$\boxed{\text{C2 25/ABRIL/2016}}$

C2 É SOBRE
INTEGRAÇÃO E
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS ("EDO"s)...

EM CÁLCULO 1 A
GENTE APRENDEU A
DERIVAR, COM VÁRIAS
NOTAÇÕES DIFERENTES...
SE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (DERIVÁVEL),
VOCÊS APRENDERAM A
CALCULAR $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, Df...

EQUAÇÃO DIFERENCIAL	ALGUMAS SOLUÇÕES (OU NÃO)
$f'(x)=3$	$f(x)=3x$
	$f(x)=3x+20$
	$f(x)=e^x$ (NÃO)
$f'(x)=3+2x$	$f(x)=3x+2x^2$ (NÃO)
	$f(x)=3x+x^2$
	$f(x)=3x+x^2+20$

EDO	ALGUMAS SOLUÇÕES (OU NÃO)
$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0$	$f(x)=e^{3x}$ (NÃO)
	$f(x)=e^{2x}$ (SIM)
	$f(x)=e^{-2x}$ (NÃO)
	$f(x)=e^{-3x}$ (SIM)
$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$	$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (SIM)
	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (SIM)

REVISÃO DE REGRA DA CADEIA

SE $f(x)=g(h(x))$
ENTÃO $f'(x)=g'(h(x))h'(x)$

$h(x)$	$g(y)$	$g(h(x)) \overset{=}{} f(x)$	$g'(y)$	$h'(x)$	$g'(h(x))$	$g'(h(x))h'(x) = f'(x)$
$3x$	e^y	e^{3x}	e^y	3	e^{3x}	$3e^{3x}$
$1-x^2$	$y^{1/2} = \sqrt{y}$	$(1-x^2)^{1/2}$	$\frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{1}{2y^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$	$-2x$	$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

INTEGRA...
DEFINID...
(1ª DEF...
$\int_{x=a}^{x=b} f(...$

A G...
COM...
A
C...

C...
$\int$...

INTEGRAL DEFINIDA

(1ª DEFINIÇÃO)

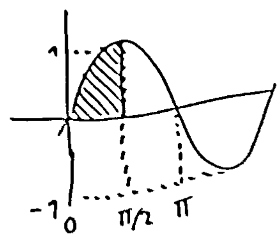
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{ÁREA SOB A CURVA DE } f \text{ ENTRE } x=a \text{ E } x=b$$

A GENTE VAI COMEÇAR COM CASOS NOS QUAIS A GENTE CONSEGUE CALCULAR ISSO NO OLHÔMETRO (BEM).

$g'(h(x))$	$g'(h(x))h'(x) = f'(x)$
e^{3x}	$3e^{3x}$
$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

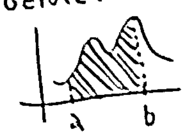
EX:
SE $f(x) = \text{sen}\, x$
ENTÃO

$$\int_{x=0}^{x=\pi/2} f(x)\,dx = \text{ÁREA DISTO:}$$

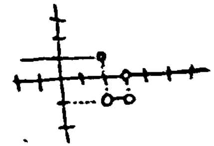


CASO MAIS GERAL:

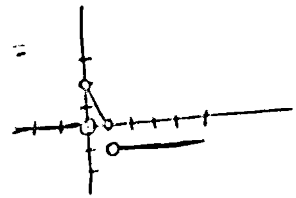
$$\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx =$$



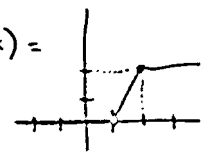
SEJAM:

$f_1(x) =$ 

x	$f_1(x)$
0	
1	
2	
2.5	
3	
4	
5	

$f_2(x) =$ 

x	$f_2(x)$
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	

$f_3(x) =$ 

x	$f_3(x)$
0	
1	
1.5	
2	
3	

$\boxed{\text{C2 25/ABRIL/2016}}$

SEJAM:

$$F_1(b) = \int_{x=0}^{x=b} f_1(x)\,dx,$$

$$F_2(b) = \int_{x=0}^{x=b} f_2(x)\,dx,$$

$$F_3(b) = \int_{x=0}^{x=b} f_3(x)\,dx.$$

COMPLETE:

b	$F_1(b)$	$F_2(b)$	$F_3(b)$
0	0	0	
0.5	0.5	0.75	
1	1		
1.5	1.5		
2	2		
2.5	1.5		
3	1		
3.5	1		
4	1		

OBS: QUANDO $g<0$
A "ÁREA SOB A CURVA
DE g" É CONTADA
NEGATIVAMENTE...

$$\int_{x=2}^{x=4} -3\,dx = -6.$$

$F_1(x) =$

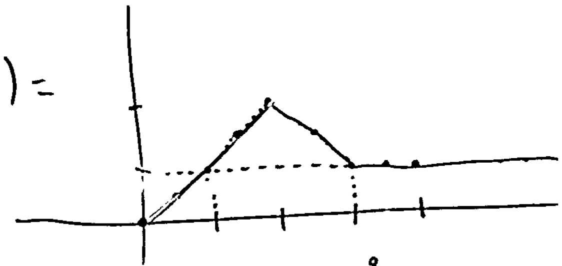


GRÁFICO: ↑

$F_1(0.1) = 0.1$

$F_1(0.2) = 0.2$

$F_1(2.1) = 1.9$

$F_1(2.2) = 1.8$

AGORA SEJA:

$$g_1(x) = \frac{d}{dx} F_1(x)$$

OBS: g_1 NÃO ESTÁ
DEFINIDA EM TODOS
OS VALORES DE x.

FAÇA O GRÁFICO DA $g_1(x)$
PARA $x \in [0,5]$, COM "o"s E "o"s
ONDE NECESSÁRIO.

IDEM PARA $g_2(x) = \frac{d}{dx} F_2(x)$,
$g_3(x) = \frac{d}{dx} F_3(x)$

"FAÇA A MESMA
COISA PARA F_2
E g_2" -

DICAS:

CALCULE $F_2(0.1)$,
$F_2(0.2)$,
$\vdots$
$F_2(0.9)$

USANDO A REGRA
PARA A ÁREA DO
TRAPÉZIO;

ENCONTRE UMA
FÓRMULA PARA
$F_2(x)$ QUANDO $0 \le x \le 1$;

FAÇA O GRÁFICO DE F_2;

ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO
POR CASOS PRA F_2:

$$F_2(x) = \begin{cases} \dots & \text{QUANDO } 0 \le x \le 1, \\ \dots & \text{QUANDO } 1 < x \end{cases}$$

AÍ DERIVE $F_2(x)$.

MORAL DA

CALCULAR
SER UM
INVERSA

ESTA
NOTA

$F_1($

f

$F_1(x) =$

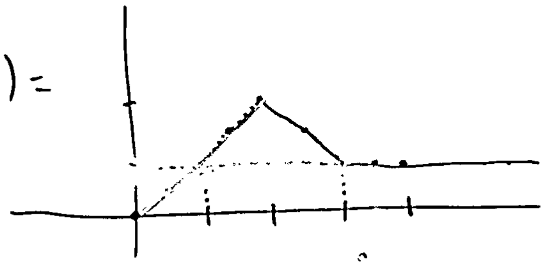


GRÁFICO: ↑

$F_1(0.1) = 0.1$

$F_1(0.2) = 0.2$

$F_1(2.1) = 1.9$

$F_1(2.2) = 1.8$

AGORA SEJA:

$g_1(x) = \frac{d}{dx} F_1(x)$

OBS: g_1 NÃO ESTÁ DEFINIDA EM TODOS OS VALORES DE X.

FAÇA O GRÁFICO DA $g_1(x)$ PARA $x \in [0,5]$, COM "o"s E "•"s ONDE NECESSÁRIO.

IDEM PARA $g_2(x) = \frac{d}{dx} F_2(x)$,
$g_3(x) = \frac{d}{dx} F_3(x)$

"FAÇA A MESMA COISA PARA F_2 E g_2".

DICAS:

CALCULE $F_2(0.1)$, $F_2(0.2)$, $\vdots$ $F_2(0.9)$

USANDO A REGRA PARA A ÁREA DO TRAPÉZIO;

ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $F_2(x)$ QUANDO $0 \le x \le 1$;

FAÇA O GRÁFICO DE F_2;

ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO POR CASOS PRA F_2:

$$F_2(x) = \begin{cases} \ldots & \text{QUANDO } 0 \le x \le 1, \\ \ldots & \text{QUANDO } 1 < x \end{cases}$$

AÍ DERIVE $F_2(x)$.

MORAL DA HISTÓRIA:

CALCULAR ÁREAS PARECE SER UMA OPERAÇÃO INVERSA À DERIVAÇÃO...

UMA NOTAÇÃO VAI SER IMPORTANTE:

$$F_1(x) = \begin{cases} \ldots & \text{QUANDO } x \le 2, \\ \ldots & \text{QUANDO } 2 < x < 3, \\ \ldots & \text{QUANDO } 3 \le x \end{cases}$$

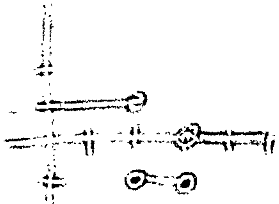
$$F_2(x) = \begin{cases} \ldots & \text{QUANDO} \\ \ldots & \text{QUANDO} \\ \ldots & \text{QUANDO} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

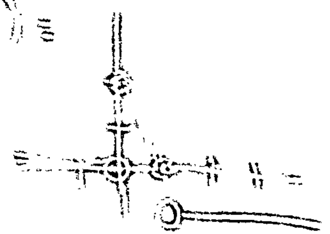
C2 27/ABRIL/2016

$$F_1(b) = \int_{x=0}^{x=b} f_1(x)\,dx \qquad y_1(x) = \frac{d}{dx}F_1(x)$$

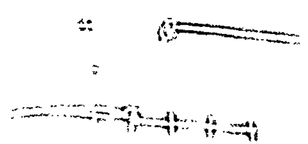
$f_1(x) =$



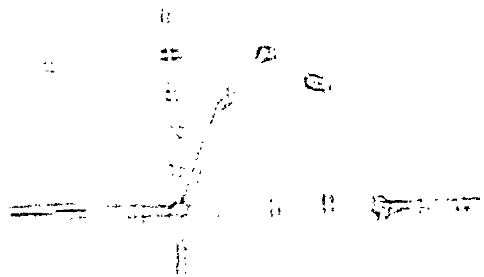
$f_2(x) =$



$f_3(x) =$



$f_4(x) =$



EXERCÍCIO:

1) ENCONTRAR F_1, g_1, …

(VOCÊS PODEM USAR TAMBÉM) AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS …

2) DEFINAM FORMALMENTE …

IMPORTANTE

$$F_4(2) = \int_{x=0}^{x=2} f_4(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} f_4(x)\,dx + \int_{x=1}^{x=2} f_4(x)\,dx$$

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

$g_1(x) = \frac{d}{dx} F_1(x)$

IMPORTANTE

$$F_1(2) = \int_{x=0}^{x=2} f_1(x)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} f_1(x)\,dx + \int_{x=1}^{x=2} f_1(x)\,dx$$

SE QUISERMOS QUE
ESTA PROPRIEDADE
VALHA SEMPRE
(E QUEREMOS)
ENTÃO

$$\int_{x=a}^{x=a} f(x)\,dx =$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx$$

E AÍ

C2 24/abril/2016

$f(x) =$ [illegible]

$f(x) =$ [illegible]

Repare que a gente ainda não sabe calcular a área sob curvas complicadas. Até agora só calculamos áreas de retângulos e triângulos e [illegible] [illegible]

Por conta disso, o conceito de integral de Riemann. A gente vai ter que lidar com somatórios [illegible] e [illegible]

Pra quinta
conteúdo é
integral de
Riemann. A
gente vai ter
que lidar com
somatórios
complicados
e visualizações

Aviso

A aula da quarta 31/ago provavelmente vai ser no lugar do inglês de na 6B.

do lado da secretaria (depois da saída do prédio)

Exemplo

$1(C=1) + 2 (\ldots) + \ldots$

Exercício

$2(1= \ldots) + \ldots (4 = 1) + \ldots (5 = 4)$

[illegible]

$\boxed{\text{C2 2/maio/2016}}$

Na aula passada vimos como interpretar certas somas como áreas...

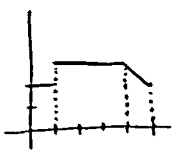
$$0\cdot(1-0)+\frac{0+2}{2}\cdot(2-1)+2\cdot(4-2)=$$

altura, base, altura (média)

$$\int_{x=0}^{x=4} f_3(x)\,dx$$

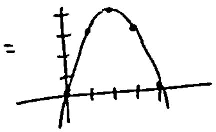
$$1\cdot(2-1)+2\cdot(3-2)+\frac{3+1}{2}\cdot(5-3)=$$

$$2\cdot(1-0)+3\cdot(4-1)+\frac{3+2}{2}\cdot(5-4)=$$

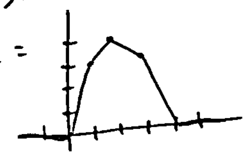


Como é que a gente pode obter aproximações para áreas de figuras mais complicadas?

Ex:
Seja $g(x)=4-(x-2)^2$

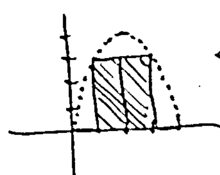
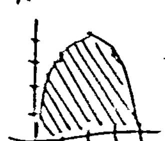
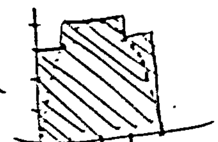
$g=$ 

OBS:

$f_4=$ 

Digamos que queremos calcular $\int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx$.

Idéia (geométrica):

 $<$  $<$  (*)

Aproximações por somatórios (que precisamos aprender a visualizar).

Intervalo de integração: $[0,4]$

Uma partição deste intervalo em N partes é uma sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ com
$x_0=0$,
$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$,
$x_N=4$

Exemplos:

$P=\{\underset{x_0}{0}, \underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{2}, \underset{x_3}{3}, \underset{x_4}{4}\}$ $(N=4)$

$P'=\{\underset{x_0}{0}, \underset{x_1}{0{,}5}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{1{,}5}, \underset{x_4}{2}, \underset{x_5}{2{,}5}, \underset{x_6}{3}, \underset{x_7}{3{,}5}, \underset{x_8}{4}\}$ $(N=8)$

Exercícios:
Visualize e calcule:

a) $\sum_{i=1}^{N} g(x_i)(x_i-x_{i-1})$ na part. P

b) idem, mas na part. P'

c) $\sum_{i=1}^{N} g(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ na

d) idem, mas na part.

a) $\sum_{i=1}^{4} g(x_i)(x_i-x_{i}$

$g(x_1)(x_1-x_0)+$

$g(1)(1-0)+$

$3\cdot(1-0)+$

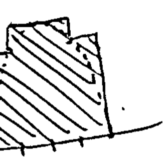
c)

...os
...s

...: $[0,4]$
...ção deste
... em N partes
...avência
$\ldots, x_N$

$\ldots \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$,

...los:
$\ldots 0, 1, 2, 3, 4\}$ $(N=4)$
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4
$\ldots, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ $(N=8)$
$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$



(☆)

Exercícios:
Visualize e calcule:

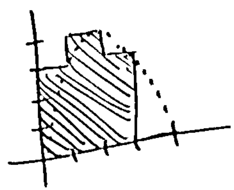
a) $\sum_{i=1}^{N} g(x_i)(x_i - x_{i-1})$ na part. P

b) idem, mas na part. P'

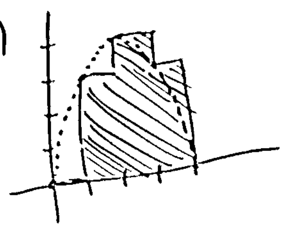
c) $\sum_{i=1}^{N} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ na part. P

d) idem, mas na part. P'.

a) $\sum_{i=1}^{4} g(x_i)(x_i - x_{i-1}) =$
$g(x_1)(x_1 - x_0) + g(x_2)(x_2 - x_1) + g(x_3)(x_3 - x_2) + g(x_4)(x_4 - x_3) =$
$g(1)(1-0) + g(2)(2-1) + g(3)(3-2) + g(4)(4-3) =$
$3\cdot(1-0) + 4\cdot(2-1) + 3\cdot(3-2) + 0\cdot(4-3) =$



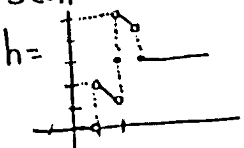
c)



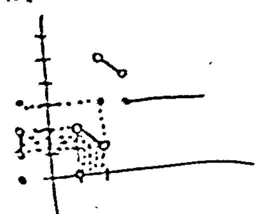
Repare que as nossas aproximações em a, b, c, d, às vezes estão acima da curva da g, às vezes abaixo...
Como definir "aproximação por baixo" e "aproximação por cima"?

Ideias novas:
- Imagem de uma função,
- inf e sup.

Seja

$h =$ 

Sabemos calcular $h(x)$ quando x é um ponto.
Quando $A \subseteq \mathbb{R}$,
$h(A) = \{h(a) \mid a \in A\}$
Visualmente,
$h([1,2]) = \{0\} \cup (1,2) \cup \{3\}$



$[1,2]$

C2 2/maio/2016

INF e SUP

INF ("ínfimo")
SUP ("supremo")
INF generaliza min,
SUP generaliza max.

$\min(2,4,10,3,-1,6) = -1$

$\max(2,4,10,3,-1,6) = 10$

$\inf([2,4]) = 2$

$\sup([2,4]) = 4$

$\inf([2,4] \cup [6,7]) = 2$

$\sup([2,4] \cup [6,7]) = 7$

$\inf((2,3] \cup [4,5)) = 2$

$\sup((2,3] \cup [4,5)) = 5$

$\inf(h([1,2])) =$
$\inf(\{0\} \cup (1,2) \cup \{3\}) = 0$

$\sup(h([1,1.5])) =$
$\sup(\{0\} \cup [1.5, 2)) = 2$

Exercício:

Visualize e calcule:

e) $\sum_{i=1}^{N} \inf(g([x_{i-1}, x_i])) \cdot (x_i - x_{i-1})$

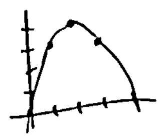
f) $\sum_{i=1}^{N} \sup(g([x_{i-1}, x_i])) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Na partição

$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(N=4)$

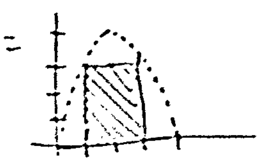
$\quad\;\; x_0\; x_1\; x_2\; x_3\; x_4$

Lembre que

$g =$ 

e) $\inf(g([x_0,x_1])) \cdot (x_1 - x_0)$
$+ \inf(g([x_1,x_2])) \cdot (x_2 - x_1)$
$+ \inf(g([x_2,x_3])) \cdot (x_3 - x_2)$
$+ \inf(g([x_3,x_4])) \cdot (x_4 - x_3)$
$= \inf(g([0,1])) \cdot (1-0)$
$+ \inf(g([1,2])) \cdot (2-1)$
$+ \inf(g([2,3])) \cdot (3-2)$
$+ \inf(g([3,4])) \cdot (4-3)$

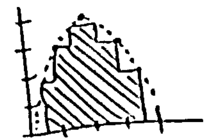
$= \inf([0,3]) \cdot (1-0)$
$+ \inf([3,4]) \cdot (2-1)$
$+ \inf([3,4]) \cdot (3-2)$
$+ \inf([0,3]) \cdot (4-3)$
$= 0 \cdot (1-0)$
$+ 3 \cdot (2-1)$
$+ 3 \cdot (3-2)$
$+ 0 \cdot (4-3)$

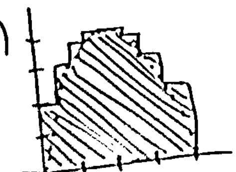
$=$ 

Exercícios:

g) Como o ex. e, só que com a partição P'.

h) Como o ex. f, mas com P'.

g) 

h) 

Repare que até agora trabalhamos com $\int_{x=a}^{x=b} \dots\, dx$ — intervalo de integração é $[a,b]$...

Toda partição P está "associada" a um intervalo — $[\min(P), \max(P)]$.

Definições:

$\int_{\underline{P}} f(x)\,dx =$

$\int_{\overline{P}} f(x)\,dx =$

$\underline{\int_P} f(x)\,dx$

$\overline{\int_P} f(x)$

E

ϵ

$\text{nf}(g([x_{i-1},x_i]))\cdot(x_i-x_{i-1})$

$\text{p}(g([x_{i-1},x_i]))\cdot(x_i-x_{i-1})$

RTIÇÃO

$\{\ ,1,2,3,4\}$ $(N=4)$

$x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

O·E

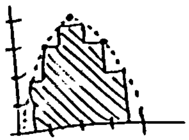
$\text{f}(g([x_0,x_1]))\cdot(x_1-x_0)$
$\text{f}(g([x_1,x_2]))\cdot(x_2-x_1)$
$\text{f}(g([x_2,x_3]))\cdot(x_3-x_2)$
$\text{nf}(g([x_3,x_4]))\cdot(x_4-x_3)$
$\text{nf}(g([0,1]))\cdot(1-0)$
$\text{nf}(g([1,2]))\cdot(2-1)$
$\text{nf}(g([2,3]))\cdot(3-2)$
$\text{nf}(g([3,4]))\cdot(4-3)$

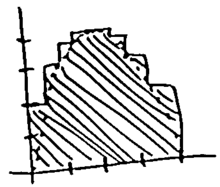
$$= \inf([0,3])\cdot(1-0) + \inf([3,4])\cdot(2-1) + \inf([3,4])\cdot(3-2) + \inf([0,3])\cdot(4-3)$$
$$= 0\cdot(1-0) + 3\cdot(2-1) + 3\cdot(3-2) + 0\cdot(4-3)$$
$$=$$

EXERCÍCIOS:

g) Como o ex. e, só que com a partição P'

h) Como o ex. f, mas com P'.

g) 

h) 

REPARE QUE ATÉ AGORA TRABALHAMOS COM $\int_{x=a}^{x=b} \dots\, dx$ — INTERVALO DE INTEGRAÇÃO É $[a,b]$...

