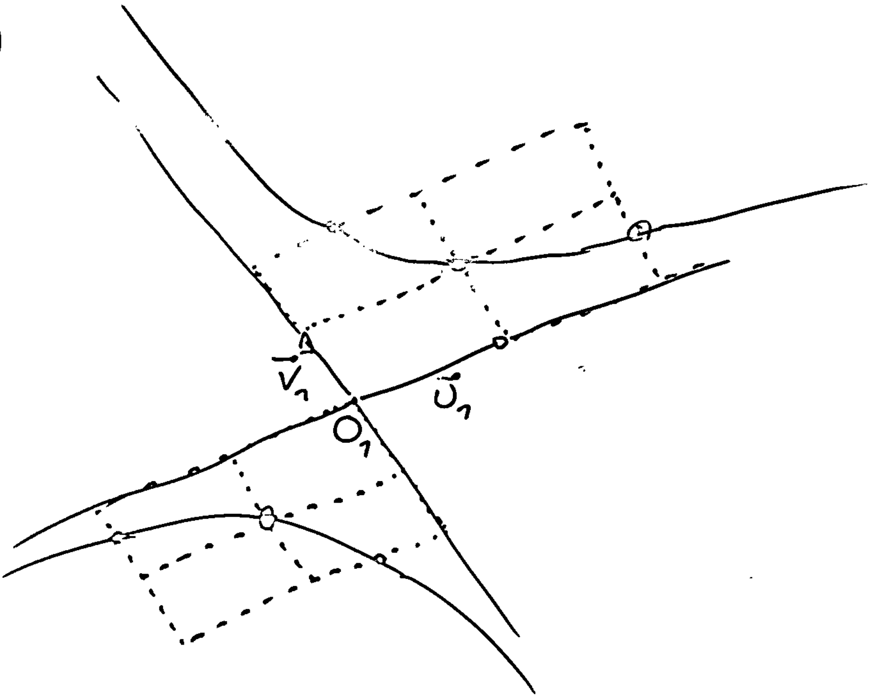
Exercício:
Desenhe os pontos $t=-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,2$ de P_2 (item b), P_1 (item a), P_7 (item g).

P_2:

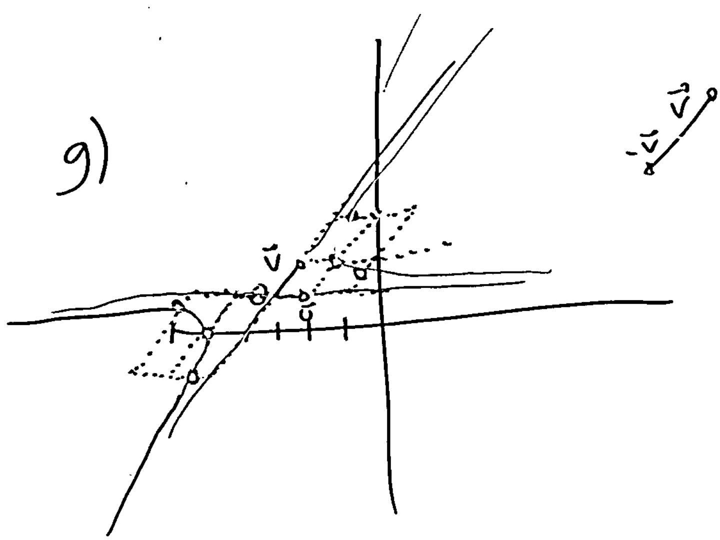


GA 3/Fev/2016

a)



g)



$\boxed{\text{GA 15/FEV/2016}}$

REVISÃO DA ÚLTIMA AULA:

$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$

$\quad =\{(t,t^2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$\quad =\{(0,0)+t\overrightarrow{(1,0)}+t^2\overrightarrow{(0,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$

$\quad =\{(t,\frac{1}{t}) \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

$\quad =\{(0,0)+t\overrightarrow{(1,0)}+\frac{1}{t}\overrightarrow{(0,1)} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

EXERCÍCIO:

$P_i=\{O_i+t\vec{u}_i+t^2\vec{v}_i \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$H_i=\{O_i+t\vec{u}_i+\frac{1}{t}\vec{v}_i \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

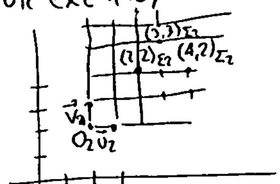
DESENHE NA FOLHA AS "PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES TORTAS" $P_1,\dots,P_7$ E $H_1,\dots,H_7$.

AGORA:
NOVIDADE!
MUDANÇA DE COORDENADAS!

LEMBRE QUE

$(a,b)_{\Sigma_i}=O_i+a\vec{u}_i+b\vec{v}_i$.

POR EXEMPLO,



$(a,b)_{\Sigma_2}=(2,2)+a\overrightarrow{(1,0)}+b\overrightarrow{(0,1)}$

$\quad =(2+a,2+b)$

COORDENADAS NOVAS

COORDENADAS CANÔNICAS.

$(3,4)_{\Sigma_2}=(x,y)$

$x=?$
$y=?$

SABEMOS RESOLVER ISSO — POR OLHÔMETRO E ALGEBRICAMENTE.

E O CONTRÁRIO?

$(a,b)_{\Sigma_2}=(5,3)$

$a=?$
$b=?$

DÁ PRA FAZER PELO OLHÔMETRO TAMBÉM.

RESOLVA NO OLHÔMETRO:

$(a,b)_{\Sigma_1}=(1,3)$

$a=?\ \leftarrow 0$
$b=?\ \leftarrow 2$

$(a,b)_{\Sigma_1}=(3,4)$

$a=?\ \leftarrow 1$
$b=?\ \leftarrow 2$

E ALGEBRICAMENTE?

$(a,b)_{\Sigma_1}=(3,4)\qquad a=?\ \ b=?$

$(a,b)_{\Sigma_1}=O_1+a\vec{u}_1+b\vec{v}_1$

$\quad =(3,1)+a\overrightarrow{(2,1)}+b\overrightarrow{(-1,1)}$

$\quad =(3+2a-b,\ 1+a+b)$

$(3,4)=(3+2a-b,\ 1+a+b)$

PODEMOS RESOLVER UM SISTEMA...

$3=3+2a-b$	$4=1+1+b$
$4=1+a+b$	$4=2+b$
$7=4+3a$	$4-2=b$
$7-4=3a$	$2=b$
$3=3a$	
$1=a$	

E NO CASO GERAL
E SE AO INVÉS D
RESOLVER

$(a,b)_{\Sigma_1}=(3,4)$

QUEREMOS RESOL

$(a,b)_{\Sigma_1}=(x,y)$

ONDE x E y SÃ
CONHECIDOS M
a E b AINDA

$(a,b)_{\Sigma_1}=(x,$

$(a,b)_{\Sigma_1}=(3$

SISTEMA:

$x=3+2a$

$y=1+a$

$b=y-$

$X=3+2a$

$X=3+2$

$X=-y+3$

$3a=x+y$

$a=\frac{x+y}{3}$

[Re]solva no olhômetro:

$(a,b)_{\Sigma_1} = (1,3)$

$a=?$ ← 0

$b=?$ ← 2

$(a,b)_{\Sigma_1} = (3,4)$

$a=?$ ← 1

$b=?$ ← 2

E algebricamente?

$(a,b)_{\Sigma_1} = (3,4)$ $a=?$ $b=?$

$$(a,b)_{\Sigma_1} = O_1 + a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 = (3,1) + a(\overrightarrow{2,1}) + b(\overrightarrow{-1,1}) = (3+2a-b,\ 1+a+b)$$

$$(3,4) = (3+2a-b,\ 1+a+b)$$

Podemos resolver um sistema...

$3 = 3+2a-b$ | $4 = 1+1+b$

$4 = 1+a+b$ | $4 = 2+b$

$7 = 4+3a$ | $4-2=b$

$7-4 = 3a$ | $2=b$

$3=3a$

$1=a$

E no caso geral? E se ao invés de resolver $(a,b)_{\Sigma_1}=(3,4)$ queremos resolver $(a,b)_{\Sigma_1}=(x,y)$, onde x e y são conhecidos mas a e b ainda não?

$(a,b)_{\Sigma_1} = (x,y)$

$(a,b)_{\Sigma_1} = (3+2a-b,\ 1+a+b)$

Sistema:

$x = 3+2a-b$

$y = 1+a+b$ $\begin{pmatrix} a=? \\ b=? \end{pmatrix}$

$b = y-1-a$

$x = 3+2a-(y-1-a)$

$x = 3+2a-y+1+a$

$x = -y+3a+4$

$3a = x+y-4$

$a = \dfrac{x+y-4}{3}$

$b = y-1-\left(\dfrac{x+y-4}{3}\right)$

$b = y-1+\left(\dfrac{-x-y+4}{3}\right)$

$b = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}$

$(a,b) = \left(\dfrac{x+y-4}{3},\ \dfrac{-x+2y+1}{3}\right)$

Testando... $(x,y)=(3,4)$

$\Rightarrow (a,b) = (1,2)$ ok

$(x,y) = (4,2)$

$\Rightarrow (a,b) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

Agora nós sabemos "inverter" mudanças de coordenadas...

$(a,b)_{\Sigma_1} = (x,y) = (3+2a-b,\ 1+a+b)$

$\Rightarrow (a,b) = \left(\dfrac{x+y-4}{3},\ \dfrac{-x+2y+1}{3}\right).$

Exercício: Σ_s.

$O_s = (2,2)$,

$\vec{u}_s = (\overrightarrow{0,1})$,

$\vec{v}_s = (\overrightarrow{1,0})$.

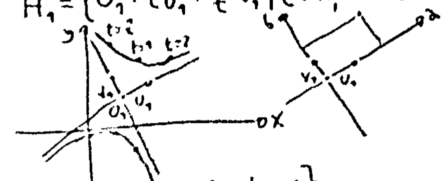
$(a,b)_{\Sigma_s} = (2,2) + a(\overrightarrow{0,1}) + b(\overrightarrow{1,0}) = (2+b,\ 2+a) = (x,y)$

$(a,b) = (y-2,\ x-2)$

Como obter equações para cônicas tortas

Exemplo:

$H_1 = \{O_1 + t\vec{u}_1 + \frac{1}{t}\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\}$



$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\,b = 1\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\dfrac{x+y-4}{3}}_{a} \cdot \underbrace{\dfrac{-x+2y+1}{3}}_{b} = 1\right\}$

GA 17/FEV/2016

NA AULA PASSADA - 15/FEV - A GENTE VIU MAIS COISAS SOBRE MUDANÇAS DE VARIÁVEIS...
NO SISTEMA DE COORDENADAS DO ITEM a DA FOLHA TEMOS

$$(a,b)_{\Sigma_1} = O_1 + a\vec{u_1} + b\vec{v_1}$$
$$= (3,1) + a(\overrightarrow{2,1}) + b(\overrightarrow{-1,1})$$
$$= (3+2a-b,\ 1+a+b) = (x,y)$$

$$(a,b)_{\Sigma_1} = (x,y)$$

$$x = 3+2a-b$$
$$y = 1+a+b$$
$$a = \frac{x+y-4}{3}$$
$$b = \frac{-x+2y+1}{3}$$

$$(x,y) = \left(\frac{x+y-4}{3}, \frac{-x+2y+1}{3}\right)_{\Sigma_1}$$
$$= (a,b)_{\Sigma_1}$$

...A NOSSA PRINCIPAL UTILIDADE PRA SISTEMAS DE COORDENADAS AGORA É ENTENDER CÔNICAS (ELIPSES, HIPÉRBOLES, PARÁBOLAS) TORTAS...

