GA 25/ABRIL/2016

PÁGINA:
http://angg.twu.net/
A W U

OU GOOGLEM POR
EDUARDO OCHS
E CLIQUEM EM "GA"
NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

UMA DAS COISAS QUE
TEM (ALIÁS, VAI TER)
LÁ É UM PDF COM
TODAS AS FOTOS DOS
QUADROS E JPGS
INDIVIDUAIS.

SE CONCENTREM MAIS NOS
EXERCÍCIOS DO QUE
EM COPIAR A MATÉRIA.

AS PROVAS VÃO SER
UNIFICADAS (ACHO)...

LEMBREM QUE
$6/3 = 2$
$6/5 =$ ERRO (NO INÍCIO)
VOCÊS FORAM
APRENDENDO NOVOS
OBJETOS E NOVAS
OPERAÇÕES AOS
POUCOS...

NOVOS OBJETOS

P. EX:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{4\times 5} = \text{ERRO}$$

$3 \neq 4$

$$K \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb & Kc \\ Kd & Ke & Kf \end{pmatrix}$$

ALÉM DISSO SABÍAMOS
SOMAR MATRIZES

OBS: A MULTIPLICAÇÃO
DE MATRIZES É UMA
OPERAÇÃO BEM DIFE-
RENTE DA MULT. DE
NÚMERO, MAS:

- É DEFINIDA USANDO A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS
- ELA É ESCRITA SÓ COMO MULTIPLICAÇÃO (SEM USAR SINAIS NOVOS).

PONTOS E VETORES

ORDEM:

- OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES (COMO CALCULAR)
- PROPRIEDADES DESSAS OPERAÇÕES
- SIGNIFICADO (REPRESENTAÇÃO GRÁFICA)
- DEMONSTRAÇÕES.

$(3,4)$ ← PONTO (EM $\mathbb{R}^2$)

$\overrightarrow{(5,6)}$ ← VETOR (EM $\mathbb{R}^2$)

OPERAÇÕES:

1) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$

2) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$

OBS: $\overrightarrow{(a,b)} + (c,d) =$ ERRO,
$(a,b) + (c,d) =$ ERRO.

3) $(a,b) - (c,d) = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$

4) $(a,b) - \overrightarrow{(c,d)} = (a-c, b-d)$

5) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$

6) $K \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(Ka, Kb)}$

7) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$ (!!!!!!)

EXERCÍCIOS

(AUTO-CORREÇÃO)

(QUE NA VERDADE QUER
DIZER QUE UM COLEGA
TENTA CORRIGIR O SEU
E VOCÊ TENTA CORRIGIR
O DELE — SE VOCÊS NÃO
CONSEGUIREM CHEGAR
A UMA CONCLUSÃO
CONVERSEM COM
OUTRAS DUPLAS).

a) $$(2,3) + \underbrace{\Big(\underbrace{\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}}_{\text{REGRA 2}}\Big)}_{\text{REGRA 1}}$$

$= \overrightarrow{(4+10, 5+20)}$
$= \overrightarrow{(14, 25)}$

$= (2+14, 3+25)$
$= (16, 28)$

b) ((

c)

d)

PONTOS E VETORES

ORDEM:

- OPERAÇÕES COM PONTOS E VETORES (COMO CALCULAR)
- PROPRIEDADES DESSAS OPERAÇÕES
- SIGNIFICADO (REPRESENTAÇÃO GRÁFICA)
- DEMONSTRAÇÕES.

$(3,4)$ ← PONTO (em $\mathbb{R}^2$)

$\overrightarrow{(5,6)}$ ← VETOR (em $\mathbb{R}^2$)

OPERAÇÕES:

1) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$
2) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$

OBS: $\overrightarrow{(a,b)} + (c,d) =$ ERRO,
$(a,b) + (c,d) =$ ERRO.

3) $(a,b) - (c,d) = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$
4) $(a,b) - \overrightarrow{(c,d)} = (a-c, b-d)$
5) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$
6) $k \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$
7) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$ (!!!!!!)

Exercícios

(AUTO-CORREÇÃO)

(QUE NA VERDADE QUER DIZER QUE UM COLEGA TENTA CORRIGIR O SEU E VOCÊ TENTA CORRIGIR O DELE - SE VOCÊS NÃO CONSEGUIREM CHEGAR A UMA CONCLUSÃO CONVERSEM COM OUTRAS DUPLAS).

a) $(2,3) + \underbrace{\left(\underbrace{\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}}_{\text{REGRA 2}}\right)}_{\text{REGRA 1}}$

$= \overrightarrow{(4+10, 5+20)}$

$= \overrightarrow{(14, 25)}$

$= (2+14, 3+25)$

$= (16, 28)$

b) $\left((2,3) + \overrightarrow{(4,5)}\right) + \overrightarrow{(10,20)}$

c) $4 \cdot \left((20,30) - (5,10)\right)$

d) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}$

e) $\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$

f) $\left(\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}\right) \cdot \overrightarrow{(10,100)}$ $= 40 \cdot \overrightarrow{(10,100)}$ $= \overrightarrow{(400,4000)}$

g) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \left(\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)}\right)$ $= \overrightarrow{(2,3)} \cdot 1050$ $=$ ERRO

h) $\left(\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)}\right) \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ $= 1050 \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ $= \overrightarrow{(2100,3150)}$

i) $\left(\overrightarrow{(10,100)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}\right) \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ $= 1050 \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ $= \overrightarrow{(2100,3150)}$

GA 25/ABRIL/2016

PROPRIEDADES

$\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)} = 40$

$\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 40$

SERÁ QUE ISSO VALE SEMPRE?

COMO ASSIM, "ISSO"?

SERÁ QUE
$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}$

"SEMPRE", ISTO É, PARA TODOS $a,b,c,d \in \mathbb{R}$?

QUAIS SÃO AS PROPRIEDADES MAIS "NATURAIS"? (PRA GENTE COMEÇAR COM ELAS)...

PROPRIEDADES COM NOMES FAMOSOS:

COMUTATIVIDADE:

$A \cdot B = B \cdot A$,
$A + B = B + A$,
$A - B = B - A$

ASSOCIATIVIDADE:

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(A-B)-C = A-(B-C)$

REPARE QUE COM PONTOS E VETORES A GENTE VAI TER ALGUMAS ASSOCIATIVIDADES "MISTAS", COM PONTOS E VETORES...

E VAMOS NOS ITENS f E g QUE $\overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) =$ ERRO

$(\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} =$ NÚMERO...

DISTRIBUTIVIDADE:

$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

$A \cdot (B-C) = A \cdot B - A \cdot C$

$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

IDÉIA: PODEMOS TENTAR ESCREVER UM MONTE DE PROPRIEDADES TIPO "COMUTATIVIDADE", "ASSOCIATIVIDADE" E "DISTRIBUTIVIDADE" E TENTAR VER SE CADA UMA É VERDADEIRA OU FALSA, E JUSTIFICAR...

MUITOS EXERCÍCIOS IMPORTANTES DO CURSO VÃO SER TIPO "V/F/JUSTIFIQUE"...

EXEMPLO:

j) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$

A TÉCNICA PRA MOSTRAR QUE ISTO É FALSO É SIMPLES — "CONTRAEXEMPLO". BASTA APRESENTAR UM CONTRAEXEMPLO (CASO PARTICULAR) PRA MOSTRAR QUE ISTO NÃO É SEMPRE VERDADE...

DICA: QUANDO A GENTE NÃO FAZ IDÉIA DE SE UMA PROPOSIÇÃO É V OU F, A GENTE PODE COMEÇAR TESTANDO CASOS PARTICULARES...

Ex: QUANDO $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$,
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$?

REPARE: NESTE CASO
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(1,2)} - \overrightarrow{(3,4)} = \overrightarrow{(-2,-2)}$

$\overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(3,4)} - \overrightarrow{(1,2)} = \overrightarrow{(2,2)}$

$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$!

MAS NO CASO: $a=5$, $b=6$, $c=5$, $d=6$?
NESTE CASO TEMOS
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$!...

OU SEJA,
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$
É VERDADE EM ALGUNS CASOS, MAS NEM SEMPRE.

TEM
BÁS
PR
D
N

EXERCÍCIOS
[N]TES DO
[]NÃO SER TIPO
[] / JUSTIFIQUE" ...

[EXEM]PLO:

( ) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)}$
$= \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$

[] TÉCNICA PRA MOSTRAR
[Q]UE ISTO É FALSO É
SIMPLES - "CONTRAEXEMPLO".
BASTA APRESENTAR UM
CONTRAEXEMPLO
(CASO PARTICULAR)
PRA MOSTRAR QUE ISTO
NÃO É SEMPRE VERDADE...

DICA: QUANDO A GENTE
NÃO FAZ IDÉIA DE SE
UMA PROPOSIÇÃO É
V OU F, A GENTE PODE
COMEÇAR TESTANDO
CASOS PARTICULARES...

EX: QUANDO
$a=1$,
$b=2$,
$c=3$,
$d=4$,
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$?

REPARE: NESTE CASO

$$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(1,2)} - \overrightarrow{(3,4)} = \overrightarrow{(-2,-2)}$$

$$\overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(3,4)} - \overrightarrow{(1,2)} = \overrightarrow{(2,2)}$$

$$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}\,!$$

MAS NO CASO:
$a=5$,
$b=6$,
$c=5$,
$d=6$?
NESTE CASO TEMOS
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$!...

OU SEJA,
$\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$
É VERDADE EM ALGUNS
CASOS, MAS NEM SEMPRE.

TEM UMA TÉCNICA
BÁSICA - QUE FUNCIONA
PRA MUITOS PROBLEMAS
DE V/F/JUSTIFIQUE,
MAS NÃO TODOS...

PRA PROBLEMAS DE
V/F/JUSTIFIQUE
QUE SÃO SÓ COMO

( ) $\underbrace{\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)}}_{\text{EXPRESSÃO À ESQUERDA DO "="}} = \underbrace{\overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}}_{\text{EXPRESSÃO À DIREITA DO "="}}$

TÉCNICA:
- PEGUE A EXPRESSÃO À ESQUERDA E "EXPANDA" TUDO QUE PUDER
- FAÇA O MESMO COM A EXPRESSÃO DA DIREITA
- COMPARE OS DOIS RESULTADOS

GA 25/ABRIL/2016

EXEMPLO:

K) ( ) SEJAM: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(c,d)}$.

ENTÃO

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$$

OU:

K' ( ) $$\left(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}\right)\cdot\left(\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)}\right) = \overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)}\cdot\overrightarrow{(c,d)}$$

PRA CASA:
FAÇAM A MESMA COISA COM O LADO DIREITO, E NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VOTAR SE K' É V OU F E TENTAR DEMONSTRAR SE ELE É V OU F.

CADA UMA DAS 7 REGRAS QUE EU MOSTREI LÁ ATRÁS PODE SER VISTA COMO UMA REGRA DE "EXPANSÃO"...

$$\underbrace{\underbrace{\left(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}\right)}_{\overrightarrow{(a+c,\,b+d)}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)}\right)}_{\overrightarrow{(a-c,\,b-d)}}}_{(a+c)(a-c)+(b+d)(b-d)} =$$

$$(a+c)(a-c) + (b+d)(b-d) =$$
$$a^2 - c^2 + b^2 - d^2$$

GA 27/ABRIL/2016

AVISO: AS FOTOS DA 1ª AULA JÁ ESTÃO NO SITE, EM JPGS E EM PDF!

http://angg.twu.net/

OU GOOGLE POR "EDUARDO OCHS" E CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

OPERAÇÕES:

1) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$

2) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$

3) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

4) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

5) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

6) $k\cdot\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

7) $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$

8) $\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}$

EXERC:

$\|\overrightarrow{(3,0)}\| = ?$

$\|\overrightarrow{(3,0)}+\overrightarrow{(0,4)}\| = ?$

$\|\overrightarrow{(0,-3)}\| = ?$

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER COMO LIDAR COM CERTOS PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE - P.EX.:

(OBS: $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$)

k) ( ) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

EU EXPLIQUEI QUE O TRUQUE ERA "EXPANDIR" A EXPRESSÃO À ESQUERDA DO "=" E A EXPRESSÃO À DIREITA DO "=" E COMPARAR OS RESULTADOS...

AS "REGRAS DE EXPANSÃO" SÃO EXATAMENTE AS 8 REGRAS À ESQUERDA, MAS COM O "=" SENDO INTERPRETADO COMO "A EXPANSÃO DA EXPRESSÃO À ESQUERDA É A EXPRESSÃO À DIREITA".

EXERC:

EXPANDA

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

b) $\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

E COMPARE OS RESULTADOS.

EXERCS:

l) ( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + (2\vec{u})\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

m) ( ) $\|k\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = ka$

n) ( ) $\|k\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = k\|\overrightarrow{(a,0)}\|$

o) ( ) $\|k\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,0}$

p) ( ) $\|k\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = |ka|$

k	a	$\|k\cdot\overrightarrow{(a,0)}\|$	ka	$k\|\overrightarrow{(a,}$
0	3	0	0	0
2	3			
2	-3	6	-6	
-2	-3			
-2	3	6	-6	-6

m) (F) CONTRA-EXEMPL

$k=2$ e $a=-$

n) (F) CONTRA-EXEM

$k=-2$ e $a=-$

0

EXERC:
EXPANDA
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
$\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$
E COMPARE OS
RESULTADOS.

EXERCS:

l) ( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 =$
$\|\vec{u}\|^2+(2\vec{u})\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

m) (F) CONTRA-EXEMPLO:
$K=2$ E $a=-3$.

n) (F) CONTRA-EXEMPLO:
$K=-2$ E $a=-3$.

m) ( ) $\|K\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = Ka$

n) ( ) $\|K\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = K\|\overrightarrow{(a,0)}\|$

o) ( ) $\|K\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = |K|\,\|\overrightarrow{(a,0)}\|$

p) ( ) $\|K\cdot\overrightarrow{(a,0)}\| = |Ka|$

$= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

TRUQUE
RESSÃO
EXPRESSÃO
PARAR OS

ÃO" SÃO
RAS
O "="
OMO
Ã À
SSÃO

K	a	$\|K\cdot\overrightarrow{(a,0)}\|$	Ka	$K\|\overrightarrow{(a,0)}\|$	$\|K\|\,\|\overrightarrow{(a,0)}\|$
0	3	0	0	0	0
2	3				
2	-3	6	-6		
-2	-3				
-2	3	6	-6	-6	6

MAIS PROBLEMAS:

q) (F) $\sqrt{a^2} = a$ CONTRA-EXEMPLO: $a=-2$

r) ( ) $\sqrt{a^2} = |a|$ ⇦ PARECE V (É V PELO TEOREMA III)

s) ( ) $\|\overrightarrow{(a,b)}\|^2 = a^2+b^2$ (É V - DEMONSTRAÇÃO ABAIXO)

t) ( ) SE $a \geq 0$ ENTÃO $\sqrt{a^2} = a$ ⇦ PARECE V (É V PELO TEOREMA I)

a	$\sqrt{a^2}$	$\|a\|$	$a \geq 0$	$\sqrt{a^2}=a$
-2	2	2	FALSO	
-1	1	1	FALSO	
0	0	0	V	V
1	1	1	V	V
2	2	2	V	V

TEOREMAS:

(I) SE $a \geq 0$ ENTÃO $\sqrt{a^2} = a = |a|$.

(II) SE $a \geq 0$ ENTÃO $\sqrt{a}^2 = a = |a|$.

(III) $\sqrt{a^2} = |a|$ SEMPRE.

s) LADO ESQUERDO:

$\|\overrightarrow{(a,b)}\|^2 = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}^2$ (REGRA 8)

$= \sqrt{a^2+b^2}^2$ (REGRA 7) $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$, $a^2+b^2 \geq 0$

$= a^2+b^2$ (TEOREMA II).

$\boxed{\text{GA 27/ABRIL/2016}}$

(IV) $|a||b| = |ab|$

$v)\ (\quad)\ \|K\cdot\overrightarrow{(a,b)}\| = |K|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

LADO ESQUERDO:

$$\begin{aligned}\|K\cdot\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(Ka,Kb)}\|\\ &= \sqrt{(Ka)^2+(Kb)^2}\\ &= \sqrt{K^2a^2+K^2b^2}\\ &= \sqrt{K^2(a^2+b^2)}\\ &= \sqrt{K^2}\sqrt{a^2+b^2}\\ &= |K|\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

LADO DIREITO:

$$\begin{aligned}|K|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\| &= |K|\sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\\ &= |K|\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

OBS: EM MUITOS LIVROS DE MATEMÁTICA VOCÊS VÃO VER DEMONSTRAÇÕES QUE COMBINAM AS DUAS SÉRIES DE EXPANSÕES NUMA SÓ...

$$\begin{aligned}\|K\cdot\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(Ka,Kb)}\|\\ &= \sqrt{(Ka)^2+(Kb)^2}\\ &= \sqrt{K^2a^2+K^2b^2}\\ &= \sqrt{K^2(a^2+b^2)}\\ &= \sqrt{K^2}\sqrt{a^2+b^2}\\ &= |K|\sqrt{a^2+b^2}\\ &= |K|\sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\\ &= |K|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|\end{aligned}$$

PRA CASA:
NA PÁGINA TEM UM PDF BAGUNÇADO (ELE É ATUALIZADO E AUMENTA DE VEZ EM QUANDO) CHAMADO 2016.1-GA-MATERIAL.PDF...
NA PRIMEIRA PÁGINA DELE TEM UMA SÉRIE DE EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE ADAPTADOS DE UMA LISTA DO REGINALDO...

COM O QUE VOCÊS VIRAM ATÉ AGORA DÁ PRA FAZER OS EXERCÍCIOS 2c ATÉ 2i.

OBS: UMA DAS COISAS QUE A GENTE VAI VER NA AULA QUE VEM É COMO DAR UMA DEMONSTRAÇÃO BEM MAIS CURTA PRO 2c (TRUQUE QUE USA A DEMONSTRAÇÃO DO v).

GA 2/MAIO/2016

MONITORIA:

Segunda 14-16

Terça 14-16

Quarta 17-19

Quinta 14-16

Lab de Engenharia

24 98879-3529

Mariana Imbelloni

HOJE:

(2) EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE

(1) "SIGNIFICADO" (GRÁFICO) DOS OBJETOS - PONTOS E VETORES -, OPERAÇÕES E PROPRIEDADES...

GEOMETRIA ANALÍTICA

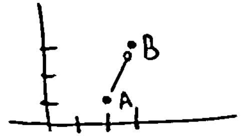
GRÁFICA ALGÉBRICA

TRADUZIR!!!

SEJAM:

$A=(2,1)$

$B=(3,3)$



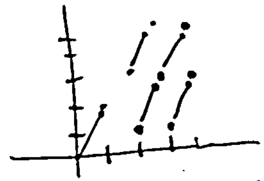
$B-A=(3,3)-(2,1)$

$=\overrightarrow{(3-2,3-1)}$

$=\overrightarrow{(1,2)}$

$=\overrightarrow{AB}$

VETORES SÃO DESLOCAMENTOS!



VETORES PODEM SER REPRESENTADOS NO PLANO "EM QUALQUER POSIÇÃO"...

P.EX., O VETOR $\overrightarrow{(1,2)}$ PODE SER REPRESENTADO COMO O DESLOCAMENTO DE (0,0) ATÉ (1,2)...

"ORIGEM" PONTO!

Soma de ponto e vetor

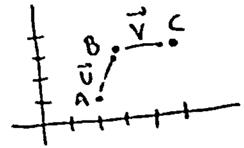
$$\underbrace{(2,1)}_{\text{ponto } A}+\underbrace{\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{AB}}=\underbrace{(3,3)}_{\text{ponto } B}$$

SEJAM:

$C=(5,3)$

$\vec{U}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(1,2)}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{(2,0)}$



JÁ SABEMOS INTERPRETAR GEOMETRICAMENTE SOMA DE PONTO E VETOR...

$$(\underbrace{(2,1)}_{A}+\underbrace{\overrightarrow{(1,2)}}_{\vec{U}})+\overrightarrow{(2,0)}=?$$

$$(\underbrace{(2,1)}_{A}+\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}}_{\vec{V}})+\overrightarrow{(1,2)}=?$$

$$\underbrace{(2,1)}_{A}+(\overrightarrow{(1,2)}+\overrightarrow{(2,0)})=?$$

OBS: VEJAM A P.22 DO REIS/SILVA E AS PÁGS 21 E 23 DO LIVRO DO CEDERJ

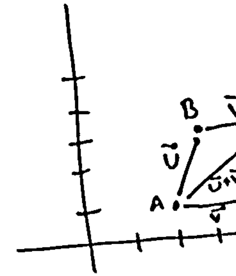
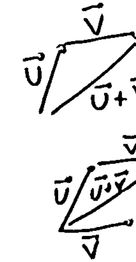
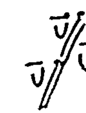


FIGURA PRA... DE VETORE...



E SE ... SOMAR ... COM E...



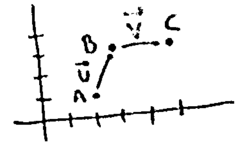
(VERSÃO ... DO TRI...

SEJAM:

$C = (5,3)$

$\vec{U} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1,2)}$

$\vec{V} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(2,0)}$



JÁ SABEMOS INTERPRETAR GEOMETRICAMENTE SOMA DE PONTO E VETOR...

$$(\underbrace{(2,1)}_{A} + \underbrace{\overrightarrow{(1,2)}}_{\vec{U}}) + \overrightarrow{(2,0)} = ?$$

$$(\underbrace{(2,1)}_{A} + \underbrace{\overrightarrow{(2,0)}}_{\vec{V}}) + \overrightarrow{(1,2)} = ?$$

$$\underbrace{(2,1)}_{A} + (\overrightarrow{(1,2)} + \overrightarrow{(2,0)}) = ?$$

OBS: VEJAM A P. 22 DO REIS / SILVA E AS PAGS 21 E 23 DO LIVRO DO CEDERJ

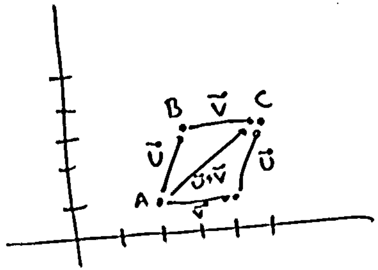
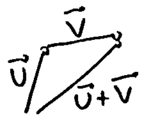
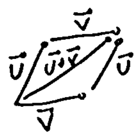


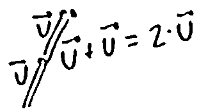
FIGURA PRA SOMA DE VETORES:





REGRA DO PARALELOGRAMO

E SE A GENTE SOMAR UM VETOR COM ELE MESMO?

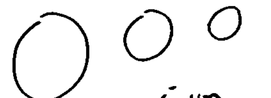


(VERSÃO DEGENERADA DO TRIÂNGULO )

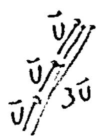
FIGURAS "DEGENERADAS"

O SEGMENTO DE RETA É UM "TRIÂNGULO DEGENERADO"

(DEGENERADO ≅ UM CASO PARTICULAR DE UMA FIGURA QUE VIRA UMA FIGURA MAIS SIMPLES)



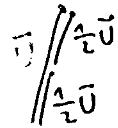
UM PONTO É UM CÍRCULO DEGENERADO.



GEOMETRICAMENTE, OS VETORES $2\vec{U}$, $3\vec{U}$, ETC, TÊM A MESMA "DIREÇÃO" QUE O $\vec{U}$, MAS TÊM COMPRIMENTOS DIFERENTES...

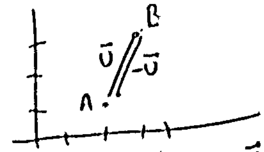
E $\frac{1}{2}\vec{U}$?

$$\frac{1}{2}\vec{U} + \frac{1}{2}\vec{U} = \vec{U}$$



E $-1\cdot\vec{U}$?

$$-1\cdot\overrightarrow{(1,2)} = \overrightarrow{(-1,-2)}$$



$$\vec{U} + (-1\cdot\vec{U}) = 0\cdot\vec{U} = \overrightarrow{(0,0)}$$

$$A = A + \underbrace{\overrightarrow{(0,0)}}_{\text{"VETOR NULO": "DESLOCAMENTO NENHUM"}}$$

$-\vec{U} = -1\cdot\vec{U}$ É O VETOR "OPOSTO" A $\vec{U}$...

$$\vec{U} - \vec{U} = \overrightarrow{(0,0)}$$

GA 2/maio/2016

Operações:

$(a,b)+(\overrightarrow{c,d})=(a+c,b+d)$

$(\overrightarrow{a,b})+(\overrightarrow{c,d})=(\overrightarrow{a+c,\ b+d})$

$(a,b)-(c,d)=(\overrightarrow{a-c,\ b-d})$

$(a,b)-(\overrightarrow{c,d})=(a-c,\ b-d) \quad = (a,b)+(-1\cdot(\overrightarrow{c,d}))$

$(\overrightarrow{a,b})-(\overrightarrow{c,d})=(\overrightarrow{a-c,\ b-d})$

$K\cdot(\overrightarrow{a,b}) = (\overrightarrow{Ka,Kb})$

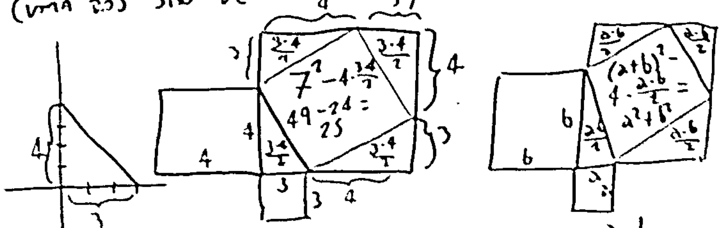
$(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d}) = ac+bd$

$\|(\overrightarrow{a,b})\| = \sqrt{(\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{a,b})}$

$= \sqrt{a^2+b^2}$ ⇦ o comprimento do vetor $(\overrightarrow{a,b})$ é $\sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{(\overrightarrow{a,b})\perp(\overrightarrow{c,d}) \text{ sse } (\overrightarrow{a,b})\cdot(\overrightarrow{c,d})=0}$

Teorema de Pitágoras
(uma das 340 demonstrações)



$(a+b)^2 - 4\cdot\frac{a\cdot b}{2} =$
$(a^2+2ab+b^2) - 2ab = a^2+b^2$

Exercício (olhômetro):

a) (V) $(\overrightarrow{2,0})\perp(\overrightarrow{0,3})$

b) (F) $(\overrightarrow{2,0})\perp(\overrightarrow{2,2})$

c) (V) $(\overrightarrow{1,1})\perp(\overrightarrow{-1,1})$

d) (V) $(\overrightarrow{1,1})\perp(\overrightarrow{-2,2})$

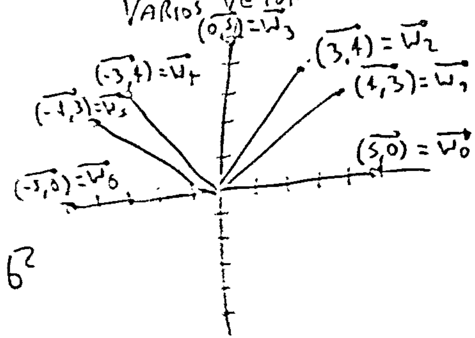
e) (F) $(\overrightarrow{1,1})\perp(\overrightarrow{2,2})$

f) (V) $(\overrightarrow{1,2})\perp(\overrightarrow{2,-1})$

g) (V) $(\overrightarrow{1,2})\perp(\overrightarrow{0,0})$

2d) ( ) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$
(i.e., $(\vec{u}-\vec{v})\perp(\vec{u}+\vec{v})$)

Vários vetores de comprimento 5:



$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\|\vec{u}\|=$
$(\overrightarrow{5,0})$	$(\overrightarrow{2,2})$	FAL
$\vec{w}_0$	$\vec{w}_3$	VER
$\vec{w}_0$	$\vec{w}_1$	VER

ício
metro):

$\overrightarrow{(2,0)} \perp \overrightarrow{(0,3)}$

$\overrightarrow{(2,0)} \perp \overrightarrow{(2,2)}$

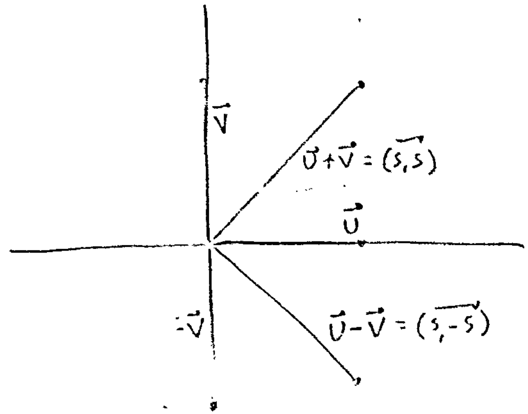
$\overrightarrow{(1,1)} \perp \overrightarrow{(-1,1)}$

$\overrightarrow{(1,1)} \perp \overrightarrow{(-2,2)}$

$\overrightarrow{(1,1)} \perp \overrightarrow{(2,2)}$

$\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(2,-1)}$

) $\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(0,0)}$

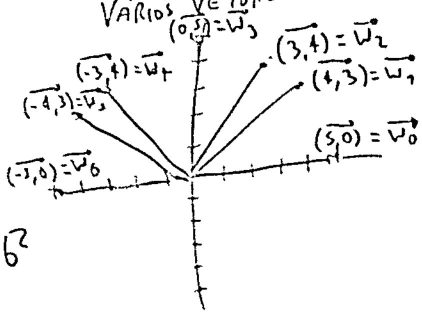


2d)( ) Se $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$

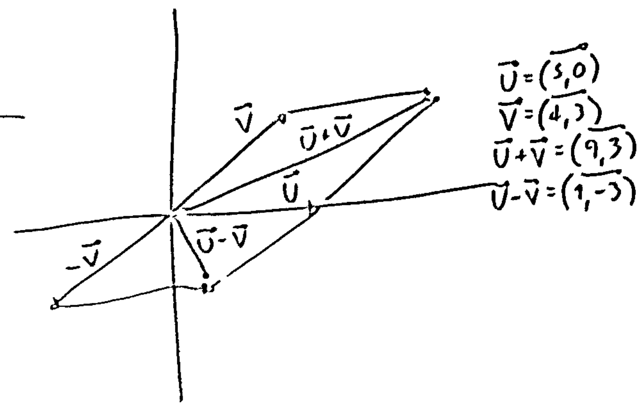
então $(\vec{U}-\vec{V})\cdot(\vec{U}+\vec{V})=0$

(i.e., $(\vec{U}-\vec{V}) \perp (\vec{U}+\vec{V})$)

Vários vetores de comprimento 5:



$\vec{U}$	$\vec{V}$	$\|\vec{U}\|=\|\vec{V}\|$	$\vec{U}-\vec{V} \perp \vec{U}+\vec{V}$
$\overrightarrow{(5,0)}$	$\overrightarrow{(2,2)}$	FALSO	VERD
$\vec{W}_0$	$\vec{W}_3$	VERD	
$\vec{W}_0$	$\vec{W}_1$	VERD	



$= a^2+b^2$

$\boxed{\text{GA } 4/\text{maio}/2016}$

FALTA A GENTE VER COMO DEMONSTRAR QUE COISAS COMO

a) ( ) SE $\vec{u} \perp \vec{v}$ ENTÃO

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \ldots$$

!!!

a') (V) SE $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ENTÃO

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}.$$

OBS: "$\sqrt{\ }$"S SÃO COMPLICADAS E A GENTE VAI VER MUITOS TRUQUES (ALGÉBRICOS) PRA SE LIVRAR DELAS.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}^{\,2} = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\|\overrightarrow{(a,b)}\|^2 = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}^{\,2} = \sqrt{a^2+b^2}^{\,2} = a^2+b^2$$

"$\|\vec{v}\|^2$" É UM JEITO CURTO DE ESCREVER $\vec{v}\cdot\vec{v}$...

$$\|2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w}\|^2 = (2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w})\cdot(2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w})$$

DEMONSTRAÇÃO:

DIGAMOS QUE $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

ENTÃO:

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\cdot 0 + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

2d) (V) SE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ ENTÃO $\vec{u}-\vec{v} \perp \vec{u}+\vec{v}$.