TODA PARTIÇÃO P ESTÁ "ASSOCIADA" A UM INTERVALO — $[\min(P), \max(P)]$.

DEFINIÇÕES:

$$\int_{L\,P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

$$\int_{R\,P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \inf(f([x_{i-1},x_i]))(x_i-x_{i-1})$$

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \sup(f([x_{i-1},x_i]))(x_i-x_{i-1})$$

$$\underline{\int}_{x=2}^{x=6} f(x)\,dx = ?$$

$$\overline{\int}_{x=2}^{x=6} f(x)\,dx = ?$$

C2 4/maio/2016

NA AULA VIMOS ESTAS DEFINIÇÕES:

$$\underset{L}{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{\Delta x}$$

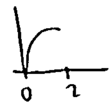
$$\underset{R}{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \inf\left(f([x_{i-1},x_i])\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \sup\left(f([x_{i-1},x_i])\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \sup_{P \text{ part } [a,b]} \underline{\int}_P f(x)\,dx \quad \leftarrow \text{NOVAS}$$

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \inf_{P \text{ part } [a,b]} \overline{\int}_P f(x)\,dx$$

Se $g =$  , $P = \{0,1,2\}$

$g(x) = 4 - (x-2)^2$

$\underset{L}{\int_P} g(x)\,dx =$ 

$\underset{R}{\int_P} g(x)\,dx =$ 

$\underline{\int}_P g(x)\,dx =$ 

$\overline{\int}_P g(x)\,dx =$ 

EXERCÍCIO:
Sejam $P_1 = \{0,4\}$,
$P_2 = \{0,3,4\}$,
$P_3 = \{0,2,3,4\}$
$P_4 = \{0,1,2,3\}$.
Represente graficamente
$\underline{\int}_{P_1} g(x)dx$, $\overline{\int}_{P_1} g(x)\,dx$,
$\underline{\int}_{P_2} g(x)dx$, $\overline{\int}_{P_2} g(x)\,dx$,
etc.

DEF: A NORMA UMA PARTIÇÃO É O COMPRIMENTO DO MENOR DOS SEUS INTERVALOS.

$\|P_1\| = \min(4) = 4$
$\|P_2\| = \min(3,1) = 1$
$\|P_3\| = \min(2,1,1) = 1$
$\|P_4\| = \min(1,1,1,1) = 1$

O QUE ACONTECE SE TEMOS UMA SEQUÊNCIA DE PARTIÇÕES DO $[0,4]$, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$, NA QUAL CADA P_{i+1} TEM UM PONTO A MAIS QUE P_i E ALÉM DISSO $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$?

AÍ VAMOS TER:

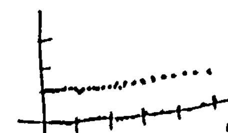
$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int}_{P_n} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{\int}_{P_n} g(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

IMPORTANTE ☠

Seja $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ex: $q(2/3) = 1$
$q(\pi) = 0$
$q(\sqrt{2}) = 0$
$q(\underbrace{\sqrt{2} - \underbrace{1.2345}_{\in\mathbb{Q}}}_{\notin\mathbb{Q}})$



Pra qualquer
temos $\underline{\int}_P q(x)\,dx$
$\overline{\int}_P q(x)\,dx$

E A

... ENTÃ
INTEG

$\ldots 2)^2$

...: A **NORMA** ... PARTIÇÃO ... O COMPRIMENTO ... MENOR DOS ... US INTERVALOS.

$\|P_1\| = \min(4) = 4$

$\|P_2\| = \min(3,1) = 1$

$\|P_3\| = \min(2,1,1) = 1$

$\|P_4\| = \min(1,1,1,1) = 1$

O QUE ACONTECE SE TEMOS UMA SEQUÊNCIA DE PARTIÇÕES DO $[0,4]$, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$, NA QUAL CADA P_{i+1} TEM UM PONTO A MAIS QUE P_i E ALÉM DISSO $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$?

AÍ VAMOS TER:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int}_{P_n} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{\int}_{P_n} g(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

IMPORTANTE

SEJA $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

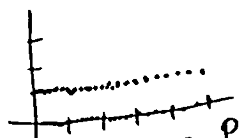
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ex: $g(2/3) = 1$

$g(\pi) = 0$

$g(\sqrt{2}) = 0$

$$\underbrace{g(\sqrt{2} - \underbrace{1.2345}_{\in \mathbb{Q}}) = 0}_{\notin \mathbb{Q}}$$



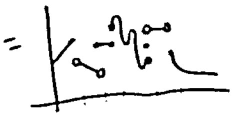
PRA QUALQUER P PART $[0,4]$ TEMOS $\underline{\int}_P g(x)\,dx = 0$ E $\overline{\int}_P g(x)\,dx = 4$.

E AÍ?

$\boxed{\text{... ENTÃO } g \text{ NÃO É INTEGRÁVEL.}}$

TEOREMA:

SEJA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ TAL QUE f TEM NO MÁXIMO UM NÚMERO FINITO DE DESCONTINUIDADES...

Ex: $f =$ 

ENTÃO SE $P_1, P_2, P_3, \ldots$ É UMA SEQUÊNCIA QUALQUER DE PARTIÇÕES DE $[a,b]$ TAL QUE $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$

ENTÃO

$\lim_{n\to\infty} \underline{\int}_P f(x)\,dx =$

$\lim_{n\to\infty} \overline{\int}_P f(x)\,dx$

f É INTEGRÁVEL,

(DAÍ f É DEFINIMOS QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ É QUALQUER UM DOS LIMITES ACIMA.)

DEF:

SEJA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

f É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$ SSE

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx.$$

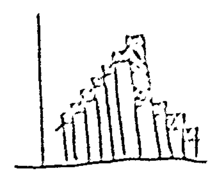
SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ É INTEGRÁVEL,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad \left(= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right).$$

SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ NÃO É INTEGRÁVEL, ENTÃO

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{ERRO}.$$

OBS: É IMPORTANTE A GENTE SABER VISUALIZAR A FIGURA DE "$\overline{\int}_P - \underline{\int}_P$"...



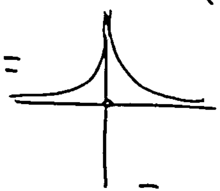
C2 4/maio/2016

Obs: <u>por enquanto</u> funções que tendem a ∞ em algum ponto não são integráveis...

Ex: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x=0, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x\neq 0. \end{cases}$$

$f =$



Repare que $\overline{\int_P} f(x)\,dx = \infty$ para <u>toda</u> partição P part $[-1,1]$.

Falta a gente ver que "$\int$" é em algum sentido a inversa de "$\frac{d}{dx}$", e falta ver que existem jeitos mais práticos de calcular integrais...
(o jeito óbvio é por limites (infinitos) de somatórios).

TFC 1

(1º Teorema Fundamental do Cálculo).

Seja $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ integrável, e b tal que $a<b<c$.

Vamos definir $F(t)$ como:

$$\int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

(Obs: se $f:[a,d]\to\mathbb{R}$ é integrável então f é integrável também em qualquer subintervalo $[b,c]\subset[a,d]$)

Então:

$F:[a,c]\to\mathbb{R}$

- está definida em todo ponto;
- é contínua em $[a,c]$,
- se f é contínua em b então F é derivável em b e $F'(b)=f(b)$.

(Isto é a versão formal de algo que a gente viu acontecer em exemplos na 2ª e na 3ª aulas).

TFC 2

(Obs: demonstrações na aula que vem)

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável (obs: f não precisa ser contínua!).

Seja $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$ no qual f seja contínua.

ENTÃO

para todos c,d tais que $a\leq c\leq d\leq b$ temos:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d)-F(c).$$

C2 9/maio/2016

Hoje:

- Partições pontilhadas
- Uma definição melhor de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$
- Demonstrações (gráficas, informais) dos TFCs 1 e 2
- Um primeiro método de integração

Se $\{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, x_1, \ldots, \overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_N}}\}$ é uma partição de $[a,b]$,

então

$(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\})$

é uma partição pontilhada de $[a,b]$ se $x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2^* \in [x_1, x_2]$, etc.

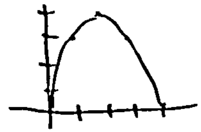
Uma complicação:

$P^* = (\{0,1,2,3,4\}, \{0.5, 1.5, 3, 3\})$

é uma P.P. de $[0,4]$...

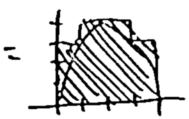
Então $P^* = (\{0,1,2,3,4\},$

Seja $g(x) = 4 - (x-2)^2$:



Seja $P = \{0,1,2,3,4\}$.

Então $\underline{\int}_P g(x)\,dx =$ 

e $\overline{\int}_P g(x)\,dx =$ 

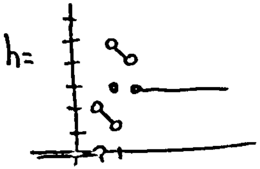
Sejam:

$$\int_{P^*} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Repare:

$$\underline{\int}_P g(x)\,dx = \int_{(\{0,1,2,3,4\},\ \{\underset{x_1^*}{0},\ \underset{x_2^*}{1},\ \underset{x_3^*}{3},\ \underset{x_4^*}{4}\})} g(x)\,dx$$

$$\overline{\int}_P g(x)\,dx = \int_{(\{0,1,2,3,4\},\ \{1,2,2,3\})} g(x)\,dx$$

Seja $h =$ 

Se $P = \{0,1,2,3,4\}$, encontre um pontilhamento P^* de P tal que

$$\underline{\int}_P h(x)\,dx = \int_{P^*} h(x)\,dx$$

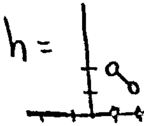
e um outro pontilhamento, $P^{*\prime}$, tal que

$$\overline{\int}_P h(x)\,dx = \int_{P^{*\prime}} h(x)\,dx.$$

Talvez você não consiga — mas a gente pode conseguir sequências de pontilhamentos tais que

$$\overline{\int}_P h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{P_k^*} h(x)\,dx$$

e $$\underline{\int}_P h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{P_k^{*\prime}} h(x)\,dx$$

Aliás: $h =$ 

$\overline{\int}_{\{1,2\}} h(x)$

$\int_{(\{1,2\},\ \{1.1\})} h($

$\int_{(\{1,2\},\ \{1.0}$

Mora
Con
Pon
Pre
ou
me
ev

...

...2,3,4},
PONTILHAMENTO
QUE

$= \int_{P^*} h(x)\,dx$

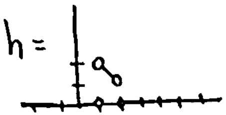
...O PONTILHAMENTO,
QUE

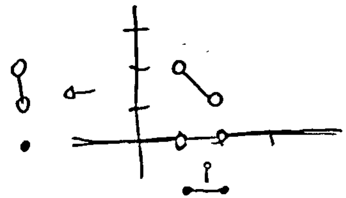
$x = \int_{P^{*\prime}} h(x)\,dx.$

VOCÊ NÃO
– MAS A
PODE CONSEGUIR
...AS DE PONTILHAMENTOS

$x = \lim_{k\to\infty} \int_{P_k^*} h(x)\,dx$

$)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{P_k^{*\prime}} h(x)\,dx$

ALIÁS: $h =$ 

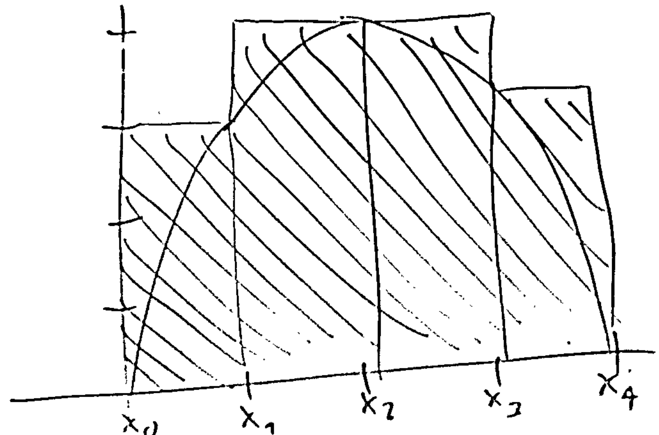


$$\int_{\{1,2\}} h(x)\,dx = 2\cdot(2-1)$$

$$\int_{(\{1,2\},\{1.1\})} h(x)\,dx = 1.9\cdot(2-1)$$

$$\int_{(\{1,2\},\{1.01\})} h(x)\,dx = 1.99\cdot(2-1)$$

MORAL:
CONTAS COM PARTIÇÕES PONTILHADAS PODEM PRECISAR DE UM "SUP" OU "INF" A MAIS... MELHOR A GENTE EVITÁ-LAS.



$$\underbrace{g(\underbrace{x_1^*}_{1})}_{3}(x_1-x_0) + \underbrace{g(\underbrace{x_2^*}_{2})}_{4}(x_2-x_1) + \underbrace{g(\underbrace{x_3^*}_{2})}_{4}(x_3-x_2) + \underbrace{g(\underbrace{x_4^*}_{3})}_{3}(x_4-x_3)$$

C2 9/maio/2016

HOJE:
- PARTIÇÕES PONTILHADAS (OK)
- UMA DEFINIÇÃO MELHOR DE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ (OK $\frac{\cdot\cdot}{\smile}$)
- DEMONSTRAÇÕES (GRÁFICAS, INFORMAIS) DOS TFCs 1 e 2
- UM PRIMEIRO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO

A NOSSA DEFINIÇÃO DE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ "ANTERIOR" (A QUE VIMOS NA AULA PASSADA) ELA NÃO SERVE EM CASOS COMO:

$$\int_{x=3}^{x=2} f(x)\,dx \ \ldots$$

O QUE SERIA UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[3,2]$? $= \emptyset$? !!

$\{\overset{3}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, x_1, \ldots, \overset{2}{\overset{\shortparallel}{x_N}}\}$

$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N$!!

TRUQUE:

QUANDO $a \leq b$,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \sup_{P \text{ PART } [a,b]} \overline{\int_P} f(x)\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \inf_{P \text{ PART } [a,b]} \underline{\int_P} f(x)\,dx$$

OBS: QUANDO "$\overset{(*)}{=}$" NÃO FOR UMA IGUALDADE AÍ $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx =$ ERRO.

EX: $f(x) =$

E QUANDO $a > b$,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx.$$

TFC 1

ENUNCIADO:

SE $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ É INTEGRÁVEL ENTÃO

$$F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

1) ESTÁ DEFINIDA PARA TODO $c \in [a,b]$,
2) $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA,
3) $F(a) = 0$,
4) $\frac{d}{dc} F(c) = f(c)$ EM TODO PONTO $c \in (a,b)$ NO QUAL f É CONTÍNUA.

EXERC: SE $f:[2,5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$,

E $F:[2,5] \to \mathbb{R}$ ← (1)

OBEDECE:

F É CONTÍNUA, ← (2)

$F(2) = 0$ ← (3)

$\frac{d}{dc} F(c) = f(c) = c$ ← (4) EM TODO $c \in (2,5)$

$\frac{x^2}{2} - 2$

OBS: NOSSO PRIMEI[RO] MÉTODO DE INT[EGRAÇÃO] VAI SER:

1) CHUTE A F
2) VERIFIQUE
3) SE NÃO VO[LTE AO] PASSO 1

DÁ PRA RESOL[VER O] EXERCÍCIO [...] OS CHUTES

$F(x)$	(
99	
e^x	
x^2+4	
x^2-2x	
$x^2-7x+10$	

$b] \to \mathbb{R}$
ÁVEL

$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$

DEFINIDA
TODO $c \in [a,b]$,
$: [a,b] \to \mathbb{R}$
CONTÍNUA,
$(a) = 0$,
$F(c) = f(c)$
EM TODO PONTO
$\in (a,b)$ NO QUAL
É CONTÍNUA.

: SE $f: [2,5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$,

$F: [2,5] \to \mathbb{R}$ ← (1)
OBEDECE:
F É CONTÍNUA, ← (2)
$F(2) = 0$ ← (3)
$\frac{d}{dc} F(c) = f(c) = c$ ← (4)
EM TODO $c \in (2,5)$

OBS: NOSSO PRIMEIRO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO VAI SER:
1) CHUTE A F
2) VERIFIQUE SE $F'(x) = f(x)$ EM TODO x,
3) SE NÃO VOLTE PARA O PASSO 1

DÁ PRA RESOLVER O EXERCÍCIO ORGANIZANDO OS CHUTES NUMA TABELA...

$F(x)$	(1)	(2)	(3)	(4)
99	sim	sim	NÃO $F(2)=99$	
e^x	sim	sim	NÃO $F(2)=e^2$	
x^2+4	sim	sim	NÃO $F(2)=8$	NÃO
x^2-2x	sim	sim	sim	NÃO $F'(x)=2x-2 \neq x$
$x^2-7x+10$	sim	sim	sim	NÃO $F'(x)=2x-7$
$\frac{x^2}{2}-2$	sim	sim	sim	sim

EXISTE UM TEOREMA DE CÁLCULO 1 QUE DIZ QUE PRA CADA ESCOLHA DE a, b, f NO TFC 1 VAI EXISTIR EXATAMENTE UMA [illegible] F NO TFC 1 (EU SEMPRE ESQUEÇO O NOME DESSE TEOREMA, DIGO DA PRÓXIMA VEZ).

TFC 2

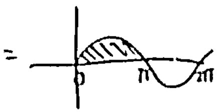
ENUNCIADO:
(DEMONSTRAÇÕES NA PRÓXIMA AULA!)
SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ É INTEGRÁVEL, E SE $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA E OBEDECE $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ ONDE $f(x)$ É CONTÍNUA, (ISTO É, OBEDECE (1), (2) E (4)) ENTÃO PARA $c, d \in [a,b]$ TEMOS

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d) - F(c)$$

EXERCÍCIO:
USANDO O MESMO MÉTODO DE CHUTAR E TESTAR CALCULE:

a) $\int_{x=0}^{x=2} x^3\,dx$,

b) $\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx =$



$f(x)$	$F(x)$	$F'(x)$	$F(\pi)-F(0)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$(-\cos\pi)-(-\cos 0)$ $= 1+1$ $= 2$

$\boxed{\text{C2 9/MAIO/2016}}$

EXERCÍCIOS:

CALCULE PELO MÉTODO DE CHUTAR "F"'S E TESTÁ-LAS:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=3} 2+3x+4x^2\,dx$

b) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 4e^{5x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{x=2}^{x=6} (x-2)^5\,dx$

e) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$

C2 11/MAIO/2016

CONDIÇÕES:

a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
b) $F:[c,d]\to\mathbb{R}$
c) f É CONTÍNUA (EM $[a,b]$)
d) f TEM UM NÚMERO FINITO DE DESCONTINUIDADES (EM $[a,b]$)
e) f É INTEGRÁVEL (EM $[a,b]$)
f) F É CONTÍNUA
g) F É DERIVÁVEL ONDE f FOR CONTÍNUA
h) $F'(x)=f(x)$ ONDE f FOR CONTÍNUA
i) $F(a)=0$
j) $F(c)=\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ $(\forall c\in[a,b])$
k) $\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d)-F(c)$ $(\forall c,d\in[a,b])$

(c)→(d)
(d)→(e)
(h)→(g)
(j)→(i)
(j)→(k)

TFC 1: (e),(j) ⇒ (f),(g),(h),(i)
TFC 2: (f),(h) ⇒ (k)

$$\boxed{k')\ \int_{x=c}^{x=d} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=c}^{x=d}}$$

IMPORTANTE:

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)h(x)\big)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x) \quad ①$$

$$g(x)h(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\,dx \quad ②$$

NOTAÇÃO: $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a)$

$$\frac{d}{dx}\big(g(h(x))\big)=g'(h(x))h'(x) \quad ③$$

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx \quad ④$$

IDÉIA:
TODA REGRA DE DERIVAÇÃO CORRESPONDE A UMA REGRA DE INTEGRAÇÃO.
① É A REGRA DA DERIVADA DO PRODUTO
③ É A REGRA DA CADEIA

$$\frac{d}{dx}\big(200\cdot g(x)\big)=200\,g'(x)$$

$$\underbrace{200\,g(x)}_{\substack{\shortparallel\\ F(x)}}\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_{x=a}^{x=b}\underbrace{200\,g'(x)}_{\substack{\shortparallel\\ f(x)=F'(x)}}\,dx$$

EXERCÍCIOS:

CALCULE:

a) $\int_{x=0}^{x=\pi} 42\,\mathrm{sen}\,x\,dx$

b) $\int_{x=a}^{x=b} 42\,\mathrm{sen}(42x)\,dx$

DICA: PRA (b) USE ③ E ④ – CHUTE "g"s E "h"s ATÉ VOCÊ CONSEGUIR
$42\,\mathrm{sen}(42x)=g'(h(x))h'(x)$

c) $\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{sen}(2x+3)\,dx$

SE $F(x)=-\frac{\cos(2x+3)}{2}$
ENTÃO $F'(x)=\mathrm{sen}(2x+3)$ E

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{sen}(2x+3)\,dx \quad\quad -\frac{\cos(2x+3)}{2}\Big|_{x=a}^{x=b}$$

d) $\int_{x=a}^{x=b} e^{3x+4}\,dx$

e) $\int_{x=a}^{x=b} (3x+4)^5\,dx$

$g(y)$	$h(x)$
e^y	$3x+4$
$\cos(y)$	x^2+3x
$-\cos(y)$	$\frac{x^2+3x}{2}$

$-\cos(y)$ $(2x+3)$

$\sqrt{2}$

$\frac{-\cos(y)\ (2x+3)}{2}$

FAVOR [illegible]
APAGAR[illegible]
VOLTO [illegible]
EDUARDO

ERCÍCIOS:

LCULE:

$\int_{x=0}^{x=\pi} 42 \operatorname{sen} x \, dx$

$\int_{x=a}^{x=b} 42 \operatorname{sen}(42x)\, dx$

: PRA (b) USE

④ – CHUTE "g"s E

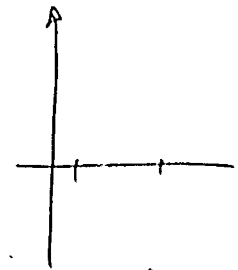
's ATÉ VOCÊ CONSEGUIR

$42 \operatorname{sen}(42x) = g'(h(x))h'(x)$

c) $\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x+3)\, dx$

$g(y)$	$h(x)$	$g'(y)$	$h'(x)$	$g'(h(x))h'(x)$	$= \operatorname{sen}(2x+3)$?
e^y	$3x+4$				
$\cos(y)$	x^2+3x	$-\operatorname{sen}(y)$	$2x+3$	$-\operatorname{sen}(x^2+3x)(2x+3)$	~~VÃO~~ NÃO
$-\cos(y)$	$\frac{x^2+3x}{2}$	$\operatorname{sen}(y)$	$x+\frac{3}{2}$	$\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$	NÃO
$\frac{-\cos(y)}{\sqrt{2}}$	$(2x+3)$	$\frac{\operatorname{sen}(y)}{\sqrt{2}}$	2	$\frac{\operatorname{sen}(2x+3)}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \operatorname{sen}(2x+3)\sqrt{2}$	
$\frac{-\cos(y)}{2}$	$(2x+3)$	$\frac{\operatorname{sen}(y)}{2}$	2	$\frac{\operatorname{sen}(2x+3) \cdot 2}{2} = \operatorname{sen}(2x+3)$	

$-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$



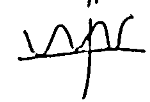
$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

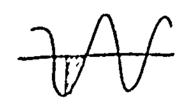
$f:$ 

$G(c) = \int_{x=0}^{x=c} f(x)\,dx$

$H(c) = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=c} f(x)\,dx$

$H(x) = G(x) + C$





E $F(x) = -\frac{\cos(2x+3)}{2}$

ENTÃO $F'(x) = \operatorname{sen}(2x+3)$ E

$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

$\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x+3)\,dx = -\frac{\cos(2x+3)}{2}\Big|_{x=a}^{x=b}$

FAVOR NÃO APAGAR! VOLTO JÁ!!! EDUARDO

AULA QUE VEM: SUBSTITUIÇÃO

$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$

$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$

NA PÁGINA DO CURSO TEM LINK PRO "2016.1-C2-material.pdf" QUE TEM ALGUMAS COISAS SOBRE SUBSTITUIÇÃO...