VIMOS - DUAS AULAS ATRÁS - COMO DESENHAR CÔNICAS PARAMETRIZADAS TORTAS...

$$E_1 = \{O_1 + (\cos\theta)\vec{u}_1 + (\operatorname{sen}\theta)\vec{v}_1 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$
$$H_1 = \{O_1 + t\vec{u}_1 + \tfrac{1}{t}\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$
$$P_1 = \{O_1 + t\vec{u}_1 + t^2\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

QUAIS SÃO AS EQUAÇÕES DE E_1, H_1, P_1?

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x+y-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x+2y+1}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

$$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ab = 1\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x+y-4}{3}\right)\left(\frac{-x+2y+1}{3}\right) = 1\right\}$$

$$P_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid b = a^2\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{-x+2y+1}{3}\right) = \left(\frac{x+y-4}{3}\right)^2\right\}$$

LEMBRE QUE CÔNICAS SÃO CONJUNTOS DA FORMA

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

EXERCÍCIO:
NO ITEM c TEMOS

$$(a,b)_{\Sigma_3} = O_3 + a\vec{u}_3 + b\vec{v}_3$$
$$= (-5,1) + a(\overrightarrow{2,0}) + b$$
$$= (-5+2a,\ 1+b)$$
$$= (x,y)$$

$$x = -5+2a$$
$$y = 1+b$$
$$a = \frac{x+5}{2}$$
$$b = y-1$$

$$(x,y) = \left(\frac{x+5}{2}, y-1\right)$$
$$= (a,b)_{\Sigma_3}$$

REPRESENTEM GRAFIC

E_3, H_3, P_3

E ENCONTREM AS EQUAÇÕES

E_3, H_3, P_3.

$$E_3 = \{O_3 + (\cos\theta)\vec{u}_3 + (\text{se}$$
$$= \{(-5,1) + (\cos\theta)(\overrightarrow{2,0}$$

$$E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid a^2 + b^2$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\underbrace{\frac{x+5}{2}}\right.\right.$$

$0 \to x=$
$0 \to x=$
$1 \to x=$
$-1 \to x=$

$1\}$

$\left(\frac{-x+2y+1}{3}\right)^2 = 1\}$

$\left(\frac{-x+2y+1}{3}\right) = 1\}$

$1) = \left(\frac{x+y-4}{3}\right)^2\}$

DA FORMA

$^2 +$

$+$

$= 0\}$

EXERCÍCIO:

NO ITEM C TEMOS

$(a,b)_{\Sigma_3} = O_3 + a\vec{U}_3 + b\vec{V}_3$

$= (-5,1) + a(\overrightarrow{2,0}) + b(0,1)$

$= (-5+2a, 1+b)$

$= (x,y)$

$x = -5+2a$

$y = 1+b$

$a = \frac{x+5}{2}$

$b = y-1$

$(x,y) = \left(\frac{x+5}{2}, y-1\right)_{\Sigma_3}$

$= (a,b)_{\Sigma_3}$

REPRESENTEM GRAFICAMENTE

E_3, H_3, P_3

E ENCONTREM AS EQUAÇÕES DE

$E_3, H_3, P_3.$

$E_3 = \{O_3 + (\cos\theta)\vec{U}_3 + (\text{sen}\,\theta)\vec{V}_3 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

$E_3 = \{O_3 + (\cos\theta)(\overrightarrow{2,0}) + (\text{sen}\,\theta)(\overrightarrow{0,1}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

$= \{(-5,1) + (\cos\theta)(\overrightarrow{2,0}) + (\text{sen}\,\theta)(\overrightarrow{0,1})$

$E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 = 1\}$

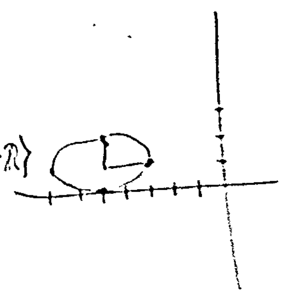
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1\}$

$0 \to x=-5 \quad 1 \to y=2$

$0 \to x=-5 \quad -1 \to y=0$

$1 \to x=-3 \quad 0 \to y=1$

$-1 \to x=-7 \quad 0 \to y=1$



AGORA:

PONHA

$\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$

NA FORMA

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$

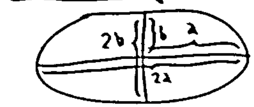
$\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$

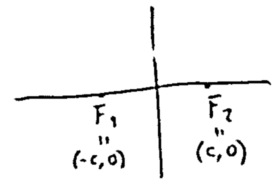
$\frac{(x+5)^2}{4} + (y^2 - 2y + \cancel{1} - \cancel{1}) = 0$

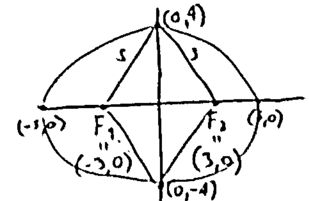
$\frac{(x^2+10x+25)}{4} + y^2 - 2y = 0$

$\frac{x^2}{4} + 0xy + y^2 + \frac{5}{2}x - 2y + \frac{25}{4} = 0$

FOCOS







$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(F_1,P) + d(F_2,P) = 10\}$

TEMOS $(0,4) \in E,$

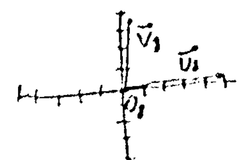
$(0,-4) \in E,$

$(-5,0) \in E,$

$(5,0) \in E.$

SEJA E' A ELIPSE CUJOS 4 PONTOS ÓBVIOS SÃO OS PONTOS ACIMA...

QUAL A EQUAÇÃO DE E'?



REPARE...

COM $O_8 = (0,0),$

$\vec{U}_8 = (\overrightarrow{5,0}),$

$\vec{V}_8 = (\overrightarrow{0,4}),$

$E_8 = \{O_8 + (\cos\theta)\vec{U}_8 + (\text{sen}\,\theta)\vec{V}_8 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

$(a,b)_{\Sigma_8} = (5a, 4b)$

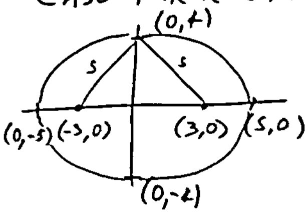
$(x,y) = \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{4}\right)_{\Sigma_8}$

$E_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1\}$

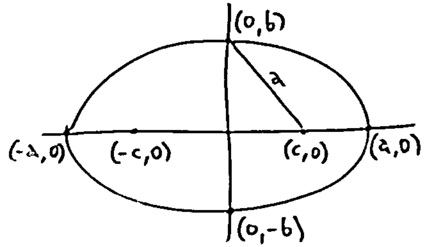
$\boxed{\text{GA 17/FEV/2016}}$

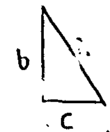
CASO PARTICULAR:



$$E_8 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1\right\}$$

$$E'_8 = \left\{P\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; d((-3,0),P)+d((3,0),P)=10\right\}$$





$$b^2+c^2=a^2$$
$$c^2=a^2-b^2$$
$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

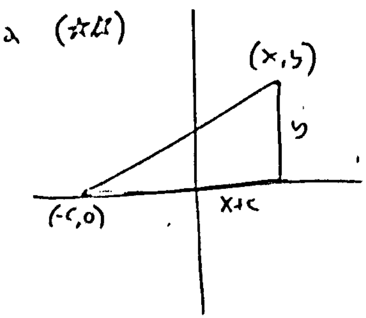
$$E = \left\{P\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; d((-c,0),P)+d((c,0),P)=2a\right\}$$

$$E' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\right\}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \quad (\star)$$

$$d((-c,0),(x,y))+d((c,0),(x,y))=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (\star\star)$$



PRÓXIMA AULA: DEMONSTRAÇÃO (CONTAS GRANDES!!) DE QUE $(\star)$ E $(\star\star)$ SÃO EQUIVALENTES...

... E OUTROS ASSUNTOS - VÁRIOS! - SOBRE ELIPSES.

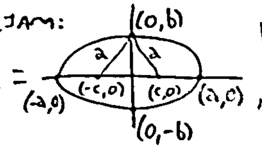
PRA CASA: REPRESENTE GRAFICAMENTE E ENCONTRE A EQUAÇÃO DE:

E_2, E_3, E_4, E_5 (FÁCEIS)

E_7 (MAIS DIFÍCIL).

GA 22/FEV/2016

SEJAM:

$E =$ 

$b^2+c^2=a^2$

$E' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$,

$E'' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d(\underbrace{(-c,0)}_{F_1},(x,y)) + d(\underbrace{(c,0)}_{F_2},(x,y)) = 2a\}$

$= \{P\in\mathbb{R} \mid d(F_1,P)+d(F_2,P) = 2a\}$

$d((-c,0),(x,y)) + d((c,0),(x,y)) = 2a$

$\sqrt{\underbrace{(x+c)^2+y^2}_{A}} + \sqrt{\underbrace{(x-c)^2+y^2}_{B}} = \underbrace{2a}_{C}$ ⇐ CHAMEI ISTO DE (☆☆) NA AULA PASSADA.

TRUQUE:

$\sqrt{A}+\sqrt{B} = C$

$\Rightarrow (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 = C^2$

$A + 2\sqrt{A}\sqrt{B} + B = C^2$

$2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$

$4AB = (C^2-A-B)^2$

$= C^4 + A^2 + B^2 - 2C^2A - 2C^2B + 2AB$

ISSO É UMA CONTA BEM GRANDE... ELA ESTÁ NO LIVRO, NÃO VAMOS FAZÊ-LA AGORA!

PRECISAMOS APRENDER A CONVERTER ENTRE VÁRIOS JEITOS DE ESPECIFICAR ELIPSES...