DEM: DIGAMOS QUE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

ENTÃO:

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2,$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{v},$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}} - \cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}} - \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}} - \cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

OBS: TAMBÉM DÁ PRA RESOLVER ESSES EXERCÍCIOS "ABRINDO" AS EXPRESSÕES... A GENTE FAZ $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$, E A GENTE FAZ AS CONTAS EXPANDINDO TODOS OS "$\vec{u}$"S E "$\vec{v}$"S, E TENTANDO TRABALHAR COM NÚMEROS AO INVÉS DE VETORES.

TRUQUE PRO 2c...

2c) ( ) $\|\,\|\vec{u}\|\,\vec{v}\,\| = \|\,\|\vec{v}\|\,\vec{u}\,\|$

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\|\vec{u}\|\vec{v}$	$\|\vec{v}\|\vec{u}$
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(3,4)}$	$\overrightarrow{(6,8)}$	$\overrightarrow{(10,0)}$
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(0,6)}$	$\overrightarrow{(6,0)}$

DÁ PRA RESOLVER FAZENDO $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$, MAS AS CONTAS FICAM BEM GRANDES...

TAMBÉM DÁ PRA RESOLVER "ELEVANDO AO QUADRADO"...

LEMBREM Q[...]
PROVOU QU[...]
$\|k\cdot\overrightarrow{(a,b)}[...]$
$\|k\cdot\vec{w}\|[...]$
SUBSTITU[...]

TEMOS:
$\|\,\|\vec{u}\|[...]$
E SU[...]

...TÃO

$\ldots\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$.

$\ldots\cdot\vec{v}=0$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$-\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}$

$+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot 0+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ então $\vec{u}-\vec{v}\perp\vec{u}+\vec{v}$.

...GAMOS QUE $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$.

...: $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$,

$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{v}$,

$\ldots\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}-\cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

$=\cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}}-\cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$=0$.

OBS: TAMBÉM DÁ PRA RESOLVER ESSES EXERCÍCIOS "ABRINDO" AS EXPRESSÕES... A GENTE FAZ $\vec{u}=\overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(c,d)}$, E A GENTE FAZ AS CONTAS EXPANDINDO TODOS OS "$\vec{u}$"s E "$\vec{v}$"s, E TENTANDO TRABALHAR COM NÚMEROS AO INVÉS DE VETORES.

LEMBREM QUE A GENTE PROVOU QUE:

$\|k\cdot\overrightarrow{(a,b)}\|=|k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

$\|k\cdot\vec{w}\|=|k|\,\|\vec{w}\|$ (☆)

SUBSTITUINDO k POR $\|\vec{u}\|$ E $\vec{w}$ POR $\vec{v}$ EM (☆)...

TEMOS:

$\|\|\vec{u}\|\vec{v}\|=|\|\vec{u}\||\,\|\vec{v}\|$ (☆☆)

E SUBSTITUINDO $k:=\|\vec{v}\|$, $\vec{w}:=\vec{u}$ EM (☆)

VOCÊS DEVEM ESTAR VENDO ALGO ASSIM ("TEOREMAS", "LEMAS", "COROLÁRIOS", ETC) EM MD...

"TEOREMAS" SERVEM PRA DEIXAR AS CONTAS MAIS CURTAS.

TRUQUE PRO 2c...

2c) ( ) $\|\|\vec{u}\|\vec{v}\|=\|\|\vec{v}\|\vec{u}\|$

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\|\vec{u}\|\vec{v}$	$\|\vec{v}\|\vec{u}$	$\|\|\vec{u}\|\vec{v}\|$	$\|\|\vec{v}\|\vec{u}\|$
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(3,4)}$	$\overrightarrow{(6,8)}$	$\overrightarrow{(10,0)}$	10	10
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(0,6)}$	$\overrightarrow{(6,0)}$	6	6

DÁ PRA RESOLVER FAZENDO $\vec{u}=\overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(c,d)}$, MAS AS CONTAS FICAM BEM GRANDES...

TAMBÉM DÁ PRA RESOLVER "ELEVANDO AO QUADRADO"...

TEMOS:

$\|\|\vec{v}\|\vec{u}\|=|\|\vec{v}\||\,\|\vec{u}\|$ (☆☆☆)

CONTAS:

$\|\|\vec{u}\|\vec{v}\|=|\|\vec{u}\||\,\|\vec{v}\|$ (POR ☆☆)

$=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (PORQUE $\|\vec{u}\|\geq 0$)

$=\|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|$

$=|\|\vec{v}\||\,\|\vec{u}\|$ (PORQUE $\|\vec{v}\|\geq 0$)

$=\|\|\vec{v}\|\vec{u}\|$ (POR ☆☆☆).

$\boxed{\text{GA 4/maio/2016}}$

Dica: um dos melhores modos de estudar pra GA (no sentido de "garantir que vocês estão sabendo a matéria") é fazer as listas de exercícios da Ana Isabel... Tem links pra elas na minha página.

Os exercícios das duas primeiras listas eles usam menos operações do que a gente viu até agora e eles introduzem vários conceitos novos... P.ex. "paralelogramo", "ponto médio", "simetria", "triângulo retângulo"...

Vocês vão ter que "traduzir" idéias geométricas pra idéias "algébricas"...
"analítica"

Dica: usem o livro do CEDERJ.

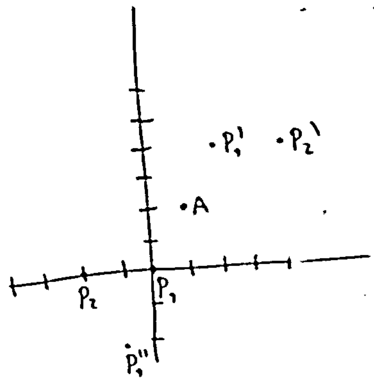
lista / exercício

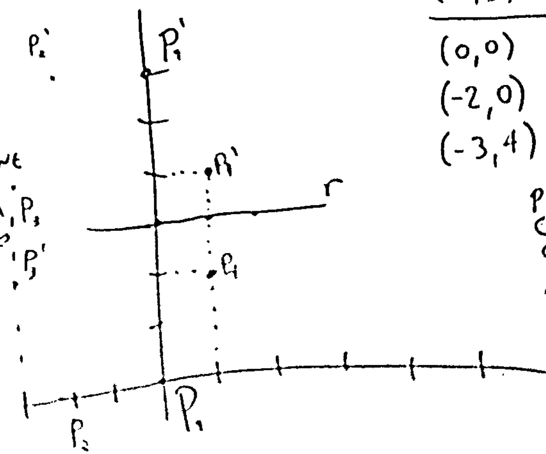
1.5) Determine o ponto simétrico a P em relação ao ponto $A=(1,2)$ seguintes casos. Faça um esboço.

a) $P_1=(0,0)$
b) $P_2=(-2,0)$
c) $P_3=(-3,4)$
d) $P_4=(1,2)$
e) $P_5=(x,y)$

Seja r a reta que contém todos os pontos (x,y) com $y=3$. Determine o ponto simétrico à P em relação à reta r nos seguintes casos:

f) $P_1=(0,0)$
g) $P_2=(-2,0)$
h) $P_3=(-3,4)$
i) $P_4=(1,2) \Rightarrow (1,4)$
j) $P_5=(x,y)$





Como podemos tentar resolver o (e) e o (j)?

Dica: faça hipóteses (casos gerais) e teste-as (casos particulares).

Hipótese: No (j). $P_5'=(x,y+6)$.

Testando...

(x,y)	$(x,y+6)$
$(0,0)$	$(0,6)$
$(-2,0)$	$(-2,6)$
$(-3,4)$	$(-3,10)$

Pode ser difícil encontrar a fórmula certa e mais difícil ainda mostrar que ela está certa... mas é fácil:

- chutar fórmulas,
- testá-las,
- mostrar que uma fórmula está errada.

GA 9/maio/2016

No final da aula passada nós vimos alguns problemas sobre simetria — alguns da Lista 1 da Ana Isabel, outros não — que eu pedi pra vocês resolverem os primeiros itens deles no olhômetro, e o último item de cada um envolvia encontrar uma fórmula — eu sugeri que vocês chutassem fórmulas e as testassem...

Hoje

Muitas coisas, começando com exercícios de olhômetro e dicas sobre traduzir entre construções e fórmulas.

Em cada um dos itens abaixo seja r a reta que passa por A e B, P_i' o ponto de r mais próximo a P_i, e P_i'' o ponto simétrico a P_i com relação a r.

a) $A=(0,2)$, $B=(2,2)$, $P_1=(1,0)$, $P_2=(2,0)$, $P_3=(1,1)$, $P_4=(2,1)$.

b) $A=(0,3)$, $B=(2,3)$, P_1, P_2, P_3 e P_4 como no item anterior

c) $A=(0,4)$, $B=(2,4)$, P_1, P_2, P_3, P_4 como nos itens anteriores

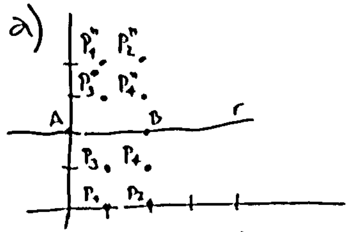
d) $A=(0,0)$, $B=(0,2)$

e) $A=(1,0)$, $B=(1,2)$

f) $A=(0,0)$, $B=(2,2)$

g) $A=(0,1)$, $B=(2,3)$

a)



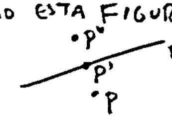
$P_1' =$ $\quad$ $P_2' =$

$P_3' =$ $\quad$ $P_4' =$

$P_1'' =$ $\quad$ $P_2'' =$

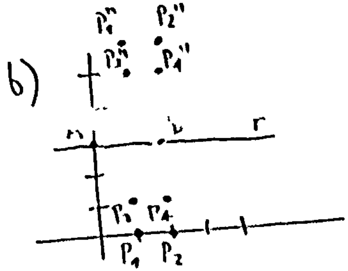
$P_3'' =$ $\quad$ $P_4'' =$

Obs: Em "matematiquês" (isto é, em linguagem matemática formal) é difícil a gente falar de objetos que mudam de lugar (ou de tamanho) — então a gente costuma dar nomes diferentes pro "objeto antes" e pro "objeto depois". Os problemas que vocês acabaram de fazer são pra gente entender como esta figura

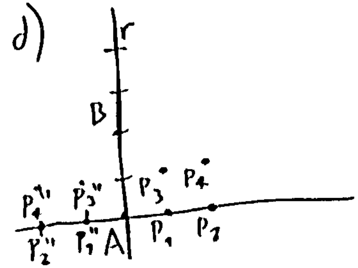


muda quando P ou r se desloca.

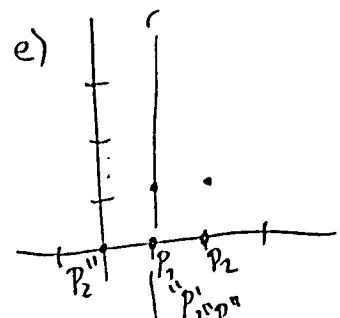
b)



d)



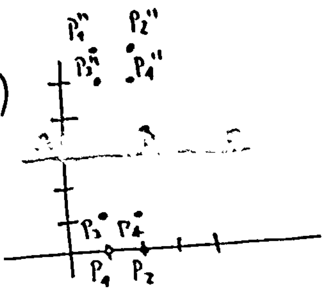
e)



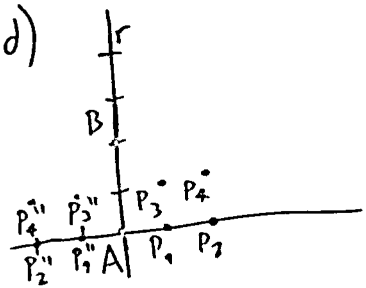
f)

...DA QUANDO P
... r SE DESLOCAM.

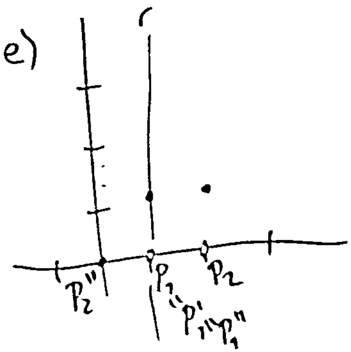
b)



d)



e)

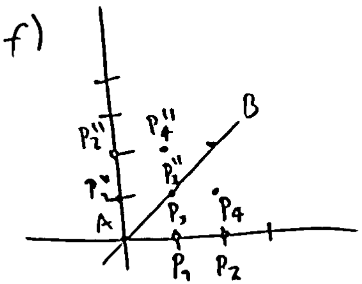


(0) -

s''...

es

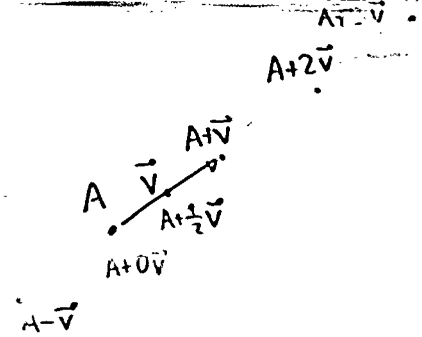
f)



Reparem:

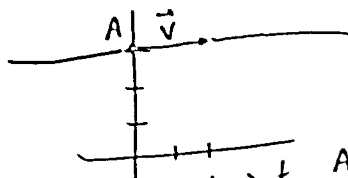
- Dois pontos (diferentes) geram uma reta (que passa pelos dois)
- Um ponto A um vetor $\vec{v}$ geram uma reta...
  - o $\vec{v}$ dá a direção da reta, ou:
  - a reta contém todos os pontos da forma $A+t\vec{v}$

(trajetórias - movimento retilíneo uniforme ("MRU"))



Todo ponto da reta r "gerada" por A e $\vec{v}$ (depois a gente vai ver uma notação precisa pra isto) está associado a um valor de t...

Ex: $A=(0,3)$
$\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$



	t	$A+t\vec{v}$
$(0,3)\in r$ $(t=0)$	0	$(0,3)$
$(1,3)\in r$ $(t=\frac{1}{2})$	1	$(2,3)$
$(2,3)\in r$ $(t=1)$	2	$(4,3)$
$(3,3)\in r$ $(t=1{,}5)$		

Idéia nova

$\vec{v}\,/\!/\,\frac{1}{2}\vec{v}$

"$\vec{v}$ é paralelo a $\frac{1}{2}\vec{v}$"

Expressões como $\vec{v}/\!/\vec{w}$ são parecidas com $\vec{v}\perp\vec{w}$ no sentido de que ambas respondem "verdadeiro" ou "falso".

Def: $\vec{v}/\!/\vec{w}$ se e só se
$\exists\lambda\in\mathbb{R}.\ \vec{v}=\lambda\vec{w}$ ou
$\exists\lambda\in\mathbb{R}.\ \vec{w}=\lambda\vec{v}$.

Será que $\overrightarrow{(3,0)}/\!/\overrightarrow{(4,0)}$?
Sim: $\overrightarrow{(3,0)}=\frac{3}{4}\overrightarrow{(4,0)}$
e $\overrightarrow{(4,0)}=\frac{4}{3}\overrightarrow{(3,0)}$.

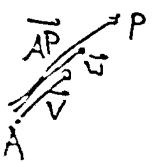
Lembrem que qualquer (a,b) é ortogonal ao $\overrightarrow{(0,0)}$...

Será que $\overrightarrow{(3,0)}/\!/\overrightarrow{(0,0)}$?
Sim: $\overrightarrow{(0,0)}=0\cdot\overrightarrow{(3,0)}$
(mas não existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{(3,0)}=\lambda\cdot\overrightarrow{(0,0)}$)

GA 9/maio/2016

Seja r a reta gerada por A e $\vec{v}$ (obs: $\vec{v} \neq \overrightarrow{(0,0)}$).

Então os pontos de r são exatamente os pontos da forma $A+\vec{w}$, onde $\vec{w} /\!/ \vec{v}$... e os pontos de r são os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que $\overrightarrow{AP} /\!/ \vec{v}$.



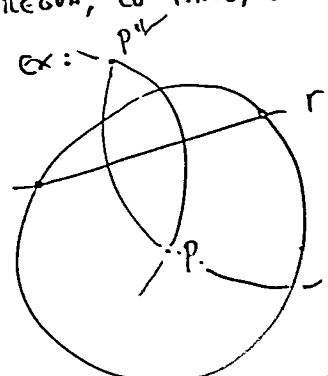
Obs: $\overrightarrow{(1,2)} \not\parallel \overrightarrow{(3,4)}$...

Porque? $\overrightarrow{(1,2)} = \lambda\overrightarrow{(3,4)}$ só é verdade se $1=\lambda 3$ e $2=\lambda 4$ forem obedecidas ao mesmo tempo, ou seja, se $\lambda=\frac{1}{3}$ e $\lambda=\frac{2}{4}$ ao mesmo tempo.

Estamos tentando resolver coisas pelo olhômetro primeiro e depois encontrar a fórmula...

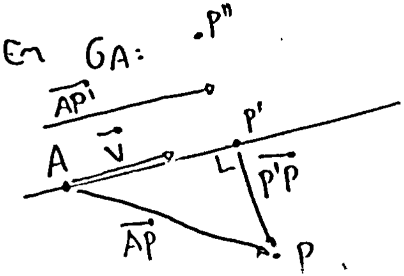
Em GA temos um truque, que é que muitas fórmulas correspondem a "construções geométricas" - mas num sentido diferente do da Geometria do Ensino Médio, que usava régua, compasso, esquadro...

Ex:



Esta construção com círculos dá o A''... ela usa círculos, que a gente só vê em GA logo antes da PA porque eles envolvem raízes quadradas e contas difíceis.

Em GA:



$\overrightarrow{AP'} /\!/ \vec{v}$,

$\overrightarrow{P'P} \perp \vec{v}$

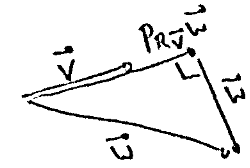
Toda vez que temos $\vec{v} \neq \vec{0}$ (obs: $\vec{0} = \overrightarrow{(0,0)}$) e $\vec{u}$ qualquer, vai existir um único jeito de decompor o $\vec{w}$ numa parte paralela e uma parte ortogonal a $\vec{v}$...

Na figura acima, decompusemos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'P}$ onde $\overrightarrow{AP'} /\!/ \vec{v}$ e $\overrightarrow{P'P} \perp \vec{v}$...

Def: $\mathrm{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'}$

Mais formalmente, $\mathrm{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{AP}$ é a parte paralela a $\vec{v}$ da decomposição.

Figura:

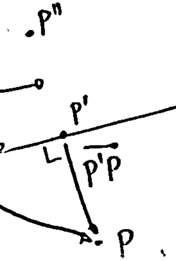


Exerc...
encont...
geom...
(= ol...
em ...
caso...

a) ...

b)

c)



...A VEZ QUE
...OS $\vec{V} \neq \vec{0}$ (OBS: $\vec{0} = (0,0)$)
...$\vec{W}$ QUALQUER,
... EXISTIR UM ÚNICO
...ITO DE DECOMPOR O $\vec{W}$
...MA PARTE PARALELA E
...O PARTE ORTOGONAL A $\vec{V}$...

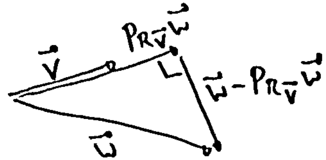
...A FIGURA ACIMA,
DECOMPUSEMOS $\vec{AP} = \vec{AP'} + \vec{P'P}$
ONDE $\vec{AP'} \parallel \vec{V}$
E $\vec{P'P} \perp \vec{V}$...

DEF: $Pr_{\vec{V}} \vec{AP} = \vec{AP'}$

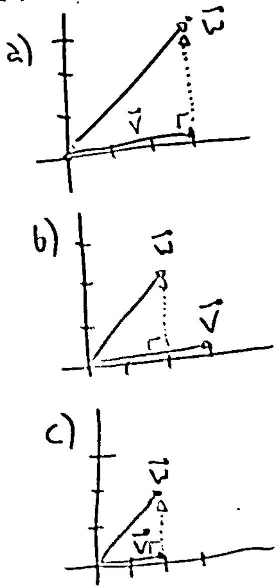
MAIS FORMALMENTE,
$Pr_{\vec{V}} \vec{AP}$ É A PARTE PARALELA
A $\vec{V}$ DA DECOMPOSIÇÃO.

...OS

FIGURA:

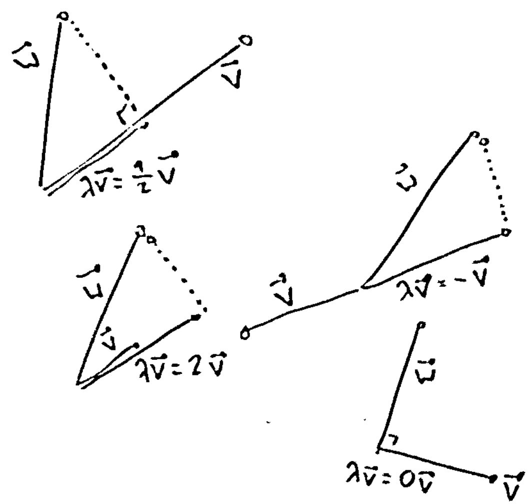


EXERCÍCIO:
ENCONTRE $Pr_{\vec{V}}\vec{W}$
GEOMETRICAMENTE
(= OLHOMETRICAMENTE)
EM CADA UM DOS
CASOS ABAIXO.



OBS: $Pr_{\vec{V}}\vec{W} \parallel \vec{V}$,
$Pr_{\vec{V}}\vec{W} = \lambda \vec{V}$ PARA
ALGUM $\lambda \in \mathbb{R}$...
NA AULA QUE VEM
VAMOS VER UMA
FÓRMULA QUE
CALCULA ESTE λ.

DICA:
NO (a) TEMOS $\lambda = 1$,
NO (b) TEMOS $\lambda = \frac{2}{3}$,
NO (c) TEMOS $\lambda = 1$.



GA 11/maio/2016

NOTAÇÃO (TEMPORÁRIA):

$\overrightarrow{(a,b)}' = \overrightarrow{(-b,a)}$

Se $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$,
calcule e represente graficamente $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}''', \vec{v}''''$.

Vocês acabaram de fazer um exercício (do ...material.pdf) sobre visualizar projeções.

V/F/Justifique:

a) (F) $Pr_{(2\vec{v})}\vec{w} = 2\,Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

b) (V) $Pr_{(2\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

c) (F) $Pr_{\vec{v}}\vec{w} = Pr_{\vec{w}}\vec{v}$

d) (V) $Pr_{\vec{v}}(2\vec{w}) = 2\,Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

e) (F) $Pr_{\vec{v}}(2\vec{w}) = Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

f) (V) $\vec{w} = Pr_{\vec{v}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}'}\vec{w}$

Respostas do exercício impresso:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$

$\lambda_4 = 1$

$\lambda_5 = 1/2$

$\lambda_6 = 0 \quad = \lambda_{18}$

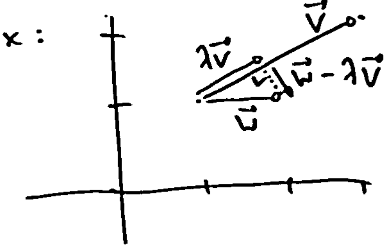
$\lambda_7 = -1/2 \quad = \lambda_{17}$

$\lambda_8 = -1 \quad = \lambda_{16}$

$\lambda_9 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \ldots = \lambda_{15} = -\frac{3}{2}$

Como é que a gente calcula $Pr_{\vec{v}}\vec{w}$ em situações mais complicadas, nas quais o olhômetro não é suficiente?

Ex:



... a gente calcula
$(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v}$,
e encontra o λ pro qual
$(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \perp \vec{v}$.

No exemplo acima,

$$\left(\overrightarrow{(1,0)} - \lambda\,\overrightarrow{(2,1)}\right) \cdot \overrightarrow{(2,1)} = 0. \quad (\star)$$

Exerc: encontre o λ que satisfaz $(\star)$.

$\left(\overrightarrow{(1,0)} - \lambda\overrightarrow{(2,1)}\right) \cdot \overrightarrow{(2,1)} =$

$\left(\overrightarrow{(1,0)} - \overrightarrow{(2\lambda,\lambda)}\right) \cdot \overrightarrow{(2,1)} =$

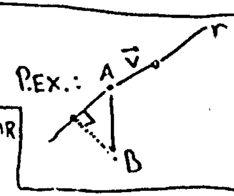
$\overrightarrow{(1-2\lambda,-\lambda)} \cdot \overrightarrow{(2,1)} =$

$2 - 4\lambda - \lambda \;=\; 2 - 5\lambda$

Queremos $2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$

AULA QUE VEM

APLICAÇÕES DO "Pr" – P.EX.:

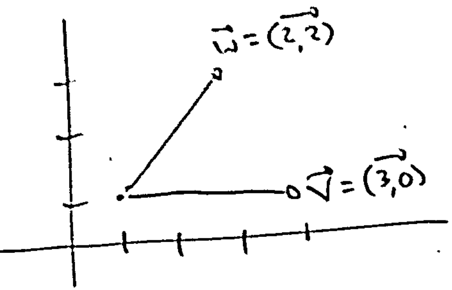


PRA CASA: TENTE DEMONSTRAR OS ITENS (b), (d), (f) USANDO $Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$.