"$\int$"?

d) $\int_{x=a}^{x=b} e^{3x+4}\,dx$

e) $\int_{x=a}^{x=b} (3x+4)^5\,dx$

C2 16/maio/2016

Aula passada:

$$(\mathrm{I}') \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx = g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Substituição:

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{g(u)}\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

Importante:
podemos usar isto sem conhecer a g...

$$\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx \quad (\star)$$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} \ldots\, dx} \Rightarrow \text{integral definida}$$

$$\boxed{\int \ldots\, dx} \Rightarrow \text{integral indefinida}$$

Tem vários jeitos de entender o que são integrais indefinidas, e a gente vai começar com um deles...

O de que contas com "$\int dx$" são abreviações para contas com "$\int_{x=a}^{x=b} \ldots\, dx$".

Obs:

Fazendo $F := g$, $x := u$, $a := h(a)$, $b := h(b)$ em

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Temos:

$$\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du = g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)}$$

Um exemplo (bobo) de substituição:

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos(\underbrace{4x+5}_{u})\,dx$$

$$\int_{u=13}^{u=17} (\cos u)\,\frac{1}{4}\,du$$

$u = 4x+5$

$\frac{du}{dx} = 4$

$\frac{dx}{du} = \frac{1}{4}$

$dx = \frac{dx}{du}$

$u-5 = 4$

x

Exercício:

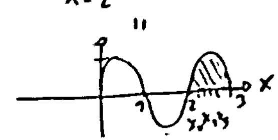
$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx = ?$$

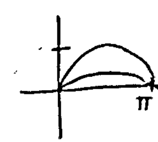
use $u = \pi x$.

$x = \frac{u}{\pi}$

$\frac{du}{dx} = \pi \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\pi} \quad dx = \frac{dx}{du}$

$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} \operatorname{sen}(u)$$





$x:=u,$

$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)}$

UM EXEMPLO (BOBO) DE SUBSTITUIÇÃO:

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos\underbrace{(4x+5)}_{u}\, dx =$$

$$\int_{u=13}^{u=17} (\cos u)\frac{1}{4}\, du$$

$u = 4x+5$

$\frac{du}{dx} = 4$ $\quad \frac{\Delta x}{\Delta u}$

$\frac{dx}{du} = \frac{1}{4}$

$dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{4}du$

$u-5 = 4x$

$x = \frac{u-5}{4}$

EXERCÍCIO.

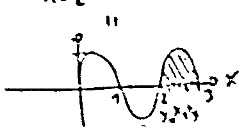
$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \,?$$

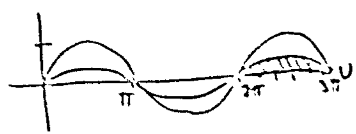
USE $u = \pi x$.

$x = \frac{u}{\pi}$

$\frac{du}{dx} = \pi \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\pi} \qquad dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{\pi}du$

$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} \operatorname{sen}(u)\frac{1}{\pi}\, du$$





FATO:

$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} (\operatorname{sen} u)\frac{1}{\pi}\, du$$

É UM CASO PARTICULAR DE (★)...

FAZENDO:

$h :=$
$a :=$
$b :=$
$g' :=$

EM (★) TEMOS...

$g'(u)$	$h(x)$	a	b	(★) (INVERTIDO)
$\operatorname{sen} u$	πx	2π	3π	$\int_{x=2\pi}^{x=3\pi} \operatorname{sen}(\pi x)\pi\, dx = \int_{u=2\pi^2}^{u=3\pi^2} \operatorname{sen} u\, du$
$\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} u$	πx	2	3	$\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{\cancel{\pi}}\operatorname{sen}(\pi x)\cancel{\pi}\, dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} u\, du$ OK!!!

RESP: $g'(u) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} u$,
$h(x) = \pi x$,
$a = 2$,
$b = 3$!

$\boxed{\text{C2 16/MAIO/2016}}$

AULA PASSADA:

$$K')\quad \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \quad (B)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx = g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

SUBSTITUIÇÃO:

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{g(u)}\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

IMPORTANTE:
PODEMOS USAR ISTO SEM CONHECER A g...

$$\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx \quad (\star)$$

$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} \ldots\, dx}$ $\Rightarrow$ INTEGRAL DEFINIDA

$\boxed{\int \ldots\, dx}$ $\Rightarrow$ INTEGRAL INDEFINIDA

$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx = ?$$

$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{\pi x}_{u})\,dx = \int \operatorname{sen} u \,\frac{dx}{du}\,du \qquad u = \pi x$$

$$x = \frac{u}{\pi}$$

$$= \int (\operatorname{sen} u)\frac{1}{\pi}\,du \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos u)$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen}(\pi x)\,dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} (\operatorname{sen} u)\,\frac{dx}{du}\,du$$

$$= \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} (\operatorname{sen} u)\,\frac{1}{\pi}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{u=2\pi}^{u=3\pi} \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos u)\Big|_{u=2\pi}^{u=3\pi}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\big(\underbrace{-\underbrace{\cos 3\pi}_{-1}}_{1}\big)}_{\frac{1}{\pi}} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\big(\underbrace{-\underbrace{\cos 2\pi}_{1}}_{-1}\big)}_{-\frac{1}{\pi}}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} (\cos x^2)\,x\,dx =$$

$$\int (\cos \underbrace{x^2}_{u})\,x\,dx =$$

$$\int (\cos u)\,x\,\frac{du}{2\cancel{x}} =$$

$$\int \frac{\cos u}{2}\,du =$$

$$=$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos(x^2)\,x\,dx$$

SERÁ QUE ($\star\star$)
PARTICULAR DO
VAMOS TENTAR

ENTÃO: $F'(x)$

$$\int_{x=2}^{x=3} \text{sen}(\pi x)\,dx = ?$$

$$\int \text{sen}(\underbrace{\pi x}_{u})\,dx = \int \text{sen}\, u \,\frac{dx}{du}\,du \qquad u = \pi x, \quad x = \frac{u}{\pi}$$

$$= \int (\text{sen}\, u)\frac{1}{\pi}\,du \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \text{sen}\, u\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos u)$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \text{sen}(\pi x)\,dx = \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} (\text{sen}\, u)\frac{dx}{du}\,du$$

$$= \int_{u=2\pi}^{u=3\pi} (\text{sen}\, u)\frac{1}{\pi}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{u=2\pi}^{u=3\pi} \text{sen}\, u\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos u)\Big|_{u=2\pi}^{u=3\pi}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}(\underbrace{-\underbrace{\cos 3\pi}_{-1}}_{1})}_{\frac{1}{\pi}} - \underbrace{\frac{1}{\pi}(\underbrace{-\underbrace{\cos 2\pi}_{1}}_{-1})}_{-\frac{1}{\pi}}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} (\cos x^2)\, x\, dx = ?$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int (\cos \underbrace{x^2}_{u})\, x\, dx =$$

$$\int (\cos u)\, x \,\frac{du}{2x} =$$

$$\int \frac{\cos u}{2}\, du = \frac{\text{sen}\, u}{2}$$

$$= \frac{\text{sen}\, x^2}{2}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos(x^2)\, x\, dx = \frac{\text{sen}\, x^2}{2}\Big|_{x=2}^{x=3} \qquad (\star\star)$$

SERÁ QUE $(\star\star)$ É UM CASO PARTICULAR DO (B)?

VAMOS TENTAR: $F(x) = \frac{\text{sen}\, x^2}{2}$

ENTÃO: $F'(x) = \frac{\cos x^2}{2}\cdot 2x = (\cos x^2)\,x$

PRÓXIMA AULA:

INTEGRAÇÃO POR TABELAS DE INTEGRAÇÃO!

VAMOS APRENDER A ACRESCENTAR MAIS REGRAS NA TABELA (DEMONSTRADAS A PARTIR DAS ANTERIORES)

E VAMOS APRENDER A INTEGRAR COISAS COMPLICADAS EM VÁRIOS PASSOS SEM AS CONTAS FICAREM ENORMES USANDO TRUQUES COMO "ONDE" E "SEJA"...

C2 18/maio/2016

Na aula passada eu disse que a gente iria começar a usar tabelas de integrais, e os truques do "onde" e do "seja"...

Lembrem que:

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \quad (1)$$

← integração por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (2)$$

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{e^x}_{g}dx$$
$$= xe^x - e^x$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx = \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}dx$$
$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$
$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

⇐ Solução (primitiva) explícita

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x \quad (3)$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx \quad (4)$$

onde $\int xe^x dx$ é dado por (3).

Exercício:
"Calculem" $\int x^4 e^x dx$ escrevendo o resultado com "onde"'s.

Depois que a gente tem uma certa prática a gente consegue ver que $\int x^2 e^x dx$ é "mais complicado" que $\int xe^x dx$, e a gente consegue resolver problemas de integração direto "reduzindo" problemas mais complicados a problemas mais simples...

$$\int x^4e^x dx = x^4e^x - 4\int x^3e^x dx, \text{ onde}$$
$$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx, \text{ onde}$$
$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx, \text{ onde}$$
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x.$$

$$\int (ax)^3 e^{(bx)} dx = ?$$
$$\int a^3x^3e^{bx}dx = a^3\int x^3 e^{bx}dx$$

$$\int x^3 e^{10x} dx = ?$$

Dica: $u = 10x$
$\Rightarrow x = u/10$
$\frac{du}{dx} = 10$
$\frac{dx}{du} = \frac{1}{10}$
$dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{10}du$

$$\int x^3e^{10x}dx = \int \left(\frac{u}{10}\right)^3 e^u \frac{1}{10}du$$
$$= \int \frac{u^3}{10^3}e^u\frac{1}{10}du$$
$$= \frac{1}{10^4}\int u^3e^u du$$

... Aí $\int x^3 e^{bx}dx$ é "mais complicado" que $\int x^3 e^x dx$...

A "Aula 6" do Hernández é "Integrais d[e] trigonomét[ricas]"

$\int \operatorname{sen}^3\theta \cos$ [...]

$s = \operatorname{sen}\theta$
$\theta = \operatorname{arcsen}$ [...]
$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$
$ds = \frac{ds}{d\theta}d\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta +$ [...]
$\operatorname{sen}^2\theta =$ [...]
$\cos^2\theta =$ [...]

$\int \operatorname{se}$[...]

$\int \operatorname{se}$[...]

$\int \operatorname{se}$[...]

$\int s^3$[...]

$\int s$[...]

$\frac{s^4}{4}$[...]

$\frac{\operatorname{sen}^4}{4}$[...]

$(ax)^3 e^{(bx)} dx = ?$

$\int a^3 x^3 e^{bx} dx = a^3 \int x^3 e^{bx} dx$

$\int x^3 e^{10x} dx = ?$

DICA: $U = 10X$

$\Rightarrow X = U/10$

$\frac{dU}{dX} = 10$

$\frac{dX}{dU} = \frac{1}{10}$

$dX = \frac{dX}{dU} dU = \frac{1}{10} dU$

$\int x^3 e^{10x} dx = \int \left(\frac{U}{10}\right)^3 e^U \frac{1}{10} dU$

$= \int \frac{U^3}{10^3} e^U \frac{1}{10} dU$

$= \frac{1}{10^4} \int U^3 e^U dU$

... AÍ $\int x^3 e^{bx} dx$ É "MAIS COMPLICADO" QUE $\int x^3 e^x dx$ ...

VE

ADO"

TEGUE
EMAS
DIRETO
BLEMAS
A
SIMPLES...

$e^x - 4\int x^3 e^x dx$, ONDE

$^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$, ONDE

$x^2 e^x - 2\int x e^x dx$, ONDE

$x e^x - \int e^x dx$

$x e^x - e^x$.

A "AULA 6" DO LIVRO DA HERNÁNDEZ É SOBRE "INTEGRAIS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS".

$\int \text{sen}^3\theta \cos^3\theta \, d\theta = ?$

$s = \text{sen}\,\theta$

$\theta = \text{arcsen}\, s$

$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$

$ds = \frac{ds}{d\theta} d\theta = \cos\theta\, d\theta$

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

$\int \text{sen}^3\theta \cos^3\theta \, d\theta =$

$\int \text{sen}^3\theta \cos^2\theta \cos\theta \, d\theta =$

$\int \text{sen}^3\theta (1 - \text{sen}^2\theta) \cos\theta \, d\theta =$

$\int s^3 (1 - s^2)\, ds =$

$\int s^3 - s^5\, ds =$

$\frac{s^4}{4} - \frac{s^6}{6} =$

$\frac{\text{sen}^4\theta}{4} - \frac{\text{sen}^6\theta}{6}$

EXERCÍCIOS:

a) $\int \text{sen}^3\theta \cos^2\theta \, d\theta = ?$

USE $c = \cos\theta$

$\frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta$

$dc = -\text{sen}\,\theta . d\theta$

$-dc = \text{sen}\,\theta . d\theta$

$\int \text{sen}^2\theta\, \text{sen}\theta \cos^2\theta\, d\theta$

$\int (1 - \cos^2\theta)\, \text{sen}\theta \cos^2\theta\, d\theta$

$\int (1 - c^2)\, \text{sen}\theta\, c^2 d\theta$

$\int (1 - c^2) c^2 (-dc)$

$\int c^2 - c^4 . (-1) . dc$

$\int c^4 - c^2\, dc$

$\frac{(\cos\theta)^5}{5} - \frac{(\cos\theta)^3}{3}$

LEMBREM QUE A GENTE PODE VERIFICAR

$\underbrace{\int \text{sen}^3\theta \cos^3\theta \, d\theta}_{F'} = \underbrace{\frac{\text{sen}^4\theta}{4} - \frac{\text{sen}^6\theta}{4}}_{F}$

DERIVANDO A F...

AULA QUE VEM:

$\int \text{sen}^2\theta \, d\theta = ?$

PARA CASA:
REVEJAM SÉRIE DE TAYLOR,
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

GA 23/maio/2016

Hoje:
- Série de Taylor
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

A gente viu que derivar e integrar são mais ou menos operações inversas...

Agora vamos ver algumas outras operações que são "mais ou menos inversas" uma da outra.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Considere a sequência de todas as derivadas de f, avaliadas no ponto $x=0$:
$(f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots)$

Exemplos:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$\to (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$\to (e, d, 2c, 6b, 24a, 0, 0, 0, \ldots)$
$f(x) = e^x$
$\to (1, 1, 1, \ldots)$
$f(x) = e^{2x}$
$\to (1, 2, 4, 8, \ldots)$

$f(0) = e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
$f'''(x) = 24ax + 6b$
$f''''(x) = 24a$
$f'''''(x) = 0$

$f'(0) = d$
$f''(0) = 2c$
$f'''(0) = 6b$
$f''''(0) = 24a$
$f'''''(0) = 0 \;= (f^{(5)}(0))$

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$
$\to (a_0, a_1, 2a_2, 6a_3, 24a_4, 120a_5, 720a_6, \ldots)$
$= (0!a_0, 1!a_1, 2!a_2, 3!a_3, 4!a_4, 5!a_5, \ldots)$

Como é que a faz a operação inversa disso, que transforma uma sequência num polinômio?

Que f polinomial gera isto?
$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, 0, 0, \ldots)$
$\to f(x) = b_0 + b_1x + \frac{b_2}{2!}x^2 + \frac{b_3}{3!}x^3 + \ldots$
$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}x^k$

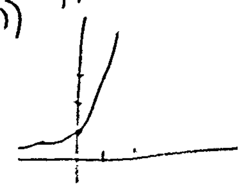
E se a gente tentar fazer algo parecido para:
$f(x) = e^x$
$\to (1, 1, 1, 1, \ldots)$
$\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$

Podemos tentar "truncar" essa soma infinita...
$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$

Exemplo: $f_3(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

Fato: as funções $f_n(x)$ são "aproximações polinomiais" para e^x...

Na internet (depois digo onde) tem p.ex. figuras comparando as aproximações polinomiais de e^x com o próprio e^x...



Exercício:
Para as funções "f" ... obtenha: 1) a sequência infinita, 2) aproxima... polinomiais até x^0, ... até x^3, e até x...
3) compare o grá... com os gráfic... primeiras apr...
4) use as aproxi... para calcula...

e compare...

a) $f(x) =$ ...
b) $f(x) =$ ...

$f_0(x) = 1$
$f_1(x) = 1 + x$
$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

E SE A GENTE TENTAR FAZER ALGO PARECIDO PARA:

$f(x) = e^x$

$\to (1, 1, 1, 1, \dots)$

$\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$\frac{a_3}{3!}x^3 + \dots$

PODEMOS TENTAR "TRUNCAR" ESSA SOMA INFINITA...

$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

EXEMPLO: $f_3(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

FATO: AS FUNÇÕES $f_n(x)$ SÃO "APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS" PARA e^x...

$+ d$

$f'(0) = d$

$f''(0) = 2c$

$f'''(0) = 6b$

$f''''(0) = 24a$

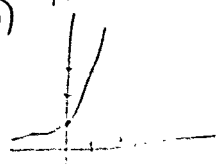
$f'''''(0) = 0 = \left(f^{(5)}(0)\right)$

$^3 + a_4 x^4$

$a_5, 720a_6, \dots)$

$_4, 5!a_5, \dots)$

NA INTERNET (DEPOIS DIGO ONDE) TEM P.EX. FIGURAS COMPARANDO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE e^x COM O PRÓPRIO e^x...



$f_0(x) = 1$

$f_1(x) = 1 + x$

$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

EXERCÍCIO:

PARA AS FUNÇÕES "f" 1) OBTENHA A SEQUÊNCIA INFINITA, 2) APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS ATÉ x^0, ATÉ x^1, ATÉ x^2 ATÉ x^3, E ATÉ x^4,

3) COMPARE O GRÁFICO DA f COM OS GRÁFICOS DAS PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES,

4) USE AS APROXIMAÇÕES PARA CALCULAR $f_n(0.5)$ E $f_n(1)$, E COMPARE COM $f(0.5)$ E $f(1)$.

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos x$.