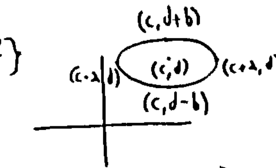
OBS:

$E' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 = 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\frac{200}{a^2}x^2 + \frac{200}{b^2}y^2 - 200 = 0}_{\text{EQ DE UMA CÔNICA!}}\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\}$



$E''' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x-c}{a})^2 + (\frac{y-d}{b})^2 = 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\frac{1}{a^2}x^2 - \frac{2c}{a^2}x + \frac{c^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}y^2 - \frac{2d}{b^2}y + \frac{d^2}{b^2} - 1 = 0}_{\text{EQ DE CÔNICA!}}\}$

EXERCÍCIO:

SEJA $E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+4x+9y^2-6y-40=0\}$

ENCONTRE O CENTRO E OS PONTOS ÓBVIOS DE E_1, E ESCREVA E_1 NA FORMA $E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x-c}{a})^2 + (\frac{y-d}{b})^2 = 1\}$.

$E_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (4x^2+4x)+(9y^2-6y)-34=0\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ((2x+1)^2-1)+((3y-1)^2-1)-34=0\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x+1)^2+(3y-1)^2 = 36\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{2x+1}{6})^2 + (\frac{3y-1}{6})^2 = 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x+\frac{1}{2}}{3})^2 + (\frac{y-\frac{1}{3}}{2})^2 = 1\}$

REPRESENTE GRAFICAMENT[E] (COM OS PONTOS ÓBVIOS)

(CASA!)

LISTA 4 DA ANA

1) OBTENHA A EQ[UAÇÃO DA] ELIPSE DE FOC[OS] ... CUJO EIXO MA[IOR] ... EM CADA UM DO[S] CASOS:

a) $F_1 = (0,-$ ...

$F_2 = (0,1$ ...

$M = 6$

b) $F_1 = (2,$ ...

$F_2 = (4,$ ...

$M = 4.$ ...

CASA: EX[ERCÍCIOS] DA LISTA[A] ANA ISAG[...]

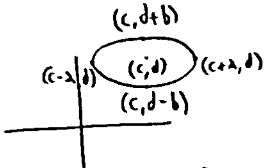
$\ldots\frac{}{b})^2=1\}$

$\ldots y^2=1\}$

$\ldots\frac{00}{b^2}y^2-200=0\}$

uma

$\ldots a^2y^2=a^2b^2\}$



$\ldots\left(\frac{y-d}{b}\right)^2=1\}$

$\underbrace{\ldots x+\frac{c^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{2d}{b^2}y+\frac{d^2}{b^2}-1=0}_{\ldots\text{ de cônica!}}\}$

$\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+4x+9y^2-6y-40=0\}$

...o e os pontos óbvios de E_1,

... forma $E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-c}{a}\right)^2+\left(\frac{y-d}{b}\right)^2=1\}$.

$\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (4x^2+4x)+(9y^2-6y)-34=0\}$

$\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid ((2x+1)^2-1)+((3y-1)^2-1)-34=0\}$

$\ldots)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x+1)^2+(3y-1)^2=36\}$

$\ldots)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{2x+1}{6}\right)^2+\left(\frac{3y-1}{6}\right)^2=1\}$

$\ldots y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{y-\frac{1}{3}}{2}\right)^2=1\}$

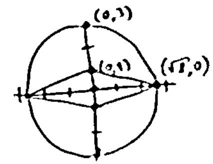
Represente graficamente E_2 (com os pontos óbvios).

(casa!)

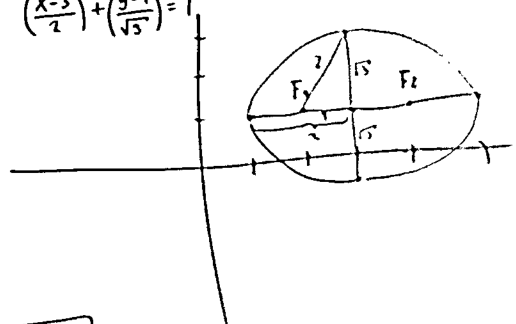
Lista 4 da Ana Isabel:

1) Obtenha a equação da elipse de focos F_1 e F_2 cujo eixo maior mede M em cada um dos seguintes casos:

a) $F_1=(0,-1)$, $F_2=(0,1)$, $M=6$ $\qquad \left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2=1$



b) $F_1=(2,1)$, $F_2=(4,1)$, $M=4$. $\qquad \left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$

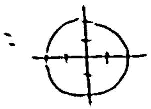


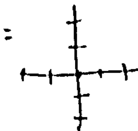
$\boxed{\text{Casa: exercícios da Lista 4 da Ana Isabel.}}$

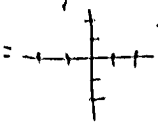
Elipses degeneradas

Sejam: $C_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=R\}$

Então: $C_1=$  ,

$C_4=$ 

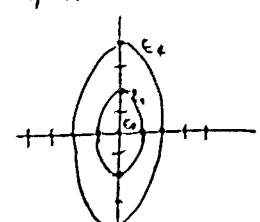
$C_0=$  ⇐ Um ponto só! (círculo degenerado)

$C_{-1}=$  ⇐ Conjunto vazio! (círculo degenerado)

Elipses:

$E_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=k\}$

Representem graficamente E_1, E_4, E_0.



Os E_k são as curvas de nível de $F(x,y)=x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$ - são elipses concêntricas de mesma excentricidade.

$\boxed{\text{GA 24/FEV/2016}}$

A GENTE TERMINOU A AULA PASSADA VENDO QUE AS CURVAS DE NÍVEL DE

$F(x,y) = x^2 + 4y^2$

E DE

$G(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

ERAM ELIPSES CONCÊNTRICAS DE MESMA EXCENTRICIDADE...

HOJE: HIPÉRBOLES!

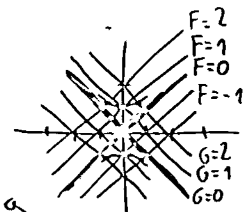
QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE:

a) $F(x,y) = y - x$,
$G(x,y) = y + x$,
$H(x,y) = F(x,y)\,G(x,y)$?

b) $F(x,y) = y - 2x$,
$G(x,y) = y + 2x$,
$H(x,y) = F(x,y)\,G(x,y)$?

UM PROBLEMA PRELIMINAR (PRA QUEM ESTIVER COM DIFICULDADES):

c) QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $H(x,y) = xy$?



OBS:
$H(x,y) = F(x,y)\,G(x,y)$
$= (y-x)(y+x)$
$= y^2 - x^2$

OBS:
$H(x,y) = (y-2x)(y+2x)$
$= y^2 - 4x^2$

$H(x,y) = 0$
$\Leftrightarrow F(x,y) = 0$
OU $G(x,y) = 0$

$H(x,y) = 1$?

ALGUNS PONTOS NOS QUAIS ISTO – $H(x,y)=1$ – ACONTECE:

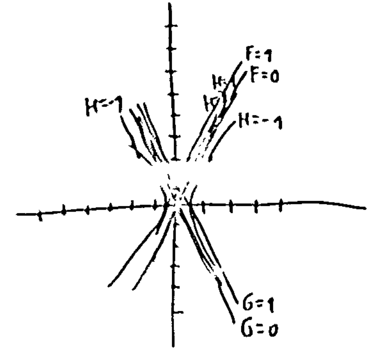
$F(x,y)$	$G(x,y)$
1	1
2	1/2
1/2	2

O CONJUNTO $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) = 1\}$ É UMA HIPÉRBOLE! COM UMA CONCAVIDADE PRA CIMA E OUTRA PRA BAIXO, CENTRADA EM $(0,0)$ E ASSÍNTOTAS A 45°.

EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE OS CONJUNTOS:

$H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) = 2\}$,
$H_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) = -1\}$.

b) $F(x,y) = y - 2x = 0$
$\Rightarrow y = 2x$
$F(x,y) = y - 2x = 1$
$\Rightarrow y = 2x + 1$
$G(x,y) = y + 2x = 0$
$\Rightarrow y = -2x$
$G(x,y) = y + 2x = 1$
$\Rightarrow y = 1 - 2x$



IDÉIA-CHAVE:
NOS LIVROS, NO MATERIAL DA MARIANA, ETC, VOCÊS VÃO VER QUE AS EQUAÇÕES DAS HIPÉRBOLES SÃO TIPO:

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k$

TRUQUE: COM

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$

$\parallel$

$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

TEMOS:

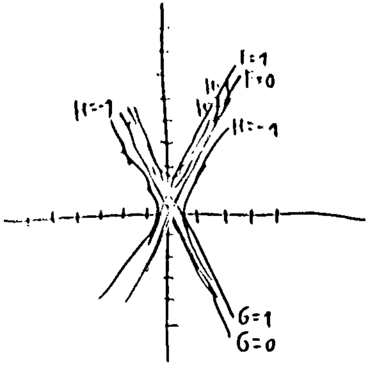
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\}$

ISTO VAI DAR AS ASSÍNTOTAS DE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k\}$.

EXERCÍC
d) SEJ
F(x
G(
H(

Re
{(x
e {(
F=
F=
G=
G=

$(x,y) = y-2x = 0$
$\Rightarrow y = 2x$
$(x,y) = y-2x = 1$
$\Rightarrow y = 2x+1$
$(x,y) = y+2x = 0$
$\Rightarrow \quad x$
$(x,y) = y+2x = 1$
$\Rightarrow y = 1-2x$



ECE:

IDÉIA-CHAVE:
NOS LIVROS,
NO MATERIAL DA
MARIANA, ETC,
VOCÊS VÃO VER
QUE AS EQUAÇÕES
DAS HIPÉRBOLES
SÃO TIPO:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k$$

TROQUEI EM

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$$
$$\parallel$$
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

TEMOS:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0\right\}$$
$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0\right\}$$
$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\right\}$$

ISTO VAI DAR AS ASSÍNTOTAS DE
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k\right\}$.

}.

EXERCÍCIO:
d) SEJAM

$$F(x,y) = \frac{x}{2} - \frac{y}{3},$$
$$G(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3},$$
$$H(x,y) = F(x,y)\cdot G(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

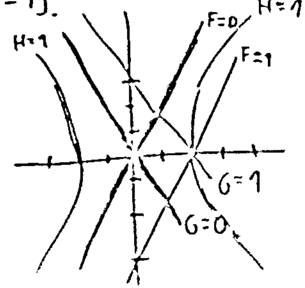
REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0\right\}$
e $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1\right\}$.

$F=0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$
$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$
$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

$F=1 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
$\Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 1$
$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$

$G=0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$
$y = -\frac{3}{2}x$

$G=1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$y = 3 - \frac{3}{2}x$



EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE:

e) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1\right\}$,

f) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - y^2 = 1\right\}$,

g) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - y^2 = 9\right\}$

QUANDO VOCÊS SOUBEREM
FAZER O g VOCÊS VÃO
TER UMA NOÇÃO DE COMO
REPRESENTAR GRAFICAMENTE
COISAS DA FORMA
$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$,
ONDE α E β TÊM SINAIS
DIFERENTES.