SE $\vec{v} = \overrightarrow{(3,0)}$
E $\vec{w} = \overrightarrow{(2,2)}$,

$$Pr_{(2\underbrace{\vec{v}}_{\overrightarrow{(3,0)}})}\underbrace{\vec{w}}_{\overrightarrow{(2,2)}} = Pr_{\overrightarrow{(6,0)}}\overrightarrow{(2,2)} = \overrightarrow{(2,0)}$$

DICA 1



ESCREVENDO ISTO DE UM JEITO MAIS "TRADICIONAL",

$$Pr_{(2\vec{v})}\vec{w} = Pr_{(2\cdot\overrightarrow{(3,0)})}\overrightarrow{(2,2)}$$
$$= Pr_{\overrightarrow{(6,0)}}\overrightarrow{(2,2)}$$
$$= \overrightarrow{(2,0)}$$

DICA PRA COMO ESCREVER CONTRA-EXEMPLOS:

a) SE $\vec{v} = \overrightarrow{(3,0)}$ E $\vec{w} = \overrightarrow{(2,2)}$,

$$Pr_{(2\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\overrightarrow{(6,0)}}\overrightarrow{(2,2)} = \overrightarrow{(2,0)}$$
$$2Pr_{\vec{v}}\vec{w} = 2\,Pr_{\overrightarrow{(3,0)}}\overrightarrow{(2,2)} = 2\cdot\overrightarrow{(2,0)} = \overrightarrow{(4,0)}$$

DICA 2:
QUEM ACHAR QUE ALGUM DOS ITENS É FALSO TENTA ENCONTRAR UM CONTRA-EXEMPLO, "CALCULAR" TUDO NO OLHÔMETRO E DISCUTIR COM OS COLEGAS.

ACABAMOS DE VER QUE $Pr_{\overrightarrow{(2,1)}}\overrightarrow{(1,0)} = \frac{2}{5}\overrightarrow{(2,1)}$...

$$Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(c,d)} \overset{?}{=} \lambda\overrightarrow{(a,b)}$$

VAMOS ENCONTRAR O λ QUE SATISFAZ:

$$(\overrightarrow{(c,d)} - \lambda\overrightarrow{(a,b)})\cdot\overrightarrow{(a,b)} = 0$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{(c-\lambda a, d-\lambda b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}$$
$$\shortparallel$$
$$ac - \lambda a^2 + bd - \lambda b^2$$
$$\shortparallel$$
$$ac + bd - \lambda(a^2+b^2)$$
$$ac + bd = \lambda(a^2+b^2)$$
$$\boxed{\frac{ac+bd}{a^2+b^2} = \lambda}$$

$$Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \lambda\vec{v}$$
$$(\vec{w} - \lambda\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$$
$$\shortparallel$$
$$\vec{w}\cdot\vec{v} - \lambda\vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{w}\cdot\vec{v} = \lambda\vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$\boxed{\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \lambda}$$

$$\boxed{Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}}$$

GA 16/MAIO/2016

HOJE:
MUDANÇA DE PLANOS!
AO INVÉS DA GENTE COMEÇAR POR APLICAÇÕES DA PROJEÇÃO A GENTE VAI COMEÇAR POR RETAS.

RETAS SÃO CONJUNTOS COM INFINITOS PONTOS.
COMO ESCREVER ESSES CONJUNTOS EM MATEMATIQUÊS, AO INVÉS DA GENTE TER QUE USAR PORTUGUÊS E DIZER "A RETA GERADA POR A E $\vec{v}$" OU "A RETA QUE PASSA POR A E B"?

$\{2,3,5\}$: OK

$\{2,\dots,5\} = \{2,3,4,5\}$ OK

$\{2,4,\dots,10\} = \{2,4,6,8,10\}$ OK

$\{\underbrace{x\in\mathbb{R}}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{2<x<3}_{\text{FILTRO}}\}$

$\{\underbrace{x^2}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{x\in[2,3]}_{\text{GERADOR}}\}$

EXERCÍCIOS: CALCULE:

$\{x:\{0,1,2,3\};\ x^2\}$

$\{x:\{0,1,2,3\},\ x\geq 2;\ x\}$

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$A = \{(1,4),(2,4),(1,3)\}$

$B = \{(1,3),(1,4),(2,4)\}$

$C = \{(1,1),(1,4),(2,4),(2,4)\}$

$D = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$K = \{x:\{0,1,2,3\};\ (x,3-x)\}$

$M = \{y:\{0,1,2,3\};\ (3-y,y)\}$

$H = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$

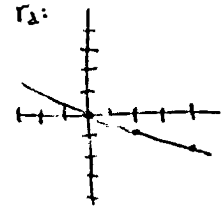
$r_a' = \{x:\{-2,\dots,2\},\ y:\{-2,\dots,2\},\ x+2y=0;\ (x,y)\}$

$r_j' = \{t:\{-2,\dots,2\};\ (0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}\}$

COMO É QUE A GENTE PODE ENCONTRAR ALGUNS PONTOS DE r_a, r_b, ETC USANDO UMA GAMBIARRA?

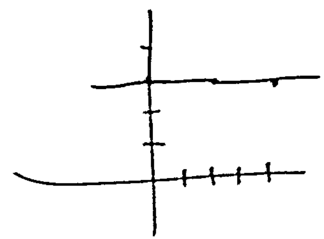
x	y	$x+2y=0$	(x,y)
0	0	1	$(0,0)$
1	$-\frac{1}{2}$	1	$(1,-\frac{1}{2})$
2	-1	1	$(2,-1)$
4	-2	1	$(4,-2)$

r_a:



r_j:

t	$(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}$
0	$(0,3)$
1	$(2,3)$
2	$(4,3)$



NOTAÇÃO PADRÃO

NOTAÇÃO MAIS BÁSICA (NÃO-PADRÃO):

$\{\underbrace{x:\mathbb{R}}_{\text{GER}},\ \underbrace{y:\mathbb{R}}_{\text{GER}},\ \underbrace{x+2y=0}_{\text{FILTRO}};\ \underbrace{(x,y)}_{\text{EXPR}}\} \quad = r_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y=0\}$

$\{\underbrace{t:\mathbb{R}}_{\text{GER}};\ \underbrace{(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}}_{\text{EXPR}}\} \quad = r_j = \{(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

TRUQUES: INCL…

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2…$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=a…$

EQUA… ("RET… DA …

OBS: $2x+3…$

$3y…$

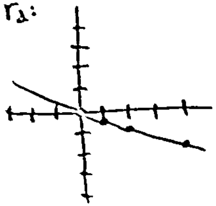
$y…$

REPRESEN… GRAFICAM… AS RETAS… 15 MINS, …

... A GENTE PODE ... ALGUNS PONTOS ... ETC USANDO ... BIARRA?

$x+2y=0$	(x,y)
1	$(0,0)$
1	$(1,-\frac{1}{2})$
1	$(2,-1)$
1	$(4,-2)$

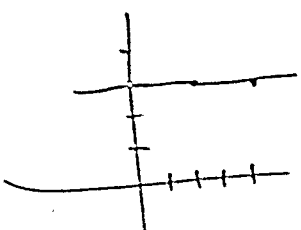
r_a:



$(x,y)\}$

r_j:

t	$(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}$
0	$(0,3)$
1	$(2,3)$
2	$(4,3)$



TRUQUES:

INCLINAÇÃO (COEF. ANG.)

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x+3\}$ — A RETA CORTA O EIXO y NO PONTO $(0,3)$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y=ax+b}\}$

EQUAÇÃO CARTESIANA ("REDUZIDA"?) DA RETA

OBS: $2x+3y=6$

$3y=6-2x$

$y=2-\frac{2}{3}x$

> REPRESENTEM GRAFICAMENTE AS RETAS r_a A r_n.
> 15 MINS, EM GRUPO.

VOLTANDO ÀS APLICAÇÕES DA PROJEÇÃO...

SEJAM:

$r=\{(1,1)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$, $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$

$B=(2,1)$.

QUAL É O PONTO DE r, C, MAIS PRÓXIMO DE B?

TEMOS TRÊS JEITOS "NATURAIS" DE ENCONTRAR C...

(OBS: $\overrightarrow{AC}=Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$)

1) $C=A+Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$

2) SEJA $s=\{B+t\vec{v}' \mid t\in\mathbb{R}\}$

$=\{(2,1)+t\overrightarrow{(-1,2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$.

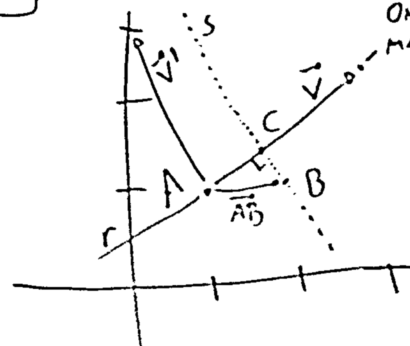
ENTÃO $r\perp s$, $B\in s$, $C\in r\cap s$.

3) SEJAM $f(t)=d(B, A+t\vec{v})$,

$g(t)=f(t)^2$.

ONDE ESTÁ O MÍNIMO DA FUNÇÃO $f(t)$?

MAIS FÁCIL: ONDE ESTÁ O MÍNIMO DE $g(t)$?



> PRA CASA:
> TENTEM RESOLVER O EXERCÍCIO 3 DO PDF

$\boxed{\text{GA 18/maio/2016}}$

Sejam:

$A=(1,1)$, $\vec{v}=(2,1)$,

$r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$B=(2,1)$

Qual é o ponto $C\in r$ mais próximo de B?

Vimos (por alto) na aula passada que temos três jeitos "naturais pra encontrar C...

1) $C=A+Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$

2) Seja $s=\{B+t\vec{v}' \mid t\in\mathbb{R}\}$, $\vec{v}' = (-1,2)$.

Então $r\perp s$, $B\in s$, $C\in r\cap s$.

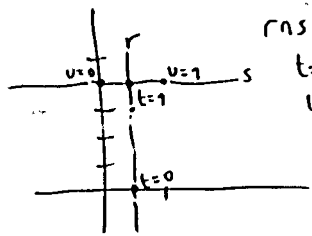
3) Sejam $f(t)=d(B,A+t\vec{v})$, $g(t)=f(t)^2$.

Onde está o mínimo de $f(t)$? Mais fácil: onde está o mínimo de $g(t)$?

Pra agora: façam o ex. 3 do PDF. (10 mins, em grupo)

3a) $r=\{(1,0)+t\overrightarrow{(0,3)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$s=\{(0,1)+u\overrightarrow{(2,0)} \mid u\in\mathbb{R}\}$



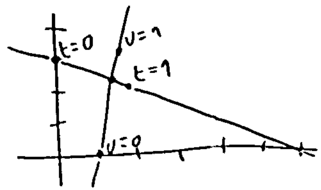
$r\cap s=(1,1)$

$t=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$u=\frac{1}{2}$

3d) $r=\{(0,3)+t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,

$s=\{(1,0)+u\overrightarrow{(1,3)} \mid u\in\mathbb{R}\}$



$(x,y)\in r\cap s$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3-\frac{x}{2}\}$

$s=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-3+3x\}$

$3-\frac{x}{2}=-3+3x$

$-\frac{6}{2}x-\frac{x}{2}=-3-3$

$-\frac{7}{2}x=-6$

$x=6\cdot\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$

$y=3-\frac{12/7}{2}=3-\frac{6}{7}=\frac{21-6}{7}=\frac{15}{7}$

$y=-3+3\frac{12}{7}=-\frac{21}{7}+\frac{36}{7}=\frac{15}{7}$

$(x,y)=\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$

(pelo método mais fácil: $y=3-\frac{x}{2}$, $y=-3+3x$)

2º método mais fácil:

$y=3-\frac{x}{2}$ (equação de r)

$(x,y)=(1,0)+u\overrightarrow{(1,3)}$

$=(1+u,3u)$ (reta s, parametrizada)

Pra qual valor de u temos

$(1+u,3u)\in r$, ou seja,

$(1+u,3u)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3-\frac{x}{2}\}$, ou seja,

$3u=3-\frac{1+u}{2}$?

3º método - dá um sistema mais difícil...

Queremos

$(x,y)=(2t,3-t)$

$(x,y)=(1+u,3u)$...

A gente começa encontrando t e u que obedeçam

$2t=1+u$,

$3-t=3u$

$t=\frac{1+u}{2}$,

$-t=3u-3$

$t=3-3u$

$\frac{1+u}{2}=3-3u$

etc...

Voltando láá pra esquerda...

$g(t)=d(B,A+$

$=\|A+t\vec{v}$

$=\|\underbrace{A-B}_{\text{vetor } \overrightarrow{BA}}$

$=(\overrightarrow{BA}+$

$=\overrightarrow{BA}\cdot$

$=\overrightarrow{BA}\cdot$

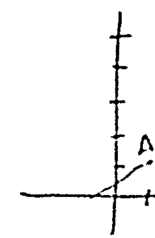
$=(\overrightarrow{-1,0}$

$=1$

$g(t)=t$

$g'(t)=$

$g'(t)=0$



...ais fácil:

(equação de r)

$...) + u(\overrightarrow{1,3})$

$...+u, 3u)$ (reta s, parametrizada)

... valor de u temos

$...u) \in r$, ou seja,

$...u) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3 - \frac{x}{2}\}$, ou seja,

$3u = 3 - \frac{1+u}{2}$?

...todo − dá um sistema
... difícil...
...emos

$...) = (2t, 3-t)$

$...) = (1+u, 3u)$...

A gente começa encontrando t e u que obedeçam:

$2t = 1+u,$

$3 - t = 3u$

$t = \frac{1+u}{2},$

$-t = 3u - 3$

$t = 3 - 3u$

$\frac{1+u}{2} = 3 - 3u$

etc...

$= \frac{21-6}{7} = \frac{15}{7}$

$...\frac{1}{...} + \frac{36}{7} = \frac{15}{7}$

...fácil:)
...3x)

Voltando láá pra esquerda...

$g(t) = d(B, A + t\vec{v})^2$

$= \|A + t\vec{v} - B\|^2$

$= \|\underbrace{A - B}_{\text{vetor: } \overrightarrow{BA}} + t\vec{v}\|^2$

$= (\overrightarrow{BA} + t\vec{v}) \cdot (\overrightarrow{BA} + t\vec{v})$

$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot t\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA} + t\vec{v} \cdot t\vec{v}$

$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + t(2\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA}) + t^2 \vec{v} \cdot \vec{v}$

$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + t(2(\overrightarrow{2,1}) \cdot (\overrightarrow{-1,0})) + t^2((\overrightarrow{-1,0}) \cdot (\overrightarrow{-1,0}))$

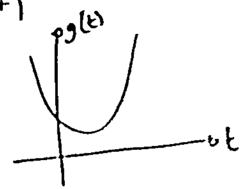
$= (\overrightarrow{-1,0}) \cdot (\overrightarrow{-1,0}) + t(2(\overrightarrow{2,1}) \cdot (\overrightarrow{-1,0})) + t^2$

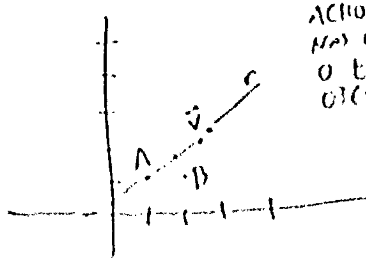
$= 1 \qquad + t(-4) \qquad + t^2$

$g(t) = t^2 - 4t + 1$

$g'(t) = 2t - 4$

$g'(t) = 0$ só acontece quando $2t - 4 = 0$
$\to 2t = 4$
$t = 2$





Acho que errei nas contas !!
O t certo obedece $0 < t < 1$...
!!

Exercícios do PDF novo:

Item a:

$O = (3,1)$

$\vec{U} = (\overrightarrow{2,1})$

$\vec{V} = (\overrightarrow{-1,1})$

$(a,b)_\Sigma$ "...no sistema de coordenadas Σ"

$D = (1,2)_\Sigma$

$= O + 1 \cdot \vec{U} + 2 \cdot \vec{V}$

Item f:

$O = (4,4)$

$\vec{U} = (\overrightarrow{-2,1})$

$\vec{V} = (\overrightarrow{-1,-2})$

$(a,b)_\Sigma = (4,4) + a(\overrightarrow{-2,1}) + b(\overrightarrow{-1,-2})$

$= (4 - 2a - b, 4 + a - 2b)$

Se $(a,b)_\Sigma = (x,y)$...

ex: se $(a,b)_\Sigma = (1,3)$,

$a = ?$

$b = ?$

GA 18/MAIO/2016

ITEM F:

$O = (4,4)$

$\vec{u} = (-2,1)$

$\vec{v} = (-1,-2)$

$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b)$

SE $(a,b)_\Sigma = (1,3)$,

$a = ?$

$b = ?$

PELO OLHÔMETRO: $a=1$, $b=1$

PELO SISTEMA:

$4-2a-b=1$,

$4+a-2b=3$

SE $(a,b)_\Sigma = (2,1)$

O OLHÔMETRO NÃO DÁ RESULTADO EXATO - A GENTE VAI TER QUE RESOLVER

$4-2a-b=2$,

$4+a-2b=3$.

PRA CASA:

1. TENTEM CONSEGUIR FÓRMULAS PRA CALCULAR a E b DIRETO A PARTIR DE x E y NOS ITENS b,c,d,e (FÁCEIS), g (MAIS OU MENOS), a,f (DIFÍCEIS)...

   OBS: "CALCULAR" NO SENTIDO DE SÓ FAZER OPERAÇÕES ELEMENTARES A PARTIR DOS VALORES DE x, y, SEM "RESOLVER SISTEMA".

2. NO ITEM f DÁ PRA ENCONTRAR a E b USANDO PROJEÇÕES. COMO?

GA 23/maio/2016

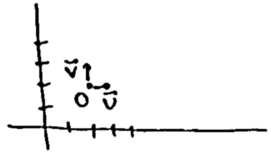
Exercícios que eu deixei pra casa no fim da última aula:

1) Tentem conseguir <u>fórmulas</u> pra calcular a e b a partir de x e y nos itens b, c, d, e (fáceis), g (mais ou menos), a, f (difíceis).

OBS: "calcular" no sentido de só fazer operações elementares a partir dos valores de x e y, sem "resolver sistema"...

2) No item f da lista encontre a e b usando projeções. Como?

b)



$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$

$= (2,2) + a(\overrightarrow{1,0}) + b(\overrightarrow{0,1})$

$= (2+a, 2+b)$

$(a,b)_\Sigma = (x,y)$?

Exemplo:

$(a,b)_\Sigma = (3,5)$

$\parallel$

$(2+a, 2+b)$ $\quad (2+a, 2+b) = (3,5)$, $2a=3$, $2b=5$

$a = 1$

$b = 3$

$(2+a, 2+b) = (99, 200)$

$(a,b) = (97, 198)$

$(2+a, 2+b) = (x,y)$

$a = x-2$

$b = y-2$

c) $O = (-5,1)$, $\vec{u} = (\overrightarrow{2,0})$, $\vec{v} = (\overrightarrow{0,1})$

$(a,b)_\Sigma = (-5+2a, 1+b)$

$\parallel$

(x,y)

$a = \dots$

$b = \dots$

g) $O = (-3,1)$, $\vec{u} = (\overrightarrow{1,0})$, $\vec{v} = (\overrightarrow{1,1})$

$(a,b)_\Sigma = (-3+a+b, 1+b)$

$\parallel$

(x,y)

$x = -3+a+b$

$y = 1+b$

$b = y-1$

$a = x+3-b$

$= x+3-y+1$

$= x-y+4$

Será que isto está certo? Testem!!! (olhômetro!)

$(1,1)_\Sigma = ?$

$(1,1)_\Sigma = (-1,2)$

Se $a=1$, $b=1$, $x=-1$, $y=2$, será que

a) $(x,y) = (-3+a+b, 1+b)$?

b) $(a,b) = (x-y+4, y-1)$?

f) $O = (4,4)$, $\vec{u} = (\overrightarrow{-2,1})$, $\vec{v} = (\overrightarrow{-1,-2})$

$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b)$

$\parallel$

(x,y)

$$\begin{pmatrix} 4-2a-b \\ 4+a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a-b \\ +a-2b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$x = 4-2a-b$

$y = 4+a-2b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

Pra casa: testem esta fórmula!

$= (-3,1),\ \vec{u}=\overrightarrow{(1,0)},\ \vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$

$(a,b)_\Sigma = (-3+a+b,\ 1+b)$

(x,y)

$$\begin{aligned} x &= -3+a+b \\ y &= 1+b \\ b &= y-1 \\ a &= x+3-b \\ &= x+3-y+1 \\ &= x-y+4 \end{aligned}$$

SERÁ QUE ISTO ESTÁ CERTO?
TESTEM!!! (OLHÔMETRO!)

$(1,1)_\Sigma = ?$

$(1,1)_\Sigma = (-1,2)$

SE $a=1,\ b=1,\ x=-1,\ y=2$,
SERÁ QUE

a) $(x,y) = (-3+a+b,\ 1+b)$?

b) $(a,b) = (x-y+4,\ y-1)$?

$= (4,4),\ \vec{u}=\overrightarrow{(-2,1)},\ \vec{v}=\overrightarrow{(-1,-2)}$

$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b,\ 4+a-2b)$

(x,y)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2a-b\\4+a-2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2a-b\\+a-2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$x = 4-2a-b$

$y = 4+a-2b$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$$

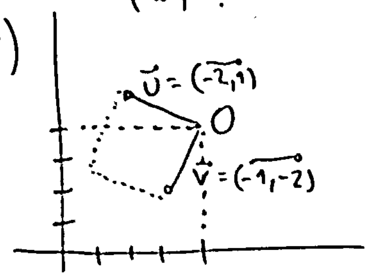
PRA CASA:
TESTEM ESTA
FÓRMULA!

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

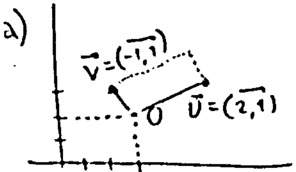
$$\begin{pmatrix}-2&-1\\1&-2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4+1}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

ÁREA( ) = ?

f)



a)



$$\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix} \begin{matrix}\leftarrow \vec{u}\\ \leftarrow \vec{v}\end{matrix}$$

ÁREA( ) $= \left|\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}\right| =$

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot10+3\cdot100\\4\cdot10+5\cdot100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}320\\540\end{pmatrix}$$

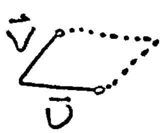
AVISO: A GENTE VAI USAR MATRIZES MUITO POUCO EM GA — MAS A GENTE VAI USAR DETERMINANTES BASTANTE.

DETERMINANTES CALCULAM ÁREAS.

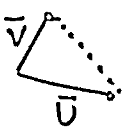
GA 23/MAIO/2016

DOIS VETORES, $\vec{u}$ E $\vec{v}$, GERAM:

- UM PARALELOGRAMO,



- UM TRIÂNGULO:

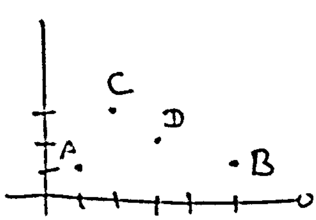


A ÁREA DO TRIÂNGULO É METADE DA ÁREA DO PARALELOGRAMO CORRESPONDENTE.

VAMOS USAR A SEGUINTE NOTAÇÃO (TEMPORÁRIA):

ÁREA(ABC)
ÁREA($\vec{u}$,$\vec{v}$)

SEJAM:



CALCULE: ÁREA(ABC), ÁREA(ADC)

SEJAM:

$A=(0,2)$,
$B=(4,0)$,
$C(t)=(4,2)+t\overrightarrow{(2,1)}$.

ENCONTRE DOIS VALORES DE t PARA OS QUAIS ÁREA(ABC(t)) = 4,
DOIS VALORES PARA OS QUAIS ÁREA(ABC(t)) = 2,
UM VALOR PARA O QUAL ÁREA(ABC(t)) = 0,
E UMA FÓRMULA PARA ÁREA(ABC(t)).

PRA CASA: TENTEM FAZER TODOS OS EXERCÍCIOS DAS 3 PRIMEIRAS LISTAS DA ANA ISABEL - EXCETO OS QUE FALAM DE ÂNGULOS E CÍRCULOS

GA 25/MAIO/2016

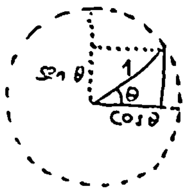
HOJE: REVISÃO DE sen E cos,
ÂNGULOS,
ÂNGULOS ENTRE VETORES,
UMA FÓRMULA BEM PRÁTICA PARA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA...

OBS:
P1: 8/JUN
P2: 27/JUL
VR: 1º/AGO
VS: 3/AGO

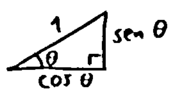
A VR É UNIFICADA (AS TRÊS NO MESMO HORÁRIO), AS OUTRAS SÃO NO HORÁRIO DE CADA AULA

(MAIS INFORMAÇÕES NA SEMANA QUE VEM!!!)

CLASSICAMENTE:

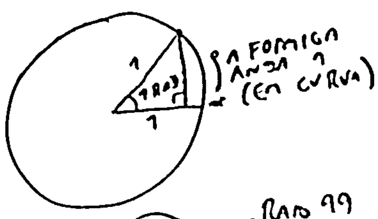


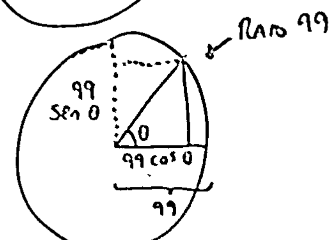
← RAIO 1



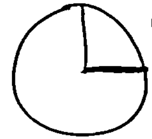
GRAUS	RADIANOS
0°	0
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π
1°	$\frac{\pi}{180}$
234°	$234\frac{\pi}{180}$

"$^\circ$" QUER DIZER "MULTIPLIQUE POR $\frac{\pi}{180}$"

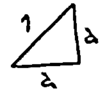




ALGUNS VALORES DE sen E cos SÃO FÁCEIS DE CALCULAR...

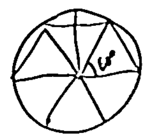


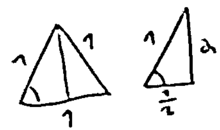
0°: TRIÂNGULO DEGENERADO,
$\cos 0^\circ = 1$,
$\sin 0^\circ = 0$



$a^2+a^2=1^2$
$a^2=\frac{1}{2}$
$a=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ =$
$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

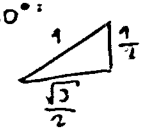




$\left(\frac{1}{2}\right)^2+a^2=1$
$\frac{1}{4}+a^2=1$
$a^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$a^2=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

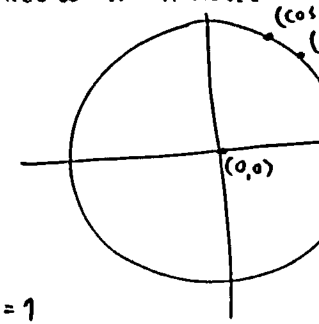
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

30°:



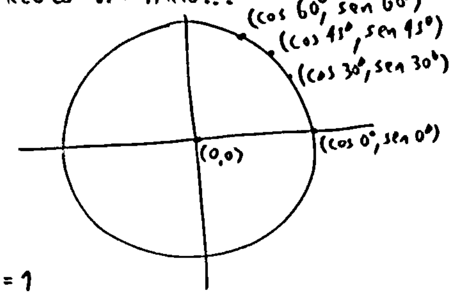
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

VAMOS PENSAR QUE QUANDO θ VARIA O PONTO $(x,y)=(\cos\theta, \text{sen }\theta)$ DESCREVE UMA TRAJETÓRIA CIRCULAR, PERCORRENDO O CÍRCULO UNITÁRIO...



θ
$0^\circ = 0$
$30^\circ = \pi/6$
45°
60°
$90^\circ = \pi/2$
120°
135°
150°
$180^\circ = \pi$
210°
225°
240°
$270^\circ = \frac{2\pi}{2}$
300°
315°
330°

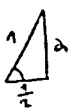
Vamos pensar que quando θ varia o ponto $(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ descreve uma trajetória circular, percorrendo o círculo unitário...



$a^2 + a^2 = 1^2$

$a^2 = \frac{1}{2}$

$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

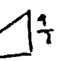


$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 = 1$

$\frac{1}{4} + a^2 = 1$

$a^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

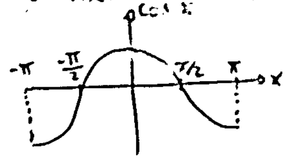


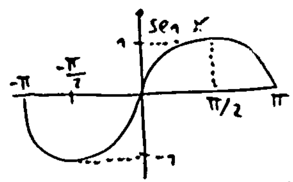
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$

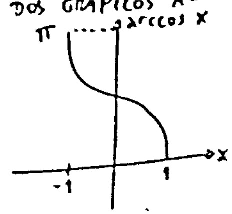
θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$
$0° = 0$		
$30° = \pi/6$		
$45°$		
$60°$		
$90° = \pi/2$		
$120°$		
$135°$		
$150°$		
$180° = \pi$		
$210°$		
$225°$		
$240°$		
$270° = \frac{3\pi}{2}$		
$300°$		
$315°$		
$330°$		
$360°$		

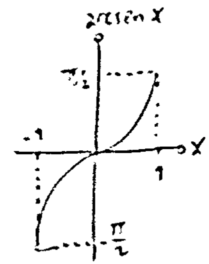
As funções sen e cos, que aparecem em Cálculo 1 (e em montes de outras matérias) recebem um argumento em radianos...





As funções arcsen x e arccos x são inversas de partes dos gráficos acima





x	arccos x	arcsen x
-1		
$-\sqrt{3}/2$		
$-\sqrt{2}/2$		
$-1/2$		
0		
$1/2$		
$\sqrt{2}/2$		
$\sqrt{3}/2$		
1		

Importante:

Quando aparecer algo tipo $\cos 20°$ que você não sabe simplificar

<u>não simplifique</u>.