$f(x) = \text{sen } x$

$\to (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$

$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

$f_0(x) = 0$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x$

$f_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$f_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$f_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$f_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841\underline{666}\dots$

$\text{sen } 1 = 0.84147\dots$

$f(x) = \cos x$

$\to (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$

$f_0(x) = 1$

$f_1(x) = 1$

$f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$

$f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$

$f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

AGORA: 

$(2+3i) + (10+100i) = 12 + 103i$

$(2+3i)\cdot(10+100i) = 2\cdot 10 + 2\cdot 100i + 3i\cdot 10 + 3i\cdot 100i$

$= 20 + 200i + 30i - 300$

$= -280 + 230i$

$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

$3i\cdot 100i = \underbrace{3\cdot 100}_{300}\cdot\underbrace{i\cdot i}_{-1}$

$\underbrace{-i\cdot i}_{-1}$

GA 23/maio/2016

Hoje:
- Série de Taylor
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$e^{i\pi} = ?$

$e^{i\pi} = 1 + (i\pi) + \frac{1}{2!}(i\pi)^2 + \frac{1}{3!}(i\pi)^3 + \dots$

$= 1 + \frac{1}{2!}(i\pi)^2 + \frac{1}{4!}(i\pi)^4 + \dots$
$+ \left((i\pi) + \frac{1}{3!}(i\pi)^3 + \frac{1}{5!}(i\pi)^5 + \dots\right)$

$= 1 - \frac{1}{2!}\pi^2 + \frac{1}{4!}\pi^4 - \dots$
$\left(\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \frac{1}{7!}\pi^7 + \dots\right)i$

$= \cos\pi + (\text{sen}\,\pi)i$

$= -1 + 0i$

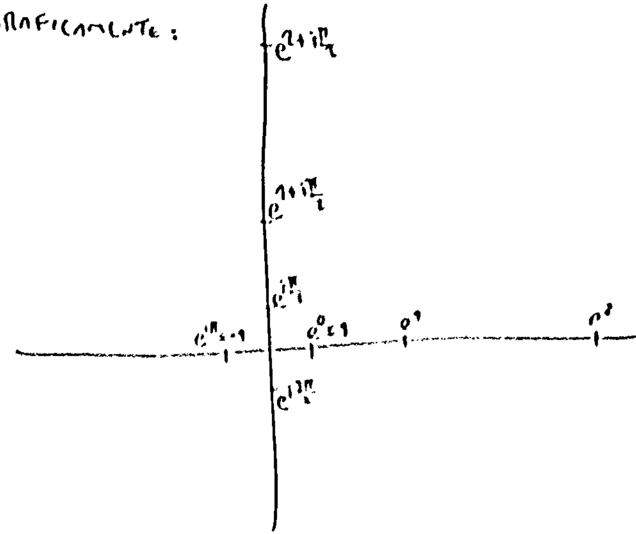
$e^{i\pi} = -1$

Se $\theta \in \mathbb{R}$,

$e^{i\theta} = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots$
$+ \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots\right) i$

$= \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

Graficamente:



$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\quad e^1 = 2.7\dots$

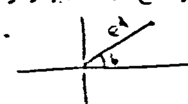
$e^{a+b} = e^a e^b$ mesmo quando a e b são complexos!

$e^{1+i\frac{\pi}{2}} = e^1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e \cdot i$

Quando a e b são reais,

$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$
$= e^a \cdot (\cos b + i\,\text{sen}\,b)$

que é um ponto a distância e^a da origem, e com "ângulo" b...



Lembra que na última aula apareceram coisas como $\text{sen}^2\theta$ e $\cos^3\theta$ que a gente ainda não sabia como simplificar...

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta$
$= \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\text{sen}\,\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Truque (pra simplificar as contas):
da mesma forma que p. ex., $u = x^2$,
vamos usar:
$C = \cos\theta$,
$S = \text{sen}\,\theta$,
$E = e^{i\theta}$

Lembre que $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{E} = E^{-1}$

Exercício...

Exemplo:

$\cos 2\theta =$

$\cos 2\theta =$

$\text{sen}\,2\theta =$

Tente "s...
(co): (c)...
$\cos\theta$ se...
$(\cos\theta)^3$

Dica:
Nós ach...
$\cos 4\theta$,
"mais ...
$(\cos\theta)^4$ ...
Sabemos
$\cos 4\theta$

Lembrem que na última aula apareceram coisas como $\text{sen}^2\theta$ e $\cos^3\theta$ que a gente ainda não sabia como simplificar...

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta$$
$$= \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\text{sen}\,\theta$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Truque (pra simplificar as contas):
da mesma forma que
p. ex., $u = x^2$,
vamos usar:
$c = \cos\theta$,
$s = \text{sen}\,\theta$,
$E = e^{i\theta}$
Lembre que $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{E} = E^{-1}$

...mo
...ncos!

...ia é da origem,

Exercício:

Exemplo:
$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}$$
$$\cos 2\theta = \frac{E^2+E^{-2}}{2}$$

$\text{sen}\,2\theta = \ldots$

Tente "simplificar" (ou: obter identidades):

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta, \\ (\cos\theta)^3\end{array}\right\} \Leftarrow$ CASA

Dica:
Nós achamos
$\cos 4\theta$
"mais básico" que
$(\cos\theta)^4$ porque
sabemos integrar
$\cos 4\theta$...

$\boxed{\text{C2 } 25/\text{MAR}/2016}$

HOJE: INTEGRAIS DE ALGUMAS FUNÇÕES INVERSAS...

DIGAMOS QUE
$f(g(x))=x$.

ENTÃO $\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dx}x=1$

$$\overset{\parallel}{f'(g(x))g'(x)},$$

$f'(g(x))g'(x)=1$,

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$.

COMO É QUE A GENTE APLICA ISTO?

$\frac{d}{dx}e^{\ln x}=1$

$\frac{d}{dx}\ln e^{x}=1$

OBS: $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}$,

$\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}$

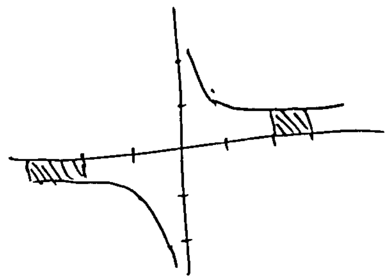
$\int x^{-1}dx=\frac{x^0}{0}$!!

$\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$\int_{x=-3}^{x=-2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{x=-3}^{x=-2}$$

$$=\ln -2-\ln -3$$

$=$ ERRO $-$ ERRO !!



$$\int_{x=-3}^{x=-2}\frac{1}{x}dx=\begin{pmatrix}u=-x\\du=-dx\\dx=-du\end{pmatrix}$$

$$\int_{u=3}^{u=2}\frac{1}{-u}\cdot -du=$$

$$\int_{u=3}^{u=2}\frac{1}{u}du=\ln u\Big|_{u=3}^{u=2}$$

Se $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln x$,

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ VAI SER: $\boxed{\ln' x=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}}$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

$\ln x=\int\frac{1}{x}dx$

$\ln x\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}dx$

Se $f(x)=\ln x$ e $g(x)=e^x$,

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ VAI SER: $e^x=\frac{1}{\ln' e^x}=\frac{1}{1/e^x}=e^x$

$= -2$

$x = -3$

$- \ln -3$

$-$ ERRO !! ☹

$u = -x$
$du = -dx$
$dx = -du$

$u \Big|_{u=3}^{u=2}$

$\ln x = \frac{1}{x}$

$\ln x = \int \frac{1}{x}\, dx$

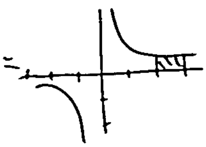
$\ln x \Big|_{x=2}^{x=6} = \int_{x=2}^{x=6} \frac{1}{x}\, dx$

$$\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x)\Big|_{x=-3}^{x=-2}$$

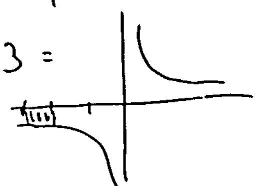
COMO É QUE ESCOLHE SE A GENTE VAI USAR $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

OU $\int \frac{1}{x} dx = \ln -x$?

$$\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x}\, dx = \ln 3 - \ln 2 =$$



$$\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\, dx = \ln 2 - \ln 3 =$$



$\int \frac{1}{x} dx =$

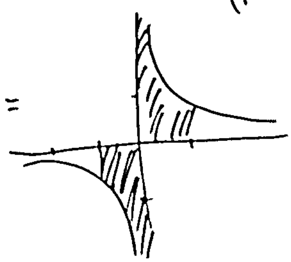
$\int \frac{1}{-u} \cdot -du =$

$\int \frac{1}{u} du =$

$\ln u =$

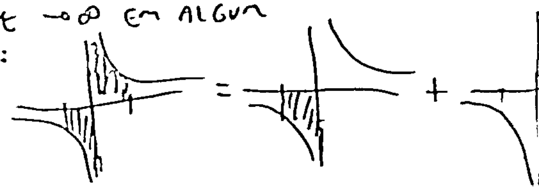
$\ln(-x)$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\, dx =$$



APARENTEMENTE AS PARTES NEGATIVA E POSITIVA SE CANCELAM...

MAS VAMOS VER DEPOIS, EM INTEGRAIS IMPRÓPRIAS, QUE O MELHOR JEITO DE DEFINIR INTEGRAIS DE FUNÇÕES QUE $\to \infty$ EM ALGUM PONTO DIZ:



FATO:

OS LIVROS DIZEM:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x|$$

VOLTANDO...

SE $f(x) =$

$g'(x) = \frac{1}{f'(}$

SE sen

sen^2

$\frac{1}{9}$

OU

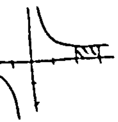
DI

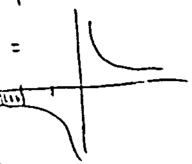
EM

FATO:
OS LIVROS DIZEM:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln |x|$$

?





PARTES
TIVA SE

VOLTANDO...

Se $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \text{arcsen}\, x$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \text{VAI SER: } \text{arcsen}'x = \frac{1}{\cos \text{arcsen}\, x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

Se $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$, $\cos\theta = ?$

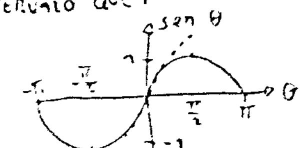
$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{1}{9} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = \frac{8}{9}$$
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}}$$
ou $\cos\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}}$.

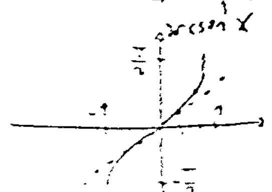
Se $\text{sen arcsen}\, x = x$,
$\cos \text{arcsen}\, x = ?$

$$(\text{sen}(\text{arcsen}\, x))^2 + (\cos(\text{arcsen}\, x))^2 = 1$$
$$x^2 + (\cos(\text{arcsen}\, x))^2 = 1$$
$$(\cos(\text{arcsen}\, x))^2 = 1 - x^2$$
$$\cos(\text{arcsen}\, x) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Dizemos que $\text{arcsen}'x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ NO INTERVALO QUE NOS INTERESSA.

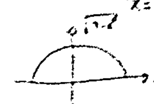
então $\text{arcsen}\, x \Big|_{x=a}^{x=b} = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

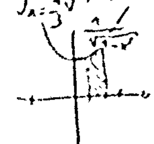




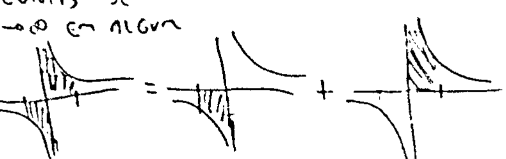
$\text{sen}\,\theta = 2 \Rightarrow$ NÃO TEM θ
$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ TEM RESPOSTA

$$\text{arcsen}\, x \Big|_{x=\frac{1}{3}}^{x=\frac{2}{3}} = \int_{x=\frac{1}{3}}^{x=\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$





VER DEPOIS,
IMPRÓPRIAS,
JEITO DE
EGRAIS DE
-∞ EM ALGUM



$= -\infty + \infty =$ INDEF
$=$ ERRO...

$\boxed{\text{C2 30/maio/2016}}$

AVISO:
METADE (?) DA AULA DE HOJE VAI SER UMA "VERSÃO CONSERTADA" DA AULA PASSADA, QUE FOI MUITO RUIM...

DERIVADA DE FUNÇÃO INVERSA

Se f e g são inversas (em certos intervalos),

$f(a)=b \leftrightarrow a=g(b)$

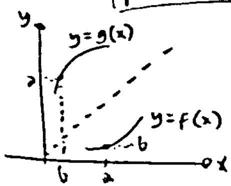
$g(f(a))=a$

$g(f(x))=x$

$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) = \frac{d}{dx}x = 1$

$g'(f(x))f'(x)=1$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}}$$



APLICAÇÕES:

① $f(x)=\ln x \quad g(x)=\exp x$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp' \ln x} = \frac{1}{\exp \ln} = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln' x\,dx = \ln x$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

$\exp(0)=1$

$\ln(\exp(0)) = \ln 1$

0

$\ln 1 = 0$

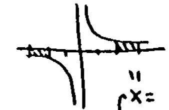
$$\int_{x=a}^{x=b} \ln' x\,dx = \ln x\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx$$

Fazendo $a=1$

$$\int_{x=1}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \ln\Big|_{x=1}^{x=b} = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b$$

$$\boxed{\ln b = \int_{x=1}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x}$$

Obs: $\displaystyle\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx =$  $= \displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx = -\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|} \quad (\star)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

OUTRA APLICAÇÕES

De $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$

(quando f e g são inversas):

$f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

(...)

$$\boxed{\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{arcsen} b = \int_{x=0}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}$$

$\operatorname{arccos}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (!!!)

$\operatorname{arctan}' x = \ldots$

$\operatorname{arcsec}' x = \ldots$

VAMOS VER ISTO DEPOIS!!!

Exerc:

$\int \frac{1}{x-}$

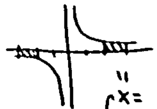
$\int \frac{1}{x}$

$\int ($

$\int ($

$\int \frac{2}{x}$

$\frac{2}{-2}$

$$\int_{x=-3}^{x=-2}\frac{1}{x}\,dx =$$ 
$$= \int_{x=2}^{x=3}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_{x=-3}^{x=-2}\frac{1}{x}\,dx = -\int_{x=2}^{x=3}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|} \quad (\star)$$

$$\ln x\Big|_{x=a}^{x=b} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

$$\ln\Big|_{x=1}^{x=b}$$
$$\ln b - \ln 1$$
$$\ln b - 0$$
$$\ln b$$

dx

x

Outra aplicação de $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$

(quando f e g são inversas):

$f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

(...)

$$\boxed{\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{arcsen} b = \int_{x=0}^{x=b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}$$

$$\operatorname{arccos}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (!!!)$$

$\operatorname{arctan}' x = \ldots$

$\operatorname{arcsec}' x = \ldots$

Vamos ver isto depois!!!

Exerc:

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$$

$$\int (x-5)^{-2}\,dx =$$

$$\int (x-5)^{2}\,dx =$$

$$\int \frac{20}{x^3} + \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x} + 4 + 99x + 200x^2\,dx =$$

$$\frac{20}{-2x^2} + \frac{10}{-x} + 5\ln|x| + 4x + \frac{99x^2}{2} + \frac{200x^3}{3}$$

$$\int \frac{20}{(x-5)^3}\,dx = \frac{20}{-2(x-5)^3}$$

$$\int \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}\,dx = \alpha\ln|x-a| + \beta\ln|x-b|$$

$$= \int \frac{\alpha(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x-a)\beta}{(x-a)(x-b)}\,dx$$

$$= \int \frac{\alpha x - \alpha b + \beta x - a\beta}{(x-a)(x-b)}\,dx$$

$$= \int \frac{(\alpha+\beta)x - (\alpha b + a\beta)}{(x-a)(x-b)}\,dx$$

Frações Parciais

("Aula 8" no livro)

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \ ? \ = \int \frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}\,dx = \ ?$$

a	b	α	β	$\frac{(\alpha+\beta)x - (\alpha b + a\beta)}{(x-a)(x-b)}$
2	-3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{0x - (-\frac{3}{5} - \frac{2}{5})}{(x-2)(x+3)}$
2	-3			

Exerc:

$$\frac{10}{x-2} + \frac{100}{x+3} = \frac{110x - 170}{x^2+x-6}$$

polinômio (grau 1<2)

polinômio com raízes distintas (grau 2)

fácil ↔ difícil

$\boxed{\text{C2 30/MAIO/2016}}$

$$\int \frac{200x+99}{x^2-x+6}\,dx = (\ldots) \quad (\text{OK})$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-x+6}\,dx = ?$$

$$\frac{x^2}{x^2-x+6} = \frac{1(x^2-x+6)+x-6}{x^2-x+6}$$
$$= 1 + \frac{x-6}{x^2-x+6}$$

$$\frac{x^3}{x^2-x+6} = \frac{(ax+b)(x^2-x+6)+cx+d}{x^2-x+6}$$

PODEMOS OBTER a,b,c,d FAZENDO UMA DIVISÃO COM RESTO DE POLINÔMIOS...

$$12345 = 12\cdot 1000 + 345$$
$$x^3 = (ax+b)\cdot(x^2-x+6)+(cx+d)$$

$$\begin{array}{r|l} 12345 & 1000 \\ -1000 & \overline{12} \\ \hline 2345 & \\ -2000 & \\ \hline 345 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x+0 & x^2-x+6 \\ -(x^3-x^2+6x) & \overline{x+1} \\ \hline +x^2-6x+0 & \\ -(x^2-x+6) & \\ \hline -5x-6 & \end{array}$$

$$x^3 = (x+1)(x^2-x+6)-5x-6$$

TRUQUE (NOTAÇÃO - NÃO PADRÃO!):

$$1x^3+0x^2+0x+0 = \boxed{1|0|0|0}$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{1|0|0|0} & \boxed{1|-1|6} \\ -\boxed{1|-1|6} & \boxed{1|1} \\ \hline \boxed{1|-6|0} & \\ -\boxed{1|-1|6} & \\ \hline \boxed{-5|-6} & \end{array}$$

$$\boxed{1|0|0|0} = \boxed{1|1}\cdot\boxed{1|-1|6} + \boxed{-5|-6}$$

IDÉIA PRINCIPAL:
POLINÔMIOS SÃO COMO NÚMEROS DECIMAIS SEM "VAI UM".

$$\begin{array}{r} \boxed{5|6|7} \\ +\boxed{8|9|10} \\ \hline \boxed{13|15|17} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{2|3|4} \\ \cdot\boxed{5|10|20} \\ \hline \boxed{10|60|80} \\ \boxed{20|30|40} \\ +\boxed{10|15|20} \\ \hline \boxed{10|35|90|100|80} \end{array}$$

OBS:

A GENTE ACABOU DE APRENDER A INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS, ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO.

ANTES APRENDEMOS A INTEGRAR:
- POLINÔMIOS
- FUNÇÕES DA FORMA $(\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n$,
- $x^n e^x$
- $x^n \operatorname{sen} x$
- $x^n \cos x$

FALTAM
TRUQUE
GENTE
SABER
FUNÇ

① O M
GEN
AGO
PRA
RA

R

E ACABOU
ENDER A
AR FUNÇÕES
NAIS, ISTO É,
CIENTES DE
POLINÔMIO POR
RO.

TES APRENDEMOS
INTEGRAR:
POLINÔMIOS
FUNÇÕES DA FORMA
$(\operatorname{sen} x)^m (\cos x)^n$,
- $x^n e^x$
- $x^n \operatorname{sen} x$
- $x^n \cos x$

FALTAM DOIS
TRUQUES PRA
GENTE REALMENTE
SABER INTEGRAR
FUNÇÕES RACIONAIS...

① O MÉTODO QUE A
GENTE VIU ATÉ
AGORA SÓ FUNCIONA
PRA POLINÔMIOS COM
RAÍZES DISTINTAS.

RAÍZES REPETIDAS:

$$\int \frac{3x+4}{x^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$$

$$\frac{3x+4}{x^2} = \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2}\,dx = 3\ln|x| + 4\,\frac{x^{-1}}{-1}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-2)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+4}{(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2}$$

② $(x+i)(x-i) = x^2+1$

x^2+1 NÃO TEM
RAÍZES REPETIDAS,
MAS TEM RAÍZES
COMPLEXAS!!!
$\underset{\sim}{\parallel}$
(VAMOS PULAR
ESTE CASO).

MÉTODO DE HEAVISIDE

$$\int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx = ?$$

COMO RESOLVER ISTO SEM
RESOLVER UM SISTEMÃO?

SEJA $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

QUEREMOS

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

$A = ?$
$B = ?$
$C = ?$

$$\left(\lim_{x\to a}\right) \frac{\cancel{(x-a)}\,p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)(x-c)} = \frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{(x-a)}} + \frac{(x-a)B}{\cancel{x-b}} + \frac{(x-a)C}{\cancel{x-c}}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{(x-b)(x-c)} = A$$

$$\parallel$$

$$\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$\boxed{\text{C2 } 1^{\underline{o}}/\text{JUN}/2016}$

UM JEITO DA GENTE LEMBRAR O TRUQUE POR TRÁS DO MÉTODO DE HEAVISIDE:

QUEREMOS:

SEJA $P(x) =$

$$\underbrace{\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{\text{SEJA } f(x)} = \underbrace{\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}}_{\text{SEJA } g(x)}$$

SABEMOS $\alpha, \beta, \gamma,$
$a, b, c,$
E QUEREMOS DESCOBRIR A, B, C.

SABEMOS QUE $f(x) = g(x)$ EM TODO $x \in \mathbb{R}$ COM $x \notin \{a, b, c\}$.

TRUQUE: $\lim_{x \to a} (x-a) g(x) = A$,

PORTANTO $A = \lim_{x \to a} (x-a) f(x)$.

EXEMPLO/EXERCÍCIO:
ENCONTRE A, B, C EM:

$$\frac{10x+2}{(x-0)(x+4)(x-5)} = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-5}.$$

TRUQUE PRA RAÍZES REPETIDAS:

$$\underbrace{\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^3}}_{\text{ISTO É (OU MELHOR: PARECE) DIFÍCIL DE INTEGRAR...}} = \underbrace{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3}}_{\text{ISTO É FÁCIL DE INTEGRAR.}}$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x-r)^3} = \frac{a(u+r)^2 + b(u+r) + c}{u^3}$$
$$= \frac{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}{u^3}$$

TRUQUE: $u = x - r$.