OBS:
$4x^2 + 9y^2 = 16$
ISTO É UMA ELIPSE!
$4x^2 + 9y^2 = -16$
ISTO É UM CONJUNTO
VAZIO!

GA 24/FEV/2016

Tem técnicas pra desenhar uma hipérbole rápido...

$$H_e = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}_{1} = 1\right\}$$

± 1

Pontos óbvios:

$\frac{x}{3}=1, \quad \frac{y}{2}=0 \quad = (x,y)=(3,0)$

$\frac{x}{3}=-1, \quad \frac{y}{2}=0 \quad = (x,y)=(-3,0)$

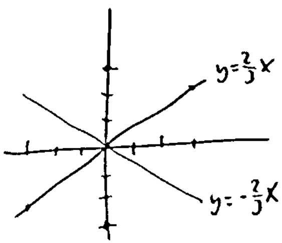
Assíntotas:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0$$

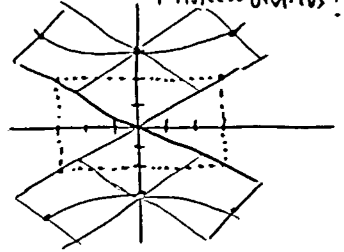
$$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

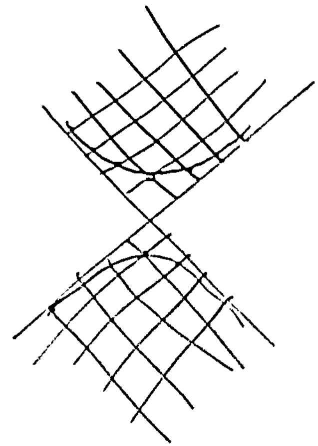


Truque extra: desenhar paralelogramos!



Pra casa:
Dêem uma olha na folha da Mariana sobre hipérboles e na seção 3.? do Reis e Silva...
Há menções a focos, eixos "real" e "imaginário", excentricidade, a, b, c, centro, vértices (o que tem a ver com paralelogramos! Comece por aqui!)

Dêem uma olhada também na lista do Bel sobre hipérboles



GA 2/MAR/2015

HOJE:

- VOU SUPOR QUE TODO MUNDO JÁ ... SACO CHEIO DE CONTAS SOBRE HIPÉRBOLES (E ELIPSES E PARÁBOLAS) E RELACIONANDO AS "DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS" (QUE SÃO AS EM TERMOS DE FOCOS, DIRETRIZES E DISTÂNCIAS) E AS DEFINIÇÕES VIA EQUAÇÕES DE CÔNICAS..
- TOU DISTRIBUINDO (E VOU SCANEAR E PÔR NO SITE) UMA FOLHA QUE COMPLEMENTA A FOLHA DA MONITORA SOBRE HIPÉRBOLES... DEPOIS VOU FAZER OUTRAS SOBRE ELIPSES E PARÁBOLAS
- INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$.

OBS: $e > 1 \to$ HIPÉRBOLE

EXCENTRICIDADE

$e < 1 \to$ ELIPSE

$e = 1 \to$ PARÁBOLA

E TANTO PRA HIPÉRBOLES QUANTO PRA ELIPSES (MAS NÃO PRA PARÁBOLAS!) A GENTE TEM UMA SEGUNDA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA USANDO SÓ DOIS FOCOS.

SEJAM: H UMA HIPÉRBOLE CUJO "CENTRO" (PONTO DE CRUZAMENTO DAS ASSÍNTOTAS) ESTÁ NA ORIGEM,

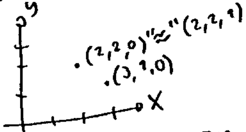
E UMA ELIPSE COM CENTRO NA ORIGEM,

P UMA PARÁBOLA COM "VÉRTICE" NA ORIGEM.

O QUE ACONTECE SE A GENTE OLHA H, E e P CADA VEZ MAIS DE LONGE?

INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$

COMO VISUALIZAR $\mathbb{R}^3$? GRÁFICOS EM $\mathbb{R}^2$ PODEM SER MOSTRADOS PRA COLEGAS... E EM $\mathbb{R}^3$?



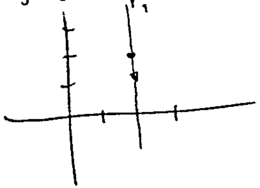
EIXO Z INDO PRA FORA DO QUADRO (NA SUA DIREÇÃO), Z=0 QDZ SOBRE O QUADRO, Z=1 QDZ UMA UNIDADE NA SUA DIREÇÃO.

RETAS COM Z=1 EM TODO PONTO ESTÃO PARALELAS AO QUADRO...

$r_1 = \{(2,2,0) + t(0,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_2 = \{(2,2,1) + t(0,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_3 = \{(2,2,0) + t(0,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



EM $\mathbb{R}^2$ A GENTE TEM:

- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^2$ (DIMENSÃO 2)

EM $\mathbb{R}^3$ A GENTE TEM:

- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- PLANOS (DIMENSÃO 2)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^3$ (DIMENSÃO 3).

(ALÉM DISSO, VETORES).

EXERCÍCIO:

1) VISUALIZE, E COMPARE COM OS COLEGAS FAZENDO MÍMICA:

$\pi_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

$\pi_{xz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

$\pi_{yz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$

$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=1\}$

ABREVIAÇÃO (NOTAÇÃO TEMPORÁRIA, VALE SÓ PRA ESTA AULA)

$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y,z) \in$

$\pi_2 = [y=1]$

$\pi_3 = [y=2]$

$\pi_4 = [z=1]$

$\pi_5 = [z=2]$.

REPARE QUE r_1, r_2, r_3 SÃO RETAS PARAMETRIZADAS... A "UM PARÂMETRO", t.

DÁ PRA GENTE PARAMETRIZAR PLANOS, SÓ QUE VAMOS PRECISAR DE DOIS VETORERES...

EXERCÍCIO:

2) EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO VISUALIZE $(0,0)_{\Sigma_i}$, $(0,1)_{\Sigma_i}$

É UMA HIPÉRBOLE
CENTRO (PONTO DE
...NTO DAS ASSÍNTOTAS)
NA ORIGEM,
A ELIPSE COM CENTRO
...RIGEM,
A PARÁBOLA COM
...RTICE" NA ORIGEM.

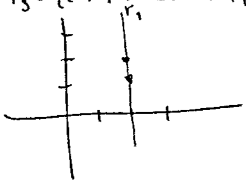
...UE ACONTECE SE A
...TE OLHA H, E e P
...DA VEZ MAIS DE
...NGE?

RETAS COM Z=1
EM TODO PONTO ESTÃO
PARALELAS AO QUADRO...

$r_1 = \{(2,2,1) + t(\overrightarrow{0,-1,0}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

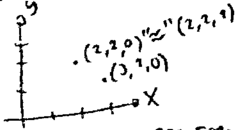
$r_2 = \{(2,2,1) + t(0,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_3 = \{(2,2,0) + t(0,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$

COMO VISUALIZAR $\mathbb{R}^3$?
GRÁFICOS EM $\mathbb{R}^2$ PODEM
SER MOSTRADOS PRA
COLEGAS...
E EM $\mathbb{R}^3$?



EIXO Z INDO PRA FORA
DO QUADRO (NA SUA
DIREÇÃO), Z=0 QDZ
SOBRE O QUADRO,
Z=1 QDZ UMA UNIDADE
NA SUA DIREÇÃO.

EM $\mathbb{R}^2$ A GENTE TEM:
- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^2$ (DIMENSÃO 2)

EM $\mathbb{R}^3$ A GENTE TEM:
- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- PLANOS (DIMENSÃO 2)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^3$ (DIMENSÃO 3).

(ALÉM DISSO, VETORES).

EXERCÍCIO:

1) VISUALIZE, E COMPARE
COM OS COLEGAS FAZENDO
MÍMICA:

$\Pi_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

$\Pi_{xz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

$\Pi_{yz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$

$\Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=1\}$

ABREVIAÇÃO
(NOTAÇÃO TEMPORÁRIA,
VALE SÓ PRA ESTA AULA):

$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$

$\Pi_2 = [y=1]$

$\Pi_3 = [y=2]$

$\Pi_4 = [z=1]$

$\Pi_5 = [z=2]$.

REPARE QUE r_1, r_2, r_3 SÃO
RETAS PARAMETRIZADAS...
A "UM PARÂMETRO", t.

DÁ PRA GENTE PARAMETRIZAR
PLANOS, SÓ QUE VAMOS PRECISAR
DE DOIS VETORERES...

EXERCÍCIO:
2) EM CADA UM DOS CASOS
ABAIXO VISUALIZE $(0,0)_{\Sigma_i}$, $(1,0)_{\Sigma_i}$,
$(0,1)_{\Sigma_i}$, $(1,1)_{\Sigma_i}$.

a) $\Pi_6 = \{\underbrace{(2,2,0) + a(\overrightarrow{1,0,0}) + b(\overrightarrow{0,1,0})}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

P. EX., $(3,4)_{\Sigma_6} = (2,2,0) + 3(\overrightarrow{1,0,0}) + 4(\overrightarrow{0,1,0})$

b) $\Pi_7 = \{\underbrace{(2,2,0) + a(\overrightarrow{2,0,0}) + b(\overrightarrow{0,2,0})}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

PERGUNTAS:
$(5,6,0) \in \Pi_6$? SIM, $a=3$, $b=4$.
$(5,6,1) \in \Pi_6$? NÃO.
$(5,6,0) \in \Pi_7$? NÃO.
$(5,6,1) \in \Pi_7$? SIM, $a=1.5$, $b=2$.

OS PLANOS Π_{xy}, Π_{xz}, Π_{yz}
SÃO CHAMADOS DE "PLANOS
COORDENADOS"... ÀS VEZES
ELES SÃO CHAMADOS DE Π_z, Π_y, Π_x.

AGORA VISUALIZE:

$\Pi_8 = [y=x]$

$\Pi_9 = [y=2x]$

$\Pi_{10} = [z=x]$

DICA: SE VOCÊS ENCONTRAREM
3 (OU 4) PONTOS DESTES
PLANOS VOCÊS VÃO
CONSEGUIR VISUALIZAR
OS PLANOS...