(Obs: matemáticos não trocam "$\sqrt{2}$" por "1.4142..." — físicos e engenheiros sim.)

Voltando a GA...

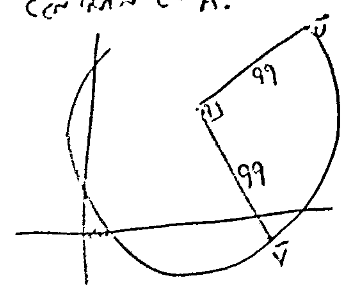
Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 99$,

$\vec{u} \perp \vec{v}$,

$A \in \mathbb{R}^2$,

então $\{A + (\cos\theta)\vec{u} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{v} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

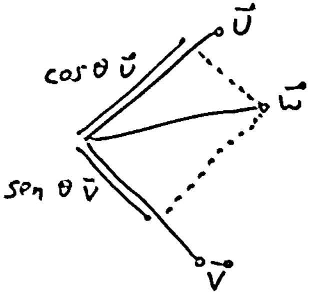
é um círculo de raio 99 centrado em A.



$\boxed{\text{GA 25/maio/2016}}$

ESCOLHA UM θ...

SEJA $\vec{w} = (\cos\theta)\vec{u} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{v}$.

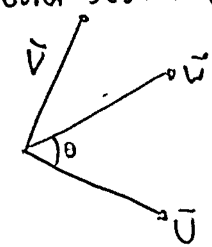


$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v})$$
$$= \vec{u}\cdot\cos\theta\,\vec{u} + \vec{u}\cdot\operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$$
$$= \cos\theta\,\vec{u}\cdot\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}$$
$$= \cos\theta\,\|\vec{u}\|^2$$

AGORA SEJAM $\vec{u}, \vec{v}$ COM $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$,

$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

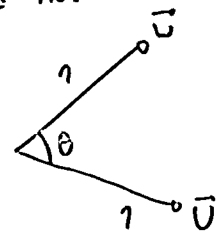
$\vec{u}\cdot\vec{w} = \cos\theta\,\|\vec{u}\|^2$
$= \cos\theta$



AGORA ESQUECE O $\vec{v}$

E DIGAMOS QUE $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| = 1$.

ENTÃO:



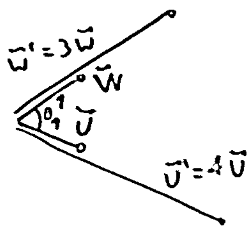
$\vec{u}\cdot\vec{w} = \cos\theta$.

CASO GERAL:

ESCOLHA $\vec{u}'$, $\vec{w}'$,

$\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{w}' = b\vec{w}$,

$\|\vec{u}\| = 1$ $\quad \|\vec{w}\| = 1$



$\vec{u}'\cdot\vec{w}' = ?$

$a\vec{u}\cdot b\vec{w} = ab(\vec{u}\cdot\vec{w})$
$= ab\cos\theta$

FÓRMULA GERAL

(MUITO IMPORTANTE):

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

$\theta = \operatorname{ANG}(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

$\cos\theta = \cos\operatorname{ANG}(\vec{u},\vec{v})$.

$\theta = \arccos\cos\theta$

$$\operatorname{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

EXERCÍCIO:

CALCULE $\operatorname{ANG}(\overrightarrow{(2,0)}, \overrightarrow{(1,2)})$,

E VEJA SE O RESULTADO É PRÓXIMO DE $60°$.

$\|\vec{v}\| = 1.$

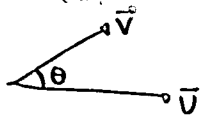
$= \cos\theta.$

FÓRMULA GERAL

(MUITO IMPORTANTE):

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta \; \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

θ = ANG$(\vec{u},\vec{v})$



$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

$\cos\theta = \cos \mathrm{ANG}(\vec{u},\vec{v})$

$$\theta = \arccos\,\cos\theta$$

$$\mathrm{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

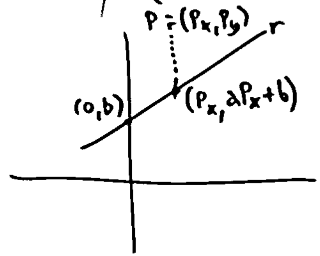
EXERCÍCIO:
CALCULE ANG$\left(\overrightarrow{(2,0)}, \overrightarrow{(1,2)}\right)$,
E VEJA SE O RESULTADO É PRÓXIMO DE $60°$.

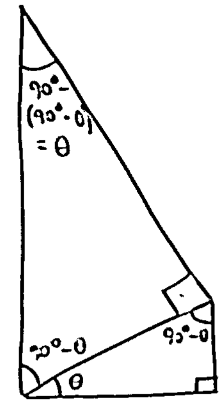
UMA FÓRMULA PARA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

SEJAM $P = (P_x, P_y)$,
$r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

OBS:
$r \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = P_x\} = ?$

$y = aP_x + b$

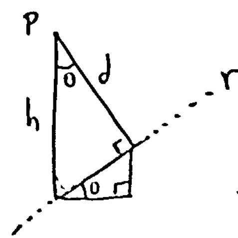


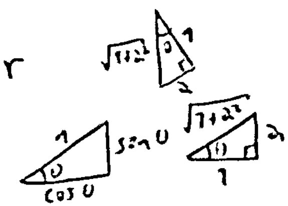


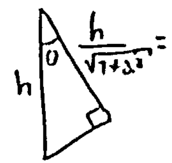
(P_x,P_y)

$P_y - (aP_x+b) = h$

(P_x, aP_x+b)







ESSE ARGUMENTO GEOMÉTRICO
(SUGESTÃO: COMPARE COM O DO REIS E SILVA!)
NOS DIZ QUE $d(P,r) = d = \dfrac{|h|}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{|P_y - (aP_x+b)|}{\sqrt{1+a^2}}$

1

$\vec{u}$

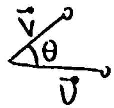
$\vec{u})$

GA 30/MAIO/2016

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta \, \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$,

ONDE $\theta = \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})$



E AÍ:

$\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

ISTO NOS PERMITE, POR EXEMPLO, COMPARAR ÂNGULOS ALGEBRICAMENTE (A GENTE SABE COMPARÁ-LOS NO OLHÔMETRO).

V/F/JUSTIFIQUE:

a)(V) $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \cos \operatorname{ang}(\vec{u},2\vec{v})$

b)(F) $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \cos \operatorname{ang}(\vec{u},-2\vec{v})$

c)(V) $\cos \underbrace{\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})}_{\theta} = -\cos \underbrace{\operatorname{ang}(\vec{u},-2\vec{v})}_{\alpha}$

NOTAÇÃO (TEMPORÁRIA): $\overrightarrow{(a,b)}' = \overrightarrow{(-b,a)}$.

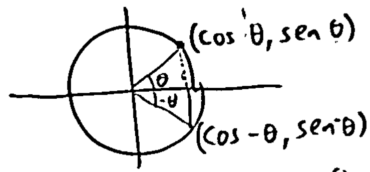
d)( ) $\cos \operatorname{ang}(\vec{u}, (\cos\theta)\vec{u} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u}') = \cos\theta$

e)( ) $\operatorname{ang}(\vec{u}, (\cos\theta)\vec{u} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u}') = \theta$

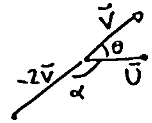
f)( ) $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{u}) = 1$

g)( ) $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{u}') = 0$.

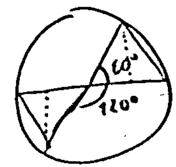
UM POUCO DE INTUIÇÃO GEOMÉTRICA...

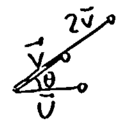


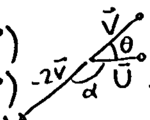
$\cos -\theta = \cos\theta$
$\operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$

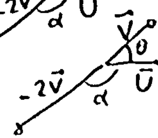


$\theta + \alpha = 180° = \pi$
$\alpha = \pi - \theta$
$= 180° - \theta$
$\cos\alpha = -\cos\theta$









SUGESTÃO:
$\vec{u} = \overrightarrow{(3,0)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(3,4)}$

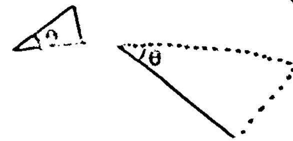
$\cos \operatorname{ang}(\overrightarrow{(3,0)}, \overrightarrow{(3,4)}) = \dfrac{\overrightarrow{(3,0)}\cdot\overrightarrow{(3,4)}}{\|\overrightarrow{(3,0)}\|\|\overrightarrow{(3,4)}\|} = \dfrac{9}{3\cdot 5} = \dfrac{9}{15}$

$\cos \operatorname{ang}(\overrightarrow{(3,0)}, \overrightarrow{(-6,-8)}) = \dfrac{\overrightarrow{(3,0)}\cdot\overrightarrow{(-6,-8)}}{\|\overrightarrow{(3,0)}\|\|\overrightarrow{(-6,-8)}\|} = \dfrac{-18}{3\cdot 10} = \dfrac{-9}{15}$

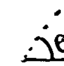
$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \overset{?}{=} -\frac{\vec{u}\cdot(-2\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|-2\vec{v}\|} = -\frac{(-2)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})}{|-2|\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\cancel{2}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\cancel{2}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

PROBLEMAS (COMPLICADOS):

① COMO É QUE A GENTE "COPIA", OU "TRANSFERE", ÂNGULOS?



② DIGAMOS Q...
GENTE S...
EX: CO...
COMO É...
CONSTRU...



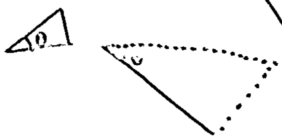
LEMBRE...
ISTO AO...
CÍRCULO...

E...
S...

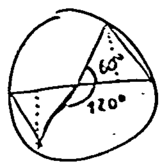
C...
(...
C...
d...

...as (complicados):

... que a gente ... ou "transfere", ...ós?



... $= \pi$



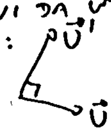
θ

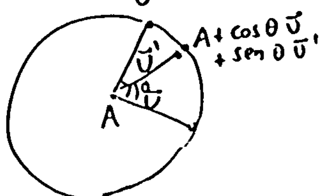
② Digamos que a gente sabe $\cos\theta$...

Ex: $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Como é que a gente constrói isto?

Lembre que isto aqui dá um círculo:





$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \overset{?}{=} -\frac{\vec{u}\cdot(-2\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|-2\vec{v}\|} = -\frac{(-2)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})}{|-2|\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\cancel{2}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\cancel{2}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

$= \frac{9}{25}$

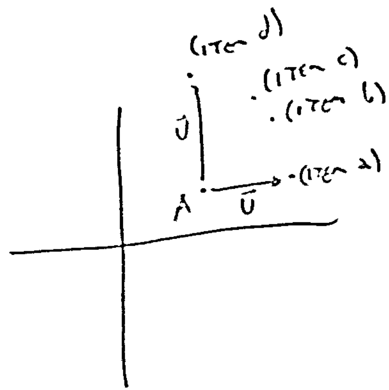
$...)) =$

$\frac{-18}{...3\cdot 10} = \frac{-9}{25}$

Exercício (sintaxe):

Sejam $A = (4,2)$, $\vec{u} = (5,0)$.

Calcule:
a) $A + \vec{u}$.
b) $A + \frac{4}{5}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{u}'$
c) $A + \frac{3}{5}\vec{u} + \frac{4}{5}\vec{u}'$,
d) $A + \vec{u}'$.



Repare:

② Se sabemos $\cos\theta$ nós (quase) sabemos $\operatorname{sen}\theta$!

$(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$

Ex: Se $\cos\theta = \frac{4}{5}$:

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$

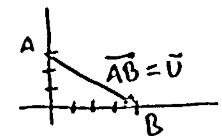
$\frac{16}{25} + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$

$(\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ ou

$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$

Ex: $A = (0,3)$, $B = (4,0)$

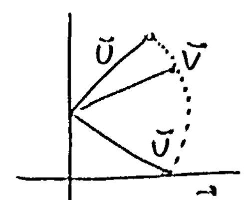


$\vec{u} = \vec{AB} = (4,-3)$.

Encontre $\vec{v}$ tal que $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \frac{4}{5}$.

Truque: seja $\vec{u}' = (4,-3)' = (3,4)$.

Seja $\vec{v} = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}'$.



Obtenha um $\vec{v}$ (chute onde tiver dúvidas) e teste se p/ esse $\vec{v}$ vale $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \frac{4}{5}$

GA 30/MAIO/2016

P1: 8/JUN
P2: 27/JUL
VR: 1º/AGO
VS: 3/AGO

CÍRCULOS

Sejam $A=(4,2)$,
$\vec{U}=\overrightarrow{(5,0)}$,
$\vec{V}=\overrightarrow{(0,5)}$,

$$C=\{A+\cos\theta\,\vec{U}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{V} \mid \theta\in\mathbb{R}\}.$$

CÍRCULO PARAMETRIZADO.

A gente viu agora há pouco ALGUNS pontos de C...

Fato: C é um círculo.

$$d(A+\cos\theta\,\vec{U}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{V},\ A)=5.$$

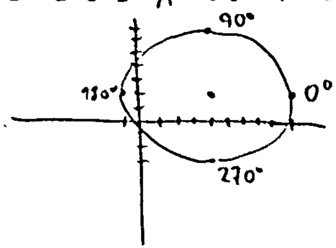
$\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ geram os "pontos óbvios" do círculo.

$\theta=0^\circ \Rightarrow A+1\vec{U}+0\vec{V}=(4,2)+\overrightarrow{(5,0)},$

$\theta=90^\circ \Rightarrow A+0\vec{U}+1\vec{V}=(4,2)+\overrightarrow{(0,5)},$

$\theta=180^\circ \Rightarrow A-1\vec{U}+0\vec{V}=(4,2)-(5,0),$

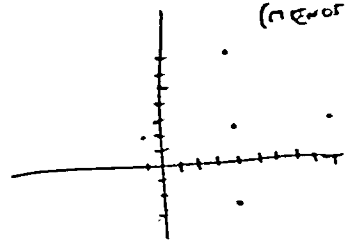
$\theta=270^\circ \Rightarrow A+0\vec{U}-1\vec{V}=(4,2)-(0,5)$



EQUAÇÃO DO CÍRCULO

$$C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-4)^2+(y-2)^2}_{\text{coords do centro}}=\underbrace{5^2}_{\text{raio}}\}$$

É fácil verificar que os quatro pontos óbvios de C pertencem a C'... e que C'=C (menos óbvio).



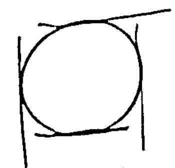
Vocês acabaram de aprender a equação do círculo! :)

Exercício:
Seja C o círculo de raio 3 e centro (3,0).
Determine os 4 pontos óbvios de C,
escreva C na forma
$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ \ldots\ \}$,
e teste os 4 pontos.

Retas tangentes a círculos:

r é tangente a C quando $r\cap C$ tem um ponto só.

Retas tangentes mais óbvias a C:



Outro critério:
r é tangente a C se e só se $d(r,C_0)=R$

C_0: centro de C; R: raio de C

GA $1^{\underline{o}}$/JUN/2016

HOJE: CÍRCULOS
(E OUTRAS COISAS!)

NO FINAL DA AULA PASSADA VIMOS QUE A EQUAÇÃO PARA UM CÍRCULO C COM CENTRO (a,b) E RAIO R É:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

OU SEJA:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\}$$
$$=\{(a,b)+R\cos\theta\,\overrightarrow{(1,0)}+R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\overrightarrow{(0,1)} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(a,b)+\cos\theta\,\overrightarrow{(R,0)}+\mathrm{sen}\,\theta\,\overrightarrow{(0,R)} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(a+R\cos\theta,\ b+R\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid \theta\in\mathbb{R}\}\ldots$$

PARAMETRIZAÇÕES.

OUTRA FORMA DA EQUAÇÃO DO CÍRCULO...
SABEMOS REPRESENTAR GRAFICAMENTE
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}\ldots$

OBS:
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+0=0\}=\mathbb{R}^2$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+200=0\}=\emptyset$
OS OUTROS CASOS SÃO RETAS.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}=?$$

EQUAÇÃO DE UMA CÔNICA

A SEGUNDA PARTE DO CURSO ("CÔNICAS") É SOBRE ESSA "?"...

OBS:
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-R^2=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+0xy+y^2+(-2a)x+(-2b)y+(a^2+b^2-R^2)=0\}$$

CÍRCULOS VÃO SER AS ~~PRIMEIRAS~~ CÔNICAS QUE A GENTE VAI ESTUDAR...

$$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x+4y=5\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x^2+0xy+y^2+3x+4y+5=0\}$$

$y=ax+b$?
$4y=5-3x$
$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

RETAS SÃO AS PRIMEIRAS CÔNICAS!...
(DEGENERADAS)

EX:
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+0\ldots$
$-10\ldots$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-\ldots$

QUEM SÃO $a, b,\ldots$
("COMPLETAR QUA...

a	b
99	20...
5	-...

$S=\ldots$
S é...

TEM VÁRIOS...
NA LISTA...
NOS QUAIS...
COMPLETAR...

26) $C=\{(x\ldots$
$C'=\{(\ldots$

26') IDEM, E S...
$r=\{(x,\ldots$
ENCONTRE...

$R^2 = ?\}$

$= 0\}$

$y = 5\}$

$y + y^2$

$+ 4y$

$+ 5 = 0\}$

s

Ex:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 0xy + y^2 - 10x + 30y - 1000 = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$$

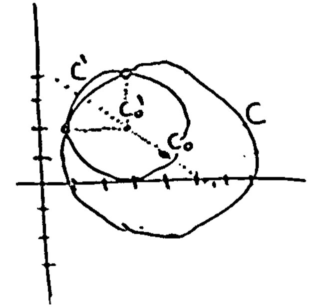
Quem são a, b, R?
("completar quadrados")

a	b	R	$\overset{-10}{\overbrace{-2a}}$	$\overset{30}{\overbrace{-2b}}$	$\overset{-1000}{\overbrace{a^2+b^2-R^2}}$
99	200	5	☹		
5	-15	$\sqrt{1250}$	-10	30	$25+225-1250=-1000$ ☺

$y = ax + b$?
$4y = 5 - 3x$
$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y+15)^2 = \sqrt{1250}^2\}$$

S é o círculo de raio $\sqrt{1250}$
e centro $(5, -15)$.



No olhômetro
(método: chutar e testar)

$(1,2) \in C$? $1^2 + 2^2 - 8\cdot 1 - 2\cdot 2 + 7 = 0$? ☺
$(1,2) \in C'$? $1^2 + 2^2 - 6\cdot 1 - 4\cdot 2 + 9 = 0$? ☺
$(1,2) \in C \cap C'$.
$(3,4) \in C$? $3^2 + 4^2 - 8\cdot 3 - 2\cdot 4 + 7 = 0$? ☹
$(3,4) \in C'$? $3^2 + 4^2 - 6\cdot 3 - 4\cdot 4 + 9 = 0$? ☹

Tem vários exercícios
na lista 3 da Bel
nos quais vocês precisam
completar quadrados...

26) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{10}^2\}$
$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2\}$

26') Idem, e seja
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 3\}$.
Encontre $C' \cap r$.

Ex:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+0xy+y^2 -10x+30y -1000=0\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\}$$

Quem são a, b, R?
("completar quadrados")

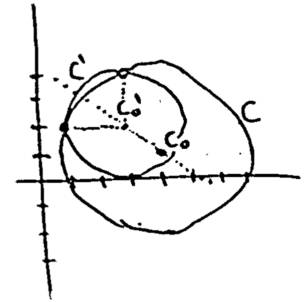
a	b	R	$\overbrace{-2a}^{-10}$	$\overbrace{-2b}^{30}$	$\overbrace{a^2+b^2-R^2}^{-1000}$
99	200	5	☹		
5	-15	$\sqrt{1250}$	-10	30	$25+225-1250=-1000$ ☺

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2+(y+15)^2=\sqrt{1250}^2\}$$

S é o círculo de raio $\sqrt{1250}$ e centro $(5,-15)$.

$y=ax+b$?
$4y=5-3x$
$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

$=$
$)\}$
$=5)\}$
$+y^2$
$4y$
$5=0)\}$



No olhômetro
(método: chutar e testar)

$(1,2)\in C$? $\quad 1^2+2^2-8\cdot1-2\cdot2+7=0$? ☺

$(1,2)\in C'$? $\quad 1^2+2^2-6\cdot1-4\cdot2+9=0$? ☺

$(1,2)\in C\cap C'$.

$(3,4)\in C$? $\quad 3^2+4^2-8\cdot3-2\cdot4+7=0$? ☺

$(3,4)\in C'$? $\quad 3^2+4^2-6\cdot3-4\cdot4+9=0$? ☺

Tem vários exercícios
na lista 3 da Bel
nos quais vocês precisam
completar quadrados...

26) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-8x-2y+7=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2+(y-1)^2=\sqrt{10}^2\}$

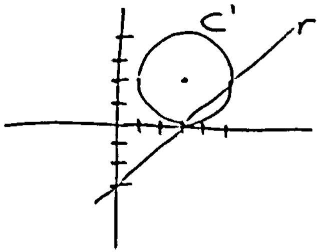
$C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-6x-4y+9=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-2)^2=2^2\}$

26') Idem, e seja
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+3\}$.
Encontre $C'\cap r$.

GA 1º/JUN/2016

COMO ENCONTRAR $C \cap C'$ ALGEBRICAMENTE?

MELHOR COMEÇAR POR: COMO ENCONTRAR $C \cap r$ (OU $C' \cap r$) ALGEBRICAMENTE? ok!



Se $(x,y) \in C'$
e $(x,y) \in r$,

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$

$y = x-3$

$x^2+(x-3)^2-6x-4(x-3)+9=0$

$x^2+x^2-6x+9-6x-4x+12+9=0$

$2x^2-16x+30=0$

$x^2-8x+15=0$

E AGORA? BHASKARA!

$x^2-8x+15=0$
$\quad = (x-3)(x-5)$

RAÍZES: $x=3$, $x=5$.

$x=3 \Rightarrow y=3-3=0 \Rightarrow (x,y)=(3,0)$
$x=5 \Rightarrow y=5-3=2 \Rightarrow (x,y)=(5,2)$

COMO ENCONTRAR $C \cap C'$ ALGEBRICAMENTE?

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2-8x-2y+7}_{=f(x,y)} = 0\}$$

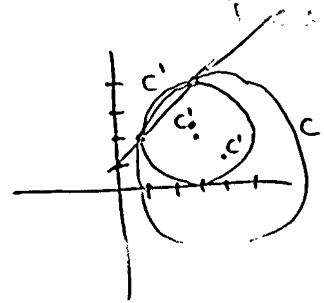
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2-6x-4y+9}_{=g(x,y)} = 0\}$$

Se $(x,y) \in C$
e $(x,y) \in C'$
ENTÃO $f(x,y)=0$,
$g(x,y)=0$,
$f(x,y)-g(x,y)=0$

$$= (\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-8x-2y+7)-(\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x-4y+9)$$
$$= (-8+6)x+(-2+4)y+(7-9)$$
$$= -2x+2y-2$$

$-2x+2y-2=0$
$2y=2x+2$
$y=x+1$

SEJA $r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+1\}$
$\quad = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)-g(x,y)=0\}$.



OS PONTOS DE $C \cap C'$ TAMBÉM ESTÃO EM $C \cap r$ E EM $C' \cap r$

INTRODUÇÃO A ELIPSES.

$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right.$

$E' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-6}{5}\right)^2 + ($

QUAIS SÃO OS PONTOS OBVI

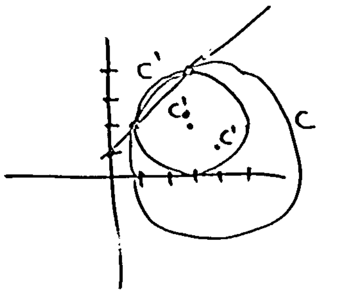
x	y	$\frac{x}{5}$	$\frac{y}{3}$
0	3	0	1
0	-3	0	-1
-5	0	-1	0
5	0	1	0

(x
(x
(x
(x,

x	y	$\frac{x-6}{5}$	$\frac{y-3}{3}$
6	6	0	1
6	0	0	-1
1	3	-1	0
11	3	1	0

$\overset{F(x,y)}{\ldots x - 2y + 7} = 0\}$

$\overset{g(x,y)}{\ldots x - 4y + 9} = 0\}$



Os pontos de $C \cap C'$
também estão em $C \cap r$
e em $C' \cap r$

$\ldots + \cancel{y^2} - 6x - 4y + 9)$

$\ldots - 9)$

$\ldots y = x + 1\}$

$\ldots f(x,y) - g(x,y) = 0\}$.

Introdução a elipses.

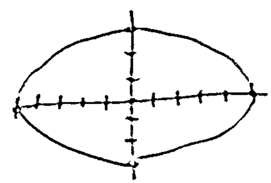
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

$$E' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x-6}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

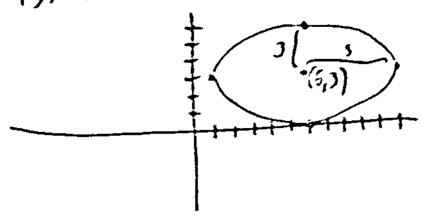
Quais são os pontos óbvios delas?

x	y	$\frac{x}{5}$	$\frac{y}{3}$
0	3	0	1
0	-3	0	-1
-5	0	-1	0
5	0	1	0

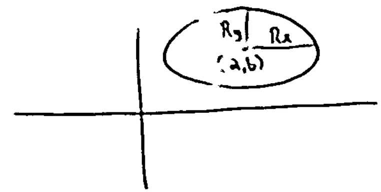
$(x,y) = (0,3)$
$(x,y) = (0,-3)$
$(x,y) = (-5,0)$
$(x,y) = (5,0)$



x	y	$\frac{x-6}{5}$	$\frac{y-3}{3}$
6	6	0	1
6	0	0	-1
1	3	-1	0
11	3	1	0



$$E'' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x-a}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R_y}\right)^2 = 1\right\}$$



Pra casa:
O que é:
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x-a}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R_y}\right)^2 = 0\right\} ?$$

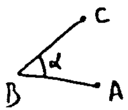
GA /JUN/2016

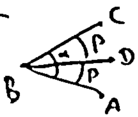
A PROVA É NA 4ª FEIRA!!!
A MATÉRIA É ATÉ <u>CÍRCULOS</u>.

HOJE:

- PONTOS EQUIDISTANTES E COISAS ASSIM ("LUGARES GEOMÉTRICOS")
- DÚVIDAS SOBRE EXERCÍCIOS DAS LISTAS
- <u>SE DER TEMPO</u>, INTRODUÇÃO A PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES.
- BISSETRIZES

<u>BISSETRIZES</u>





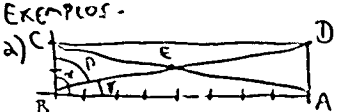
$\beta+\beta=\alpha$
$\beta=\alpha/2$

COMO É QUE A GENTE DIVIDE α EM 2?

SABEMOS <u>TESTAR</u> SE DOIS ÂNGULOS SÃO IGUAIS.

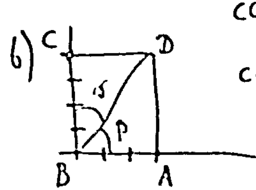
EXEMPLOS.

a)



SERÁ QUE $\beta=\gamma$?

b)

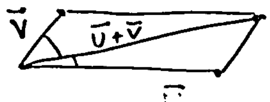


$\cos\beta=\frac{3}{5}$

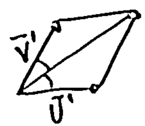
$\cos\gamma=\frac{4}{5}$

$ANG(A\hat{B}D)=ANG(D\hat{B}C)$?

ISTO AQUI TAMBÉM NÃO FUNCIONA:



O QUE FUNCIONA É ISTO:
SEJAM $\vec{u}'$ E $\vec{v}'$,
$\vec{u}'$ COM MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\vec{u}$,
$\vec{v}'$ COM MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\vec{v}$,
$\|\vec{u}'\|=\|\vec{v}'\|$;
ENTÃO $\vec{u}'+\vec{v}'$ DIVIDE O ÂNGULO ENTRE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ EM DUAS PARTES IGUAIS.



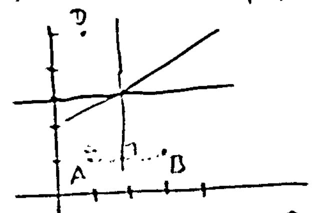
VÁRIAS POSSIBILIDADES FÁCEIS:

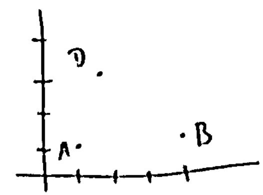
- $\vec{u}'=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
- $\vec{u}'=\|\vec{v}\|\vec{u}$, $\vec{v}'=\|\vec{u}\|\vec{v}$

MORAL:
ALGUNS PROBLEMAS SOBRE DISTÂNCIAS PODEM SER TRADUZIDOS EM PROBLEMAS SOBRE RETAS E CÍRCULOS.