NA PÁGINA 1 DO PDF DO "MATERIAL PARA EXERCÍCIOS" TEM ISTO AQUI:

$s = \operatorname{sen}\theta$
$c = \cos\theta$

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \ldots \, d\theta$$

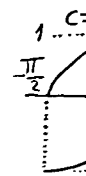
$$\int s^3 c^3 \, d\theta$$
$$= \int s^3 c^2 c \, d\theta$$
$$= \int s^3 (1-s^2) \frac{ds}{d\theta} \, d\theta$$
$$= \int s^3 (1-s^2) \, ds$$
$$= \int s^3 - s^5 \, ds$$
$$= \frac{s^4}{4} - \frac{s^6}{6}$$

$$\int_{s=\operatorname{arcsen}\alpha}^{s=\operatorname{arsen}\beta} \ldots \, ds$$

AÍ:

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} (\operatorname{sen}\theta)^3 (\cos\theta)^3 \, d\theta = \left(\frac{(\operatorname{sen}\theta)^4}{4} - \frac{(\operatorname{sen}\theta)^6}{6} \right) \Bigg|_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}$$

UMA
IMPO
ENT
DE
(S



QUA
TEM
ISTO E

s

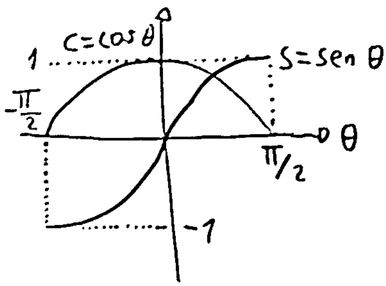
R.

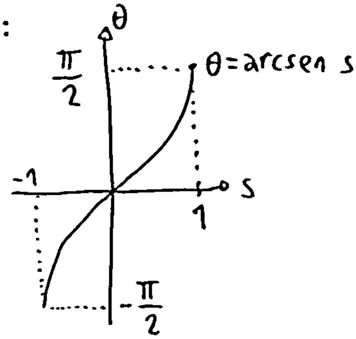
$$(u+r)+C$$

$$u+\gamma$$

os"

Umas figuras importantes pra gente entender a mudança de variável entre s e θ ($s = \text{sen}\,\theta$, $\theta = \text{arcsen}\, s$):





Quando $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos $c = \sqrt{1-s^2}$, isto é, $\cos\theta = \sqrt{1-(\text{sen}\,\theta)^2}$.

$= \text{sen}\,\theta$
$= \cos\theta$

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \dots \, d\theta$$

$$\int_{s=\text{arcsen}\,\alpha}^{s=\text{arsen}\,\beta} \dots \, ds$$

$$\left.\text{en}\,\theta)^4 \over 4 - \frac{(\text{sen}\,\theta)^6}{6}\right)\Bigg|_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}$$

$p(x)$ "

$$\frac{(10x+}{(x-0)(x}$$

$f(x)$?

Truque:

$\lim_{x\to a} (x-a$

$= 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(x-0}}{\cancel{(x-0}}$$

$$= \lim_{x\to 0} (x-0)$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x+4}{(x-0}$$

$B = -\frac{19}{18}$

$C = \frac{52}{45}$

=arcsen s

o s

P. 17

$$\underbrace{\frac{10x+2}{(x-0)(x+4)(x-5)}}_{f(x)"} = \underbrace{\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}}_{g(x)"}$$

TRUQUE:

$$\underbrace{\lim_{x\to a}}_{\substack{" \\ 0}} (x-a)\,f(x) = \lim_{x\to a}(x-a)\,g(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(x-0)}(10x+2)}{\cancel{(x-0)}(x+4)(x-5)} = \frac{10\cdot 0+2}{(0+4)(0-5)} = \frac{2}{-20} = -\frac{1}{10}$$

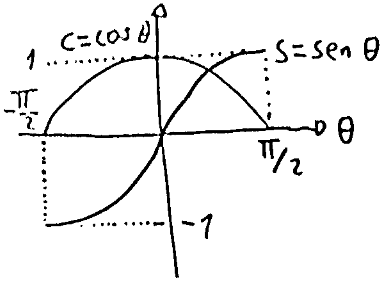
$$\overset{"}{\lim_{x\to 0}}(x-0)\left(\frac{A}{x-0}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-5}\right) = A$$

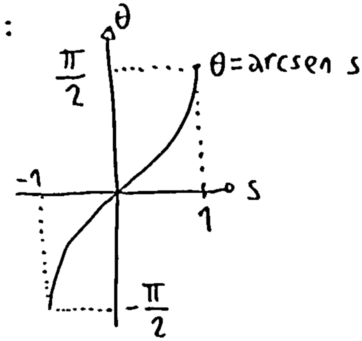
$$\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(10x+2)}{(x-0)(x+4)(x-5)} =$$

$$B = -\frac{19}{18}$$

$$C = \frac{52}{45}$$

Umas figuras importantes pra gente entender a mudança de variável entre s e θ ($s = \text{sen}\,\theta$, $\theta = \text{arcsen}\, s$):





Quando $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos $c = \sqrt{1-s^2}$, isto é, $\cos\theta = \sqrt{1-(\text{sen}\,\theta)^2}$.

$s \in [-1, 1]$
$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$+C$

Tem fórmul[...] substituiçã[...] (os três casos!)[...] para exercício[...]

Caso 1: $s = s$[...]
$\sqrt{1-s^2} =$[...]
$ds =$[...]

Caso 2: $t = t$[...]
$\sqrt{1+t^2} = s$[...]
$dt = ?$

Caso 3: $z = se$[...]
$\sqrt{z^2-1} = t$[...]
$dz = ?$

Substituição trigonométrica

Vamos começar com um "caso motivador"...

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta}\, ds =$$
$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta} \sqrt{1-s^2}\, d\theta =$$
$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta+1} d\theta =$$
$$\int s^\alpha c^{\beta+1} d\theta$$

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} = \cos\theta$
$\frac{ds}{d\theta} = c = \sqrt{1-s^2}$
$ds = \sqrt{1-s^2}\, d\theta$
$s = \text{sen}\,\theta$ $\quad c = \cos\theta$

$\int_{s=a}^{s=b} \ldots\, ds$

$\int_{\theta=\text{arcsen}\, a}^{\theta=\text{arcsen}\, b} \ldots\, d\theta$

$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \ldots\, d\theta$

$\int_{s=\text{arcsen}\,\alpha}^{s=\text{arcsen}\,\beta} \ldots\, ds$

$-\frac{(\text{sen}\,\theta)^6}{6}\Big|_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}$

Caso part[...]
$\alpha = 3$, $\beta =$[...]
$\int s^3 \sqrt{1-$[...]
$= \int s^3 c^0$[...]
$= \int s^3\, d\theta$[...]
$= \int s^2\, s\, d\theta$[...]
$= \int (1-c^2)$[...]
$= -\int 1-c^2$[...]
$= \int c^2 - 1$[...]
$= \frac{c^3}{3} - c$[...]

TEM FÓRMULAS PRA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA (OS TRÊS CASOS!) NO "MATERIAL PARA EXERCÍCIOS...

CASO 1: $s = \operatorname{sen}\theta$
$\sqrt{1-s^2} = \cos\theta$
$ds = c\,d\theta$

CASO 2: $t = \tan\theta$
$\sqrt{1+t^2} = \sec\theta$
$dt = ?\,d\theta$

CASO 3: $z = \sec\theta$
$\sqrt{z^2-1} = \tan\theta$
$dz = ?\,d\theta$

$t = \frac{s}{c}$ $\quad z = \frac{1}{c}$ $\quad t^2 = ?$ $\quad z^2 = ?$

$\frac{dt}{d\theta} = ?$ $\quad \frac{dz}{d\theta} = ?$

DICA: TEMOS BOAS RELAÇÕES ENTRE c E s $(c^2+s^2=1)$, E OUTRAS BOAS RELAÇÕES ENTRE z E t... QUAIS?

$t^2+1=$

t^2

$\sqrt{t^2}$

CASO PARTICULAR:
$\alpha = 3,\ \beta = -1$

$\cos\theta$

$\sqrt{1-s^2}$

$-s^2\ d\theta$

θ $\quad c = \cos\theta$

ds

$\operatorname{arcsen} b$

$\ldots\ d\theta$

$\operatorname{arcsen} a$

$$\int s^3 \sqrt{1-s^2}^{\,-1}\, ds$$
$$= \int s^3 c^0\, d\theta$$
$$= \int s^3\, d\theta$$
$$= \int s^2\, s\,d\theta$$
$$= \int (1-c^2)\cdot -dc$$
$$= -\int 1-c^2\, dc$$
$$= \int c^2-1\, dc$$
$$= \frac{c^3}{3} - c$$

$\frac{dc}{d\theta} = -s$ $\quad dc = -s\,d\theta$
$s\,d\theta = -dc$

$c = \cos\theta$
$\theta = \arccos c$

$$\int_{s=a}^{s=b} \ldots\, ds$$

$$\int_{\theta=\operatorname{arcsen} a}^{\theta=\operatorname{arcsen} b} \ldots\, d\theta$$

$$\int_{c=\cos\operatorname{arcsen} a}^{c=\cos\operatorname{arcsen} b} \ldots\, d\theta$$

$$= \left(\frac{c^3}{3} - c\right)\Bigg|_{c=\cos\operatorname{arcsen} a}^{c=\cos\operatorname{arcsen} b}$$

PRECISAMOS APRENDER A SIMPLIFICAR COISAS COMO "$\cos\operatorname{arcsen} b$"...

$t = \frac{s}{c}$ $z = \frac{1}{c}$ $t^2 = ?$ $z^2 = ?$ $1+t^2 = ?$ $1+z^2 = ?$

$t^2-1 = ?$ $z^2-1 = ?$

ICA

AL

$\frac{dt}{d\theta} = ?$ $\frac{dz}{d\theta} = ?$

DICA: TEMOS BOAS RELAÇÕES ENTRE c E s $(c^2+s^2=1)$, E OUTRAS BOAS RELAÇÕES ENTRE z E t... QUAIS?

$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$ $z^2 = \frac{1}{c^2}$

$t^2+1 = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$t^2+1 = z^2$ $t^2 = z^2-1$

$\sqrt{t^2+1} = z$ $t = \sqrt{z^2-1}$

$\int (\cos\theta)^2 \, d\theta = ?$!!

$\int \cos 2\theta \, d\theta = ?$!!

$\int \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = ?$!!

$\int (\operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta = ?$!!

$\int_{s=a}^{s=b} \ldots \, ds$

$\int_{\theta=\arcsen a}^{\theta=\arcsen b} \ldots \, d\theta$

$-s$ $dc = -s\,d\theta$

$s\,d\theta = -dc$

$\int_{c=\cos\arcsen a}^{c=\cos\arcsen b} \ldots \, d\theta$

$\cos\theta$

$=\arccos c$

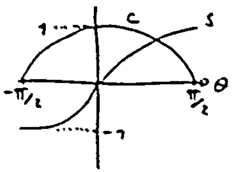
$= \left(\frac{c^3}{3} - c\right)\Bigg|_{c=\cos\arcsen a}^{c=\cos\arcsen b}$

PRECISAMOS APRENDER A SIMPLIFICAR COISAS COMO "cos arcsen b"...

$\boxed{\text{C2 } 6/\text{JUN}/2016}$

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

FIGURA PRA MUDANÇA DE VARIÁVEL ENTRE s E θ:



$s = \text{sen}\,\theta$
$c = \cos\theta$

"CASO MOTIVADOR":

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta}\, ds$$
$$= \int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta} \sqrt{1-s^2}\, d\theta$$
$$= \int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta+1} d\theta$$
$$= \int s^\alpha c^{\beta+1} d\theta$$

INTERVALOS:
$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$s \in [-1, 1]$

NESTE INTERVALO
$\boxed{c = \sqrt{1-s^2}}$

DA MESMA FORMA QUE TEMOS $c^2+s^2=1$, TAMBÉM TEMOS
$$z^2 = t^2+1$$
(OBS: $c = \cos\theta$, $s = \text{sen}\,\theta$, $z = \sec\theta$, $t = \tan\theta$)

E PORTANTO:
$\boxed{z = \sqrt{t^2+1}}$
$t^2 = z^2 - 1$
$\boxed{t = \sqrt{z^2-1}}$

$$\frac{ds}{d\theta} = c \qquad ds = c\,d\theta = \sqrt{1-s^2}\,d\theta$$

CASO MOTIVADOR 2:
$$\int t^\alpha \underbrace{\sqrt{t^2+1}}_{z}^{\,\beta} dt = ? \qquad \frac{dt}{d\theta} = ? \qquad dt = ?\,d\theta \quad dt = z^2 d\theta$$
$$= \int t^\alpha \sqrt{t^2+1}^{\,\beta} z^2 d\theta$$
$$= \int t^\alpha z^{\beta+2} d\theta = \int \left(\frac{s}{c}\right)^\alpha \left(\frac{1}{c}\right)^{\beta+2} d\theta$$

CASO MOTIVADOR 3:
$$\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^{\,\beta} dz = ? \qquad \frac{dz}{d\theta} = ? \qquad dz = ?\,d\theta \quad dz = tz\,d\theta$$
$$= \int z^\alpha t^\beta tz\, d\theta$$
$$= \int z^{\alpha+1} t^{\beta+1} d\theta = \int \left(\frac{1}{c}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{s}{c}\right)^{\beta+1} d\theta$$

REVISÃO DE
$$\int (\cos\theta)^\alpha (\text{sen}\,\theta)^\beta d\theta \ldots$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$
$$E = c + is$$
$$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$
$$E^{-1} = c - is$$
$$E + E^{-1} = 2c \Rightarrow c = \frac{E+E^{-1}}{2}$$
$$E - E^{-1} = 2is \Rightarrow s = \frac{E-E^{-1}}{2i}$$
$$c^2 = \frac{(E+E^{-1})(E+E^{-1})}{4} = \frac{E^2+2EE^{-1}+E^{-2}}{4} = \frac{E^2+2+E^{-2}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{E^2+E^{-2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$
$$\frac{E^2+E^{-2}}{2} = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} = \cos 2\theta$$
$$c^3 = ? \qquad s^2 = ? \qquad cs = ?$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = (\sec\theta)^2$$
$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \qquad \boxed{dt = z^2 d\theta}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\frac{d}{d\theta}\sec\theta = \tan\theta\sec\theta$$
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{s}{c}\frac{1}{c} = tz \qquad \boxed{dz = tz\,d\theta}$$

PRÓXI...
$$\int x^\alpha \ldots$$
$$= \int \left(\frac{s}{3}\ldots\right.$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\ldots$$

MAIS...
$$\int x\ldots$$
$$= \int\ldots$$
$$=$$
$$=$$

$\frac{E^{-1}+E^{-2}}{} = \frac{E^2+2+E^{-2}}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{E+E^{-2}}{2}$
$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = (\sec\theta)^2$

$\frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$ $\boxed{dt = z^2 d\theta}$

$\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

$\tan\theta\sec\theta$

$= \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{s}{c}\frac{1}{c} = tz$ $\boxed{dz = tz\,d\theta}$

PRÓXIMOS TRUQUES:

$\int x^\alpha \sqrt{1-9x^2}^\beta dx = ?$

QUEREMOS:
$9x^2 = s^2$
$3x = s$
$x = \frac{s}{3}$
$dx = \frac{1}{3}ds$

$\sqrt{1-9x^2}$
$= \sqrt{1-(3x)^2}$

$= \int \left(\frac{s}{3}\right)^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta \frac{1}{3}ds$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1}\int s^\alpha\sqrt{1-s^2}^\beta ds$

MAIS UM:

$\int x^\alpha\sqrt{25-x^2}^\beta dx = ?$

$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25\left(1-\frac{1}{25}x^2\right)}$
$= 5\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}$

$x = 5s$
$dx = 5ds$

$= \int (5s)^\alpha \sqrt{25-(5s)^2}^\beta \cdot 5ds$
$= \int 5^\alpha s^\alpha \left(5\sqrt{1-s^2}\right)^\beta \cdot 5ds$
$= 5^{\alpha+\beta+1}\int s^\alpha\sqrt{1-s^2}^\beta ds$

EXERCÍCIOS:

a) $\int x^\alpha\sqrt{1+16x^2}^\beta dx = ?$

b) $\int x^\alpha\sqrt{x^2-9}^\beta dx = ?$

c) $\int x^\alpha\sqrt{4x^2+9}^\beta dx = ?$

b) $\int x^\alpha\sqrt{x^2-9}^\beta dx =$ $\quad x = 3z$, $dx = 3dz$
$= \int (3z)^\alpha\sqrt{9z^2-9}^\beta\cdot 3dz$
$= \int 3^\alpha z^\alpha 3^\beta\sqrt{z^2-1}^\beta\cdot 3dz$
$= 3^{\alpha+\beta+1}\int z^\alpha\sqrt{z^2-1}^\beta dz$

$\left(\sqrt{9z^2-9}\right)^\beta$
$\parallel$
$\left(3\sqrt{z^2-1}\right)^\beta$
$\parallel$
$3^\beta\sqrt{z^2-1}^\beta$

MAIS UM:

$\left(1-(x+20)^2\right) = \left(1-(x^2+40x+400)\right)$
$= -399-\underline{40x}-x^2$

$u = (x+10)$
$u^2 = x^2+20x+100$

$\sqrt{x^2+20x+3} =$
$\sqrt{u^2-100+3} =$
$\sqrt{u^2-97}$

OBS: AQUI AS CONTAS SÃO PIORES, VAMOS DEIXAR OS EXERCÍCIOS DISTO ("COMPLETAR QUADRADOS") PRA PRÓXIMA AULA.

$\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{t^2+1}$
$\sqrt{x^2-1} \Rightarrow \sqrt{z^2-1}$
$\sqrt{-x^2-1} \Rightarrow$!!
$\sqrt{-x^2+1} \Rightarrow \sqrt{1-s^2}$

$\boxed{\text{C2 8/JUN/2016}}$

HOJE:

- VAMOS TERMINAR SUBST. TRIG.
- TALVEZ A GENTE COMECE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

EXERCÍCIO:

a) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$ $= \arctan(x)$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$

OBS: $(x+i)(x-i) = x^2 + i(-i) = x^2+1$

$\int \frac{a}{x+i} + \frac{b}{x-i}\,dx = a\ln|x+i| + b\ln|x-i|$ ☹

OUTRA TÉCNICA:

$\frac{dt}{d\theta} = z^2 = t^2+1$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan(t)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{1}{t^2+1}$

$\int \frac{d\theta}{dt}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$\int d\theta = \theta = \arctan t$

$\frac{ds}{d\theta} = c = \sqrt{1-s^2}$

$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}\arcsen s$

$\frac{dz}{d\theta} =$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$c = \cos\theta$

$z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$t = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$c^2 + s^2 = 1$

$c = \sqrt{1-s^2}$

$ds = c\,d\theta = \sqrt{1-s^2}\,d\theta$

$dz = zt\,d\theta$

$dt = z^2\,d\theta$

$z = \sqrt{t^2+1}$

$t = \sqrt{z^2-1}$

DICA:
TENTEM FAZER EM CASA OS EXERCÍCIOS DO STUART (OU STEWART) - TEM UM PDF DO CAPÍTULO DELE DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA NO SITE.

$\frac{dt}{d\theta} = z^2 = t^2+1$

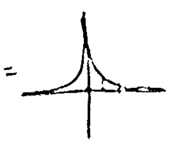
INTRODUÇÃO A INTEGRAIS IMPRÓPRIAS.

POR ENQUANTO,

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

TEF — QUANDO ESTE "=" É VERDADE.

SEJA $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{QUANDO } x \neq 0, \\ 0 & \text{QUANDO } x = 0. \end{cases}$

$g(x) =$ 

$\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx = ?$

OBS 1: $\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx = \infty$

OBS 2: $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5},$

$\int x^{-1}\,dx = \ln|x$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} =$

$\int_{x=1}^{x=2} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}$

$\int_{x=-2}^{x=-1} x^{-2}\,dx = \ldots$

$\int_{x=-2}^{x=+2} x^{-2}\,dx = -$

$\int_{x=-3}^{x=3} x^{-2}\,dx = -$

IDEIA
$g(x$
C
ENT
INT
FU

$S = \text{sen}\ \theta$

$C = \cos\theta$

$Z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$t = \tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$

$c^2 + s^2 = 1$

$c = \sqrt{1-s^2}$

$ds = c\, d\theta = \sqrt{1-s^2}\, d\theta$

$dz = zt\, d\theta$

$dt = z^2\, d\theta$

$z = \sqrt{t^2+1}$

$t = \sqrt{z^2-1}$

$\frac{dz}{d\theta} =$

DICA:
TENTEM FAZER EM CASA
OS EXERCÍCIOS DO
STUART (OU STEWART) -
TEM UM PDF DO
CAPÍTULO DELE DE
SUBSTITUIÇÃO TRIGONO-
MÉTRICA NO SITE.

$\frac{dt}{d\theta} = z^2 = t^2+1$

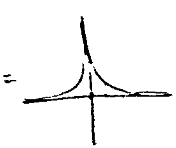
INTRODUÇÃO A

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS.

POR ENQUANTO,

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}_{\text{VCF}} = \underbrace{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}_{\text{QUANDO ESTE "=" É VERDADE.}}$

SEJA $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{QUANDO } x \neq 0, \\ 0 & \text{QUANDO } x = 0. \end{cases}$

$g(x) =$ 

$\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx = ?$

OBS 1. $\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx = \infty$

OBS 2: $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$,

$\int x^{-1}\,dx = \ln|x|$ ÚNICO CASO ESPECIAL!

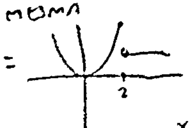
$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$!!

$\int_{x=1}^{x=2} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=2} = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$\int_{x=-2}^{x=-1} x^{-2}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$

$\int_{x=-a}^{x=+a} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=-a}^{x=a} = \left(-\frac{1}{a}\right) - \left(-\frac{1}{-a}\right) = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = -\frac{2}{a}$

$\int_{x=-3}^{x=3} x^{-2}\,dx = -\frac{2}{3}$!! TEM ALGO ERRADO!!!