GA 2/MAR/2015

HOJE:

- VOU SUPOR QUE TODO MUNDO JÁ TÁ DE SACO CHEIO DE CONTAS SOBRE HIPÉRBOLES (E ELIPSES E PARÁBOLAS) RELACIONANDO AS "DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS" (QUE SÃO AS EM TERMOS DE FOCOS, DIRETRIZES E DISTÂNCIAS) E AS DEFINIÇÕES VIA EQUAÇÕES DE CÔNICAS..
- TOU DISTRIBUINDO (E VOU SCANEAR E PÔR NO SITE) UMA FOLHA QUE COMPLEMENTA A FOLHA DA MONITORA SOBRE HIPÉRBOLES.. DEPOIS VOU FAZER OUTRAS SOBRE ELIPSES E PARÁBOLAS
- INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$

OBS. $e > 1 \to$ HIPÉRBOLE

(e = EXCENTRICIDADE)

$e < 1 \to$ ELIPSE

$e = 1 \to$ PARÁBOLA

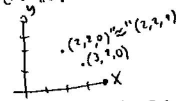
E TANTO PRA HIPÉRBOLES QUANTO PRA ELIPSES (MAS NÃO PRA PARÁBOLAS!) A GENTE TEM UMA SEGUNDA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA USANDO SÓ DOIS FOCOS

SEJAM: H UMA HIPÉRBOLE CUJO "CENTRO" (PONTO DE CRUZAMENTO DAS ASSÍNTOTAS) ESTÁ NA ORIGEM, E UMA ELIPSE COM CENTRO NA ORIGEM, P UMA PARÁBOLA COM "VÉRTICE" NA ORIGEM.

O QUE ACONTECE SE A GENTE OLHA H, E E P CADA VEZ MAIS DE LONGE?

INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$

COMO VISUALIZAR $\mathbb{R}^3$? GRÁFICOS EM $\mathbb{R}^2$ PODEM SER MOSTRADOS PRA COLEGAS... E EM $\mathbb{R}^3$?



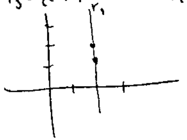
EIXO Z INDO PRA FORA DO QUADRO (NA SUA DIREÇÃO), Z=0 QDZ SOBRE O QUADRO, Z=1 QDZ UMA UNIDADE NA SUA DIREÇÃO.

RETAS COM Z=1 EM TODO PONTO ESTÃO PARALELAS AO QUADRO...

$r_1 = \{(2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_2 = \{(2,2,1) + t(0,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_3 = \{(2,2,0) + t(0,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



EM $\mathbb{R}^2$ A GENTE TEM:

- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^2$ (DIMENSÃO 2)

EM $\mathbb{R}^3$ A GENTE TEM:

- PONTOS (DIMENSÃO 0)
- RETAS (DIMENSÃO 1)
- PLANOS (DIMENSÃO 2)
- O PRÓPRIO $\mathbb{R}^3$ (DIMENSÃO 3).

(ALÉM DISSO, VETORES).

EXERCÍCIO:

1) VISUALIZE, E COMPARE COM OS COLEGAS FAZENDO MÍMICA:

$\pi_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

$\pi_{xz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

$\pi_{yz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$

$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=1\}$

ABREVIAÇÃO (NOTAÇÃO TEMPORÁRIA, VALE SÓ PRA ESTA AULA):

$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$

$\pi_2 = [y=1]$

$\pi_3 = [y=2]$

$\pi_4 = [z=1]$

$\pi_5 = [z=2]$.

REPARE QUE r_1, r_2, r_3 SÃO RETAS PARAMETRIZADAS... A "UM PARÂMETRO", t.

DÁ PRA GENTE PARAMETRIZAR PLANOS, SÓ QUE VAMOS PRECISAR DE DOIS VETORES...

EXERCÍCIO:

2) EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO VISUALIZE $(0,0)_{\Sigma_i}$, $(1,0)_{\Sigma_i}$, $(0,1)_{\Sigma_i}$, $(1,1)_{\Sigma_i}$.

a) $\pi_6 = \{\underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

P. EX., $(3,4)_{\Sigma_6} = (2,2,0) + 3\overrightarrow{(1,0,0)} + 4\overrightarrow{(0,1,0)}$

b) $\pi_7 = \{\underbrace{(2,2,1) + a\overrightarrow{(2,0,0)} + b\overrightarrow{(0,2,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

PERGUNTAS:

$(5,6,0) \in \pi_6$? SIM, $a=3$, $b=4$.

$(5,6,1) \in \pi_6$? NÃO.

$(5,6,0) \in \pi_7$? NÃO.

$(5,6,1) \in \pi_7$? SIM, $a=1.5$, $b=2$.

OS PLANOS $\pi_{xy}, \pi_{xz}, \pi_{yz}$ SÃO CHAMADOS DE "PLANOS COORDENADOS"... ÀS VEZES ELES SÃO CHAMADOS DE π_z, π_y, π_x.

AGORA VISUALIZE:

$\pi_8 = [y=x]$

$\pi_9 = [y=2x]$

$\pi_{10} = [z=x]$

DICA: SE VOCÊS ENCONTRAREM 3 (OU 4) PONTOS DESTES PLANOS VOCÊS VÃO CONSEGUIR VISUALIZAR OS PLANOS...

$\boxed{\text{GA } 2/\text{MAR}/2015}$

$$\pi_{11} = \left[\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1\right]$$

TRUQUE:

$(2,0,0) \in \pi_{11}$,

$(0,3,0) \in \pi_{11}$,

$(0,0,4) \in \pi_{11}$

AGORA VISUALIZE:

$\pi_{11} \cap [z=0]$

$\pi_{11} \cap [z=4]$

$\pi_{11} \cap [z=1]$

(RETAS)

GA 7/MARÇO/2016

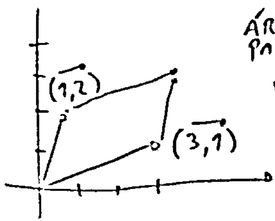
HOJE: DETERMINANTES, "·" E "×" EM $\mathbb{R}^3$! VAMOS VOLTAR A EQUAÇÕES DE RETAS E PLANOS DEPOIS!

EM $\mathbb{R}^2$:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right| = |ad-bc|$$

"$|\det|$" É A ÁREA...



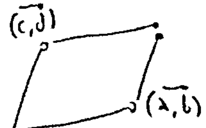
ÁREA DO PARALELOGRAMO:

$$\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right| = |1-6| = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

O DETERMINANTE EM $\mathbb{R}^2$ É ÁREA VEZES UM SINAL QUE DEPENDE DA ORDEM DOS VETORES.



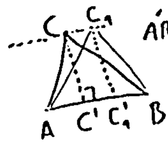
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = [\overrightarrow{(a,b)}, \overrightarrow{(c,d)}]$$

E SE A GENTE FIXA O $\overrightarrow{(a,b)}$?

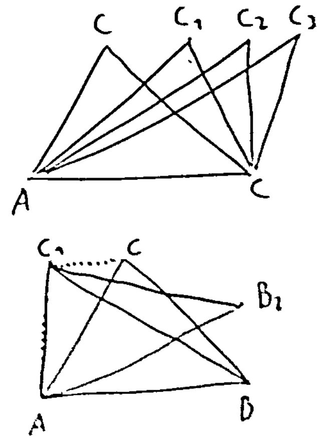
P. EX., $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(3,1)}$...

ENTÃO: $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = 3y - 1x$
$= -1x + 3y$
$= \overrightarrow{(-1,3)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$

LEMBRE QUE A ÁREA DE UM TRIÂNGULO É $\frac{\text{BASE} \cdot \text{ALTURA}}{2}$, E A ÁREA DE UM PARALELOGRAMO É BASE · ALTURA...



$$\text{ÁREA} = \overbrace{d(A,B)}^{\text{BASE}} \cdot \overbrace{d(C,C')}^{\text{ALTURA}}$$
$$= d(C_1, C_1')$$



EM $\mathbb{R}^3$...

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$\det\left(\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\;\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right) =$$

$aei + bfg + cdh$
$- ceg - afh - bdi$

... E ISTO CALCULA O VOLUME DO "PARALELEPÍPEDO TORTO" $[\overrightarrow{(a,b,c)}, \overrightarrow{(d,e,f)}, \overrightarrow{(g,h,i)}]$

VEZES UM SINAL QUE DEPENDE DA ORDEM DOS VETORES.

PODEMOS CALCULÁ-LO TAMBÉM COMO ÁREA DA BASE VEZES ALTURA (VEZES SINAL)

A "BASE" VAI SER UM PARALELOGRAMO EM $\mathbb{R}^3$.

EXERCÍCIOS (DE VISUALIZAÇÃO E OLHÔMETRO):

1) EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO CALCULE A ÁREA DO PARALELOGRAMO EM $\mathbb{R}^3$ GERADO POR $\vec{u}$ E $\vec{v}$.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	
a)	$\overrightarrow{(2,0,0)}$	$\overrightarrow{(0,3,0)}$	=
b)	$\overrightarrow{(2,0,0)}$	$\overrightarrow{(0,0,1)}$	=
c)	$\overrightarrow{(2,0,0)}$	$\overrightarrow{(1,3,0)}$	=
d)	$\overrightarrow{(2,0,0)}$	$\overrightarrow{(3,0,0)}$	

DICA: FAÇAM EM DUPLA OU EM GRUPO PRA VOCÊS EXERCI[TAREM] DESCREVER OBJETOS [EM] $\mathbb{R}^3$ POR MÍMICA DE JEITO CLARO.

2) EM CADA UM DOS CA[SOS] ABAIXO CALCULE (... OLHÔMETRO) A "ALTU[RA]" DO PARALELOGRAMO GERADO POR $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ O SEU VOLUME.

TRUQUE: SEJAM A= B= C=

A "ALTURA" É A DIST[ÂNCIA] DO PONTO C AO PL[ANO] GERADO POR 0, A E

$$\begin{pmatrix} \dots & b & c \\ \dots & e & f \\ \dots & h & i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \dots & b & c & a & b & c \\ \dots & e & f & d & e & f \\ \dots & h & i & g & h & i \end{matrix} =$$

$\dots bfg + cdh$
$\dots - afh - bdi$

...isto calcula o ... do "paralelepípedo" $[(\overrightarrow{a,b,c}), (\overrightarrow{d,e,f}), (\overrightarrow{g,h,i})]$

...s um sinal que ...nde da ordem ... vetores.

...mos calculá-lo ...ém como área ... base vezes altura ... (... sinal)

..."base" vai ser um ...alelogramo em

Exercícios
(de visualização e olhômetro):

1) Em cada um dos casos abaixo calcule a área do paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	
a)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{0,3,0})$	$=6$
b)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{0,0,1})$	$=2$
c)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{1,3,0})$	$=6$
d)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{3,0,0})$	$=0$

Dica: Façam em dupla ou em grupo pra vocês exercitarem descrever objetos em $\mathbb{R}^3$ por mímica de um jeito claro.

2) Em cada um dos casos abaixo calcule (no olhômetro) a "altura" do paralelogramo gerado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e o seu volume.

Truque: sejam $A = O + \vec{u}$, $B = O + \vec{v}$, $C = O + \vec{w}$.