VOLTANDO À MATÉRIA DE CÍRCULOS...

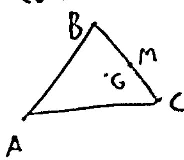
PROBLEMA:
ENCONTRE UM CÍRCULO QUE PASSE PELOS PONTOS A, B, D.





SE C PASSA POR A E B,
ENTÃO $C_0=$?
$d(C_0,A)=d(C_0,B)$
SEJA $r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,A)=d(P,B)\}$
$r'=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,A)=d(P,D)\}$

UM PROBLEMA COM BARICEN...

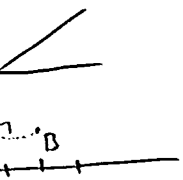


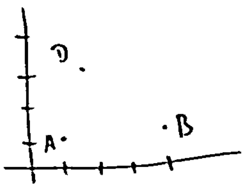
$\vec{V}$

A

CÍRCULOS...

UM
QUE PASSE
PONTOS A, B, D.





PASSA POR A E B,

$= ?$

$d(C_0, B)$

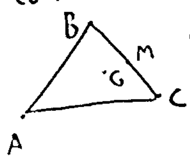
$d(P,A) = d(P,B)\}$

$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,D)\}$

$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,D)\}$

MORAL:
ALGUNS PROBLEMAS
SOBRE DISTÂNCIAS
PODEM SER TRADUZIDOS
EM PROBLEMAS SOBRE
RETAS E CÍRCULOS.

UM PROBLEMA
COM BARICENTRO:



(A_1, A_2),
(B_1, B_2),
(C_1, C_2),

$$(G_1, G_2) = \left(\frac{A_1+B_1+C_1}{3}, \frac{A_2+B_2+C_2}{3}\right)$$

$$(M_1, M_2) = \left(\frac{B_1+C_1}{2}, \frac{B_2+C_2}{2}\right)$$

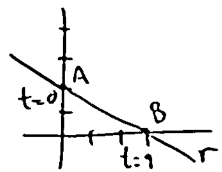
MOSTRE QUE $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

LISTA 3,
PROBLEMA 1.

DETERMINE EQUAÇÕES
PARAMÉTRICAS PARA
A RETA $r: 2x + 3y - 6 = 0$.

$3y = 6 - 2x$

$y = 2 - \frac{2}{3}x$

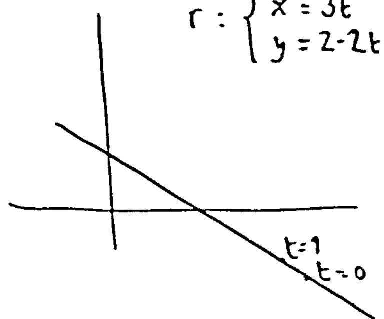


$(x,y) = (3t, 2-2t)$

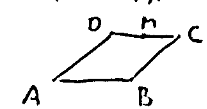
$r = \{(3t, 2-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0,2) + t\overrightarrow{(3,-2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$



17 (LISTA 1):



PARALELOGRAMO
M PONTO MÉDIO
ENTRE C E D

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

GA 8/JUN/2016

HOJE: P1!!!

AVISOS:

VOCÊS VÃO TER UMA SESSÃO DE DISCUSSÃO DE 5 MINS NO MEIO DA PROVA.

· VOCÊS VÃO DEIXAR TODO O MATERIAL ESCRITO E DE ESCREVER NAS MESAS DE VOCÊS; VEM TODO MUNDO PRA FRENTE, E VOCÊS VÃO PODER DISCUTIR E GESTICULAR.

PONHAM NOME E NUMEREM EM TODAS AS FOLHAS, E NÃO ESCREVAM NOS CANTOS

INÍCIO: 16:17
FIM : 18:17

GA 13/JUN/2016

Hoje: introdução a cônicas!

Lembre que:

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{ax+by+c=0}_{\text{equação da reta}}\}$

reta

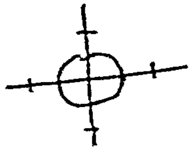
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{ax^2+bxy+cy^2 + dx + ey + f = 0}_{\text{equação da cônica}}\}$

← termos de grau 2 ($ax^2+bxy+cy^2$)
← " " grau 1 ($+dx+ey$)
← " " grau 0 ($+f$)

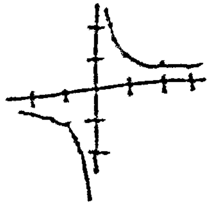
cônica

Nossas cônicas preferidas:

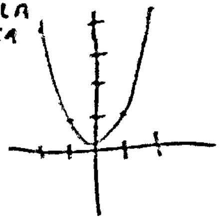
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ ← círculo canônico / elipse canônica
$ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$



$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ ← hipérbole canônica
$ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$
$ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=\frac{1}{x}\}$

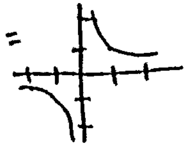


$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ ← parábola canônica
$ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$

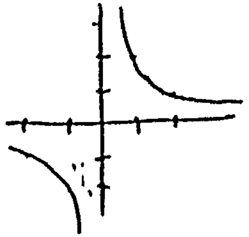


Fato:
(obs: a demonstração é trabalhosa)
Toda cônica em $\mathbb{R}^2$ é uma elipse, [illegible] ou parábola "distorcida", e talvez degenerada.

Seja:
$H_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=k\}$

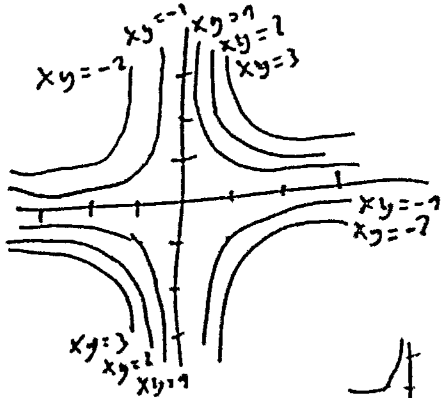
$H_1 = H =$ 

H_2: $xy=2$, $y=\frac{2}{x}$

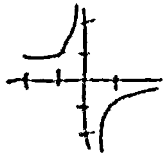


O que acontece se a gente desenha todos os "H_k"s (as curvas) no mesmo gráfico?

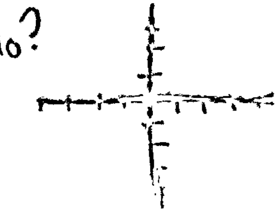
$x^2+y^2=5^2 \Rightarrow$ raio 5
$x^2+y^2=0^2 \Rightarrow$ raio 0 (ponto)
$x^2+y^2=-1 \Rightarrow$ conjunto vazio



$xy=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{x}$



O que é H_0?
$xy=0$
é "eixo x" ∪ "eixo y".



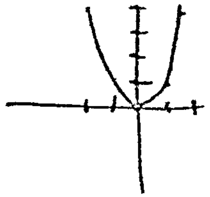
Idéia:
Seja $F(x,y)=xy$.
Idéia: $z=xy$
"superfície em forma de sela"

Os "H_k"s ← conjuntos são as curvas de nível do $F(x,y)$.

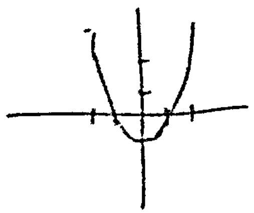
H_2 é como H_1, só que ampliado.

H_0 é uma "hipérbole degenerada" — a união de duas retas!

Parábolas:
Seja $G(x,y)=x^2-y$.
Então $G(x,y)=0$ aqu

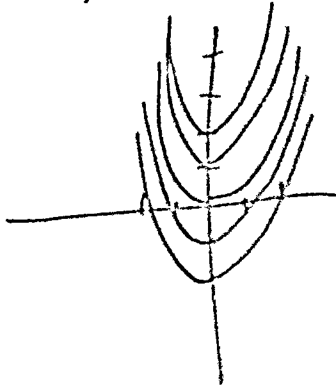


$G(x,y)=1$



$G(x,$

As curvas de ní
dividem o plan
monte de paráb



FATO:

(OBS: A DEMONSTRAÇÃO É TRABALHOSA)

TODA CÔNICA EM $\mathbb{R}^2$ É UMA ELIPSE, HIPÉRBOLA OU PARÁBOLA "DISTORCIDA", E TALVEZ DEGENERADA.

}

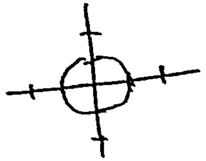
y^2 ← TERMOS DE GRAU 2

← " " GRAU 1

$= 0\}$ ← " " GRAU 0

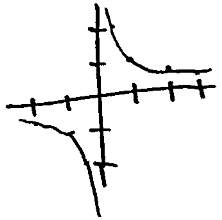
CÔNICA

$= 0\}$ ← CÍRCULO CANÔNICO / ELIPSE CANÔNICA

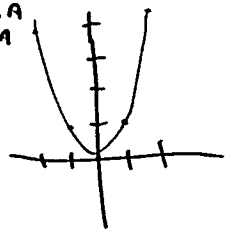


1}

0} ← HIPÉRBOLE CANÔNICA

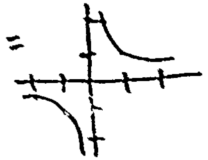


← PARÁBOLA CANÔNICA



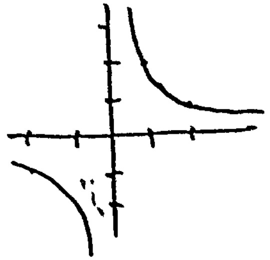
SEJA:

$H_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = k\}$

$H_1 = H =$ 

H_2: $xy = 2$

$y = \frac{2}{x}$

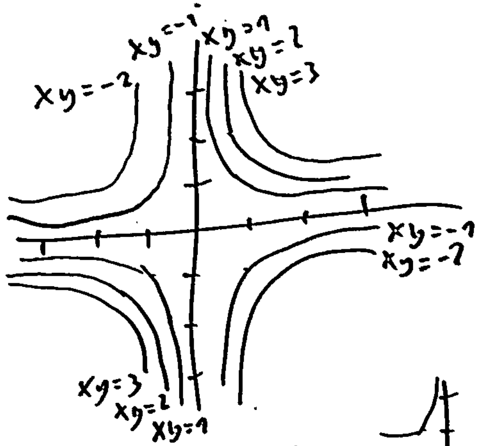


O QUE ACONTECE SE A GENTE DESENHA TODOS OS "H_k"S (AS CURVAS) NO MESMO GRÁFICO?

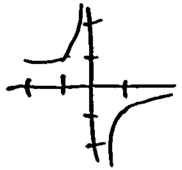
$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow$ RAIO 5

$x^2 + y^2 = 0^2 \Rightarrow$ RAIO 0 (PONTO)

$x^2 + y^2 = -1 \Rightarrow$ CONJUNTO VAZIO



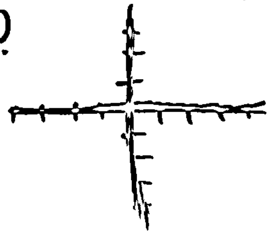
$xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$



O QUE É H_0?

$xy = 0$

É "EIXO X" ∪ "EIXO Y".



IDÉIA:

SEJA $F(x,y) = xy$.

IDÉIA: $z = xy$

"SUPERFÍCIE EM FORMA DE SELA"

OS "H_k"S ← CONJUNTOS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DO $F(x,y)$.

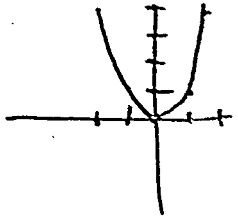
H_2 É COMO H_1, SÓ QUE AMPLIADO.

H_0 É UMA "HIPÉRBOLE DEGENERADA" — A UNIÃO DE DUAS RETAS!

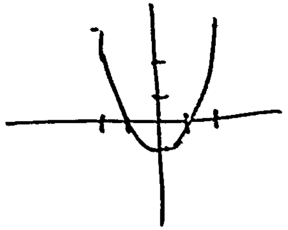
PARÁBOLAS:

SEJA $G(x,y) = x^2 - y$.

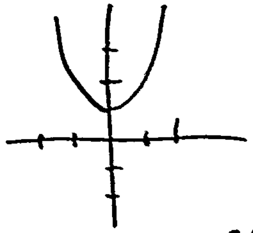
ENTÃO $G(x,y) = 0$ AQUI:



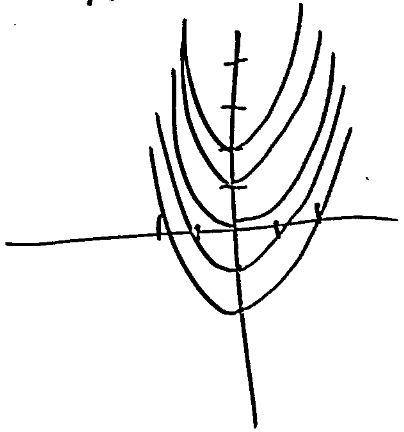
$G(x,y) = 1$



$G(x,y) = -1$



AS CURVAS DE NÍVEL DE $G(x,y)$ DIVIDEM O PLANO NUM MONTE DE PARÁBOLAS... "PARALELAS".



$\boxed{\text{GA } 13/\text{JUN}/2016}$

HOJE: INTRODUÇÃO A CÔNICAS!

LEMBRE QUE:

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$

RETA — EQUAÇÃO DA RETA

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2$ ← TERMOS DE GRAU 2

$+ dx + ey$ ← " " GRAU 1

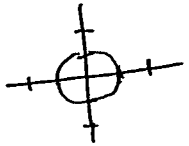
$+ f = 0\}$ ← " " GRAU 0

CÔNICA — EQUAÇÃO DA CÔNICA

NOSSAS CÔNICAS PREFERIDAS:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ ← CÍRCULO CANÔNICO / ELIPSE CANÔNICA

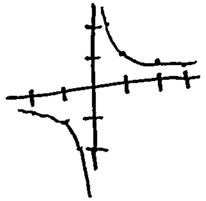
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$ ← HIPÉRBOLE CANÔNICA

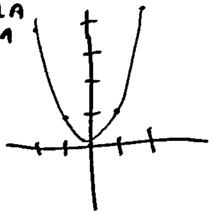
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}\}$

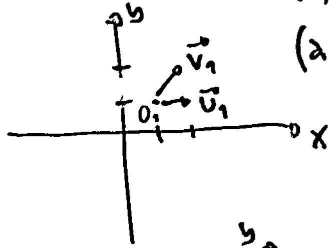


$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ ← PARÁBOLA CANÔNICA

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

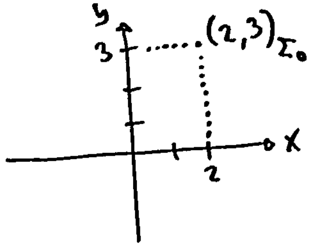


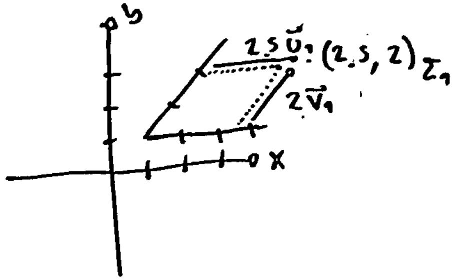
SISTEMAS DE COORDENADAS

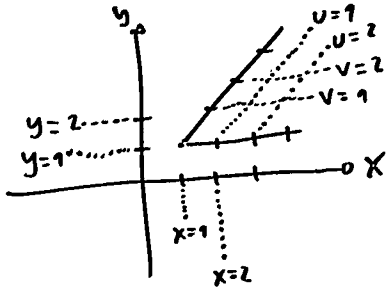


$(a,b)_{\Sigma_0} = (0,0) + a(\overrightarrow{1,0}) + b(\overrightarrow{0,1})$

$(a,b)_{\Sigma_1} = \underbrace{(1,1)}_{O_1} + a\underbrace{(\overrightarrow{1,0})}_{\vec{u}_1} + b\underbrace{(\overrightarrow{1,1})}_{\vec{v}_1}$







$u=0 \leftrightarrow y=x$

$u=1 \leftrightarrow y=x-1$

$u=2 \leftrightarrow y=x-2$

$v=0 \leftrightarrow y=1$

$v=1 \leftrightarrow y=2$

$v=y-1 \quad y=v+1$

$y = x - u$

$u = x - y$

$x = u + y$

$= u + v + 1$

SEJA:

$H_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 1\}$

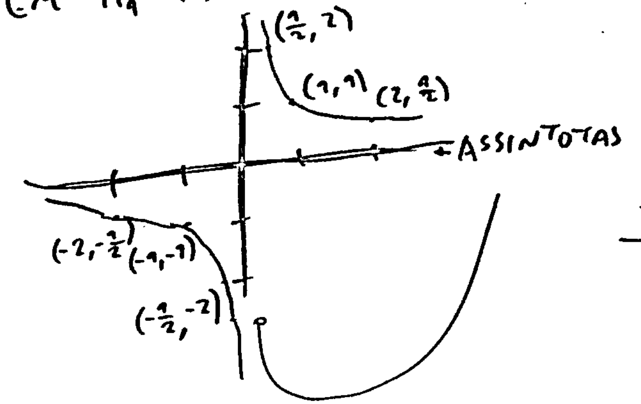
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-y)}_{u}\underbrace{(y-1)}_{v} - 1 = 0\}$

COMO DESENHAR H_1'?

COMO DESENHAR H_1?

LEMBREM QUE EM CÍRCULOS A GENTE TINHA QUATRO "PONTOS PREFERIDOS"...

EM H_1 TAMBÉM (6 PONTOS):



x	y
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

6

$0\}$

a

cy^2 ← TERMOS DE GRAU 2

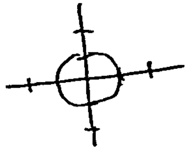
ey ← " " GRAU 1

$\underline{f = 0}\}$ ← " " GRAU 0

A CÔNICA

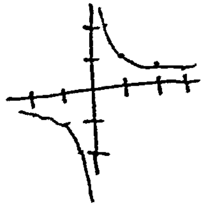
:

$-1=0\}$ ← CÍRCULO CANÔNICO / ELIPSE CANÔNICA



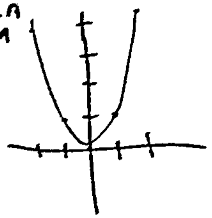
$=1\}$

$-0\}$ ← HIPÉRBOLE CANÔNICA

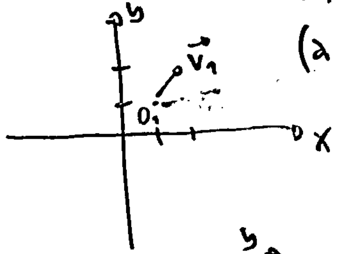


]

$0\}$ ← PARÁBOLA CANÔNICA

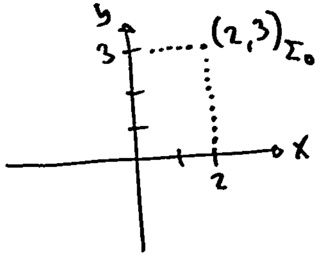


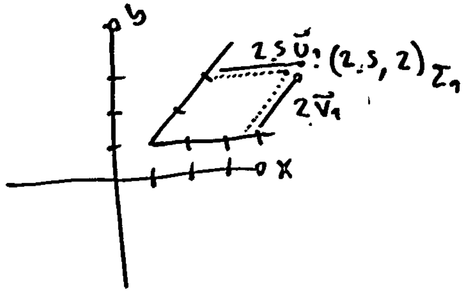
SISTEMAS DE COORDENADAS

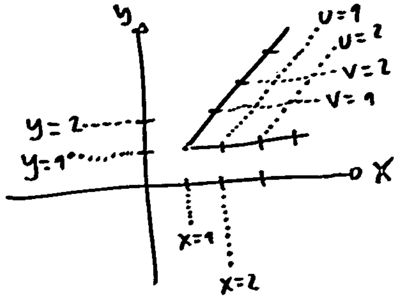


$$(a,b)_{\Sigma_0} = (0,0) + a(\overrightarrow{1,0}) + b(\overrightarrow{0,1})$$

$$(a,b)_{\Sigma_1} = \underbrace{(1,1)}_{O_1} + a\underbrace{(\overrightarrow{1,0})}_{\vec{u}_1} + b\underbrace{(\overrightarrow{1,1})}_{\vec{v}_1}$$







$U=0 \Leftrightarrow y=x$

$U=1 \Leftrightarrow y=x-1$

$U=2 \Leftrightarrow y=x-2$

$V=0 \Leftrightarrow y=1$

$V=1 \Leftrightarrow y=2$

$V=y-1 \quad y=V+1$

$y=x-U$

$U=x-y$

$x=U+y$

$=U+V+1$

SEJA:

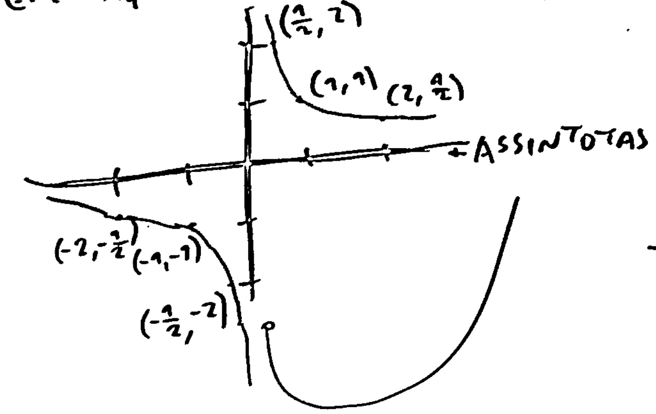
$$H_1' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid UV=1\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-y)}_{U}\underbrace{(y-1)}_{V} - 1 = 0\}$$

COMO DESENHAR H_1'?

COMO DESENHAR H_1?

LEMBREM QUE EM CÍRCULOS A GENTE TINHA QUATRO "PONTOS PREFERIDOS"...

EM H_1 TAMBÉM (6 PONTOS):

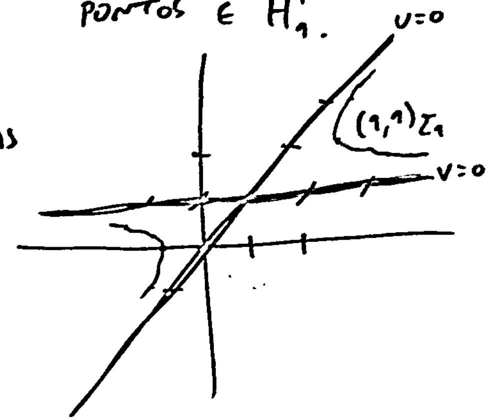


X	y
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

6 PONTOS PREFERIDOS EM H_1':

U	V
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

EXERCÍCIO: DESENHE ESTES PONTOS E H_1'.



GA 13/JUN/2016

Hoje: introdução a cônicas!

Lembre que:

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{ax+by+c=0}_{\text{equação da reta}}\}$

reta

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2$ ← termos de grau 2

$+dx+ey$ ← " " grau 1

$+f=0\}$ ← " " grau 0

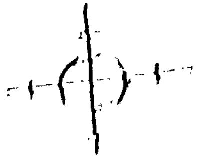
cônica

equação da cônica

Nossas cônicas preferidas:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ ← círculo canônico / elipse canônica

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$



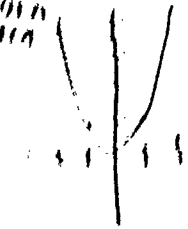
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ ← hipérbole canônica

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$

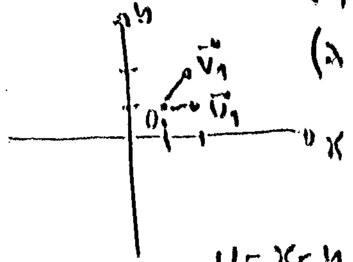
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=\frac{1}{x}\}$

$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ ← parábola canônica

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$



Sistemas de coordenadas

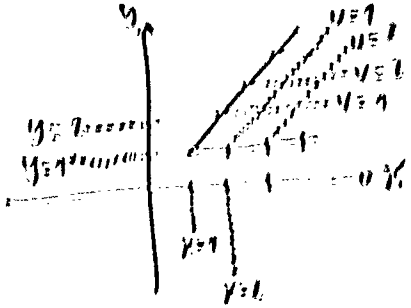


$(a,b)_{\Sigma_0} = (0,0) + a\overrightarrow{(1,0)} + b\overrightarrow{(0,1)}$

$(a,b)_{\Sigma_1} = \underbrace{(1,1)}_{O_1} + a\underbrace{\overrightarrow{(1,0)}}_{\vec{u}_1} + \underbrace{b\overrightarrow{(1,1)}}_{\vec{v}_1}$

$u = x-y \qquad x = u+v+1$

$v = y-1 \qquad y = v+1$

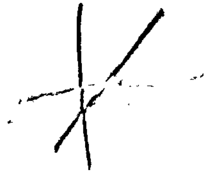


Obs:

$H_k' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv=k\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-y)}_{u}\underbrace{(y-1)}_{v} = k\}$

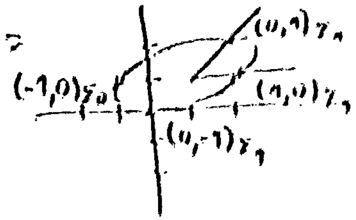
H_0':



Dá pra fazer a mesma coisa pra elipses e hipérboles...

$E_k' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=k\}$

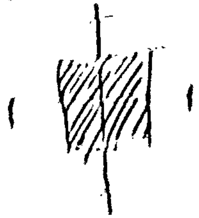
$E_1' =$



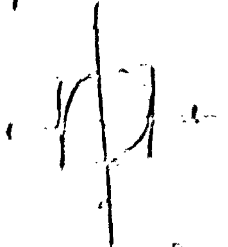
Sejam:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

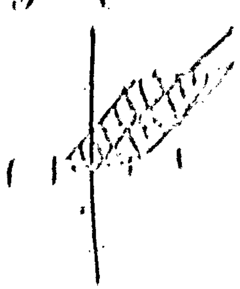
$D =$



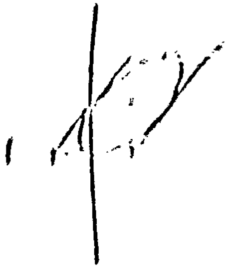
C_1:



$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1\}$



C_1':



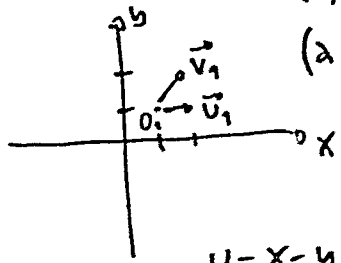
C_1' está contido na caixa D' e é tangente a ela no ponto médio de cada lado.

Parábo[la]

5 po[ntos]

x
-2
-1
0
1
2

Sistemas de coordenadas

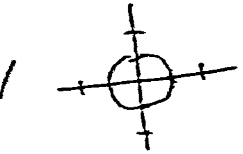


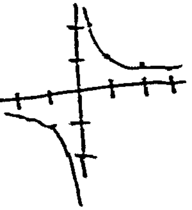
$$(a,b)_{\Sigma_0} = (0,0) + a(\overrightarrow{1,0}) + b(\overrightarrow{0,1})$$

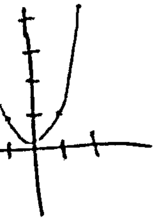
$$(a,b)_{\Sigma_1} = \underbrace{(1,1)}_{O_1} + a\underbrace{(\overrightarrow{1,0})}_{\vec{u}_1} + b\underbrace{(\overrightarrow{1,1})}_{\vec{v}_1}$$

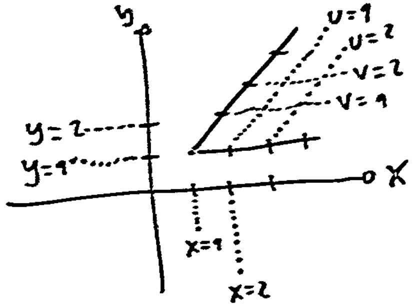
$U = x - y \qquad x = U + V + 1$

$V = y - 1 \qquad y = V + 1$





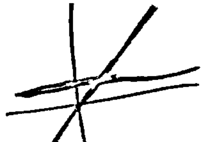




OBS:

$$H'_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = k\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-y)}_{u}\underbrace{(y-1)}_{v} - k = 0\}$$

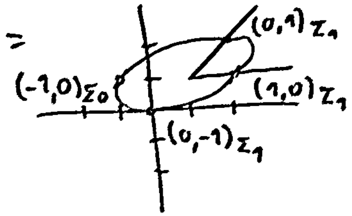
$H'_0 =$



Dá pra fazer a mesma coisa pra elipses e parábolas...

$$E'_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = k\}$$

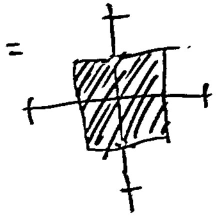
$E'_1 =$



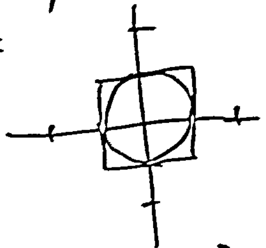
Sejam:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

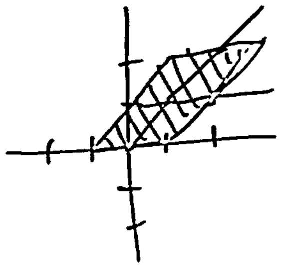
$D =$



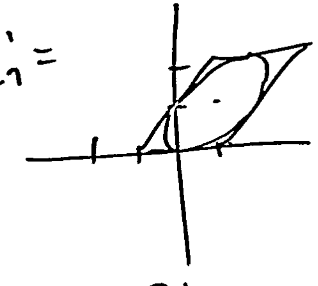
$C_1 =$



$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$



$E'_1 =$

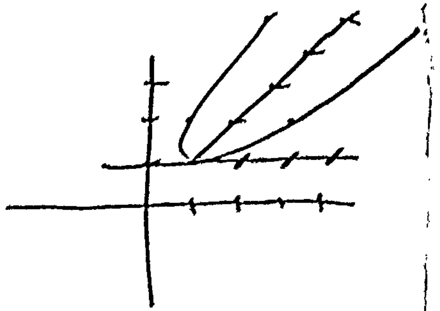


E'_1 está dentro da caixa D' e é tangente a ela no ponto médio de cada lado.