IDÉIA: $g(x)$ NÃO É CONTÍNUA EM 0,
ENTÃO PODEMOS TENTAR
INTEGRAR $g(x)$ DA MESMA
FORMA QUE $h(x) =$ 

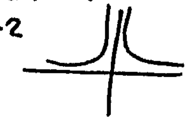
$\int_{x=0}^{x=3} h(x)\,dx = \underbrace{\int_{x=0}^{x=2} h(x)\,dx}_{\text{(PARÁBOLA)}} + \underbrace{\int_{x=2}^{x=3} h(x)\,dx}_{\text{(CONSTANTE)}}$.

$\boxed{\text{GA 13/JUN/2016}}$

HOJE:

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS!!!

AULA PASSADA:

$f(x) = x^{-2}$  ← PROBLEMA: F É DESCONTÍNUA!

$$\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx = ?$$

O LIVRO FAZ TUDO "VIA CONTAS"; VAMOS COMEÇAR VENDO UMA ABORDAGEM MAIS GERAL.

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{P \text{ PART } [a,b] \\ \|P\| \to 0}} \int_P f(x)\,dx$$

OBS: SE $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTÍNUA ENTÃO (POR UM TEO. DE CÁLCULO 1) g É <u>LIMITADA</u> E <u>INTEGRÁVEL</u>....

SEJA $A = [-1,1]$.

QUEREMOS CALCULAR $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$,

ISTO É, $\int_A f(x)\,dx$...

SÓ QUE f NÃO É CONTÍNUA NO INTERVALO A...

PROBLEMA: $x=0$.

IDÉIA:

SEJA $B = [-1,0) \cup (0,1]$.

f É CONTÍNUA EM B (OU: EM CADA PONTO DE B).

VAMOS <u>APROXIMAR</u> B POR UNIÕES DE FINITOS INTERVALOS FECHADOS E LIMITADOS.

SEJAM: $C_k = [-1, -\frac{1}{k}] \cup [\frac{1}{k}, 1]$.

REPARE: $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \subset \ldots \subset B$

E OS C_1 "TENDEM" A B NO SEGUINTE SENTIDO:

- TODO PONTO $x \in B$ PERTENCE A ALGUM C_n (E A $C_{n+1} \subset C_{n+2} \subset \ldots$).

(I) SERÁ QUE DÁ PRA CALCULAR $\int_{C_n} f(x)\,dx$ PRA TODO n?

(II) SERÁ QUE $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(x)\,dx$ EXISTE?

(III) SE PEGARMOS $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots \to B$ (UMA OUTRA SEQUÊNCIA DE UNIÕES FINITAS DE INTERVALOS FECHADOS LIMITADOS) TEMOS $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx$?

EXERCÍCIO(S):

(1) CALCULE

$$\int_{C_k} f(x)\,dx =$$

$$\int_{[-1,-\frac{1}{k}]} f(x)\,dx + \int_{[\frac{1}{k},1]} f(x)\,dx =$$

$$\int_{x=-1}^{x=-\frac{1}{k}} f(x)\,dx + \int_{x=\frac{1}{k}}^{x=1} f(x)\,dx =$$

$$(k-1) + (k-1) =$$

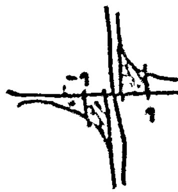
$$2k-2$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C_k} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} 2k-2 = +\infty$$

ISTO NOS DÁ <u>EVIDÊNCIAS</u> DE QUE DEVEMOS DEFINIR

$$\int_B f(x)\,dx = +\infty.$$

(2) SEJAM $g(x) = \frac{1}{x}$,



$B = [-1,0) \cup (0,1]$,

C_k COMO NO PROBLEMA ANTERIOR,

$D_{ab} = [-1,a) \cup (b,1]$

(OBS: $-1 \leq a < 0$, $0 < b \leq 1$).

ENTÃO:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C_k} g(x)\,dx = 0$$

OBS:

$$\int_{[-1,-\frac{1}{k}]} g(x)\,dx + \int_{[\frac{1}{k},1]} g(x)\,dx$$

EXERCÍCIO:

CALCULEM: $\int_{D_{ab}} g(x)\,dx$,

$$\int_{D_{-\frac{1}{k},\frac{2}{k}}} g(x)\,dx,$$

$$\int_{D_{-\frac{2}{k},\frac{1}{k}}} g(x)\,dx$$

MAIS DIFÍCIL: OBTENHA UMA $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \to B$ TAL QUE

Só que f não é contínua no intervalo A...
Problema: $x=0$.

Idéia:
Seja $B=[-1,0)\cup(0,1]$.
f é contínua em B
(ou: em cada ponto de B).
Vamos aproximar B por uniões de finitos intervalos fechados e limitados.

Sejam: $C_k=[-1,-\frac{1}{k}]\cup[\frac{1}{k},1]$.

Repare: $C_1\subset C_2\subset C_3\subset C_4\subset\ldots\subset B$

e os C_1 "tendem" a B no seguinte sentido:
- todo ponto $x\in B$ pertence a algum C_n (e a $C_{n+1}\subset C_{n+2}\subset\ldots$).

(I) Será que dá pra calcular $\int_{C_n} f(x)\,dx$ pra todo n?

(II) Será que $\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(x)\,dx$ existe?

(III) Se pegarmos $D_1\subset D_2\subset D_3\subset\ldots\to B$ (uma outra sequência de uniões finitas de intervalos fechados limitados) temos $\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x)\,dx$?

Exercício(s):

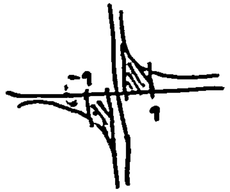
(1) Calcule

$$\int_{C_k} f(x)\,dx = \int_{[-1,-\frac{1}{k}]} f(x)\,dx + \int_{[\frac{1}{k},1]} f(x)\,dx = \int_{x=-1}^{x=-\frac{1}{k}} f(x)\,dx + \int_{x=\frac{1}{k}}^{x=1} f(x)\,dx = (k-1) + (k-1) = 2k-2$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C_k} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} 2k-2 = +\infty$$

Isto nos dá evidências de que devemos definir $\int_B f(x)\,dx = +\infty$.

(2) Sejam $g(x)=\frac{1}{x}$, $B=[-1,0)\cup(0,1]$, C_k como no problema anterior, $D_{ab}=[-1,a)\cup(b,1]$ (obs: $-1\leq a<0,\ 0<b\leq 1$).



Então:
$$\lim_{k\to\infty}\int_{C_k} g(x)\,dx = 0$$

Obs:
$$\int_{[-1,-\frac{1}{k}]} g(x)\,dx + \int_{[\frac{1}{k},1]} g(x)\,dx = 0.$$

Exercício:
Calculem: $\int_{D_{ab}} g(x)\,dx$, $\int_{D_{-\frac{1}{k},\frac{2}{k}}} g(x)\,dx$, $\int_{D_{-\frac{2}{k},\frac{1}{k}}} g(x)\,dx$ (terminem em casa)

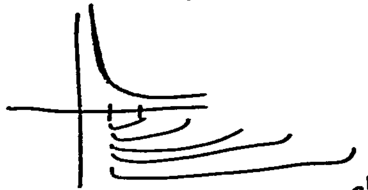
Mais difícil: obtenha uma sequência $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots\to B$ tal que $\int_{E_k} g(x)\,dx = 1000$.

Pra casa:
Leiam os capítulos 13 e 14 do livro e façam os exercícios.

Cap. 13:
Def 1: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

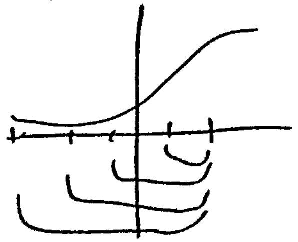
$$\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Exemplo: $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx =$



Def 2: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_{(-\infty,b]} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{[a,b]} f(x)\,dx$$



GA 13/JUN/2016

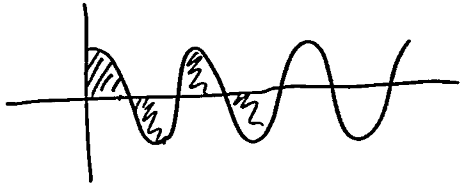
DEF 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

OBS (TEOREMA): O RESULTADO ACIMA, QUANDO EXISTIR, INDEPENDE DO C.

OBS: ESSES LIMITES PODEM NÃO EXISTIR!

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \cos x\,dx =$$



$\lim_{x\to\infty} \text{sen } x\,dx$ ...

ESTE LIMITE NÃO EXISTE PORQUE sen x FICA OSCILANDO ENTRE -1 E 1!

CAP 14:

INTEGRAL IMPRÓPRIA DE FUNÇÕES NÃO LIMITADAS

EX: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = ?$

$\frac{1}{x}$ NÃO TÁ DEFINIDO EM 0, NA ABORDAGEM POR INTERVALOS É MELHOR A GENTE PENSAR QUE

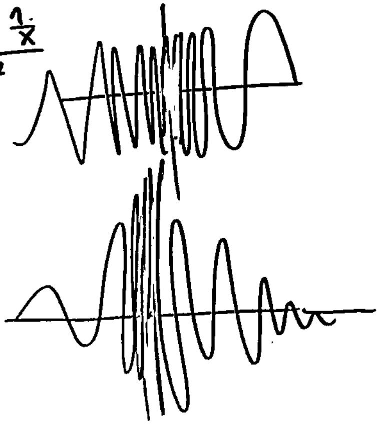
$$\int_{(0,1]} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_{[a,1]} \frac{1}{x}\,dx$$

LIVRO:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_{x=c}^{x=b} f(x)\,dx$$

UM EXEMPLO INTERESSANTE:

SEJA $f(x) = \dfrac{\text{sen } \frac{1}{x}}{x^2}$



$\lim_{a\to 0^+} \int_{[a,1]} f(x)\,dx$ OSCILA...

ESSE LIMITE NÃO EXISTE.

MÁ NOTÍCIA:

O CAP 15 DÁ ALGUNS CRITÉRIOS PRA VER SE INTEGRAIS INDEFINIDAS CONVERGEM OU NÃO...

MAS OS CAPS 13 E 14 SÃO PRÉ-REQUISITO PRO 15, E O 13 E O 14 SÓ FICAM CLAROS COM PRÁTICA (EXERCÍCIOS).

CAP 13:

EXERC 2: $\int_{x=0}^{x=\infty} x \text{ sen } x\,dx$

EXERC 3: $\int_{x=2}^{x=\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$.

EXERC 4: $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-|x|}\,dx$

CAP 14:

1) $\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x^4}\,dx$

3) $\int_{x=0}^{x=1} \ln x\,dx$

7) $\int_{x=1}^{x=5} \frac{1}{(x-3)^4}\,dx$

P1: 22/JUN/2016

C2 22/JUN/2016

LEMBREM QUE:

$\lim_{n\to\infty} 4 = 4$ $\quad$ 4, 4, 4, 4, ... → 4

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ $\quad$ 1, 2, 3, 4, ... → +∞

$\lim_{n\to\infty} \cos \pi n = \text{ERR}$ $\quad$ 1, −1, 1, −1, ... → ERR

INTEGRAIS INDEFINIDAS SÃO LIMITES; É:

$$\int_{I} f(x)\,dx = \lim_{\substack{J \text{ intervalo fechado} \\ J\to I}} \int_J f(x)\,dx$$

← INTERVALO

VIMOS ISTO:

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{\substack{A \text{ união de um \# finito de intervalos fechados limitados} \\ A\to I}} \int_A f(x)\,dx$$

← INTERVALO

OBS:

$$\int_{I = [4,+\infty)} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{[4,b]} f(x)\,dx$$

$$\int_{I=(-\infty,+\infty)} f(x)\,dx \overset{?}{=} \lim_{a\to+\infty} \int_{[-a,a]} f(x)\,dx \quad (*)$$

$$\overset{?}{=} \lim_{a\to+\infty} \int_{[-2a,a]} f(x)\,dx \quad (**)$$

SE $\lim_{\substack{J \text{ intervalo} \\ J\to I}} \int_J f(x)\,dx$ EXISTIR, ENTÃO (*) E (**) DÃO O MESMO RESULTADO.

ALGUNS EXEMPLOS IMPORTANTES

① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots = ?$

$$\geq$$

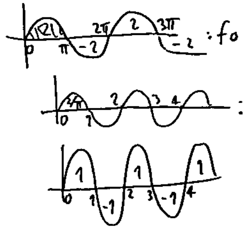
$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots}_{\frac{1}{2}}$$

② SEJAM:

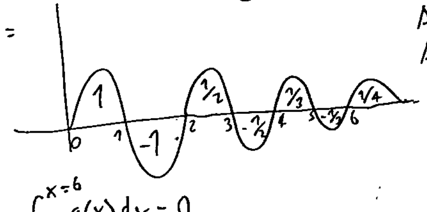
$f_0(x) = \operatorname{sen} x$

$f_1(x) = \operatorname{sen} \pi x$

$f_2(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi x$



$g(x) =$



$A_1 = [0,1]$

$A_2 = [0,1] \cup [2,3]$

$A_3 = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$

⋮

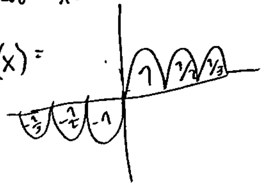
$B_1 = [1,2]$

$B_2 = [1,2] \cup [3,4]$

⋮

$$\lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{x=b} g(x)\,dx = 0$$

$h(x) =$



$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_{2k} \cup B_k} g(x)\,dx = ?$$

MORAL: " $\lim_{\substack{A \text{ união de um \# finito de intervalos fechados limitados} \\ A\to I}}$ "

PODE SER INTERESSANTE PRA DETECTAR QUE ALGUMAS FUNÇÕES OSCILAM DE JEITOS ESTRANHOS E É MELHOR DIZER QUE A INTEGRAL DELAS (UM LIMITE) NÃO CONVERGE.

CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO

(AULA 15 DO LIVRO)

PROP 1:

$f \geq g \geq 0$ $\quad$ $\int f\,dx \geq \int g\,dx \geq \int 0\,dx = 0$

$\int f\,dx < +\infty \Rightarrow \int g(x)\,dx < +\infty$

$\forall x.\ 0 \leq g(x) \leq f(x)$

LIVRO:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_{x=a}^{x=t} g(x)\,dx < +\infty$$

OBS: f É UMA FUNÇÃO FÁCIL DE INTEGRAR, g É DIFÍCIL

$\int f(x)\,dx = +\infty \Leftarrow \int g(x)\,dx = +\infty$

$$\lim \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx = +\infty \Leftarrow \lim_{t\to+\infty} \int_{x=a}^{x=t} g(x)\,dx = +\infty$$

$\boxed{\text{PROP 1: } f \geq g \geq 0 \quad \int f\,dx < +\infty \Rightarrow \int g\,dx < +\infty \quad \int f\,dx = +\infty \Leftarrow \int g\,dx = +\infty}$

PROP 2:

EXEMPLO: $\lambda = 4$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 4$

SE ISTO ⇑ É VERDADE ENTÃO EXISTE $c \in \mathbb{R}$ TAL QUE $\forall x > c$.

$3 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 5$

$\alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta$

$\alpha g(x) \leq f(x) \leq \beta g(x)$

$\alpha g \leq f \leq \beta g$

O QUE É IMPORTANTE É: $\exists \alpha, \beta, c \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < \beta,$

$\forall x > c.\ \alpha g(x) \leq f(x) \leq \beta g(x).$

$\beta g \geq f \geq \alpha g \geq 0$ $\quad$ $\int \beta g\,dx < +\infty \Rightarrow \int f\,dx < +\infty \Rightarrow \int \alpha g\,dx < +\infty \Leftrightarrow \int g\,dx < +\infty$

$\boxed{\text{PROP 2: } f \geq 0,\ g > 0, \quad \beta g \geq f \geq \alpha g \geq 0 \quad \int g\,dx < +\infty \Rightarrow \int f\,dx < +\infty}$

$\boxed{\text{PROP 3: } f \geq g \geq 0 \quad \int f\,dx < +\infty \Rightarrow \int g\,dx < +\infty \quad \int f\,dx = +\infty \Leftarrow \int g\,dx = +\infty}$ ← IGUAL À PROP 1

PROP 4: IGUAL À PROP 2.

$\boxed{\text{C2 22/JUN/2016}}$

PROP 5:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} |a|+|b|+|c| & & \int |f|\,dx \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ |a+b+c| & & \left|\int f\,dx\right| \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ a+b+c & & \int f\,dx \end{array}$$

OBS: O LIVRO USA "$\int_a^{+\infty}$"

MAS PODERÍAMOS USAR "$\int_I$"

PARA x MUITO GRANDE,

$$\sqrt[3]{x^8-3x^2+1} \approx \sqrt[3]{x^8}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^8-3x^2+1}} \approx \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^8}}$$

$\boxed{\text{C2 27/JUN/2016}}$

HOJE: ESTRATÉGIAS DE INTEGRAÇÃO, ← NÃO TEM NO LIVRO DA C. HERNÁNDEZ!
INTRODUÇÃO A EDOs.

A P1 VAI SER TRANSFERIDA PRA SEGUNDA 34/JUN,
AVISO IMPORTANTE:
VÁRIAS DAS QUESTÕES QUE EU BOLEI PRA P1 PARECEM SIMPLES MAS NÃO SÃO...
MORAL: ESTUDEM BASTANTE.

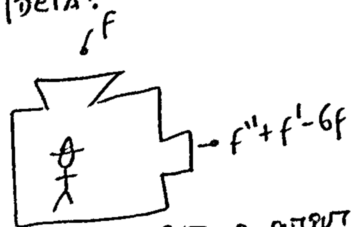
1) SIMPLIFIQUE O INTEGRANDO,
2) VEJA SE ALGUMA SUBSTITUIÇÃO SIMPLES FUNCIONA,
3) IDENTIFIQUE O TIPO DA INTEGRAL,
4) DÁ PRA TRANSFORMAR A NOSSA INTEGRAL EM ALGUM TIPO MAIS FAMILIAR?
5) A GENTE PRECISA USAR VÁRIAS TÉCNICAS?
6) TENTE DE NOVO POR OUTRO CAMINHO.

INTRODUÇÃO E EDOs

NA 1ª AULA (26/ABRIL) A GENTE VIU INTEGRAIS COMO CASOS PARTICULARES DE EDOs...

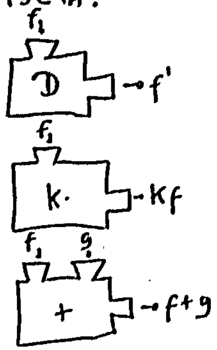
EDO	ALGUMAS SOLUÇÕES (OU NÃO)
$f'(x)=3$	$f(x)=3x+C$
$f'(x)=3+2x$	$f(x)=3x+x^2+C$
$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0$	$f(x)=e^{2x}$ $f(x)=e^{-3x}$ $f(x)=ae^{2x}+be^{-3x}$
$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$	$f(x)=\pm\sqrt{a-x^2}$

IDÉIA:



PRA QUE INPUTS O OUTPUT É A FUNÇÃO CONSTANTE =0?
TRUQUE: ÁLGEBRA LINEAR!

IDÉIA:



NOTAÇÃO:
$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
$(99f)(x) = 99\,f(x)$
$(Df)(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$

UMA NOTAÇÃO ÚTIL:
"λ" CONSTRÓI "FUNÇÕES SEM NOME".

USUAL:
$f(x) = 99x^2+200$ — DOMÍNIO, CODOMÍNIO, NOME

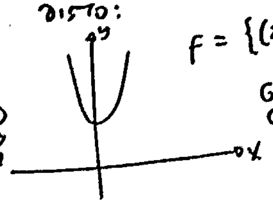
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 99x^2+200$$

NOME, VARIÁVEL, EXPRESSÃO

$$\begin{array}{ccc} f(2+3) & \to & 99(2+3)^2+200 \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(5) & \to & 99\cdot 5^2+200 \\ & & \downarrow \\ & & 99\cdot 25+200 \\ & & \downarrow \\ & & 2475+200 \\ & & \downarrow \\ & & 2675 \end{array}$$

⇐ DIAGRAMA DE REDUÇÕES

MATEMÁTICOS GOSTAM DISTO:



$f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=99x^2+200\}$
GRÁFICO DE f — CONJUNTO INFINITO!!

NOTAÇÃO λ:
$\lambda x.\,99x^2+200$
SE $f=(\lambda x.\,99x^2+200)$,

$$\begin{array}{ccc} f(2+3) & \to & f(5) \\ \downarrow & & \searrow \\ (\lambda x.\,99x^2+200)(2+3) & \to & (\lambda x.\,99x^2+200)(5) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 99(2+3)^2+200 & \to & 99\cdot 5^2+200 \end{array}$$

EXERCÍCIOS:
CALCULE:
a) $(\lambda x.\,2x+3)(100)$
b) $(\lambda x.\,2x+3)((\lambda y.\,10y)(200))$
c) $(20(\lambda x.\,x+3))(5)$
d) $((\lambda x.\,10x)+(\lambda x.\,20x))(3)$
e) $(D(\lambda x.\,x^2))(x)$
f) $(D((\lambda x.\,x^2)+(\lambda x.\,x^3)))(x)$
g) $(D(20f))(x)$

g) $(D(20f))(x) = \frac{d}{dx}((20f)(x))$
$= \frac{d}{dx}(20\,f(x))$
$= 20\,f'(x)$

INTRODUÇÃO: A NOTAÇÃO λ NOS PERMITE DISTINGUIR CLARAMENTE FUNÇÕES E VALORES...
$(\lambda x.\,x^2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x^2\in\mathbb{R}$
OS LIVROS NÃO FAZEM ESSA DISTINÇÃO CLARAMENTE...
$D(e^x+200\,\text{sen}\,x)$
EM SI: $(Df)(5)$ DÁ ERRO!
DEFINIÇÃO CONSERTADA:
$(Df) = (\lambda x.\frac{d}{dx}f(x))$

$\boxed{\text{C2 27/JUN/2016}}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(99f)(x)=99f(x)$

$Df=\lambda x.\frac{d}{dx}(f(x))$

$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

MAIS EXERCÍCIOS:

h) $(D(\lambda x.e^{2x}+e^{3x}))(10)$

i) $(\lambda f.D(Df))(\lambda x.e^{2x})$

j) $((\lambda a.(\lambda b.10a+2b))(3))(4)$

i) $(\lambda f.D(Df))(\lambda x.e^{2x})$

$= D(D(\lambda x.e^{2x}))$

$= D(\lambda x.\frac{d}{dx}((\lambda x.e^{2x})(x)))$

$= D(\lambda x.\frac{d}{dx}e^{2x})$

$= D(\lambda x.2e^{2x})$

$= \lambda x.\frac{d}{dx}((\lambda x.2e^{2x})(x))$

$= \lambda x.\frac{d}{dx}(2e^{2x})$

$= \lambda x.4e^{2x}$

j) $((\lambda a.(\lambda b.10a+2b))(3))(4)$

$= (\lambda b.10\cdot 3+2b)\ (4)$

$= 10\cdot 3+2\cdot 4$

VOLTANDO A EDOs...