A "altura" é a distância do ponto C ao plano π gerado por O, A e B.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$	Área do paralelogramo	Altura	Volume
a)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{0,3,0})$	$(\overrightarrow{0,0,1})$	6	1	6
b)	"	"	$(\overrightarrow{1,1,1})$	6	1	6
c)	"	"	$(\overrightarrow{1,2,3})$	6	3	18
d)	"	"	$(\overrightarrow{1,1,0})$	6	0	0
e)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{0,0,1})$	$(\overrightarrow{0,3,0})$	2	3	6
f)	"	"	$(\overrightarrow{2,3,1})$	2	3	6
g)	$(\overrightarrow{2,0,0})$	$(\overrightarrow{1,3,0})$	$(\overrightarrow{4,5,0})$	6	0	0
h)	"	"	$(\overrightarrow{4,5,1})$	6	1	6
i)	"	"	$(\overrightarrow{6,7,2})$	6	2	12
j)	"	"	$(\overrightarrow{x,y,z})$	6	z	$6z$

OBS:
$$\det[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det\left[\vec{u}, \left(\begin{matrix}\vec{v} + \\ 99\vec{u} + \\ 200\vec{u}\end{matrix}\right), \vec{w}\right]$$

O que é $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}$?

Mais concretamente, o que é $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$?

"$6z$"!

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = aez + bfx + cdy - cex - afy - bdz$$
$$= (bf - ce)x + (cd - af)y + (ae - bd)z$$
$$= (\overrightarrow{bf - ce, cd - af, ae - bd}) \cdot (\overrightarrow{x, y, z})$$

Pra casa:
Vizualize:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\overrightarrow{2,0,0}) \cdot (\overrightarrow{x,y,z}) = 0\}$,

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\overrightarrow{1,1,0}) \cdot (\overrightarrow{x,y,z}) = 0\}$,

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\overrightarrow{0,0,3}) \cdot (\overrightarrow{x,y,z}) = 0\}$,

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\overrightarrow{0,0,3}) \cdot (\overrightarrow{x,y,z}) = 3\}$.

GA 9/MAR/2016

LEMBRANDO:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left[\overrightarrow{(a,b,c)}, \overrightarrow{(d,e,f)}, \overrightarrow{(x,y,z)} \right]$$

$$= aez + bfx + cdy - cex - bdz - afy$$

$$= (bf-ce)x + (cd-af)y + (ae-bd)z$$

$$= \overrightarrow{(bf-ce, cd-af, ae-bd)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

$$= \left(\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)}\right) \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

LEMBRE QUE PODEMOS CALCULAR $[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]$ (MÓDULO SINAL) FAZENDO:

ÁREA$(\vec{U},\vec{V})$ · "ALTURA"

HOJE:

VÁRIAS APLICAÇÕES DO "×":
- ÁREAS DE PARALELOGRAMO EM $\mathbb{R}^3$,
- TESTAR SE DUAS RETAS SE CRUZAM,
- CALCULAR DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO
- CALCULAR DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS.

MAS ANTES DISTO...

$[\vec{U},\vec{V},\vec{W}] = [\vec{U},\vec{V}',\vec{W}']$,

$d(A,B) = d((A_1,A_2,A_3),(B_1,B_2,B_3))$

$= \|\overrightarrow{AB}\|$

$\|\overrightarrow{(x,y,z)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(x,y,z)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

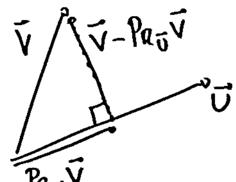
$\overrightarrow{(a,b,c)} \perp \overrightarrow{(x,y,z)}$ SE E SÓ SE

$\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 0$

$ax + by + cz$

$$Pr_{\vec{U}} \vec{V} = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\vec{U}\cdot\vec{U}} \vec{U}$$

A PROJEÇÃO (EM $\mathbb{R}^3$ TAMBÉM!) NOS PERMITE DECOMPOR $\vec{V}$ NUMA PARTE PARALELA A $\vec{U}$ E UMA PARTE ORTOGONAL A $\vec{U}$.



OBS: DÁ PRA GENTE USAR "Pr" PRA:
- ENCONTRAR PONTO DE r MAIS PRÓXIMO A B
- CALCULAR DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA, (MAS EXISTE UMA FÓRMULA MAIS CURTA)

VOLTANDO:

$[\vec{U},\vec{V},\vec{W}] = [\vec{U},\vec{V}',\vec{W}']$

ONDE $\vec{V}' = a\vec{U} + \vec{V}$ E $\vec{V}' \perp \vec{U}$

E $\vec{W}' = b\vec{U} + c\vec{V} + \vec{W}$ E $\vec{W}' \perp \vec{U}$

E $\vec{W}' \perp \vec{V}$...

EXEMPLO:

$\vec{U} = \overrightarrow{(2,0,0)}$

$\vec{V} = \overrightarrow{(1,3,0)}$ $\quad \vec{V}' = \overrightarrow{(0,3,0)}$

$\vec{W} = \overrightarrow{(4,5,6)}$ $\quad \vec{W}' = \overrightarrow{(0,0,6)}$

REPARE QUE:
- $\vec{U}$ E $\vec{V}$ GERAM O MESMO PLANO QUE $\vec{U}$ E $\vec{V}'$,
- ÁREA$(\vec{U},\vec{V})$ = ÁREA$(\vec{U},\vec{V}')$
- VOLUME$(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ = VOLUME$(\vec{U},\vec{V}',\vec{W}') = 36$
- $\vec{U}\times\vec{V}' = \vec{U}\times\vec{V}$

PORQUE???

$(\vec{U}\times\vec{V}')\cdot\overrightarrow{(x,y,z)} = (\vec{U},\vec{V})\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$

$\|$ NO CASO ACIMA $\qquad \|$ NO CASO ACIMA

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

O QUE É $\vec{U}\times\vec{V}$ $(= \vec{U}\times\vec{V}')$ VETORIALMENTE?

COMPRIMENTO? ⇐ ÁREA$(\vec{U},\vec{V})$

DIREÇÃO? ⇐ ORTOGONAL A $\vec{U}$ E $\vec{V}$

SENTIDO? !!.

SE (X

SEJA

ENT

$\|[\vec{U}$

MAS

$\vec{U}$

$\vec{U}$

POR

REI

$[\vec{U}$

SEM

AO

$\vec{U}$

(OU

"G

OV

DO

C

OB

OB

...nto:

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v}',\vec{w}']$

...de $\vec{v}' = a\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{v}' \perp \vec{u}$

e $\vec{w}' = b\vec{u}+c\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{w}' \perp \vec{u}$

e $\vec{w}' \perp \vec{v}$...

Exemplo:

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(1,3,0)}$ $\quad \vec{v}' = \overrightarrow{(0,3,0)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(4,5,6)}$ $\quad \vec{w}' = \overrightarrow{(0,0,6)}$

Repare que:

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram o mesmo plano que $\vec{u}$ e $\vec{v}'$,

Área$(\vec{u},\vec{v})$ = Área$(\vec{u},\vec{v}')$

Volume$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ =

Volume$(\vec{u},\vec{v}',\vec{w}')$ = 36

$\vec{u}\times\vec{v}' = \vec{u}\times\vec{v}$

Porque???

$(\vec{u}\times\vec{v}')\cdot\overrightarrow{(x,y,z)} = (\vec{u},\vec{v})\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$

|| no caso acima $\qquad$ || no caso acima

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

O que é $\vec{u}\times\vec{v}$ $(= \vec{u}\times\vec{v}')$ vetorialmente?

Comprimento? ⇐ Área$(\vec{u},\vec{v})$

Direção? ⇐ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Sentido? !!

Se $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(0,0,1)}$...

Seja $\overrightarrow{(x,y,z)} \perp \vec{u}$,

$\overrightarrow{(x,y,z)} \perp \vec{v}$,

$\|\overrightarrow{(x,y,z)}\| = 1$ ...

Então

$\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{(x,y,z)}]\right|$ = Área$(\vec{u},\vec{v})$

Mas:

$\vec{u}\times\vec{v} \perp \vec{u}$

$\vec{u}\times\vec{v} \perp \vec{v}$... !!!

Porquê?

Repare que

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$

sempre que $\vec{w}$ "pertencer ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$"

(Obs 1: $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0,0)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(1,3,0)}$ "geram" o plano do quadro... Todo vetor da forma $a\vec{u}+b\vec{v}$ está no plano do quadro;

Obs 2: $[\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v}] = 0$

Obs 3: Se $\vec{u} = \overrightarrow{(1,2,3)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(10,20,30)}$

então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram uma reta, não um plano...

Obs 4: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são múltiplos um do outro então:

4a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram um plano

4b) $[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{(x,y,z)}] = 0$ se e só se $\overrightarrow{(x,y,z)}$ está no plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$...

4c) $[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{(x,y,z)}] =$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$

$[\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v}] = 0$

$\quad ||$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(1\vec{u}+0\vec{v}) = 0$

$\quad ||$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}$

Porque é que $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ = Área$(\vec{u},\vec{v})$?

Pensem em casa !!

Isto é a primeira das aplicações que eu mencionei lá à esquerda...

Área$(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

Exercício:

Calcule

Área$(\overrightarrow{(\underset{a}{0},\underset{b}{2},\underset{c}{1})},\overrightarrow{(\underset{d}{0},\underset{e}{0},\underset{f}{3})}) = \|\overrightarrow{(2\cdot3-1\cdot0,\,1\cdot0-0\cdot3,\,0\cdot0-2\cdot0)}\| = \|\overrightarrow{(6,0,0)}\| = 6$

= Área$(\overrightarrow{(0,2,0)},\overrightarrow{(0,0,3)}) = 6$

$\boxed{\text{GA 9/MAR/2016}}$

LEMBRANDO:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left[\overrightarrow{(a,b,c)}, \overrightarrow{(d,e,f)}, \overrightarrow{(x,y,z)} \right]$$

$$= aez + bfx + cdy - cex - bdz - afy$$

$$= (bf-ce)x + (cd-af)y + (ae-bd)z$$

$$= \overrightarrow{(bf-ce, cd-af, ae-bd)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

$$= \left(\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(d,e,f)}\right) \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

LEMBRE QUE PODEMOS CALCULAR $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ (MÓDULO SINAL) FAZENDO:

ÁREA$(\vec{u},\vec{v})$ · "ALTURA"

HOJE:

VÁRIAS APLICAÇÕES DO "×" EM $\mathbb{R}^3$,

- ÁREAS DE PARALELOGRAMOS EM $\mathbb{R}^3$,
- TESTAR SE DUAS RETAS SE CRUZAM,
- CALCULAR DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO
- CALCULAR DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS.

MAS ANTES DISTO...