Parábolas:

5 pontos preferidos:

x	y		u	v
-2	4		-2	4
-1	1		-1	1
0	0		0	0
1	1		1	1
2	4		2	4



Quando a gente viu elipses a gente começou por:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x-x_0}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{R_y}\right)^2 - 1 = 0\right\}$$

e quando escrevíamos isto como uma equação de cônica a gente tinha $b=0$ em:

$$ax^2 + \boxed{bxy} + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

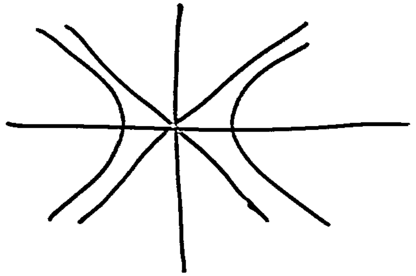
A gente prefere começar estudando elipses assim — com um eixo horizontal e outro vertical.

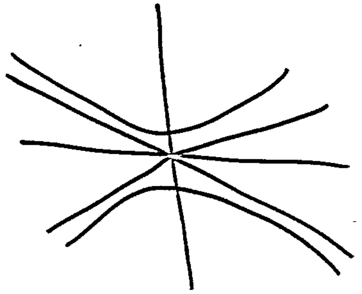
GA 13/JUN/2016

OS LIVROS PREFEREM ESTUDAR HIPÉRBOLES ASSIM:

$$ax^2 + \quad + cy^2$$
$$+ \quad +$$
$$+ f = 0$$

EXEMPLOS:





TRUQUE PRA DESENHÁ-LAS:

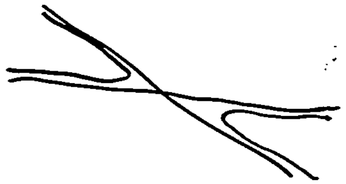
1) DESENHE AS ASSÍNTOTAS.

$ax^2 + cy^2 = 0$

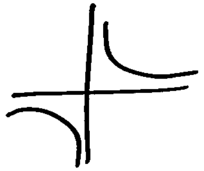
(ZERANDO O f)

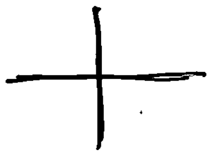
DÁ AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE, E

2) SABENDO AS ASSÍNTOTAS E UM PONTO DA HIPÉRBOLE SABEMOS DESENHÁ-LA.

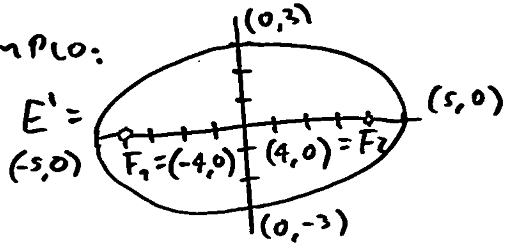


MUITAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS IMPORTANTES DE ELIPSES, HIPÉRBOLES E PARÁBOLAS TÊM A VER COM FOCOS E EXCENTRICIDADE.

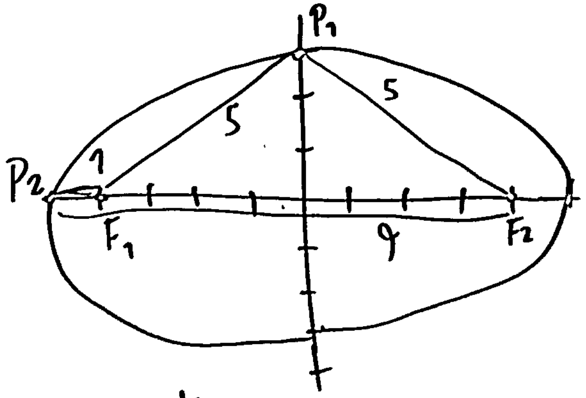
$H_1 =$ 

$H_0 =$ 

EXEMPLO:

SEJAM $E' =$ 

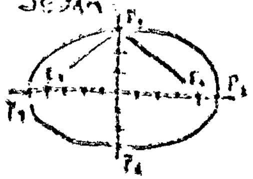
$E'' = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 10\}$.



$E'' = E'$!!!

$\boxed{\text{GA 15/JUN/2016}}$

SEJAM



$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{\left(\frac{x-0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{3}\right)^2 = 1}_{\substack{\text{EQUAÇÃO DE} \\ \text{CÔNICA} \\ \text{(DISFARÇADA)}}} \right\},$$

$$E' = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = 10 \}$$

LEMBRE QUE:
- EQUAÇÕES COM "$\sqrt{\ }$"S SÃO RUINS
- QUEREMOS APRENDER TRUQUES PRA SE LIVRAR DAS "$\sqrt{\ }$"S.

$$E' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{\underbrace{(x+4)^2 + y^2}_{A}} + \sqrt{\underbrace{(x-4)^2 + y^2}_{B}} = \underbrace{10}_{C} \right\}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$$
$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C^2$$
$$A + 2\sqrt{AB} + B = C^2$$
$$2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$$
$$(2\sqrt{AB})^2 = (C^2 - A - B)^2$$
$$4AB = C^2(C^2 - A - B) + (-A)(C^2 - A - B) + (-B)(C^2 - A - B)$$

$$4AB = C^4 - C^2A - C^2B - AC^2 + A^2 + AB$$

...

$$4AB = C^4 - 2AC^2 - 2BC^2 + A^2 + 2AB + B^2$$

$$0 = C^4 - 2AC^2 - 2BC^2 + A^2 - 2AB + B^2$$

$$0 = C^2(C^2 - 2(A+B)) + (A-B)^2$$

$$A = (x+4)^2 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2$$
$$B = (x-4)^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$
$$A + B = 2x^2 + 32 + 2y^2$$
$$A - B = 16x$$

$$\underbrace{\begin{aligned} 0 &= C^2(C^2 - 2(A+B)) + (A-B)^2 \\ &= 100(100 - 2(2x^2 + 32 + 2y^2)) + (16x)^2 \end{aligned}}_{\text{EQUAÇÃO DE CÔNICA...}} \quad (\star)$$

$$ax^2 + \cancel{bxy} + cy^2 + \cancel{dx} + \cancel{ey} + f = 0$$

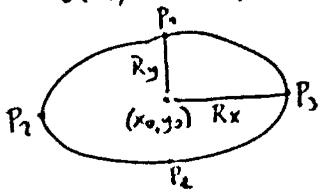
... É A EQUAÇÃO DE UMA ELIPSE - QUE TEM UM EIXO HORIZONTAL E OUTRO VERTICAL, E O CENTRO DELA É O PONTO $(0,0)$!

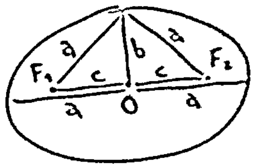
E SABEMOS 4 PONTOS DE E' - P_1, P_2, P_3, P_4 -

PESSOAS ... QUE GOSTAM DE CONTAS GRANDES PODEM VERIFICAR QUE $(\star)$ É EQUIVALENTE A $\left(\frac{x-0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{3}\right)^2 = 1$!

UMA COISA <u>BEM IMPORTANTE</u> NO CURSO (OU: NAS LISTAS DE EXERCÍCIOS!!) É CONVERTER ENTRE:

- $\left(\frac{x-x_0}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{R_y}\right)^2 = 1$
- $d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$





Exercício:

a) Seja $E_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x-0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{4}\right)^2 = 1 \right\}$.

ENCONTRE P_1, P_2, P_3, P_4, O, F_1, F_2, a, b, c PARA A ELIPSE E_2.

b) SEJAM $F_1 = (3,0)$, $F_2 = (3,8)$,

$E_3 = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = 10 \}$.

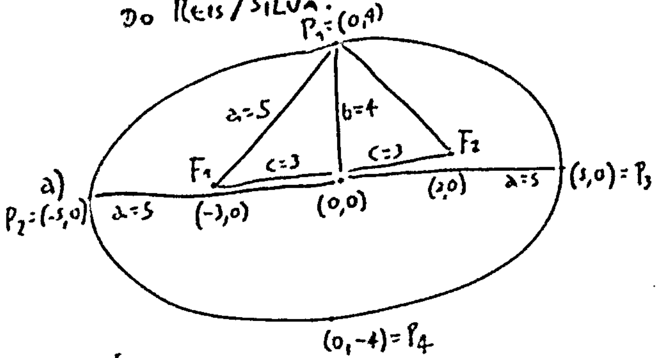
ENCONTRE $a, b, c, P_1, P_2, P_3, P_4$, R_x, R_y, x_0, y_0,

$E_3' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x-x_0}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{R_y}\right)^2 = 1 \right\}$

$(E_3 = E_3')$

OBS: O QUE A GENTE ESTÁ VENDO ESTÁ NA SEÇÃO 3.1 DO REIS/SILVA.

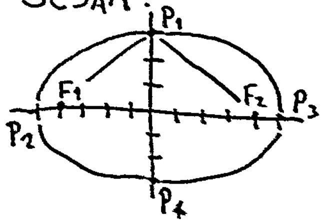
a)



$$E_2 = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, \underset{(-3,0)}{F_1}) + d(P, \underset{(3,0)}{F_2}) = 10 \}$$

$\boxed{\text{GA 15/JUN/2016}}$

SEJAM:

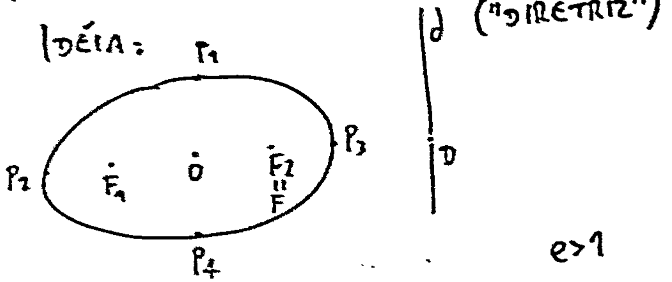


$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\left(\frac{x-0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{3}\right)^2 = 1}_{\text{EQUAÇÃO DE CÔNICA (DISFARÇADA)}}\},$$

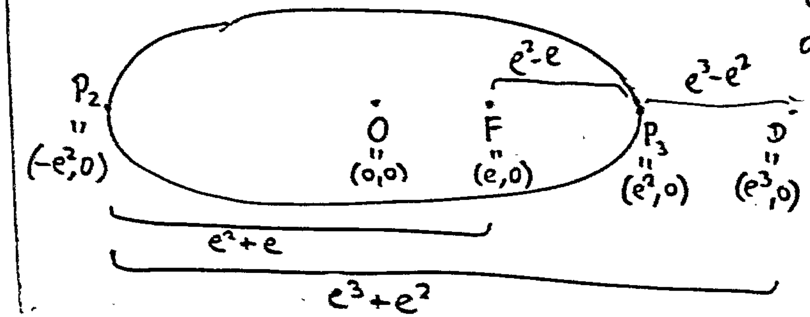
$$E' = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = 10\}$$

UMA OUTRA DEFINIÇÃO DE ELIPSE
(SEÇÃO 3.6 DO REIS/SILVA)

IDÉIA:



$e>1$ $\quad$ $e<1$



$e^3-e^2 = e(e^2-e)$
$d(P_3,D) = e\,d(P_3,F)$

$e^3+e^2 = e(e^2+e)$
$d(P_2,D) = e\,d(P_2,F)$

SEJA:

$$E''' = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,\underset{\text{RETA DIRETRIZ}}{d}) = e\,d(P,\underset{\text{FOCO (PONTO)}}{F})\}$$

CASO PARTICULAR: $e=3$

$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,\underset{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=27\}}{d}) = 3\,d(P,\underset{(3,0)}{F})\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),d) = 3\,d((x,y),(3,0))\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-27| = 3\sqrt{(x-3)^2+y^2}\}$$

$$|x-27|^2 = \left(3\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-27)^2 = 9((x-3)^2+y^2)$$

$$x^2 - \cancel{54x} + 27^2 = 9(x^2 - \cancel{6x} + 9 + y^2)$$

$$x^2 - 27^2 = 9(x^2 + 9 + y^2)$$

$$ax^2 + \cancel{bxy} + cy^2 + \cancel{dx} + \cancel{ey} + f = 0$$

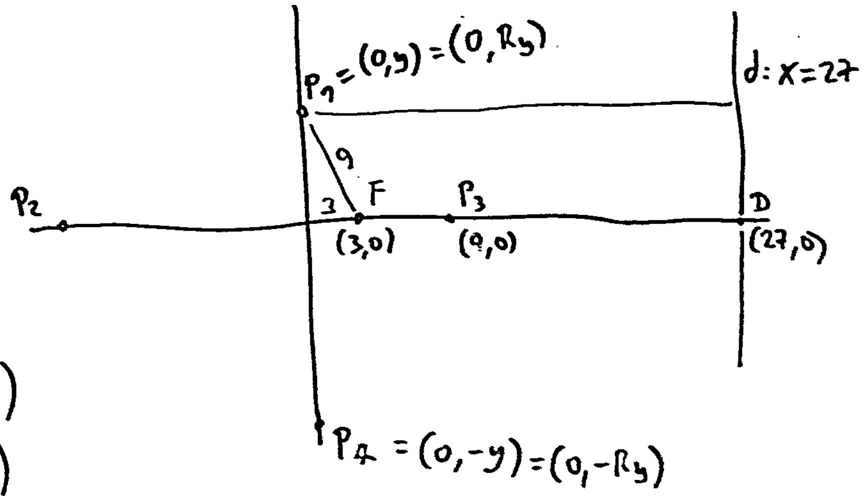
...EQUIVALENTE A UMA EQUAÇÃO DA FORMA

$$\left(\frac{x-0}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{R_y}\right)^2 = 1 \;!!!$$

EXERCÍCIO:
ENCONTRE $P_1, P_2, P_3, P_4, R_x, R_y$
TAIS QUE

$$E_4' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_y}\right)^2 = 1\},$$

$E_4 = E_4'$.



$$\underset{27}{d(P_1,d)} = 3\,\underbrace{d(P_1,F)}_{9}$$

GA 27/JUN/2016

HOJE:
HIPÉRBOLES!
HIPÉRBOLES SÃO ELIPSES PIORADAS !!.
HIPÉRBOLES TAMBÉM TÊM FOCOS E DIRETRIZES (NAS "DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS" DELAS, QUE ALGEBRICAMENTE TÊM RAIZES QUADRADAS DAS QUAIS A GENTE QUER SE LIVRAR).

$\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ $\quad$ $\sqrt{A}-\sqrt{B}=-C$

$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=C^2$

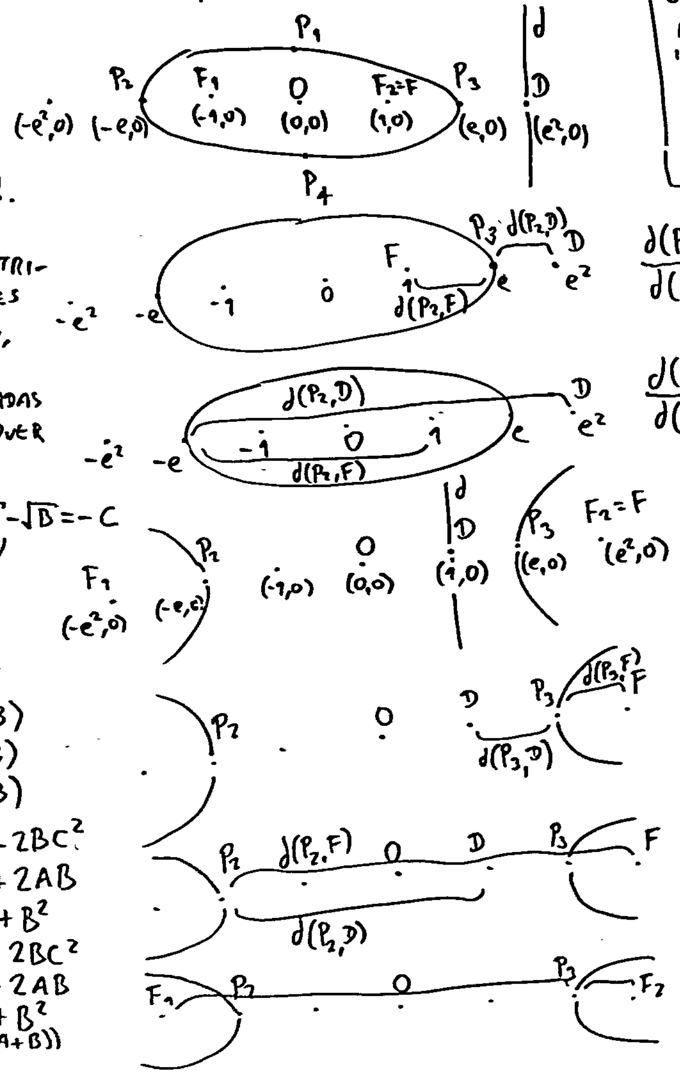
$A-2\sqrt{AB}+B=C^2$

$-2\sqrt{AB}=C^2-A-B$

$(-2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$

$$
\begin{aligned}
4AB &= C^2(C^2-A-B) \\
&\quad -A(C^2-A-B) \\
&\quad -B(C^2-A-B) \\
&= C^4-2AC^2-2BC^2 \\
&\quad +A^2+2AB \\
&\quad +B^2 \\
0 &= C^4-2AC^2-2BC^2 \\
&\quad +A^2-2AB \\
&\quad +B^2 \\
&= C^2(C^2-2(A+B)) \\
&\quad +(A-B)^2
\end{aligned}
$$

(e>1)



$$\frac{d(P_3,D)}{d(P_3,F)}=\frac{e^2-e}{e-1}=\frac{e(e-1)}{e-1}=e$$

$$\frac{d(P_2,D)}{d(P_2,F)}=\frac{e^2+e}{e+1}=\frac{e(e+1)}{e+1}=e$$

$$\frac{d(P_3,F)}{d(P_3,D)}=\frac{e^2-e}{e-1}=e$$

$$\frac{d(P_2,F)}{d(P_2,D)}=\frac{e^2+e}{e+1}=e$$

$d(P_3,F_1)=e+e^2$

$d(P_3,F_2)=e^2-e$

$d(P_3,F_1)-d(P_3,F_2)=2e$

OBS: NO REIS/SILVA, NA SEC. 3.6, NA P. 85, "DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS":
$d(P,F)=e\,d(P,d)$
PORQUE NÃO $e\,d(P,F)=d(P,d)$?

EQUAÇÃO DE CÔNICA:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

$$ax^2+0xy+cy^2+0x+0y+f=0$$

EQUAÇÃO DE ELIPSE OU EQUAÇÃO DE HIPÉRBOLE (NAS POSIÇÕES MAIS FÁCEIS – ORIGEM EM (0,0), UM EIXO HORIZONTAL E UM VERTICAL)

$4x^2+9y^2-25=0$ ⇐ ELIPSE

$4x^2-9y^2-25=0$ ⇐ HIPÉRBOLE (A)

$-4x^2+9y^2-25=0$ ⇐ TAMBÉM. (B)

<u>ALGUNS</u> PONTOS DESSAS HIPÉRBOLES SÃO FÁCEIS DE CALCULAR...

EXERCÍCIO: ENCONTRE PONTOS DA FORMA $(x,0)$ OU $(0,y)$ PERTENCENTES A A E B.

A) $4x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{2}$

B) $9y^2=25 \Rightarrow y^2=\frac{25}{9} \Rightarrow y=\pm\frac{5}{3}$

SEJAM:

$H_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(ax+by)}_{U}\underbrace{(ax-by)}_{V}=0\}$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{ax+by}_{U}=0\}$

$s=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{ax-by}_{V}=0\}$

$H_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(ax+by)}_{U}\underbrace{(ax-by)}_{V}=k\}$

$k=c^2$ $\quad$ $\underbrace{(ax+by)}_{U}\underbrace{(ax-by)}_{V}=c^2$

PONTOS ÓBVIOS DE H_{c^2}:

$U=c,\ V=c$

$U=-c,\ V=-c$

$U=2c,\ V=\frac{1}{2}c$, ETC.

SABENDO H_0 A GENTE <u>QUASE</u> SABE H_{c^2}...

EXEMPLO/EXERCÍCIO:

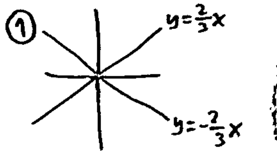
① REPRESENTE GRAFICAMENTE $H_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x+3y)(2x-3y)=0\}$

② IDEM, PARA $H_{16}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(2x+3y)}_{U}\underbrace{(2x-3y)}_{V}=16\}$

DICA: O PONTO $(U,V)=(4,4)$ PERTENCE A H_{16}, E H_0 É/SÃO AS ASSÍNTOTAS DE H_{16}.

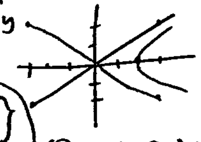
③ IDEM, PARA H_{-16}. DICA: $(U,V)=(4,-4)$.

①



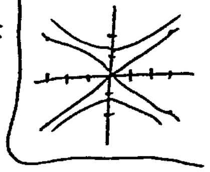
② $\underset{4x}{U}+V=8 \Rightarrow x=2$ $\quad (2,0)\in H_{16}$

$\underset{6y}{U-V}=0 \Rightarrow y=0$



③ $U+V=0 \Rightarrow x=0$

$\underset{6y}{U-V}=8 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$ $\quad (0,\frac{4}{3})\in H_{-16}$



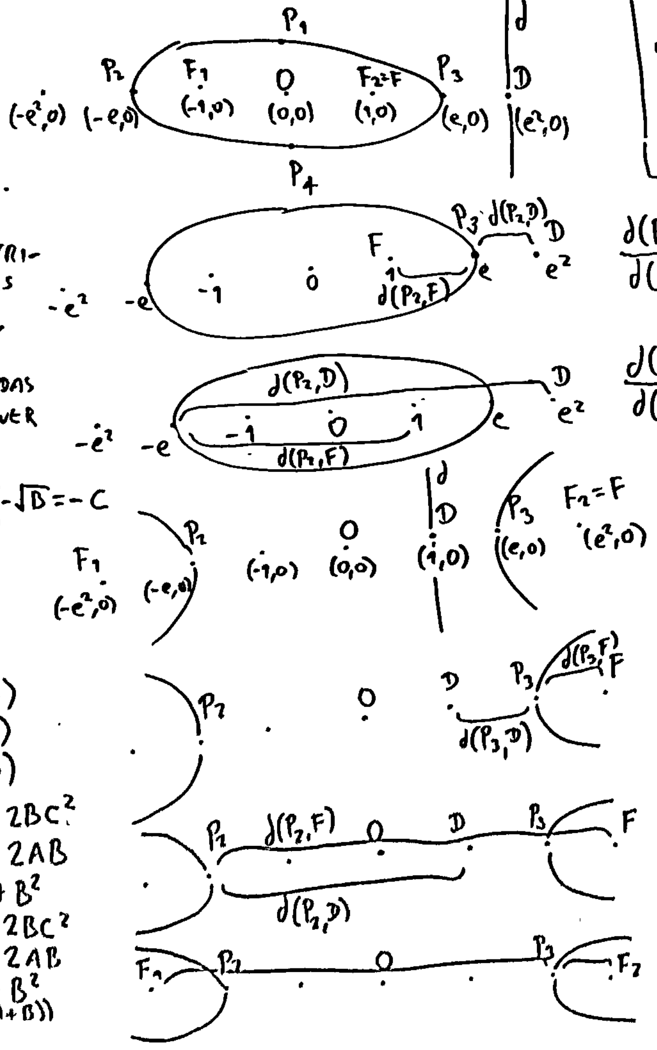
GA 27/JUN/2016

Hoje:
HIPÉRBOLES!
HIPÉRBOLES SÃO ELIPSES PIORADAS!!.
HIPÉRBOLES TAMBÉM TÊM FOCOS E DIRETRIZES (NAS "DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS" DELAS, QUE ALGEBRICAMENTE TÊM RAIZES QUADRADAS DAS QUAIS A GENTE QUER SE LIVRAR).

$\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ $\qquad$ $\sqrt{A}-\sqrt{B}=-C$

$$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=C^2$$
$$A-2\sqrt{AB}+B=C^2$$
$$-2\sqrt{AB}=C^2-A-B$$
$$(-2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$$
$$\begin{aligned}4AB &= C^2(C^2-A-B) \\ &\quad -A(C^2-A-B) \\ &\quad -B(C^2-A-B) \\ &= C^4-2AC^2-2BC^2 \\ &\quad +A^2+2AB \\ &\quad +B^2 \\ 0 &= C^4-2AC^2-2BC^2 \\ &\quad +A^2-2AB+B^2 \\ &= C^2(C^2-2(A+B)) \\ &\quad +(A-B)^2\end{aligned}$$

(e>1)



OBS: NO REIS/SILVA, NA SEC. 3.6, NA P. 85, "DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS":
$d(P,F)=e\,d(P,d)$
PORQUE NÃO $e\,d(P,F)=d(P,d)$?

$$\frac{d(P_3,D)}{d(P_3,F)}=\frac{e^2-e}{e-1}=\frac{e(e-1)}{e-1}=e$$

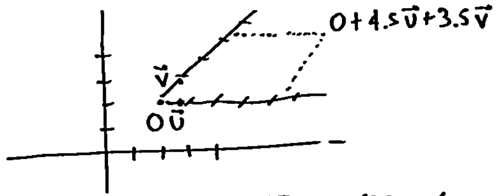
$$\frac{d(P_2,D)}{d(P_2,F)}=\frac{e^2+e}{e+1}=\frac{e(e+1)}{e+1}=e$$

$$\frac{d(P_3,F)}{d(P_3,D)}=\frac{e^2-e}{e-1}=e$$

$$\frac{d(P_2,F)}{d(P_2,D)}=\frac{e^2+e}{e+1}=e$$

$d(P_3,F_1)=e+e^2$
$d(P_3,F_2)=e^2-e$
$d(P_3,F_1)-d(P_3,F_2)=2e$

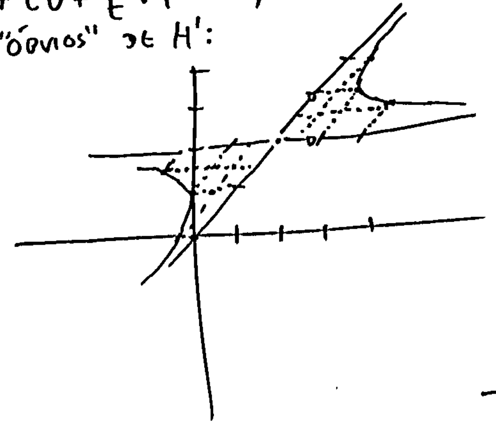
LEMBREM QUE QUANDO A GENTE VIU SISTEMAS DE COORDENADAS A GENTE VIU JEITOS DE PARAMETRIZAR ELIPSES E HIPÉRBOLES...



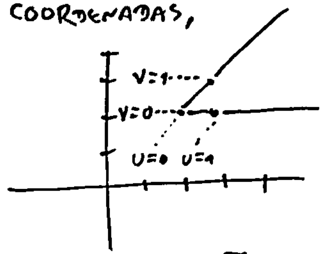
PODEMOS USAR ESTES SISTEMAS DE COORDENADAS PRA MONTAR ELIPSES TORTAS E HIPÉRBOLES TORTAS...

$E'=\{O+\cos\theta\,\vec{u}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{v} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$
$H'=\{O+t\vec{u}+\frac{1}{t}\vec{v} \mid t\in\mathbb{R},\ t\neq 0\}$.

PONTOS "ÓBVIOS" DE H':
$t=-2$:
$t=-1$,
$t=-\frac{1}{2}$,
$t=\frac{1}{2}$
$t=1$
$t=2$.