SEJA (TEMPORARIAMENTE!):

$G_f = D(D_f)+D_f-6_f$

ENTÃO:

$G(\lambda x.e^{3x}) = D(D(\lambda x.e^{3x}))+D(\lambda x.e^{3x})-6(\lambda x.e^{3x})$

$= D(\lambda x.3e^{3x})+(\lambda x.3e^{3x})-(\lambda x.6e^{3x})$

$= (\lambda x.9e^{3x})+(\lambda x.3e^{3x})-(\lambda x.6e^{3x})$

$= (\lambda x.9e^{3x}+3e^{3x}-6e^{3x})$

$= (\lambda x.6e^{3x})$

EXERCÍCIO:

$G(\lambda x.e^{2x}) = ?\ (\lambda x.4e^{2x})+(\lambda x.2e^{2x})+(\lambda x.-6e^{2x})$

$= (\lambda x.4e^{2x}+2e^{2x}-6e^{2x})$

$= (\lambda x.0)$

OBS:

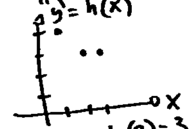
$G=(\lambda f.D(Df)+Df-6f)$

AGORA:

ÁLGEBRA LINEAR!!!

$h:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}$

POR EXEMPLO:



$h(1)=4,\ h(2)=3,\ h(3)=3.$

h "=" $(4,3,3)$

h é VETOR DE TAMANHO 3.

$h_1=4,$

$h_2=3$

$h_3=3.$

$g:\{1,2,3,\dots,1000\}\to\mathbb{R}$

g é VETOR DE TAMANHO 1000.

$\bar{g}:\{0.001,0.002,\dots,1.000\}\to\mathbb{R}$

$\bar{g}$ é VETOR DE TAMANHO 1000.

SEJA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

VAMOS PENSAR NELA COMO UM VETOR DE TAMANHO INFINITO. !!

O OPERADOR D

RECEBE UMA FUNÇÃO DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$

E RETORNA OUTRA FUNÇÃO DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$...

VAMOS PENSAR NO D COMO UMA MATRIZ INFINITA...

$G=(\lambda \overset{\text{VETOR}}{f}.\ \underbrace{\underbrace{D}_{\text{MATRIZES}}(\underbrace{Df}_{\text{VETOR}})}_{\text{VETOR}}+\overset{\text{VETOR}}{Df}-\underbrace{\overset{\text{VETOR}}{6f}}_{\text{VETOR}})$

$\underbrace{\underbrace{D}_{\text{MAT}}(\underbrace{\underbrace{D}_{\text{MAT}}\ \underbrace{f}_{\text{VET}}}_{\text{VETOR}})}_{\text{VETOR}}$

$G=(\lambda f.(DD)f+Df-6f)$

$=(\lambda f.(DD+D-6)f)$ (!!!!!)

$G=(\underbrace{\underbrace{D}_{\text{MAT}}\underbrace{D}_{\text{MAT}}}_{\text{MAT}}+\underbrace{D}_{\text{MAT}}-\underbrace{6}_{\text{MAT}})$ with the whole: MAT

G é LINEAR (!!!!!)

COMO ASSIM???

$G(20f)=20(Gf)$

$G(kf)=k(Gf)$

$G(f+g)=Gf+Gg$

EXERCÍCIO:

CALCULE

$G(\lambda x.e^{3x}+10e^{2x})$

O QUE A GENTE VIU CORRESPONDE À AULA 24 DO LIVRO.

G é UM OPERADOR HOMOGÊNEO, LINEAR, DE ORDEM 2.

$\boxed{\text{C2 29/JUN/2016}}$

EDO:

$$\left.\begin{aligned} &f''+f'-6f=0\\ &D(Df)+Df-6f=0\\ &D^2f+Df-6f=0\\ &(D^2+D-6)f=0\\ &(D+3)(D-2)f=0\\ &(D-2)(D+3)f=0 \end{aligned}\right\}(*)$$

As "f"s que obedecem $(D-2)f=0$ e as que obedecem $(D+3)f=0$ são soluções de $(*)$.

$(D-2)f = Df-2f$
$= f'-2f$

$f'-2f=0$

As soluções básicas de $(*)$ são as funções $f(x)=e^{2x}$ que satisfazem $(D-2)f=0$ ou $(D+3)f=0$.

Obs:

(D^2+D-6) $(= G)$

- Se comporta como uma matriz
- É linear:
  $G(f+g)=Gf+Gg$
  $G(kf)=k(Gf)$
- As soluções de $Gf=0$ formam um espaço vetorial
- Já que $G(\lambda x.e^{2x})=0$ e $G(\lambda x.e^{-3x})=0$

Então $G(a(\lambda x.e^{2x})+b(\lambda x.e^{-3x}))=0$ para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$.

Notação (que 99% dos livros): $G(\underbrace{ae^{2x}+be^{-3x}}_{f})=0$. $(**)$

Repare: e^{2x} e e^{-3x} são vetores linearmente independentes, não existe $(a,b)\neq(0,0)$ tal que $ae^{2x}+be^{-3x}=0$
$(\lambda x.ae^{2x}+be^{-3x})=(\lambda x.0)$

Exercício:

Encontre a e b em $(**)$ tais que:

I $f(0)=0$ e $f'(0)=1$
II $f(0)=1$ e $f'(0)=0$
III $f(0)=99$ e $f'(0)=200$

$f(0)=ae^{2\cdot 0}+be^{-3\cdot 0}$
$=a+b$
$f'(0)=a\cdot 2e^{2\cdot 0}+b\cdot(-3)e^{-3\cdot 0}$
$=2a-3b$

I $a+b=0$
$b=-a$
$2a-3b=1$
$2a+3a=1$
$a=\frac{1}{5}$
$b=-\frac{1}{5}$

Também dá pra gente pedir condições como:
IV $f(0)=3$ e $f(1)=4$

Outra idéia importante:

$G(\lambda x.1)=(\lambda x.-6)$
$G(\lambda x.x)=(\lambda x.1-6x)$
$G(\lambda x.x^2)=(\lambda x.2+2x-6x^2)$

A partir do momento em que a gente encontra uma solução de $Gf=h$ (ex: $h=\lambda x.60$) a gente sabe todas as outras...

$G(\lambda x.-10)=(\lambda x.60)$
$G((\lambda x.-10)+(\lambda x.ae^{2x}+be^{-3x}))=(\lambda x.60)$.

Todo mundo ♡ linearidade.

Considere esta outra EDO:
$f''+2f'-15f=0$ $(***)$.
Encontre as soluções básicas de $(***)$.

Obs: isto está em dois capítulos do livro – 24 e 26 – mas de um jeito que não deixa a conexão com álgebra linear tão clara.

Obs: $(D+4)(D-3)(D+0)f=0$
soluções básicas: e^{-4x}, e^{3x}, e^{0x}
$(D^2+D-12)(D+0)f$
$=$
$(D^3+D^2-12D)f=0$
$=$
$f'''+f''-12f'=0$

E com raízes repetidas?

(a) $(D+0)(D+0)f=0$
$D^2f=0$
$=$
$f''=0$
Soluções: $f(x)=a+bx$

(b) $(D-3)(D-3)f=0$ $(****)$.

Solução básica (única) de $(D-3)f=0$: $f(x)=e^{3x}$.

Truque: xe^{3x} é solução de $(****)$.

Exercício:
calcule
$(D-3)(D-3)(\lambda x.e^{3x})$
e $\underbrace{(D-3)\underbrace{(D-3)(\lambda x.xe^{3x})}_{(\lambda x.e^{3x})}}_{(\lambda x.0)}$.

E com raízes complexas?

$(D+i)(D-i)f=0$ → soluções: $f(x)=e^{ix}$, $f(x)=e^{-ix}$
$=$
$(D^2+i(-i))f$
$=$
$(D^2+1)f$
$=$
$f''+f=0$
$f''=-f$ → soluções familiares: $f(x)=\cos x$, $f(x)=\operatorname{sen} x$

Obs: o capítulo 24 do livro ensina a resolver (mais ou menos) EDOs da forma:

$g_2f''+g_1f'+g_0f=0$,

onde $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$g_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$...

A gente já viu como lidar com g_2,g_1,g_0 sendo funções constantes.

C2 29/JUN/2016

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS - CAP 19 DO LIVRO

AULA QUE VEM: P1.
AULA SEGUINTE:
ENTENDER EDOs HOMOGÊNEAS.

EXEMPLO: $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ (☆)

$$f'(x) + \frac{x}{f(x)} = 0$$

NÃO DÁ POR ISTO NA FORMA

$$Gf = 0$$

LINEAR...

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$dy = -\frac{x}{y}dx$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

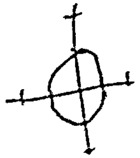
$$\int y\,dy = \int -x\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_2 - C_1 = C_3$$

SERÁ QUE $C_3 = \frac{1}{2}$ DÁ UMA SOLUÇÃO PARA (☆)?

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 + x^2 = 1 =$$



$\Rightarrow$ $y^2 = 1 - x^2$
$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$
$y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

DUAS POSSÍVEIS SOLUÇÕES PARA (☆)...

$$\int \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+5}\,dx = 2\ln|x-3| + 4\ln|x+5|$$

$$\int \frac{6x+7}{(x-3)(x+5)}\,dx =$$

E COM RAÍZES

ⓐ $(D+0)(D$
$D^2 f = 0$
$f'' = 0$
SOLUÇÕES:

ⓑ $(D-3)($

SOLUÇÃO
DE $(D$

TRUQ
DE $($

EXERC
CALC
$(D-3)$
E $(D-3)$

E COM RA
$(D+i)(D-$
$(D^2 + i(-i))$
$(D^2+1)f$
$f'' + f = ($
$f'' = -f$

C2 11/JUL/2016

HOJE: EDOS SEPARÁVEIS, com variáveis
EDOS EXATAS.

MAS ANTES:
CAMPOS DE DIREÇÕES, (ok)
SOLUÇÕES IMPLÍCITAS, (ok)
CAMPOS CONSERVATIVOS.

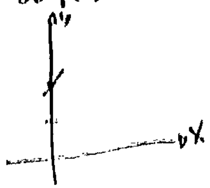
EXEMPLO:

$y' = -\frac{x}{y}$ (*) ← JÁ VIMOS

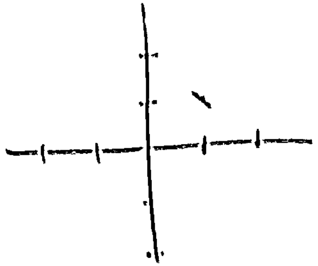
$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$

LEMBREM QUE VIMOS ALGUNS "PROBLEMAS DE CONDIÇÕES INICIAIS": EM $f''+f'-6f=0$

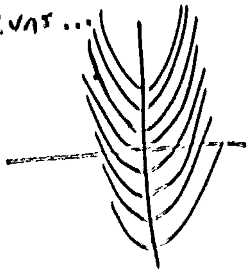
ENCONTRAMOS SOLUÇÕES COM
$f(0)=a$ E
$f'(0)=b$...
A GENTE PROLONGAVA ESSAS SOLUÇÕES...
SE $f(0)=2$ E $f'(0)=1$,



EM (*), SE $f(1)=1$,
EM $x=1$: $f'(1) = -\frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{1} = -1$



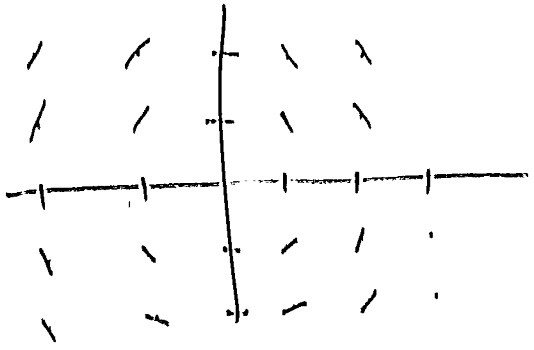
LEMBRE QUE AS SOLUÇÕES DE UMA EDO [ÀS VEZES] DIVIDEM O PLANO EM CURVAS...



EXERCÍCIO: NA EDO (*) CALCULE:

x	$f(x)$	$f'(x)$
-2	1	2
-1	1	1
0	1	0
1	1	-1
2	1	-2
-2	2	1
-1	2	1/2
0	2	0
1	2	-1/2
2	2	-1

E REPRESENTE GRAFICAMENTE OS "$f'(x)$"s QUE VOCÊ OBTEVE (COMO TRACINHOS).
CAMPOS DE DIREÇÕES



NESSE CASO (BEM SIMPLES!) DÁ PRA VER QUE AS SOLUÇÕES DE (*) ESTÃO SOBRE CÍRCULOS!...

PODEMOS FAZER $F(x,y)=x^2+y^2$, E DIVIDIR O PLANO EM CURVAS DE NÍVEL... E VERIFICAR QUE AS CURVAS DE NÍVEL, $F(x,y)=1$ (P. EX.) SÃO SOLUÇÕES DE (*)... $y=\sqrt{1-x^2}$ É SOLUÇÃO DE (*), $y=-\sqrt{1-x^2}$ É OUTRA.

REPARE QUE TEM OUTRAS "F"s QUE TAMBÉM FUNCIONAM...
$F(x,y)=x^2+y^2$,
$G(x,y)=x^2+y^2+10$,
$H(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
TÊM AS MESMAS CURVAS DE NÍVEL — OU, MAIS PRECISAMENTE, DIVIDEM O PLANO EM CURVAS DE NÍVEL DA MESMA FORMA — SÓ QUE COM "ALTURAS" DIFERENTES.

A GENTE VAI CONSIDERAR QUE SE A GENTE ENCONTROU UMA F A GENTE "RESOLVEU" A EDO.
MAIS PRECISAMENTE: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ TAL QUE SUAS CURVAS DE NÍVEL OBEDEÇAM A EDO ORIGINAL.

VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

SE $H(x,y)=F(x)+G(y)$ E AS CURVAS DE NÍVEL DE $H(x,y)$ SÃO SOLUÇÕES DA EDO (**), ENTÃO (**) É UMA EDO COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS.

OBS: SEJAM $F(x)=x^2$,
$G(y)=y^2$,
$H(x,y)=F(x)+G(y)$
(EXEMPLO (*)).
ENTÃO AS CURVAS DE NÍVEL DESTA H SÃO SOLUÇÕES DE (*), I.E., $y'=-\frac{x}{y}$.

C2 11/JUL/2016

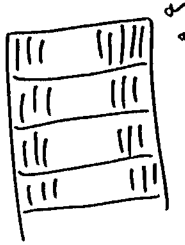
Hoje: EDOs separáveis (com variáveis), EDOs exatas.

Mas antes:
- Campos de direções, (ok)
- Soluções implícitas, (ok)
- Campos conservativos.

Lembrando umas idéias de Física do Ensino Médio...

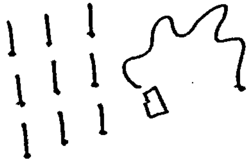
Campo: (gravitacional) — constante, pra baixo,

Idéia: "trabalho"



livro sobe → ganha energia potencial gravitacional

desce → perde energia potencial gravitacional (ela é transformada em outra coisa).



Se eu carrego o livro por esta trajetória, eu primeiro "realizo trabalho positivo" (dou energia P.G.) depois realizo trabalho negativo...

No fim das contas a gente não fez trabalho nenhum (!!!)

Idéia:

trajetória → trabalho

Aliás, em geral o trabalho não depende da trajetória!

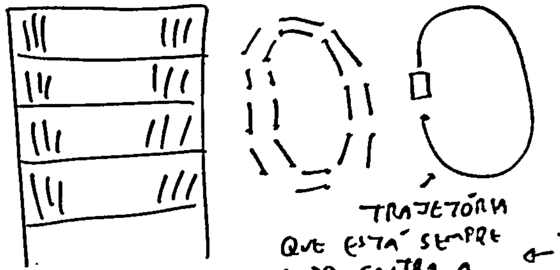
que dá pra calcular como: energia potencial gravitacional final menos E.P.G. inicial.

O campo gravitacional é um exemplo de "campo conservativo" — o trabalho de uma trajetória só depende do ponto inicial e do final.

Um campo não-conservativo:

No exemplo anterior a gravidade tenta acelerar os livros pra baixo...

Imagine que tem vento ou algo assim...



Trajetória que está sempre indo contra a gravidade e o vento... mas o ponto inicial e o final são os mesmos, o que é equivalente (???) a deixar o livro parado... ← trabalho positivo ← trabalho 0

Campo não-conservativo.

Idéias importantes:

1. Num campo conservativo a gente tem linhas equipotenciais...
2. Digamos que temos $F(x,y)$. Digamos que vamos ver as curvas de nível dela como "linhas equipotenciais".

$\boxed{\text{C2 } 11/\text{JUL}/2016}$

HOJE: com variáveis
EDOs separáveis,
EDOs exatas.

MAS ANTES:
Campos de direções, (ok)
Soluções implícitas, (ok)
Campos conservativos.

Uma idéia de cálculo 3/4:

Exemplo:

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

Antes a gente viu campos de direções, agora há pouco vimos campo gravitacional (e amigos), e agora:

· derivadas direcionais
· gradiente

$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ ← derivada de $F(x,y)$ em x, mantendo y parado

$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$ ← idem pra y.

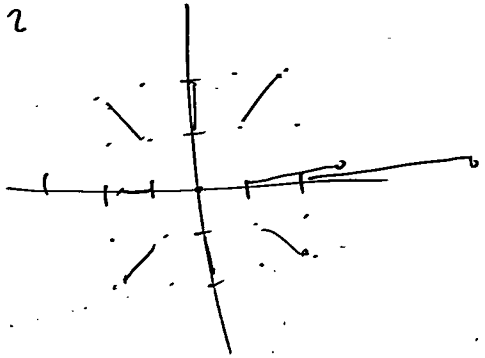
$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + \cancel{y^2}) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x$$

constante

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cancel{x^2} + y^2) = 2y$$

Como representar isto graficamente?

x	y	$(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y), \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)) = \overrightarrow{(2x,2y)}$
0	0	$\overrightarrow{(0,0)}$
1	0	$\overrightarrow{(2,0)}$
2	0	$(4,0)$
0	1	$\overrightarrow{(0,2)}$
1	1	
2	1	
0	2	
1	2	
2	2	



Notação:

$$\nabla F = (\tfrac{\partial}{\partial x}F, \tfrac{\partial}{\partial y}F)$$

O gradiente de uma função F diz pra onde F cresce mais rápido, e com que velocidade F cresce.

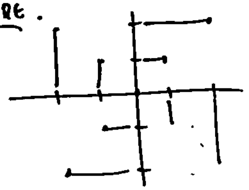
Que campos vetoriais são gradientes?

Se temos $F(x,y)$ podemos calcular $\nabla F = (\frac{\partial}{\partial x}F, \frac{\partial}{\partial y}F)$.

E o contrário? Digamos que temos $G(x,y)$ e $H(x,y)$. Será que existe F tal que $\nabla F = (G,H)$?

Nem sempre.

Exemplo:



Será que existe $F(x,y)$ com $\nabla F(x,y) = (y,-x)$?

$\nabla F(0,0) = \overrightarrow{(0,0)}$
$\nabla F(0,1) = \overrightarrow{(1,0)}$
$\nabla F(1,0) = \overrightarrow{(0,-1)}$

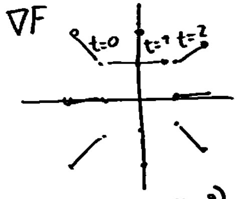
Isto não dá um campo conservativo!

Idéia (cálculo 3, mas ajuda a visualizar):

Integral ao longo de caminho.

Sejam: $\vec{V}(x,y) = \overrightarrow{(y,-x)}$, ‼
$\nabla F(x,y) = \overrightarrow{(2x,2y)}$ ‼

Qual é o "trabalho" do campo ∇F ao longo destas trajetórias?



(oops, 2x isto!)

Uma trajetória:
$x(t) = t-1$,
$y(t) = 1$

Velocidade:
$x'(t) = 1$
$y'(t) = 0$

Vetor constante $= \overrightarrow{(1,0)}$
Campo muda de acordo com (x,y)...

Exercício:

Para cada valor de t nesta trajetória calculem e visualizem:

· $(x(t), y(t))$
· $(x'(t), y'(t))$
· $\nabla F(x(t), y(t))$
· $(x'(t), y'(t)) \cdot \nabla F(x(t), y(t))$
· $\int_{t=0}^{t=3} (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla F(x(t), y(t))\, dt$

· $\vec{V}(x(t), y(t))$
· $(x'(t), y'(t)) \cdot \vec{V}(x(t), y(t))$
· $\int_{t=0}^{t=3} (x'(t), y'(t)) \cdot \vec{V}(x(t), y(t))\, dt$

$\boxed{\text{C2 13/JUL/2016}}$

HOJE: EDOs EXATAS!