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v}',\vec{w}'],$$

$$d(A,B) = d((A_1,A_2,A_3),(B_1,B_2,B_3)) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\|\overrightarrow{(x,y,z)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(x,y,z)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

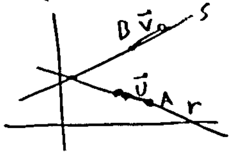
2ª APLICAÇÃO:

TESTAR SE DUAS RETAS SE CRUZAM.

LEMBRE DESTA FIGURA EM $\mathbb{R}^2$:

$r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$s = \{B + \lambda\vec{v} \mid s \in \mathbb{R}\}$



QUANTO VALEM t E λ NO PONTO DE INTERSEÇÃO?

t E λ SÃO DIFERENTES EM GERAL, E PRECISAMOS RESOLVER UM SISTEMA!...

EM $\mathbb{R}^3$ TEM MUITAS SITUAÇÕES EM QUE DUAS RETAS NÃO-PARALELAS NÃO SE CRUZAM... ("RETAS REVERSAS")

EXEMPLO:

$r = \{(0,0,0) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$s = \{(0,0,1) + \lambda\overrightarrow{(0,1,0)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

EM $\mathbb{R}^3$:

$r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$s = \{B + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

SERÁ QUE $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ ESTÃO NO MESMO PLANO?

SERÁ QUE $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}] = 0$?

$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}] = 0$ SE E SÓ SE r E s SE CRUZAM!!!!!!

EXERCÍCIO:

$r = \{(0,0,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$s = \{(0,1,1) + \lambda\overrightarrow{(0,0,1)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

r E s SE CRUZAM?

$s' = \{(0,0,2) + \lambda\overrightarrow{(0,0,1)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

r E s' SE CRUZAM?

PRA CASA: FAÇAM O QUE VOCÊS PUDEREM DAS LISTAS 7, 8, 9.

$\boxed{\text{GA 14/MAR/2016}}$

JÁ VIMOS DUAS APLICAÇÕES DO "×":

- ÁREAS DE PARALELOGRAMOS EM $\mathbb{R}^3$
- TESTAR SE DUAS RETAS SE CRUZAM

PRECISAMOS VER:

- COMO CALCULAR DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO ①
- COMO CALCULAR DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS ②
- COMO ENCONTRAR UMA RETA ORTOGONAL A r E s QUE CORTE r E s ③

① $\pi = \{A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$B \in \mathbb{R}^3$

QUAL A DISTÂNCIA $d(\pi, B)$?

SE $A = (0,0,0)$ TUDO FICA FÁCIL...

$B = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$

A DISTÂNCIA DE B ATÉ π VAI SER A "ALTURA" DO PARALELEPÍPEDO TORTO FORMADO POR $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$...

E ESSA ALTURA VAI SER

$$\frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}{\text{área}(\vec{u}, \vec{v})} \quad (!!!)$$

CASO GERAL: $A \neq (0,0,0)$

FAZEMOS $\vec{w} := \overrightarrow{AB}$ E USAMOS A MESMA FÓRMULA.

② $r = \{A + \alpha\vec{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$s = \{B + \beta\vec{v} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$

$\pi = \{A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$d(r, s) = d(\pi, B)$

③ $r = \{A + \alpha\vec{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$r' = \{B + \beta\vec{v} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$

QUEREMOS $s = \{C + \gamma\vec{w} \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$

COM: $s \perp r$,

$s \perp r'$;

OU SEJA, $\vec{u} \perp \vec{w}$,

$\vec{v} \perp \vec{w}$...

ALÉM DISSO EXISTEM $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ TAIS QUE $A + \alpha\vec{u} \in s$

E $B + \beta\vec{v} \in s$

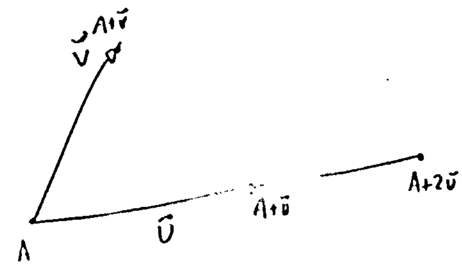
PODEMOS RESOLVER O PROBLEMA FAZENDO: $\vec{w} := \vec{u} \times \vec{v}$,

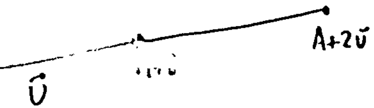
E DEPOIS ENCONTRAR α E β...

O MELHOR JEITO DE ENCONTRAR α E β É RESOLVENDO UM SISTEMA...

$\overrightarrow{(A + \alpha\vec{u})(B + \beta\vec{v})} \perp \vec{u}$,

$\overrightarrow{(A + \alpha\vec{u})(B + \beta\vec{v})} \perp \vec{v}$.





EXERCÍCIOS:
LISTA 9:
1) 4)
14)

9.1) CALCULE A ÁREA DO PARALELOGRAMO DEFINIDO PELOS VETORES $\vec{u}=(3,1,2)$ E $\vec{v}=(4,-1,0)$.

$\vec{u}\times\vec{v}=(2,8,-7)$

$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{4+64+49}=\sqrt{117}\ (<11)$

9.6) VERIFIQUE QUE OS PLANOS

$\pi_1: x-2y+3z-1=0$

$\pi_2: x-2y+3z-10=0$

SÃO PARALELOS E CALCULE A DISTÂNCIA ENTRE ELES.

$(1,0,0),(0,-\frac{1}{2},0),(0,0,\frac{1}{3})$

$r: 3x+4y-12=0$

$r': 3x+4y-6=0$

$r'': 3x+4y\ \ =0$

9.6) $A_1=(1,0,0)\in\pi_1$

$A_2=(0,-\frac{1}{2},0)\in\pi_1$

$A_3=(0,0,\frac{1}{3})\in\pi_1$

$\vec{u}=\overrightarrow{A_1A_2}=(-1,-\frac{1}{2},0)$

$\vec{v}=\overrightarrow{A_1A_3}=(-1,0,\frac{1}{3})$

$\pi_1=\{A_1+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$B=(10,0,0)\in\pi_2$

$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,-\frac{1}{2},0)\times(-1,0,\frac{1}{3})=(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$

$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1+4+9}{36}}=\sqrt{\frac{14}{36}}$

$\vec{w}=\overrightarrow{A_1B}=(9,0,0)$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{2})\cdot(9,0,0)=-\frac{3}{2}$

GA 16/MAR/2016

Hoje:
- Dúvidas (principalmente exercícios das listas)
- Mais técnicas pra resolver alguns problemas em $\mathbb{R}^3$
- Introdução a quádricas

- Porque é que $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ é $\text{Área}(\vec{u},\vec{v})$?

Digamos que $\vec{w}$ é um vetor unitário ($\|\vec{w}\|=1$), ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$...

Então $\vec{u}\times\vec{v}=\lambda\vec{w}$.

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \underbrace{\text{área da base}}_{\text{Área}(\vec{u},\vec{v})} \cdot \underbrace{\text{altura}}_{1}$$

$\| = \text{Área}(\vec{u},\vec{v})$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{\lambda\vec{w}}\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{w}\cdot\vec{w}) = \lambda$$

- Dica pra conferir o problema 8.6: obtenha três pontos $A,B,C\in\pi$, obtenha dois vetores $\vec{u},\vec{v}\,/\!/\,\pi$, verifique que $\vec{u}\perp\vec{w}$, $\vec{v}\perp\vec{w}$, onde $\vec{w}$ é o vetor que você achou que é normal ao π.

Próximas "aulas" (i.e., dias de aula):

21/mar 23/mar
28/mar 30/mar
4/abr?

Sejam π_1 e π_2 dois planos em $\mathbb{R}^3$, e $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a eles ($\pi_1\perp\vec{n}_1$, $\pi_2\perp\vec{n}_2$).

Seja $r=\pi_1\cap\pi_2$.

Digamos que $r=\{A+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Então (!!!)

$\vec{v}/\!/\pi_1$,

$\vec{v}/\!/\pi_2$,

$\vec{v}\perp\vec{n}_1$,

$\vec{v}\perp\vec{n}_2$

e portanto $\vec{v}/\!/\vec{n}_1\times\vec{n}_2$!

No ex 24 da lista 9, todos os itens até o (g) podem ser resolvidos com o truque acima.

Represente graficamente:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+2y)(2x-y)=0\}$ =

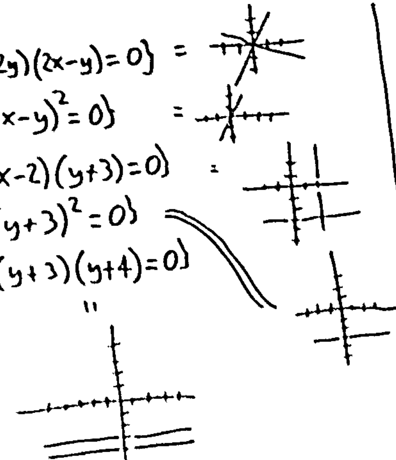
b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x-y)^2=0\}$ =

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)(y+3)=0\}$ =

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y+3)^2=0\}$

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y+3)(y+4)=0\}$

$\|$

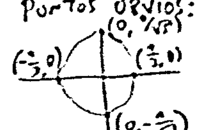


Lista 4

Problema 4.8: Calcular a área do quadrilátero em que dois dos vértices coincidem com os focos da elipse $9x^2+5y^2=1$ e os outros dois com as extremidades do eixo menor.

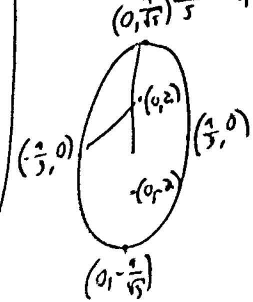
$$9x^2+5y^2=1$$
$$(3x)^2+(\sqrt{5}y)^2$$

Pontos óbvios:



O eixo maior é o vertical ou o horizontal?

Vertical! (porque $\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{9}$)



Mais u...
(nada ó...
resolv...
proble...

$|[\vec{u},\vec{v}$...

Se ...
alt...
$|[\vec{u},\vec{v}$...

Onde ...
$a=$...
$(\frac{1}{\sqrt{5}})$...
$\frac{1}{5}$...
$a^2=$...
$a=$...

...te
...nte:

$\{\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (x+2y)(2x-y)=0\} =$

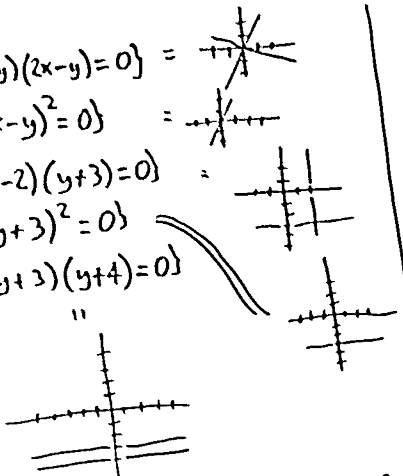
$\{\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (2x-y)^2=0\} =$

$\{\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)(y+3)=0\} =$

$\{\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (y+3)^2=0\}$

$\{\ldots\in\mathbb{R}^2 \mid (y+3)(y+4)=0\}$

$\|$



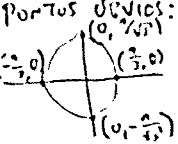
Lista 4

...blema 4.8:
...cular a área
... quadrilátero em que
...s dos vértices coincidem
... os focos da elipse
...$x^2+5y^2=1$ e os outros
... com as extremidades
... eixo menor.