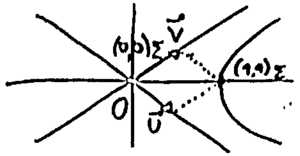
OBS: COM ESTAS COORDENADAS,



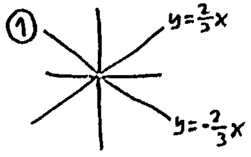
TODOS OS PONTOS DE H' OBEDECEM
UV = 1
ONDE UV DÁ ALGO DA FORMA $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ (=1)

PERGUNTA: (COMPLICADA!)
ONDE ESTÃO OS FOCOS E AS DIRETRIZES DE H'?

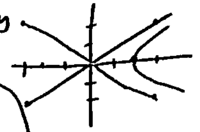
PERGUNTA INVERSA:
QUE SISTEMAS DE COORDENADAS PARAMETRIZAM H_{16} E H_{-16} DOS EXERCÍCIOS DE ANTES?



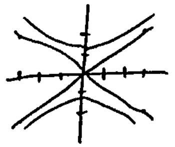
(1)



(2) $\underbrace{U+V}_{4x}=8 \Rightarrow x=2$ $\qquad$ $(2,0)\in H_{16}$
$\underbrace{U-V}_{6y}=0 \Rightarrow y=0$



(3) $U+V=0 \Rightarrow x=0$
$\underbrace{U-V}_{6y}=8 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$ $\qquad$ $(0,\frac{4}{3})\in H_{-16}$



GA 27/JUN/2016

HOJE:
HIPÉRBOLES!
HIPÉRBOLES SÃO ELIPSES PIORADAS !!.
HIPÉRBOLES TAMBÉM TÊM FOCOS E DIRETRIZES (NAS "DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS" DELAS, QUE ALGEBRICAMENTE TÊM RAIZES QUADRADAS DAS QUAIS A GENTE QUER SE LIVRAR).

$\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ $\qquad$ $\sqrt{A}-\sqrt{B}=-C$

$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=C^2$

$A-2\sqrt{AB}+B=C^2$

$-2\sqrt{AB}=C^2-A-B$

$(-2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$

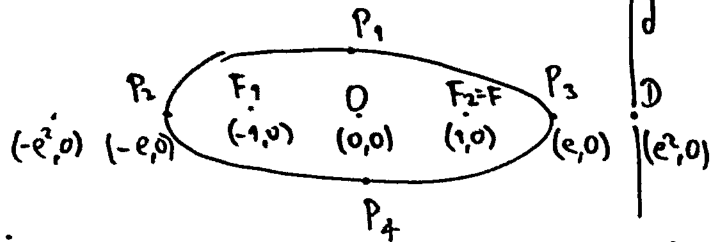
$4AB = C^2(C^2-A-B) - A(C^2-A-B) - B(C^2-A-B)$

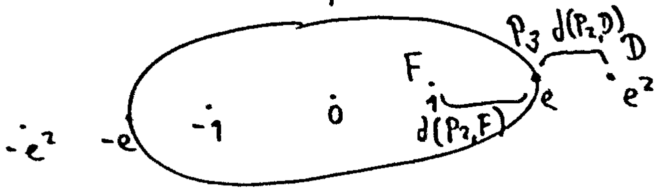
$= C^4-2AC^2-2BC^2+A^2+2AB+B^2$

$0 = C^4-2AC^2-2BC^2+A^2-2AB+B^2$

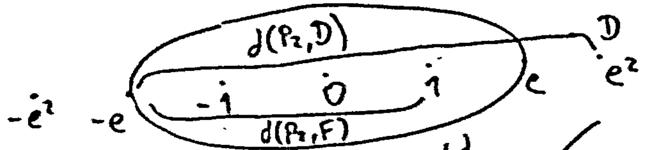
$= C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2$

(e>1)

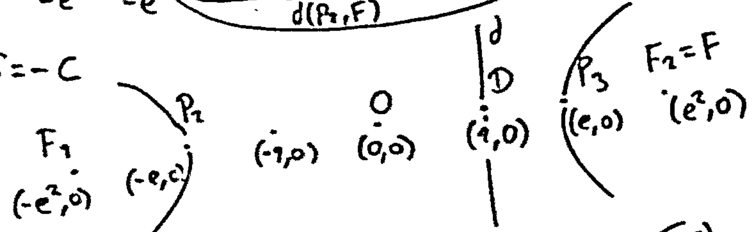


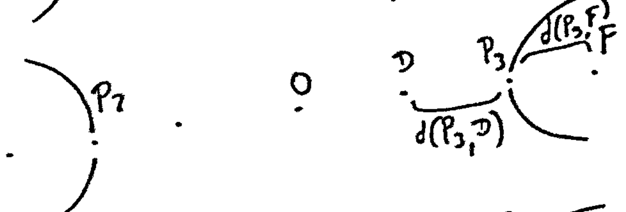


$$\frac{d(P_3,D)}{d(P_3,F)}=\frac{e^2-e}{e-1}=\frac{e(e-1)}{e-1}=e$$

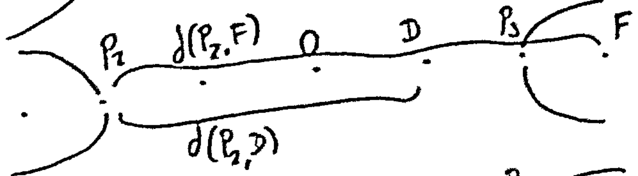


$$\frac{d(P_2,D)}{d(P_2,F)}=\frac{e^2+e}{e+1}=\frac{e(e+1)}{e+1}=e$$

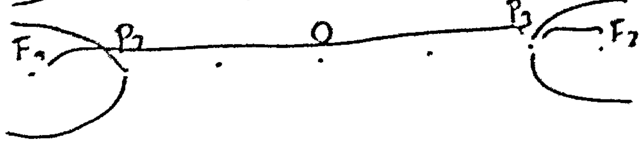




$$\frac{d(P_3,F)}{d(P_3,D)}=\frac{e^2-e}{e-1}=e$$



$$\frac{d(P_2,F)}{d(P_2,D)}=\frac{e^2+e}{e+1}=e$$



$d(P_3,F_1)=e+e^2$

$d(P_3,F_2)=e^2-e$

$d(P_3,F_1)-d(P_3,F_2)=2e$

OBS: NO REIS/SILVA, NA SEC. 3.6, NA P. 85, "DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS":
$d(P,F)=e\,d(P,d)$
PORQUE NÃO $e\,d(P,F)=d(P,d)$?

ACABAMOS DE VER QUE $(O,\vec{u},\vec{v})$ ← SISTEMA DE COORDENADAS GERA COORDENADAS U E V
(P.EX., $U=2x+3y+4$,
$V=5x+6y+7$)
E ISTO GERA UMA HIPÉRBOLE TORTA, QUE SABEMOS
- PARAMETRIZAR,
- DESENHAR ELA,
- $UV=1$ DÁ UMA EQUAÇÃO DE CÔNICA.

FALTA A GENTE VER QUE

$H''=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2e\}$

E

$H'''=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)=e\,d(P,D)\}$

TAMBÉM CORRESPONDEM A EQUAÇÕES DE CÔNICAS, E SE $F_1=(-e^2,0)$, $F_2=(e^2,0)$, $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1\}$ ENTÃO A GENTE OBTEM EQUAÇÕES DA FORMA

$ax^2+0xy+cy^2$
$+0x+0y$
$+f=0.$

GA 29/JUN/2016

HOJE:
ELIPSES, HIPÉRBOLES
E TALVEZ PARÁBOLAS –
MAS A AULA VAI SER
TODA ESTRUTURADA
EM CIMA DE EXERCÍCIOS!

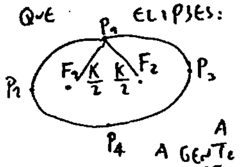
LEMBRE QUE:

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=k \Rightarrow$ ELIPSE

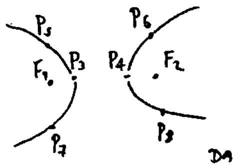
$d(P,F_1)-d(P,F_2)=k \Rightarrow$ UM RAMO DE UMA HIPÉRBOLE

$d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm k \Rightarrow$ HIPÉRBOLE

MAIS UM MOTIVO PELO QUAL HIPÉRBOLES SÃO MAIS DIFÍCEIS QUE ELIPSES:



P_1,P_2,P_3,P_4 SÃO FÁCEIS DE CALCULAR, E A PARTIR DELES A GENTE OBTÉM A EQUAÇÃO DA ELIPSE,



P_5,P_6,P_7,P_8 SÃO FÁCEIS DE CALCULAR, MAS NÃO É FÁCIL OBTER A EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE A PARTIR DELES... A GENTE QUER AS ASSÍNTOTAS!!!

PROBLEMAS:

① ENCONTRE O "?" NA HIPÉRBOLE DO EXEMPLO.

② SEJAM $F_1=(-3,0)$, $F_2=(3,0)$,

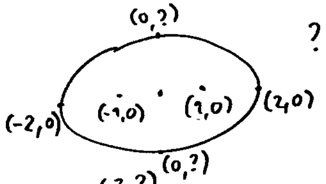
$H=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2\}$, (☆)

$H'_{abc}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2x^2-b^2y^2=c^2\}$

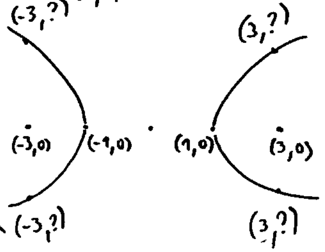
$H''=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)=3\,d(P,d)\}$

ONDE $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{3}\}$

EXEMPLOS:



$?=\sqrt{3}$



(CONT.):

VIMOS QUE TODO PONTO QUE OBEDECE

$d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2$ (☆)

OBEDECE UMA EQUAÇÃO DA FORMA

$a^2x^2-b^2y^2=c^2$.

USE O TRUQUE QUE NÓS VIMOS EM SALA NAS AULAS PASSADAS PRA ENCONTRAR a^2 E b^2.

OBS: CONFIRA AS CONTAS !!

③ TODO PONTO $P=(x,y)$ QUE OBEDECE

$d(P,F)=3\,d(P,d)$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \quad 3\left|x-\frac{1}{3}\right|$

OBEDECE UMA EQUAÇÃO DA FORMA

$a^2x^2-b^2y^2=c^2$.

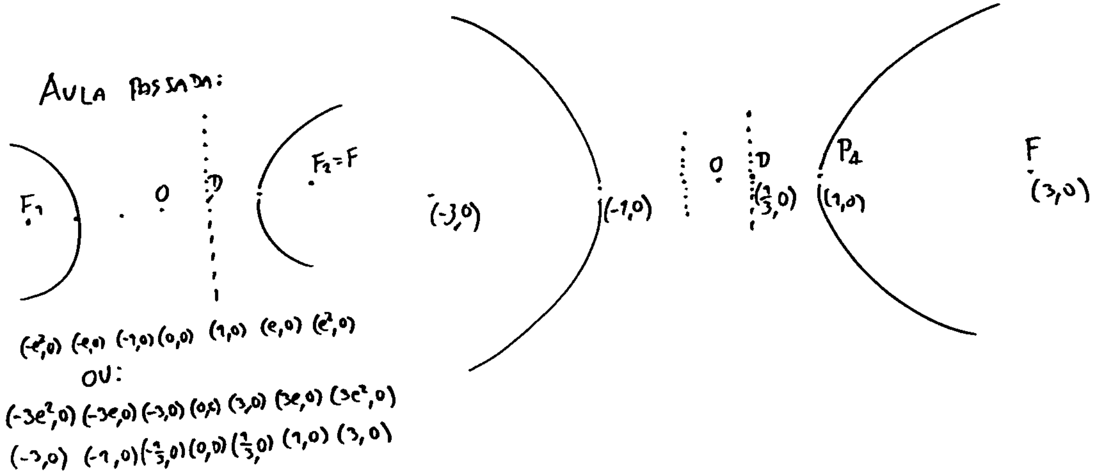
ENCONTRE a^2, b^2, c^2.

$\Rightarrow 8x^2-y^2=8$

$x^2-8y^2-9=0$ ⇐ NÃO!!

A LISTA 5 É SOBRE HIPÉRBOLES... FOCOS SÃO MENCIONADOS COM MUITA FREQUÊNCIA, MAS ACHO QUE DIRETRIZES NÃO APARECEM...

AULA PASSADA:

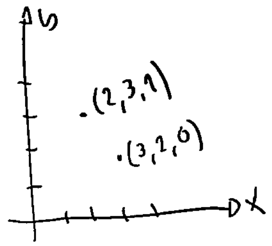


$d(P_4,F)=3\,d(P_4,d)$

GA 4/JUL/2016

HOJE: AULA DESANIMADA!
(EU PASSEI O FIM DE SEMANA MUITO DOENTE)
VAMOS TERMINAR CÔNICAS DEPOIS.
HOJE: INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$.

COMO VISUALIZAR $\mathbb{R}^3$?



RETAS EM $\mathbb{R}^3$

$r_1 = \{(2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$r_2 = \{(2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$r_3 = \{(2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

QUAIS DESTAS RETAS SE INTERCEPTAM?
EM QUE PONTOS? EM QUE "t"s?

$r_4 = \{(0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$r_5 = \{(1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

QUAIS DESTAS RETAS SÃO PARALELAS?
" " " " COINCIDENTES?

r_1 E r_4 NÃO SÃO PARALELAS (NEM COINCIDENTES),
E $r_1 \cap r_4 = \emptyset$
(ELAS NÃO SE CRUZAM...)

A TERMINOLOGIA PRA ISTO É ESTRANHA - "r_1 E r_4 SÃO <u>REVERSAS</u>"

O QUE SERIA UMA <u>EQUAÇÃO DE RETA</u> EM $\mathbb{R}^3$?

$4x + 5y = 6$ $\leftarrow \mathbb{R}^2$
$4x + 5y + 6z = 7$ $\leftarrow \mathbb{R}^3$?
$x = 2$

ALGUNS DOS NOSSOS PLANOS PREFERIDOS:

$\pi_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
$\pi_{xz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$
$\pi_{yz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

NOTAÇÃO (TEMPORÁRIA):
$[\text{EQUAÇÃO}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{EQUAÇÃO}\}$

OBS:
$\pi_{xy} = [z=0]$
$\pi_{xz} = [y=0]$
$\pi_{yz} = [x=0]$

EXERCÍCIO: VISUALIZEM:
$\pi_1 = [x=1]$
$\pi_2 = [y=1]$
$\pi_3 = [z=1]$
$\pi_4 = [z=4]$ $\pi_5 = [z=2]$

QUAIS DESTES PLANOS SÃO PARALELOS? E COINCIDENTES?

DÁ PRA PARAMETRIZAR PLANOS EM $\mathbb{R}^3$ - USANDO DOIS VETORES...

$\pi_6 = \{\underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$(0,1)_{\Sigma_6}$ $(1,1)_{\Sigma_6}$
$(0,0)_{\Sigma_6}$ $(1,0)_{\Sigma_6}$

VISUALIZE:
$\pi_8 = [y=x]$
$\pi_9 = [y=2x]$
$\pi_{10} = [z=x]$
$\pi_{11} = [z=x+1]$

GA 4/JUL/2016

ALGUNS DOS NOSSOS MODOS PREFERIDOS DE DESCREVER PLANOS EM $\mathbb{R}^3$: EQUAÇÕES

$[z = ax + by + c]$

$[y = ax + bz + c]$

$[x = ay + bz + c]$

SEJAM:

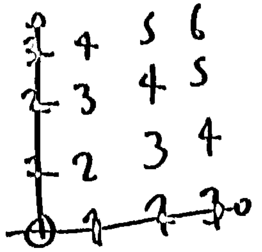
$\pi_{12} = [z = x + y]$

$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$

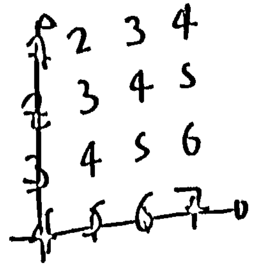
ENCONTRE $r := \pi_{12} \cap \pi_{13}$

E EXPRESSE r NA FORMA PARAMETRIZADA.

DICA: LEMBRE QUE TEMOS UM JEITO DE VISUALIZAR FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$...



$z = x + y$



$z = x - y + 4$

ALGUNS DOS NOSSOS MODOS PREFERIDOS DE DESCREVER RETAS EM $\mathbb{R}^3$:

$[y = ax + b,\ z = cx + d]$

$[x = ay + b,\ z = cy + d]$

$[x = az + b,\ y = cz + b]$

EXERCÍCIO:

ENCONTRE PONTOS DE $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ TAIS QUE:

a) $x = 0$

b) $x = 3$

b) $x = 3$

a) $\boxed{x = 0}$

$z = x + y \Rightarrow z = y$

$z = x - y + 4 \Rightarrow z = -y + 4$

$z = -z + 4$

$2z = 4$

$\boxed{\begin{array}{l} z = 2 \\ y = 2 \end{array}}$

GA 6/JUL/2016

Aviso:
A VR vai ser aberta (a nota dela vai substituir a pior das notas da P1 e da P2), mas eu vou ter que corrigir ela muito rápido e vou ter que ser implacável com erros de conta. Treinem jeitos de verificar seus resultados!

Hoje: det, $\times$.

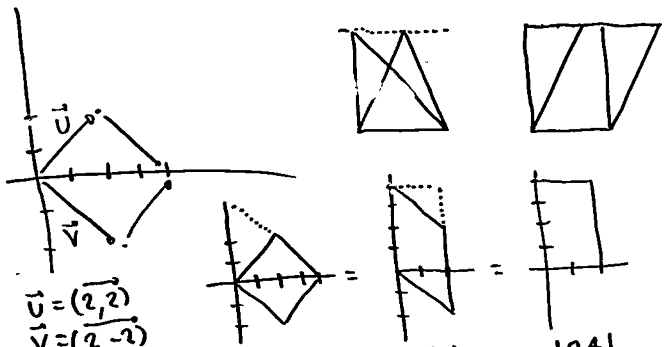
Notação:
Se $\vec{u}=(a,b)$ e $\vec{v}=(c,d)$, então $[\vec{u},\vec{v}]=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,

$$|[\vec{u},\vec{v}]| = \begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = ad-bc$$

$$\|[\vec{u},\vec{v}]\| = \left|\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right| = |ad-bc|$$

O determinante em $\mathbb{R}^2$ mede áreas (com orientação) (de paralelogramos)

Voltando pra $\mathbb{R}^2$...



$\vec{u}=(2,2)$
$\vec{v}=(2,-2)$
$|[\vec{u},\vec{v}]| = ?$ $\quad \begin{vmatrix}2&2\\2&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&4\\2&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&4\\2&0\end{vmatrix} = -8$

Resultado negativo

E se $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(d,e,f)$, $\vec{w}=(g,h,i)$

Então $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, $= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \det([\vec{u},\vec{v},\vec{w}]),$$
$$\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\| = |\det([\vec{u},\vec{v},\vec{w}])|$$

O det em $\mathbb{R}^3$ mede volumes (com orientação). De cubos tortos!!

$\begin{vmatrix}2&2\\2&-2\end{vmatrix} = |[\vec{u},\vec{v}]|$

$\begin{vmatrix}0&4\\2&-2\end{vmatrix} = |[\vec{u}-\vec{v},\vec{v}]|$

$\begin{vmatrix}0&4\\2&0\end{vmatrix} = |[\vec{u}-\vec{v},\vec{v}+\frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}]|$

Propriedade 1

$$\boxed{\begin{aligned}|[\vec{u},\vec{v}]| &= |[\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}]|\\ |[\vec{u},\vec{v}]| &= |[\vec{u}+b\vec{v},\vec{v}]|\end{aligned}}$$

... algo parecido vale pra $\mathbb{R}^3$:

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}]| = |[\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}+b\vec{w},\vec{w}]| = |[\vec{u}+a\vec{v}+b\vec{w},\vec{v},\vec{w}]|$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&0\\0&0&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot6 = 24$$

Resultado positivo

$(0,4,5) - \frac{5}{6}(0,0,6) = (0,4,0)$

"Orientação"?

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{vmatrix}=24$

$\begin{vmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&6\end{vmatrix}=-24$

$\begin{vmatrix}0&4&0\\0&0&6\\1&0&0\end{vmatrix}=24$

Cada troca muda o sinal do determinante.

Propriedade 2

$$|[a\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = a|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |[\vec{u},a\vec{v},\vec{w}]| = |[\vec{u},\vec{v},a\vec{w}]|$$

Notação

$\vec{i}=(1,0,0)$
$\vec{j}=(0,1,0)$
$\vec{k}=(0,0,1)$

$|[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]| = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 1$

$= |[\vec{j},\vec{k},\vec{i}]| = \begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}$

$= |[\vec{k},\vec{i},\vec{j}]| = \begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}$

$|[\vec{j},\vec{i},\vec{k}]| = \begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = -1$

$= |[\vec{i},\vec{k},\vec{j}]|$

$= |[\vec{k},\vec{j},\vec{i}]|$

Propriedade 3: determinantes de coisas como $[\vec{i},\vec{k},\vec{j}]$ dão 1 se os vetores estão "em ordem" e -1 se eles estão "ao contrário".

GA 6/JUL/2016

DIGAMOS QUE QUEREMOS CALCULAR
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1]|$,
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]|$,
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_3]|$,
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_4]|$,
$\vdots$
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_{200}]|$.

SEJAM: $\vec{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(c,d,e)}$,
$\vec{w}_i=\overrightarrow{(x,y,z)}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{aligned} & aez+bfx+cdy \\ & -afy-bdz-cex \end{aligned}$$
$$= (bf-ce)x+(cd-af)y+(ae-bd)z$$
$$= \overrightarrow{(bf-ce,\,cd-af,\,ae-bd)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$$

EU ESQUECI DE EXPLICAR O PRODUTO INTERNO EM $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(d,e,f)}=ad+be+cf$

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ TEM AS MESMAS UTILIDADES EM $\mathbb{R}^3$ QUE EM $\mathbb{R}^2$.

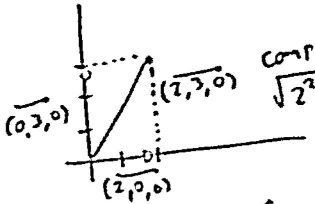
$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\|\overrightarrow{(a,b,c)}\|=\sqrt{\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(a,b,c)}}$
$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ISTO MEDE COMPRIMENTOS DE VETORES E DISTÂNCIAS.

PORQUÊ?

EXEMPLO: $\|\overrightarrow{(2,3,4)}\|=?$



COMPRIMENTO: $\sqrt{2^2+3^2}$

$\overrightarrow{(2,3,0)}\perp\overrightarrow{(0,0,4)}$,

PITÁGORAS FUNCIONA, ETC.

SEGUNDA UTILIDADE DO ".":
ORTOGONALIDADE.

$\vec{u}\perp\vec{v}$ SE E SÓ SE $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

TERCEIRA UTILIDADE DO ".":
PROJEÇÃO.

$\Pr_{\vec{u}}\vec{v}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

TEM EXATAMENTE AS MESMAS PROPRIEDADES EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$.

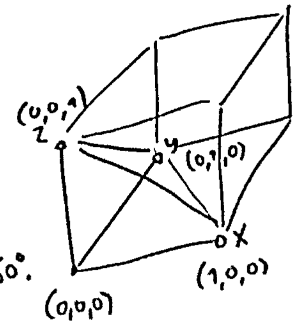
QUARTA UTILIDADE DO ".":
ÂNGULOS

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(\mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v}))\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

EXEMPLO:
$P=(1,0,0)$
$Q=(0,1,0)$
$R=(0,0,1)$

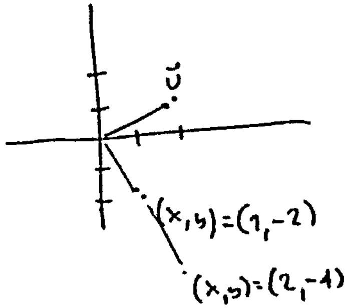
FORMAM UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

$\cos(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=\cos 60°$.



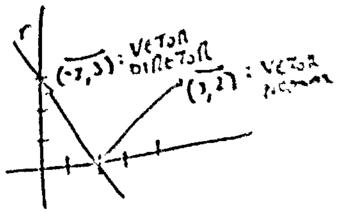
QUINTA UTILIDADE DO ".":
(EU NÃO EXPLIQUEI ISSO DIREITO EM $\mathbb{R}^2$! !!)

SE $\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$,
COMO FUNCIONA $\vec{u}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$?



$\vec{u}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$ DÁ ZERO QUANDO $\overrightarrow{(x,y)}\perp\vec{u}$.

DÁ PRA GENTE USAR "." PRA DEFINIR RETAS (PRA ENCONTRAR EQUAÇÕES DE RETAS).



SE $\overrightarrow{(a,b)}$ É UM VETOR NORMAL À RETA $\mathbb{R}$, ENTÃO A EQUAÇÃO DE r É DA FORMA $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=c$,

OU SEJA, $ax+by=c$,

PARA ALGUM c.

EXERCÍCIO:
ENCONTREM c NA EQUAÇÃO DA r DO EXEMPLO.

$r: \overrightarrow{(3,2)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}=c$
$3x+2y=c$

$(0,3)\in r \Rightarrow c=6$
$(2,0)\in r \Rightarrow c=6$

DÁ PRA CALCULAR O c A PARTIR DE ALGUM $P\in r$,
E SE r PASSA PELA ORIGEM, $c=0$

GA 6/JUL/2016

DIGAMOS QUE QUEREMOS CALCULAR

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1]|$,

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]|$,

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_3]|$,

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_4]|$,

$\vdots$

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_{200}]|$.

SEJAM: $\vec{u}=\overrightarrow{(a,b,c)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(c,d,e)}$,
$\vec{w}_i=\overrightarrow{(x,y,z)}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{array}{l} aez+bfx+cdy \\ -afy-bdz-cex \end{array}$$

$$=(bf-ce)x+(cd-af)y+(ae-bd)z$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{(bf-ce,cd-af,ae-bd)}}_{\substack{\parallel \\ \vec{u}\times\vec{v} \\ \parallel \\ \overrightarrow{(a,b,c)}\times\overrightarrow{(d,e,f)}}}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$$

A OPERAÇÃO "x" É "UM PEDAÇO" DA CONTA DO DETERMINANTE.

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

GEOMETRICAMENTE, O QUE ESSE "x" QUER DIZER?

OBS: $\underbrace{|[\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v}]|}_{\text{DETERMINANTE DE UM "CUBO TORTO" DE VOLUME 0}}=0$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})=0$

$(\vec{u}\times\vec{v})\perp a\vec{u}+b\vec{v}$

$(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$

$(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$

$\vec{u}\times\vec{v}$ É SEMPRE ALGUM VETOR ORTOGONAL TANTO A $\vec{u}$ QUANTO A $\vec{v}$... QUAL?

EXERCÍCIO:

EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO, ENCONTRE TRÊS VETORES $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3$ DIFERENTES ORTOGONAIS TANTO A $\vec{u}$ QUANTO A $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=\overrightarrow{(1,0,0)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(0,2,0)}$

b) $\vec{u}=\overrightarrow{(0,2,0)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(0,0,3)}$.

c) $\vec{u}=\overrightarrow{(4,0,0)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(5,0,0)}$

d) $\vec{u}=\overrightarrow{(2,0,0)}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(3,4,0)}$

GA 11/JUL/2016

HOJE: "x", CONTINUAÇÃO...

LEMBRE QUE SE
$\vec{u} = \overrightarrow{(a,b,c)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(d,e,f)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(g,h,i)}$,

ENTÃO
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$,

$\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\| = \left|\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right|$

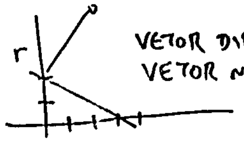
(A NOTAÇÃO DAS LISTAS DA BEL É UM POUQUINHO DIFERENTE)

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

$\overrightarrow{(a,b,c)}\times\overrightarrow{(d,e,f)} = \overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}$

VIMOS QUE $|[\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v}]| = 0$...

EM $\mathbb{R}^2$:



VETOR DIRETOR: $\overrightarrow{(3,-2)} = \vec{v}$
VETOR NORMAL: $\overrightarrow{(2,3)}$

O VETOR NORMAL QUASE NOS DÁ A EQUAÇÃO DA RETA...

$r:\ 2x+3y = c$

SÓ FALTA DESCOBRIR c.

OBS:
$(0,0)\in r \leftarrow c=0$

EM $\mathbb{R}^3$:

PLANO EM $\mathbb{R}^3$: π
VETOR NORMAL A π: $\overrightarrow{(a,b,c)}$

$\pi:\ ax+by+cz = d$

SÓ FALTA DESCOBRIR d.

$\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$

$(0,0,0)\in\pi \leftarrow d=0$

VOLTANDO AO "x"...
QUEM É $\vec{u}\times\vec{v}$?
QUEM É ESTA FUNÇÃO? $F(x,y,z) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$
ONDE ELA É ZERO?
- NA ORIGEM
- NUM PLANO QUE CONTÉM $\vec{u}$ E $\vec{v}$.

$F(0,0,0) = 0$

PULANDO DETALHES (PENSEM EM CASA!)
$\vec{u}\times\vec{v}$ É UM VETOR ORTOGONAL A $\vec{u}$ E $\vec{v}$. QUAL?