SEJA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

SEJA $f = \nabla F$ -

OU SEJA, $f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y), \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right)$

$= (g(x,y), h(x,y))$.

QUEREMOS APRENDER:

$F \to (g,h)$ (FÁCIL)

$F \leftarrow (g,h)$ (MAIS DIFÍCIL, E ÀS VEZES NÃO DÁ PRA FAZER)

E QUEREMOS VER COMO ISTO RESOLVE CERTAS EDOs (QUAIS??? ‼)

AULA PASSADA:

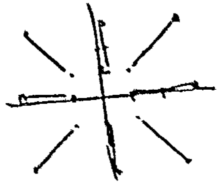
$F(x,y) = x^2 + y^2$

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 2x$

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = 2y$

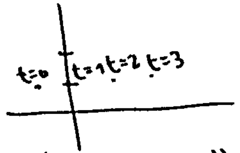
$f(x,y) = \overrightarrow{(2x, 2y)}$ ← CAMPO VETORIAL (CONSERVATIVO)

$f(x,y) =$

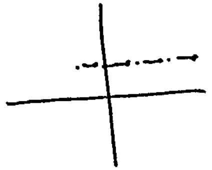


VIMOS COMO INTEGRAR $f(x,y)$ EM TRAJETÓRIAS SIMPLES...

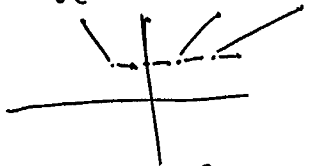
$(x(t), y(t)) = (t-1, 1)$ ← TRAJETÓRIA



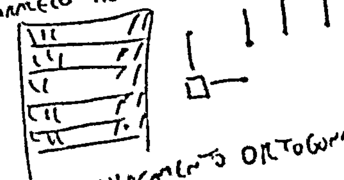
$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (\overrightarrow{1,0})$



$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) \cdot f(x,y) =$



E AÍ APARECE UM PRODUTO INTERNO... ELE MEDE DESLOCAMENTO PARALELO AO CAMPO VETORIAL, E ELE



IGNORA DESLOCAMENTO ORTOGONAL AO CAMPO.

$\int_{t=0}^{t=3} \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) \cdot f(x,y)\, dt = ?$

$F(x(t), y(t))\Big|_{t=0}^{t=3} = ?$

EXERCÍCIO: CALCULE AS VÁRIAS EXPRESSÕES ABAIXO PARA CADA x_0, x_1, y_0, y_1 DADOS:

(I) $\int_{x=x_0}^{x=x_1} \overbrace{\frac{d}{dx}(x, y_0) \cdot f(x, y_0)}^{\alpha(x)}\, dx + \int_{y=y_0}^{y=y_1} \overbrace{\frac{d}{dy}(x_1, y) \cdot f(x_1, y)}^{\beta(y)}\, dy$

(II) $\int_{y=y_0}^{y=y_1} \overbrace{\frac{d}{dy}(x_0, y) \cdot f(x_0, y)}^{\gamma(y)}\, dy + \int_{x=x_0}^{x=x_1} \overbrace{\frac{d}{dx}(x, y_1) \cdot f(x, y_1)}^{\delta(x)}\, dx$

(III) $F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)$

a) $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $(x_1, y_1) = (2, 3)$, $f(x,y) = (2x, 2y)$

b) " " , $f(x,y) = (y, -x)$

(I) $3 + 8 = 11$

(II) $8 + 3 = 11$

(III) $13 - 2 = 11$

(I) $3 + (-4) = -1$

(II) $2 + 3 = 5$

b2) $\int_{y=y_0}^{y=y_1} (0,1) \cdot f(-1, y)\, dy$

$\int_{y=y_0}^{y=y_1} (0,1) \cdot (y, 1)\, dy$

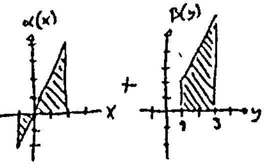
$\int_{y=y_0}^{y=y_1} 1\, dy = y\Big|_{y_0}^{y_1} = 3 - 1 = 2$

$\int_{x=x_0}^{x=x_1} (1,0) \cdot f(x, 1)\, dx$

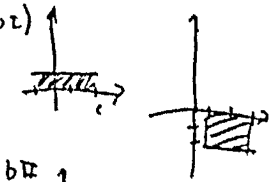
$\int_{x=x_0}^{x=x_1} (1,0) \cdot (1, -x)\, dx$

$\int_{x=x_0}^{x=x_1} 1\, dx = x\Big|_{x_0}^{x_1} = 2 - (-1) = 3$

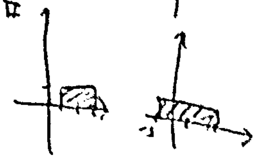
aI)



bI)



bII



C2 18/JUL/2016

Hoje:

EDOs exatas!
De onde elas vêm,
como resolvê-las...

OBS: Precisamos marcar a P2, a VR e a VS...

Lembrei que se
$F(x,y) = G(x) + H(y)$
então esta F "induz" uma EDO cujas soluções são as curvas de nível da $F(x,y)$...

A gente chama isto de "variáveis separáveis".

Exemplo: $G(x) = x^2$,
$H(y) = y^2$,
$F(x,y) = x^2 + y^2$,
e a EDO é $y' = -\frac{x}{y}$.

Algo como
$F(x,y) = x^2y^3$
não pode ser expresso como
$F(x,y) = G(x) + H(y)$,
mas as curvas de nível de $F(x,y) = x^2y^3$ induzem uma EDO que a gente pode resolver por uma técnica um pouco mais complicada e geral: "EDOs exatas".

Exercício (banal):
a) Encontre as curvas onde $F(x,y) = x^2y^3$ é constante
b) Parametrize uma destas curvas por t.

a) Uma curva: $F(x,y) = x^2y^3 = 1$
Todas as curvas: $F(x,y) = x^2y^3 = k$

b) Uma parametrização:
$$(x(t), y(t)) = \left(t^3, \frac{1}{t^2}\right) \quad (*)$$
$$F(x(t),y(t)) = (t^3)^2\left(\frac{1}{t^2}\right)^3 = t^6t^{-6} = 1$$

(*) percorre a curva $F(x,y)=1$ — ou talvez só parte dela, talvez $t=0$ seja problemático, então
$$P(t) = (x(t), y(t)),$$
$$P: (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (x(t),y(t)) = \left(t^3, \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = ? \quad \| \quad \frac{d}{dt}t^6t^{-6} = \frac{d}{dt}1 = 0$$
$$\frac{d}{dt}F(P(t)) = ?$$

Com o que vocês sabem de Cálculo 1 dá pra calcular coisas como
$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t))$
quando $F(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$ são dadas explicitamente...

Fórmula geral:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) &= F_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + F_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}F(x(t),y(t))\frac{d}{dt}x(t) + \frac{\partial}{\partial y}F(x(t),y(t))\frac{d}{dt}y(t) \\ &= F_x x_t + F_y y_t\end{aligned}$$

$$\frac{dF}{dt} = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt}$$
$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$
⇐ Aparece na p.167 do livro.

Outro tipo de trajetória:
Estamos procurando $f(x)$ tal que $F(x,f(x))$ seja constante...
ou seja:
$$\frac{d}{dx}F(x,f(x)) = 0$$
$$\frac{d}{dx}F(x,f(x)) = F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{df(x)}{dx} = F_x + F_y y_x$$

$$\frac{dF}{dx} = F_x + F_y\frac{dy}{dx}$$
$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$
⇐ p.167

Truque (!?!?):
Isto aqui (escrito de uma forma estranha) é a notação preferida pra uma EDO exata:
$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

Exercícios:
a) Seja $F(x,y) = x^2y^3$.
Obtenha a EDO exata associada...
- As soluções da EDO vão ser as curvas de nível de $F(x,y) = x^2y^3$
- A sua resposta deve estar na forma

$$\underline{\quad}\,dx + \underline{\quad}\,dy = 0$$
↑ poli em x,y ↑ idem

⇧ Vale uma paçoquinha pra quem fizer no quadro.

C2 18/JUL/2016

HOJE:
EDOs EXATAS!
DE ONDE ELAS VÊM,
COMO RESOLVÊ-LAS...

OBS: PRECISAMOS MARCAR A P2, A VR E A VS...

LEMBREM QUE SE
$F(x,y)=G(x)+H(y)$
ENTÃO ESTA F "INDUZ" UMA EDO CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA $F(x,y)$...
A GENTE CHAMA ISTO DE "VARIÁVEIS SEPARÁVEIS".
EXEMPLO: $G(x)=x^2$, $H(y)=y^2$, $F(x,y)=x^2+y^2$,
E A EDO É $y'=-\frac{x}{y}$.

a) UMA CURVA: $F(x,y)=x^2y^3=1$
TODAS AS CURVAS: $F(x,y)=x^2y^3=k$

DICAS:
$F(x,y)=x^2y^3$
$F_x=F_x(x,y)=2xy^3$
$F_y=F_y(x,y)=3x^2y^2$

$F(x,f(x))=1$
$\overset{\shortparallel}{x^2f(x)^3}$
$f(x)^3=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$
$y=f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

HIPÓTESES: $y=x^{-\frac{2}{3}}$ VAI SER SOLUÇÃO DA EDO.

$F_xdx+F_ydy=0$

$$\left.\begin{array}{l} 2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy=0 \\ 2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0 \\ 2xf(x)^3+3x^2f(x)^2f'(x)=0 \end{array}\right\}(**)$$

AGORA A GENTE ACREDITA (APESAR DA GENTE TER TESTADO UMA "F" SÓ !!)
QUE CADA $F(x,y)$ GERA
- CURVAS DE NÍVEL
- UMA EDO DA FORMA
$F_xdx+F_ydy=0$
CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS "F"S QUE PERCORREM AS CURVAS DE NÍVEL.

COMO É RESOLVE UMA EDO DA FORMA $F_xdx+F_ydy=0$ QUANDO A GENTE TEM F_x E F_y MAS A GENTE NÃO TEM F?
POR EXEMPLO, COMO A GENTE RESOLVE
(I) $(x+y)dx+x\,dy=0$?
(II) $(x+y)dx+y\,dy=0$?

(I) QUEREMOS UMA $F(x,y)$ TAL QUE $F_x=x+y$ E $F_y=x$.
(II) QUEREMOS UMA $F(x,y)$ TAL QUE $F_x=x+y$ E $F_y=y$.

MÉTODOS:
- CHUTAR E TESTAR.
- DEFINIR A F USANDO AS INTEGRAIS DE F_x E F_y EM TRAJETÓRIAS DA FORMA $(x_0,y_0)\to(x_1,y_1)$
- SE EXISTE UMA F QUE GERA OS F_x E F_y QUE TEMOS, ENTÃO:
$F_{xy}=F_{yx}$.

NO EXEMPLO (I):
$\frac{d}{dy}F_x\overset{?}{=}\frac{d}{dx}F_y$ $\qquad 1=1$!!
$\frac{d}{dy}(x+y)=1$, $\quad \frac{d}{dx}x=1$

NO EXEMPLO (II):
$\frac{d}{dy}F_x\overset{?}{=}\frac{d}{dx}F_y$ $\qquad 1\neq 0$!!
$\frac{d}{dy}(x+y)=1$, $\quad \frac{d}{dx}y=0$

(I) HIPÓTESE:
$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy$
$F_x=x+y$
$F_y=x$

$F(x,f(x))=1$
$\overset{\shortparallel}{\frac{x^2}{2}+xf(x)}$
$xf(x)=1-\frac{x^2}{2}$
$y=f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$

EXERCÍCIO: TESTE SE ISTO É SOLUÇÃO DA EDO (I).

$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}-\frac{1}{2}$
$(x+y)+x\frac{dy}{dx}=0$?
$\overset{\shortparallel}{(x+y)+x(-x^{-2}-\frac{1}{2})}$
$\overset{\shortparallel}{(x+y)-\frac{1}{x}-\frac{x}{2}}$
$\overset{\shortparallel}{(x+\frac{1}{x}-\frac{x}{2})}-\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$

$\boxed{\text{C2 18/JUL/2016}}$

Hoje:

EDOs exatas!

De onde elas vêm,
como resolvê-las...

OBS: Precisamos marcar
a P2, a VR e a VS...

Proposta
(a ser confirmada
na próxima aula):

Parece
melhor

P2: 2ª 25 ou 4ª 27

VR: 1º/AGO

VS: 3/AGO

Lembre que se

$$F(x,y) = G(x) + H(y)$$

então esta F "induz"
uma EDO cujas soluções
são as curvas de nível
da $F(x,y)$...

A gente chama isto de
"variáveis separáveis".

Exemplo: $G(x) = x^2$,
$H(y) = y^2$,
$F(x,y) = x^2 + y^2$,

e a EDO é $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Próxima aula:

Se a nossa EDO é

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

com $F_{xy} = F_{yx}$,

então esses dois modos
de obter F funcionam
como dão o mesmo resultado:

$$① \quad F(x,y) = \int_{(0,0) \to (x,0) \to (x,y)} \overrightarrow{(F_x, F_y)} \cdot \overrightarrow{(x_t, y_t)}\,dt$$

$$② \quad F(x,y) = \int_{(0,0) \to (0,y) \to (x,y)} \overrightarrow{(F_x, F_y)} \cdot \overrightarrow{(x_t, y_t)}\,dt$$

$\boxed{\text{C2 20/JUL/2016}}$

Hoje:
- Terminar EDOs exatas
- 
- Revisão?
- Marcar datas das provas

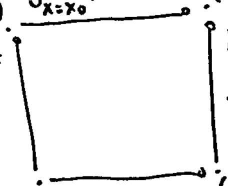
EDOs exatas

Suponha que sabemos $F_x, F_y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sabemos que elas obedecem $F_{xy} = F_{yx}$, mas ainda não sabemos F. Como a gente pode descobrir F por métodos que não sejam chutar e testar?

Idéia:

$F(x_1,y_1)-F(x_0,y_1) = \int_{x=x_0}^{x=x_1} F_x(x,y_1)\,dx$

(x_0,y_1) (x_1,y_1)



$F(x_0,y_1)-F(x_0,y_0) = \int_{y=y_0}^{y=y_1} F_y(x_0,y_0)\,dy$

$F(x_1,y_1)-F(x_1,y_0) = \int_{y=y_0}^{y=y_1} F_y(x_1,y)\,dy$

(x_0,y_0) (x_1,y_0)

$F(x_1,y_0)-F(x_0,y_0) = \int_{x=x_0}^{x=x_1} F_x(x,y_0)\,dx$

Idéia (parte 2):

Podemos primeiro calcular $F(0,y)$ $(\forall y)$ ou $F(x,0)$ $(\forall x)$ e daí calcular $F(x,y)$ $(\forall x,y)$.

Exercícios (livro, p.178):

1) $(2x-1)dx + (7y+4)dy = 0$

2) $(4x^3+4xy)dx + (2x^2+2y-1)dy = 0$ ⇦ $\frac{2}{3}$ KK

1) $\underbrace{(2x-1)}_{F_x(x,y)}dx + \underbrace{(7y+4)}_{F_y(x,y)}dy = 0$

$\underset{0}{F_{xy}} \overset{?}{=} \underset{0}{F_{yx}}$!!

DEF: $F(0,y) = \int_{y=0}^{y=y} F_y(0,y)\,dy + \overbrace{F(0,0)}^{0}$

$= \int_{y=0}^{y=y} 7y+4\,dy + \overbrace{F(0,0)}^{0}$

$= \left(\frac{7y^2}{2} + 4y\right)\Big|_{y=0}^{y=y}$

$= \frac{7y^2}{2} + 4y$

Def. $F(x,y) - F(0,y) = \int_{x=0}^{x=x} F_x(x,y)\,dx$

$= \int_{x=0}^{x=x} 2x-1\,dx$

$= (x^2-x)\Big|_{x=0}^{x=x}$

$= x^2-x$

$F(x,y) = x^2 - x + \frac{7y^2}{2} + 4y$

2) $\underbrace{(4x^3+4xy)}_{F_x(x,y)}dx + \underbrace{(2x^2+2y-1)}_{F_y(x,y)}dy = 0$

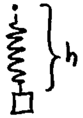
$F(0,y) = y^2 - y$ —— $F(x,y) = x^4 + 2x^2y + y^2 - y$

$F(0,0) = 0$

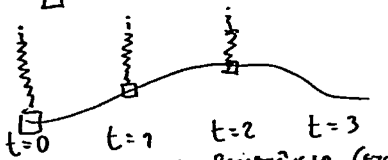
EDOs da forma $f''+af'+bf=0$, com a, b constantes, têm soluções básicas da forma $e^{\alpha x}$ e $e^{\beta x}$...

Quando α e β são complexos algumas combinações $ce^{\alpha x}+de^{\beta x}$ vão dar coisas da forma $e^{\lambda x}\cos Kx$ ou $e^{\lambda x}\operatorname{sen} Kx$...

As EDOs que têm estas soluções são incrivelmente importantes pra física... "sistema massa-mola amortecido":

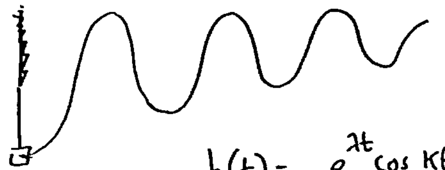


$h=0 \Rightarrow$ repouso



Se não houver resistência (etc) a trajetória do peso no tempo vai ser uma senoide.

Se a mola estiver enferrujada ou algo assim,



Trajetória: $h(t) = \_\,e^{\lambda t}\cos Kt + \_\,e^{\lambda t}\operatorname{sen} Kt$

C2 25/JUL/2016

HOJE: AULA DE DÚVIDAS!
PRÓXIMA AULA: PROVA!

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(F_x, F_y) ← CAMPO CONSERVATIVO

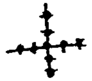
SERÁ QUE EXISTE $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
TAL QUE
$(F_x(x,y), F_y(x,y)) = (y, -x)$?

$F_{xy} = F_{yx}$ ← COND. DE EULER

EXERCÍCIO:

1) SEJAM $(g(x,y), h(x,y)) = (y, -x)$,
$f(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$.

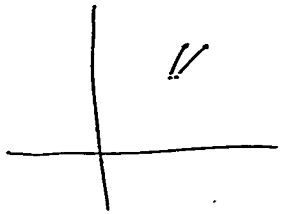
a) REPRESENTE GRAFICAMENTE O CAMPO f.

DICA: COMECE POR: 

b) MOSTRE QUE f NÃO É CONSERVATIVO PELA COND. DE EULER.

c) IDEM, MAS POR INTEGRAIS.

$$f_x(x,y) \approx \frac{f(x+\varepsilon, y) - f(x,y)}{\varepsilon}$$



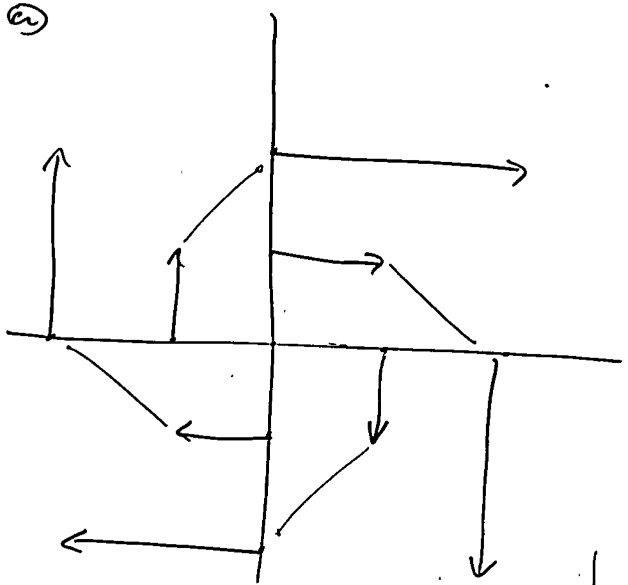
2) a) ENCONTRE UMA EDO DA FORMA $f'' + af' + bf = 0$ (*)
QUE TENHA SOLUÇÕES BÁSICAS $e^{(2+3i)x}$ E $e^{(2-3i)x}$.

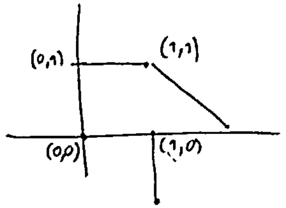
b) ENCONTRE ALGUMA FUNÇÃO DA FORMA $f = e^{\alpha x} \cos \beta x$
QUE SEJA SOLUÇÃO DE (*)
(OBS: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$)

2a) SABEMOS QUE
$(D-\alpha)(D-\beta)f = 0$
TEM SOLUÇÕES BÁSICAS
$f = e^{\alpha x}$ E $f = e^{\beta x}$...
ENTÃO
$(D-(2+3i))(D-(2-3i))f$
TEM SOLUÇÕES BÁSICAS
$f(x) = e^{(2+3i)x}$ E $f(x) = e^{(2-3i)x}$

2b) OUTRA IDÉIA:
$f = e^{\alpha x} \cos \beta x$ É SOL. DE (*),
$g = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ TAMBÉM,
$f + ig = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$ TAMBÉM,

1) a)





$$\int_{x=0}^{x=1} f(x,0) \cdot (\vec{1,0})\, dx = \int_{x=0}^{x=1} (\vec{0,-x}) \cdot (\vec{1,0})\, dx = 0$$

$$\int_{x=0}^{x=1} f(x,1) \cdot (\vec{1,0})\, dx = \int_{x=0}^{x=1} (\vec{1,-x}) \cdot (\vec{1,0})\, dx = 1$$

b) $F_x = y$, $F_y = -x$

$F_{xy} = 1$, $F_{yx} = -1$

$F_{xy} \neq F_{yx}$