$9x^2+5y^2=1$

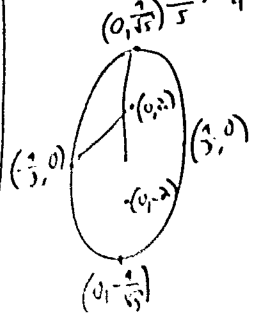
$(3x)^2+(\sqrt{5}y)^2$

Pontos únicos:



O eixo maior é o vertical ou o horizontal?

Vertical! (porque $\frac{1}{\sqrt5} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{9}$)



Onde $\lambda = \ldots$

$\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \lambda^2$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \lambda^2$

$\lambda^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{9}{45} - \frac{5}{45} = \frac{4}{45} = \frac{2^2}{5\cdot 3^2}$

$\lambda = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt5} = \sqrt{\frac{4}{45}}$

Mais uma técnica (nada óbvia!) pra resolver alguns problemas em $\mathbb{R}^3$...

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \text{Área}(\vec{u},\vec{v}) \cdot \text{altura}$

$\nparallel$

$\|\vec{w}\|$

Se $\vec{w}\perp\vec{u}$ e $\vec{w}\perp\vec{v}$ então altura $= \|\vec{w}\|$, e

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \underbrace{\text{Área}(\vec{u},\vec{v})}_{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} \cdot \|\vec{w}\|$

Truque:
Seja $\vec{w}' = Pr_{\vec{u}\times\vec{v}}\vec{w}$.

Então em geral $\|\vec{w}'\| < \|\vec{w}\|$,
mas isto vale sempre:

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \text{Área}(\vec{u},\vec{v}) \cdot \text{altura}$

$\|$

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}']| = \text{Área}(\vec{u},\vec{v}) \cdot \|\vec{w}'\|$

Uma aplicação:
Seja $\pi = \{A+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

e $B\in\mathbb{R}^3$.

Então $d(B,\pi) = \frac{\text{vol}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}{\text{Área}(\vec{u},\vec{v})}$ onde $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$

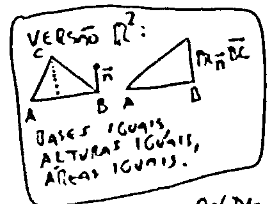
Novidade: $d(B,\pi) = \|\vec{w}'\|$

$= \|Pr_{\vec{u}\times\vec{v}}\vec{w}\|$

$= \|Pr_{\vec{u}\times\vec{v}}\overrightarrow{AB}\|$

$= \|Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}\|$

onde $\vec{n}$ é qualquer vetor normal ao plano π.



Exercícios:
Calcule $d(\pi,B)$, onde:

a) $\pi: x+y+z=3$,
$B=(2,2,2)$

Obs: $\vec{n}=(1,1,1)$,
$A=(1,1,1)$

Dica pra visualização:
Todos estes pontos pertencem a π: $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, $(1,1,1)$

e $(1,1,1)$ é o ponto de π mais próximo de B.

GA 16/MAR/2016

HOJE:
- DÚVIDAS (PRINCIPALMENTE EXERCÍCIOS DAS LISTAS)
- MAIS TÉCNICAS PRA RESOLVER ALGUNS PROBLEMAS EM $\mathbb{R}^3$
- INTRODUÇÃO A QUÁDRICAS

MINI-INTRODUÇÃO A QUÁDRICAS:

CÔNICA: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}$

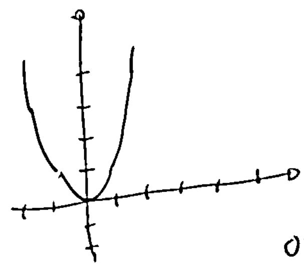
QUÁDRICA: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0\}$

AS IDÉIAS VÃO SER AS MESMAS:
- QUÁDRICAS DEGENERADAS
- QUÁDRICAS CANÔNICAS, OU, MAIS INFORMALMENTE, NOSSAS QUÁDRICAS PREFERIDAS.

IDÉIA PRA VISUALIZÁ-LAS: FAZER CORTES!

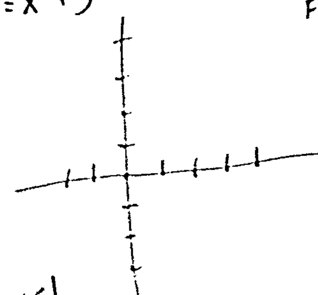
EXEMPLO:
$Q_1: y=x^2$ (DEGENERADA!)

CORTES:
$z=0$,
$z=1$,
$z=2$,



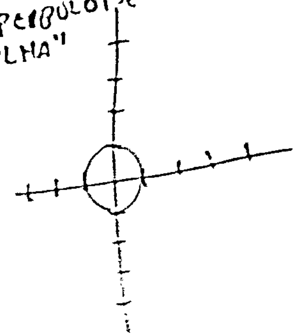
OUTRO EXEMPLO:
$Q_2: z^2=x^2+y^2$

CORTES:
$z=0$
$z=1$
$z=2$
$z=-1$
$z=-2$
$y=0$



CONE!

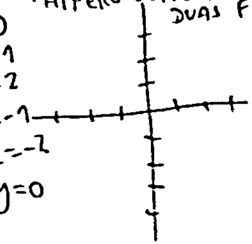
OUTRO:
$Q_3: x^2+y^2=z^2+1$
"HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA"

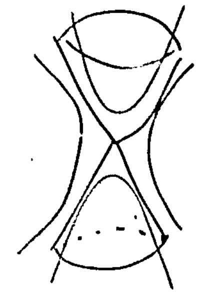


$y=0$

OUTRO:
$Q_4: x^2+y^2=z^2-1$
"HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS"

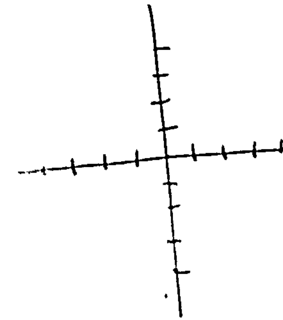
$z=0$
$z=1$
$z=2$
$z=-1$
$z=-2$
$y=0$





$Q_5: x^2+y^2+z^2=1$
ESFERA DE RAIO
CENTRADA NA OR

$Q_6: x^2+y^2=z$



PARABOLÓI

AULA EX
(DE DÚVIDAS
AMANHÃ (QU
16:00-18:00,
NO LLARC.

A PROVA PROVA
VAI SER TRAN
PRA 2ª 21/MAR
NO HORÁRIO E N
DA AULA.

16

PALMENTE
ISTAS)
PRA
PROBLEMAS

QUÁDRICAS

A

$\in \mathbb{R}^2 \mid$
$xy + cy^2$
$x + ey$
$+ f = 0\}$

$) \in \mathbb{R}^3 \mid$
$y^2 + cz^2 +$
$xz + fyz +$
$y + iz +$
$j = 0\}$

AS IDÉIAS VÃO SER AS MESMAS:

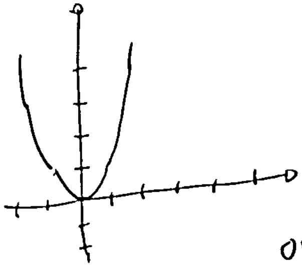
- QUÁDRICAS DEGENERADAS
- QUÁDRICAS CANÔNICAS, OU, MAIS INFORMALMENTE, NOSSAS QUÁDRICAS PREFERIDAS.

IDÉIA PRA VISUALIZÁ-LAS: FAZER CORTES!

EXEMPLO:

$Q_1: y = x^2$ (DEGENERADA!)

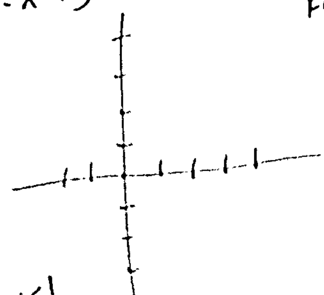
CORTES:
$z=0$,
$z=1$,
$z=2$,



OUTRO EXEMPLO:

$Q_2: z^2 = x^2 + y^2$

CORTES:
$z=0$
$z=1$
$z=2$
$z=-1$
$z=-2$
$y=0$

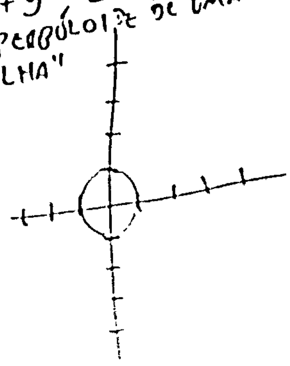


CONE!

OUTRO:

$Q_3: x^2 + y^2 = z^2 + 1$

"HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA"



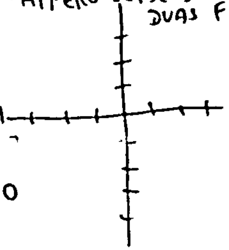
$y=0$

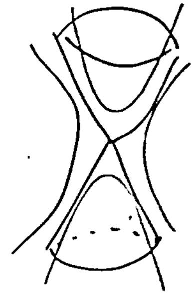
OUTRO:

$Q_4: x^2 + y^2 = z^2 - 1$

"HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS"

$z=0$
$z=1$
$z=2$
$z=-1$
$y=0$



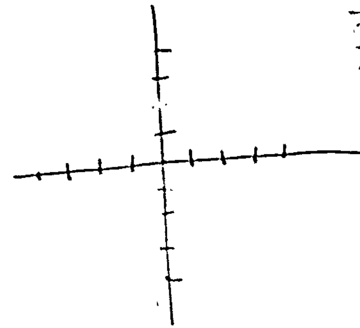


$Q_5: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ESFERA DE RAIO 1 CENTRADA NA ORIGEM.

$Q_6: x^2 + y^2 = z$

$z=0$
$z=1$
$z=2$
$z=-1$
$y=0$
$x=0$



PARABOLÓIDE!

AULA EXTRA (DE DÚVIDAS):

AMANHÃ (QUINTA 17/MAR/2016), 16:00-18:00, NO LLARC.

A PROVA PROVAVELMENTE VAI SER TRANSFERIDA PRA 2ª 21/MAR/2016, NO HORÁRIO E NA SALA DA AULA.