TRUQUE: DÁ PRA GENTE DESCOBRIR $\vec{u}\times\vec{v}$ USANDO DETERMINANTES!

EXEMPLOS:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0,0)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(0,2,0)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,3)}$

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = 6$
$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

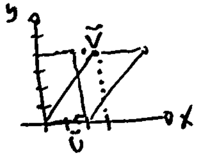
b) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0,0)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(0,2,0)}$.

- ENCONTRE ALGUM VETOR, $\vec{w}$, ORTOGONAL A $\vec{u}$ E $\vec{v}$.
RESP: $\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,3)}$ (UMA RESPOSTA POSSÍVEL)

- SEJA $\vec{u}\times\vec{v} = \lambda\vec{w}$.
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = 6$
$\lambda\vec{w}\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{w}\cdot\vec{w}) = \lambda\cdot 9$

$6 = 9\lambda$
$\frac{6}{9} = \lambda = \frac{2}{3}$
$\lambda\vec{w} = \frac{2}{3}\overrightarrow{(0,0,3)} = \overrightarrow{(0,0,2)} = \vec{u}\times\vec{v}$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0,0)}$
$\vec{v} = \overrightarrow{(3,4,0)}$



USE O TRUQUE ANTERIOR PRA CALCULAR $\vec{u}\times\vec{v}$.
- ENCONTRE UM $\vec{w}$ ORTOGONAL A $\vec{u}$ E $\vec{v}$,
- ENCONTRE λ
- ENCONTRE $\lambda\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$.

SUGESTÃO: $\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

SEJA $\vec{u}\times\vec{v} = \lambda\vec{w}$.
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = 8$
$\lambda\vec{w}\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{w}\cdot\vec{w}) = \lambda\cdot 1$
$\Rightarrow \lambda = 8$
$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \lambda\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,8)}$

PRÓXIMO TRUQUE:
(I) ESCOLHA $\vec{u},\vec{v}$ QUAISQUER.
(II) ESCOLHA $\vec{w}$ ORTOGONAL A $\vec{u}$ E $\vec{v}$ DE NORMA 1.

VOLUME = BASE · ALTURA
$\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\|$ = ÁREA DO PARALELOGRAMO FORMADO POR $\vec{u}$ E $\vec{v}$ · 1
$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

VOLUME = ÁREA DA BASE

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\|$ = ÁREA$(\vec{u},\vec{v})$
$= \lambda\vec{w}\cdot\vec{w}$
$= \lambda(\vec{w}\cdot\vec{w})$
$= \lambda\cdot 1$
$= \lambda$

$\vec{u}\times\vec{v} = \lambda\vec{w}$
$=$ ÁREA$(\vec{u},\vec{v})\cdot\vec{w}$

OBS: $\overrightarrow{(2,0,0)}\times\overrightarrow{(3,4,0)} = \overrightarrow{(0,0,8)}$ OU $\overrightarrow{(0,0,-8)}$?

TRUQUE: "REGRA DA MÃO DIREITA" (?)

GA 11/JUL/2016

Hoje: "x", continuação...

Lembre que se
$\vec{u} = (a,b,c)$,
$\vec{v} = (d,e,f)$,
$\vec{w} = (g,h,i)$

Então
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$,

$\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\| = \left|\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right|$

(A notação das listas da Bel é um pouquinho diferente)

$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

$\overline{(a,b,c)}\times\overline{(d,e,f)} = \overline{(bf-ce, cd-af, ae-bd)}$

Vimos que $|[\vec{u},\vec{v}, a\vec{u}+b\vec{v}]| = 0$...

Várias utilidades (algumas nada óbvias) pro "x"

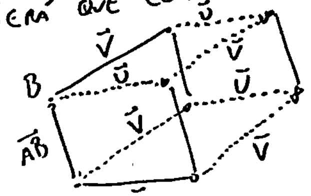
① $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \text{área}(\vec{u},\vec{v})$

② Dá pra usar $\vec{u}\times\vec{v}$ pra encontrar vetores ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

③ $\vec{u}\times\vec{v} = 0$ se e só se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares ($\text{área}(\vec{u},\vec{v}) = 0$)

④ $r = \{A + \alpha\vec{u} \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$,
$s = \{B + \beta\vec{v} \mid \beta\in\mathbb{R}\}$ ← Retas parametrizadas.

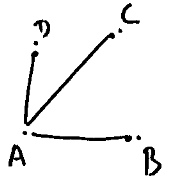
Será que r e s se cortam?
Será que elas são reversas?



Se r e s se cortam elas estão no mesmo plano, $\vec{AB}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o volume da figura acima é 0.

Se o volume da figura não for zero, as retas r e s não se cortam.

⑤ Um truque parecido verifica se 4 pontos são coplanares.

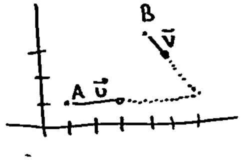


- Será que o vetor $\vec{AD}$ é combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$? $(\vec{AD} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC})$
- Será que D está no mesmo plano que A,B,C?
- Será que $|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]| = 0$?

⑥ Sejam $r = \{A+\alpha\vec{u} \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$,
$s = \{B+\beta\vec{v} \mid \beta\in\mathbb{R}\}$.

Qual é a distância entre r e s?

Exemplo:



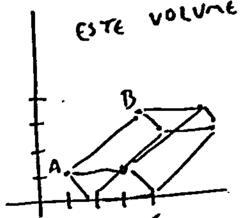
$A = (1,1,1)$, $\vec{u} = \overline{(2,0,0)}$
$B = (4,3,2)$, $\vec{v} = \overline{(1,-1,0)}$
$C = (6,1,1)$ $d(C,D) = 1$
$D = (6,1,2)$

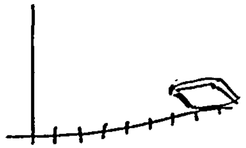
Um modo ingênuo e trabalhoso de calcular $d(r,s)$ é começar encontrando os pontos $C\in r$ e $D\in s$ que são os mais próximos possíveis entre si...

Nos pontos C e D "certos" vamos ter $\vec{CD}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{CD}$ ortogonal a $\vec{v}$, e aí $d(C,D) = d(r,s)$.

Truque geral:

Este volume é igual a este:





Volume = Área da base · altura

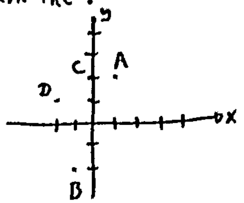
$|[\vec{u},\vec{v},\vec{AB}]|$ = $\text{Área}(\vec{u},\vec{v})$ · $d(r,s)$ = $d(C,D)$

$d(r,s) = \dfrac{\text{volume}}{\text{área da base}} = \dfrac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{AB}]|}{\text{Área}(\vec{u},\vec{v})}$

Agora vocês sabem fazer quase todos os exercícios das listas 8 e 9!!! ☺☺☺

9.18) Sejam $A = (1,2,4)$,
$B = (-1,0,-2)$,
$C = (0,2,2)$,
$D = (-2,1,-3)$.

Verifique se A,B,C,D são coplanares.



Digamos que $A,B,C\in\pi$, e $\vec{n}\perp\pi$.
Então $\vec{AB}\perp\vec{n}$
$\vec{AC}\perp\vec{n}$

- Encontre $\vec{n}$
- Encontre uma equação $ax+by+cz=d$ pra π.

GA 13/JUL/2016

HOJE: AULA PORTÁTIL! EXERCÍCIOS (QUE PODEM SER FEITOS NO SAGUÃO)

AULA PASSADA: "x"

AS LISTAS 8 E 9 ESTÃO CHEIAS DE EXERCÍCIOS QUE A GENTE PODE RESOLVER COM AS TÉCNICAS DA AULA PASSADA - SÓ QUE EM GERAL ELES TÊM NÚMEROS DIFÍCEIS.

PRA CADA EXERCÍCIO INTERESSANTE, VAMOS

1) FAZER (GRAFICAMENTE) UMA VARIAÇÃO DELE QUE A GENTE SAIBA RESOLVER NO OLHOMÊTRO,
2) ESCREVER FORMALMENTE ESSA VARIAÇÃO,
3) RESOLVER A VARIAÇÃO NO OLHÔMETRO,
4) RESOLVÊ-LA ALGEBRICAMENTE,
5) RESOLVER O PROBLEMA ORIGINAL.

HABILIDADES MUITO ÚTEIS

MAS QUE NÃO CAEM NA PROVA

EXEMPLO:

9.18) SEJAM

$A=(1,2,4)$
$B=(-1,0,-2)$
$C=(0,2,2)$
$D=(-2,1,-3)$

a) VERIFIQUE SE A,B,C,D SÃO COPLANARES.

b) ENCONTRE UMA EQUAÇÃO PARA O PLANO π CONTENDO A,B,C.

VARIAÇÃO:

$A=$
$B=$
$C=$
$D=$

Um PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO:

SEJAM $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,5)$, $D=(0,5,0)$,

r UMA RETA QUE PASSA POR A E B, r' UMA RETA QUE PASSA POR C E D, s UMA RETA ORTOGONAL A r E r' QUE CORTA AMBAS.

a) CALCULE A DISTÂNCIA ENTRE r E r'!
b) DÊ UMA PARAMETRIZAÇÃO PARA s.
c) DÊ UMA EQUAÇÃO DE UM PLANO π PARALELO A r E s E EQUIDISTANTE DE AMBAS.

GA 18/JUL/2016

HOJE: VAMOS FECHAR A MATÉRIA DAS LISTAS 7 E 8

QUARTA: FECHAR CÔNICAS

2ª 25/JUL: INTRODUÇÃO A QUÁDRICAS, REVISÃO FINAL

4ª 27/JUL: P2.

AULA PASSADA:
A GENTE VIU COMO FAZER E RESOLVER VARIAÇÕES MAIS FÁCEIS DOS EXERCÍCIOS DAS LISTAS.

IDÉIA:

(I) ESCOLHA UM EXERCÍCIO
(II) ESCREVA UM VARIAÇÃO DELE COM OUTROS NÚMEROS
(III) IDEM, MAS AGORA TENTANDO FAZER UMA VARIAÇÃO QUE É PRA RESOLVER PELO OLHÔMETRO
(IV) VISUALIZE E RESOLVA SUA VARIAÇÃO
(V) TESTE SEUS RESULTADOS
(VI) RESOLVA ALGEBRICAMENTE A SUA VARIAÇÃO
(VII) " " O PROB. ORIGINAL
(VIII) TESTE SEUS RESULTADOS

EXEMPLO:

9.18) SEJAM
$A=(1,2,4)$
$B=(-1,0,-2)$
$C=(0,2,2)$
$D=(-2,1,-3)$

a) VERIFIQUE SE A, B, C, D SÃO COPLANARES.
b) ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO π QUE CONTÉM A, B, C.
c) VERIFIQUE SE $D \in \pi$.

PRÊMIOS

← III+IV+V: CAJUZINHO

UM PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO:

SEJAM $A=(2,0,0)$
$B=(0,2,0)$
$C=(0,0,5)$
$D=(0,5,0)$,

r UMA RETA QUE PASSA POR A E B,
r' " " " " C E D,
s UMA RETA ORTOGONAL A r E r' QUE CORTA AMBAS.

a) CALCULE A DISTÂNCIA $d(r,r')$.
b) DÊ UMA PARAMETRIZAÇÃO PARA s.
c) DÊ UMA EQUAÇÃO PARA O PLANO π PARALELO A r E r' E EQUIDISTANTE DE AMBAS.

III+IV+V: TRENTO

III+IV: PAÇOQUITA

SEJAM $A=(1,2,3)$, $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,2,2)$

ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO π QUE CONTÉM A E É PARALELO A $\vec{u}$ E $\vec{v}$.

← UM CAJUZINHO

← VII: SERENATA

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ x & y \end{matrix} = aez+bfx+cdy -cex-afy-bdz$$

$$= (bf-ce)x+(cd-af)y+(ae-bd)z$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}}_{(a,b,c)\times(d,e,f)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

DICA:
DÊ NOMES PROS SEUS OBJETOS INTERMEDIÁRIOS

$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(2,-2,2)}$,
$\pi: 2x-2y+2z=4$

$\pi /\!/ \vec{u}$ PORQUE $2\cdot1-2\cdot1+2\cdot0=0$
$\pi /\!/ \vec{v}$ PORQUE $2\cdot0-2\cdot2+2\cdot2=0$
$A\in\pi$ PORQUE $2\cdot1-2\cdot2+2\cdot3=4$

$A=(1,2,0)$
$B=(4,3,0)$
$C=(0,7,0)$
$D=(1,5,0)$

a) $\vec{AB}=(3,1,0)$
$\vec{AC}=(-1,5,0)$
$\vec{AD}=(0,3,0)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

→ A, B, C e D São Coplanares

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(0,0,16)}$

$\cancel{0x}+\cancel{0y}+16z=D$

$16z=D$ (A)

$16\cdot0=0$ $D=0$

$z=0$

GA 18/JUL/2016

HOJE: VAMOS FECHAR A MATÉRIA DAS LISTAS 7 E 8

QUARTA: FECHAR CÔNICAS

2ª 25/JUL: INTRODUÇÃO A QUÁDRICAS, REVISÃO FINAL

4ª 27/JUL: P2.

AULA PASSADA:
A GENTE VIU COMO FAZER E RESOLVER VARIAÇÕES MAIS FÁCEIS DOS EXERCÍCIOS DAS LISTAS.

IDÉIA:

I ESCOLHA UM EXERCÍCIO
II ESCREVA UM VARIAÇÃO DELE COM OUTROS NÚMEROS
III IDEM, MAS AGORA TENTANDO FAZER UMA VARIAÇÃO QUE DÊ PRA RESOLVER PELO OLHÔMETRO
IV VISUALIZE E RESOLVA SUA VARIAÇÃO
V TESTE SEUS RESULTADOS
VI RESOLVA ALGEBRICAMENTE A SUA VARIAÇÃO
VII " " O PROB. ORIGINAL
VIII TESTE SEUS RESULTADOS

EXEMPLO:

9.18) SEJAM
$A=(1,2,4)$
$B=(-1,0,-2)$
$C=(0,2,2)$
$D=(-2,1,-3)$

a) VERIFIQUE SE A, B, C, D SÃO COPLANARES.
b) ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO π QUE CONTÉM A, B, C.
c) VERIFIQUE SE $D \in \pi$.

PRÊMIOS

← III+IV+V: CAJUZINHO

UM PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO:

SEJAM $A=(2,0,0)$
$B=(0,2,0)$
$C=(0,0,5)$
$D=(0,5,0)$,

r UMA RETA QUE PASSA POR A E B,
r' " " " " " C E D,
s UMA RETA ORTOGONAL A r E r' QUE CORTA AMBAS.

a) CALCULE A DISTÂNCIA $d(r,r')$.
b) DÊ UMA PARAMETRIZAÇÃO PARA S.
c) DÊ UMA EQUAÇÃO PARA O PLANO π PARALELO A r E r' E EQUIDISTANTE DE AMBAS.

III+IV+V: TRENTO

III+IV: PAÇOQUITA

SEJAM $A=(1,2,3)$, $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,2,2)$

ENCONTRE A EQUAÇÃO DO PLANO π QUE CONTÉM A E É PARALELO A $\vec{u}$ E $\vec{v}$.

← UM CAJUZINHO

← VIII: SERENATA

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ x & y \end{matrix} = \begin{matrix} aez+bfx+cdy \\ -cex-afy-bdz \end{matrix}$$

$$= (bf-ce)x + (cd-af)y + (ae-bd)z$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}}_{\overrightarrow{(a,b,c)}\times\overrightarrow{(d,e,f)}} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$$

DICA:
DÊ NOMES PROS SEUS OBJETOS INTERMEDIÁRIOS

$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(2,-2,2)}$,
$\pi: 2x-2y+2z=4$

$\pi // \vec{u}$ PORQUE $2\cdot1-2\cdot1+2\cdot0=0$
$\pi // \vec{v}$ PORQUE $2\cdot0-2\cdot2+2\cdot2=0$
$A\in\pi$ PORQUE $2\cdot1-2\cdot2+2\cdot3=4$

$A=(1,2,0)$
$B=(4,3,0)$
$C=(0,7,0)$
$D=(1,5,0)$

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(3,1,0)}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{(-1,5,0)}$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{(0,3,0)}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

→ A, B, C, D São Coplanares

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(0,0,16)}$

$\cancel{0x}+\cancel{0y}+16z=D$

$16z=D$ (A)

$16.0=0 \quad D=0$

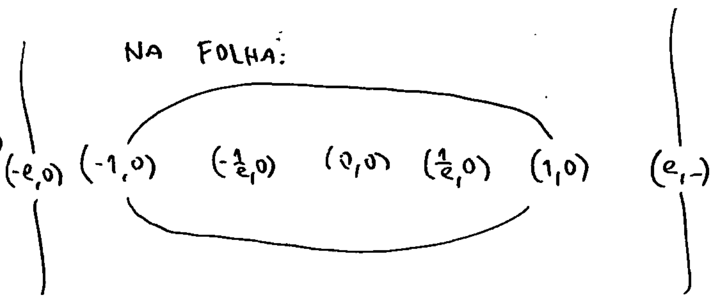
$z=0$

GA 20/JUL/2016

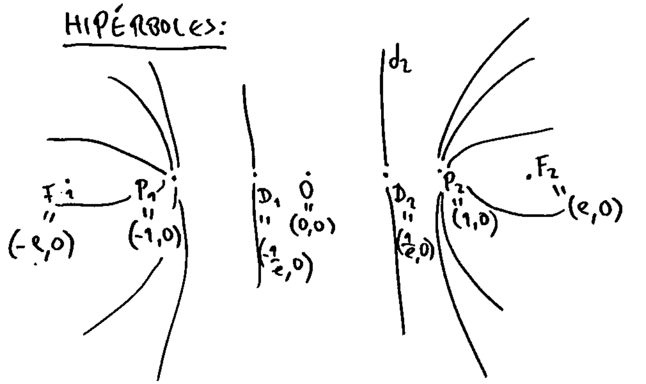
HOJE:

- TERMINAR CÔNICAS
- MAIS DICAS DE COMO ESTUDAR PRA $\mathbb{R}^3$
- QUÁDRICAS (~~NÃO!~~ PRÓXIMA AULA!)

NA FOLHA:



HIPÉRBOLES:



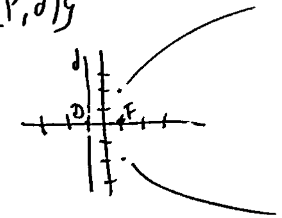
PARÁBOLAS

$P_A = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F) = d(P,d)\}$

SEJAM:

$d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1\}$,

$F = (1,0)$



EXERCÍCIO: ENCONTRE 3 PONTOS DE P_A.

RESP: (0,0) (1,2) (1,-2)

$P_A = \{\underset{(0,0)}{O} + t\vec{u} + t^2\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, com: $t=0 \Rightarrow (0,0)$

$t=-1 \Rightarrow (1,2)$

$t=1 \Rightarrow (1,-2)$

$t=1 \Rightarrow O + \vec{u} + \vec{v} = (1,-2)$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(1,-2)}$

$t=-1 \Rightarrow O - \vec{u} + \vec{v} = (1,2)$

$-\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$

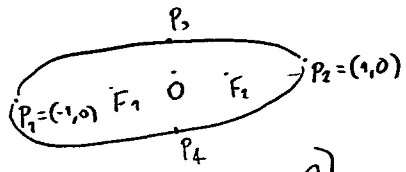
$\vec{u} = \overrightarrow{(0,-2)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$

CÔNICAS

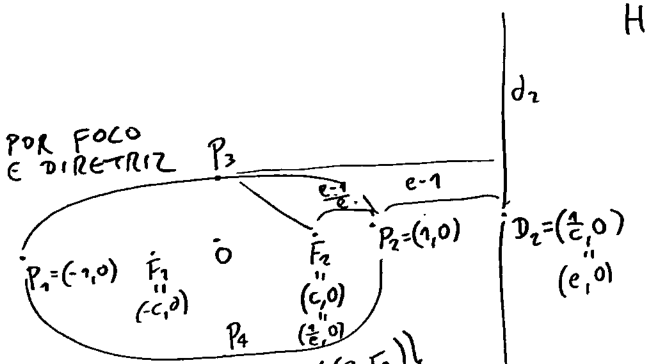
- POR EQUAÇÕES (POLINÔMIOS DE 2º GRAU EM X E Y)
- HIPÉRBOLES E ELIPSES: POR FOCOS, POR FOCO E DIRETRIZ
- PARÁBOLAS POR FOCO E DIRETRIZ

ELIPSE:



$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2\}$

POR FOCO E DIRETRIZ



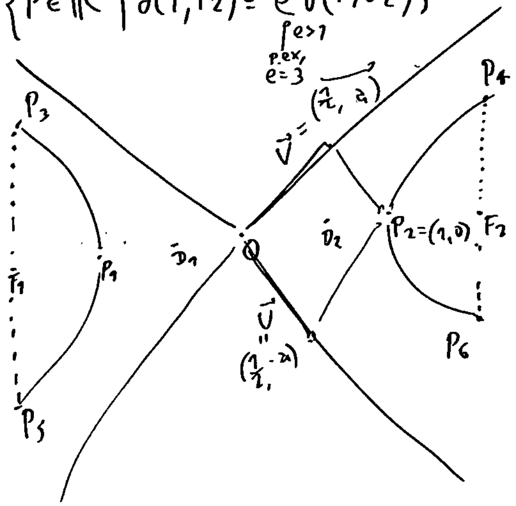
$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,d_2) = e\, d(P,F_2)\}$

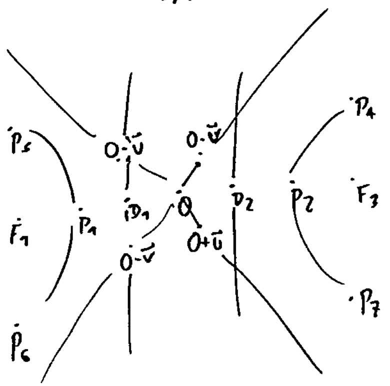
$e>1$, p.ex., $e=3$

$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2\}$

$= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F_2) = e\, d(P,d_2)\}$

$e>1$, p.ex., $e=3$





GA 20/JUL/2016

HOJE:

- TERMINAR CÔNICAS
- MAIS DICAS DE COMO ESTUDAR PRA $\mathbb{R}^3$
- QUÁDRICAS (ou NÃO! PRÓXIMA AULA!)

NA AULA PASSADA E NA ANTERIOR A GENTE FICOU TREINANDO CRIAR <u>VARIAÇÕES MAIS FÁCEIS</u> DOS EXERCÍCIOS DA LISTA...

FALTOU UMA DICA/IDÉIA: ÀS VEZES É MAIS FÁCIL "COMEÇAR PELO MEIO" - POR EXEMPLO, NO PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO, É MAIS FÁCIL COMEÇAR INVENTANDO UM PLANO π (NA VARIAÇÃO), DEPOIS AS RETAS r E r', DEPOIS A, B, C, D, S...

PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO:

SEJAM $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,5)$, $D=(0,5,0)$,

r UMA RETA QUE PASSA POR A E B,

r' UMA RETA QUE PASSA POR C E D,

S UMA RETA ORTOGONAL A r E r' QUE CORTA AMBAS.

a) CALCULE A DISTÂNCIA $d(r,r')$.

b) DÊ UMA PARAMETRIZAÇÃO PARA S.

c) DÊ UMA EQUAÇÃO PARA O PLANO π PARALELO A r E r' E EQUIDISTANTE DE AMBAS.

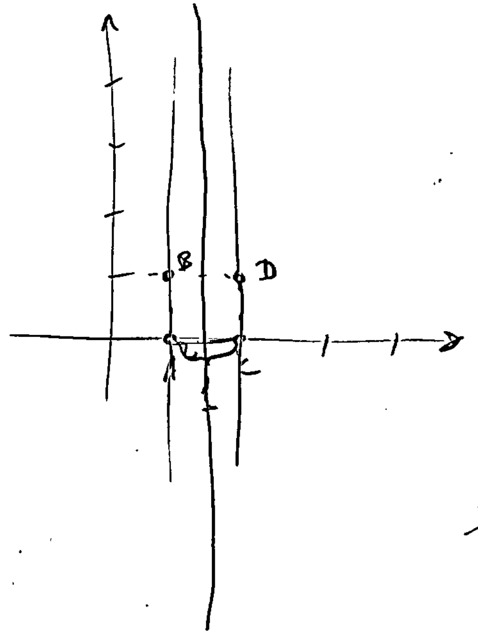
$A=(1,0,0)$

$B=(1,1,0)$

$C=(2,0,0)$

$D=(2,1,0)$

SE $D=(2,0,1)$ AS RETAS r E r' NÃO SERIAM PARALELAS E...



$x = 1,5$

VARIAÇÃO RESOLVÍVEL PELO OLHÔMETRO: $\frac{1}{2}$ KK

SOLUÇÃO ALGÉBRICA: 1 CAJUZINHO.

$\boxed{\text{GA } 25/\text{JUL}/2016}$

HOJE: AULA DE DÚVIDAS!
PRÓXIMA AULA: PROVA!

LISTA 6, EX 11:

SEJAM $H: \frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{5} = -1$,

$P: y^2 = 3x$

ENCONTRE OS PONTOS DE $H \cap P$.

EX 12:

$P_1: y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$P_2: x = y^2 - 6y + 7 = v^2 - 2$ $\quad v = z+3$, $u = x+2$

$x = y^2 =$

$y = x^2:$

$y = x^2 + 1 =$

$y = x^2 + 2 =$

$x + 2 = v^2$

$u = v^2$

LISTA 9, EX 7:

$P = (2,3,-1)$

$\pi: x - 3y - 4z = 0$

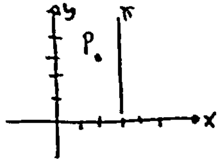
$\vec{n} = (1,-3,-4)$

$r: P + t\vec{n}$

VARIAÇÃO 1:

$P = (2,3,4)$

$\pi: x = 3$ $\quad d(P,\pi) = 1$



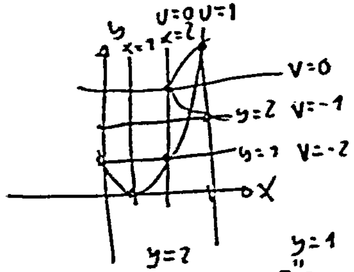
$\pi: 1x + 0y + 0z = 3$

$\vec{n}: (1,0,0)$

$\vec{n} \perp \pi$

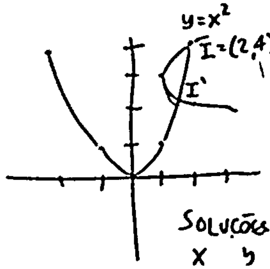
$r = \{P + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$Q \in r \cap \pi$



$y = 2$, $z+3$, $z = 2-3 = -1$

$y = 1$, $z+3$, $z = 1-3 = -2$



$y = x^2$ ①

$x = (y-3)^2 + 1$ ②

$x = y^2 - 6y + 10$ ③

$x = (x^2 - 3)^2 + 1$ ④

$= x^4 - 6x^2 + 10$

SOLUÇÕES: $x \quad y$

$x^4 - 6x^2 - x + 10 = 0$

$x^4 - 6x^2 - x + 10 = (x-2)$

$x^2 + x - 20 = 0$

$(x+5)(x-4)$

$x^4 - 6x^2 - x + 10 \;\lfloor\; x-2$

$-(x^4 - 2x^3)$

$2x^3 - 6x^2 - x + 10$

$-(2x^3 - 4x^2)$

$-2x^2 - x + 10$

$(2x^2 - 4x)$

$-5x + 10$

$(5x - 10)$

0

$(4,1)$

$S' = \{(1,3) + t(3,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\}$ $=$

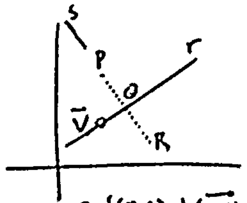
$3 \stackrel{?}{=} -\frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{9}{2}$ ou

$1 \stackrel{?}{=} -\frac{3}{2}\cdot 4 + \frac{9}{2}$

$3 + \frac{2}{3} - \frac{2x}{3}$

$\frac{8}{3}$

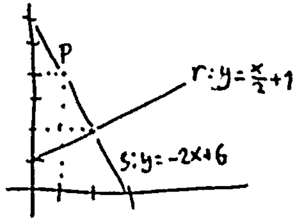
$\frac{11}{3} - \frac{2x}{3} = y$



$r = \{(0,1) + t(2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\vec{v}$

$\vec{n} = (1,-2)$



$s = \{P + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r \cap s$

$s' = \{(1,3) + t(3,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$y = \frac{x}{2} + 1$ ①

$y = -2x + 6$ ②

$y - 1 = \frac{x}{2} \rightarrow 2y - 2 = x$

$2 = -2x + 6 \rightarrow -4 = -2x \rightarrow x = 2$

$y = -4y + 4 + 6 \rightarrow 5y = 10 \rightarrow y = 2$