$\boxed{\text{C2 29/agosto/2016}}$

Página do curso:
Vá em http://angg.twu.net/ e clique em "C2" na barra de navegação.

↑ ou Google por "Eduardo Ochs"

## Introdução

Temas do curso:

Integração, → calcular áreas,

EDOs (Equações diferenciais ordinárias) → ou resolver EDOs da forma $F'(x)=f(x)$

As nossas funções preferidas em C2 são as que são simples num sentido diferente do "simples" de C1.

$f(x)=x^2$   C1 :)   C2 :( → :| → :)

$g(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x\le 1, \\ 3 & \text{se } 1<x \end{cases}$   :(   :)

Primeiros exercícios:
(todos sobre traduzir entre representação gráfica e representação formal)

1) Represente graficamente:

$g_1(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\le 1, \\ 2 & \text{se } 1<x<3, \\ -1 & \text{se } 3\le x \end{cases}$

$g_2(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\le 1, \\ 2x & \text{se } 1<x<2, \\ 0 & \text{se } x=2, \\ 1 & \text{se } 2<x. \end{cases}$

2) Dê representações formais das funções $f_1(x), \ldots, f_5(x)$ da folha.

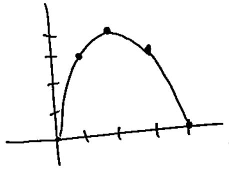
## Integrais como áreas

Primeira definição (mais intuitiva):

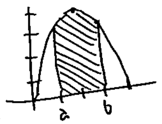
$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é a área sob a curva de $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$.

Exemplo:

Se $f(x)=4-(x-2)^2$ =

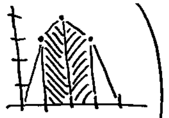


Então $\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx$ = Área



A gente sabe calcular áreas de: retângulos e trapézios, e podemos usar isso pra calcular integrais de funções C2-simples (como somas simples)
↑
somatórios

$\int_{x=1}^{x=3} f_4(x)\,dx$ = Área

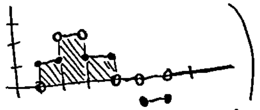


$= \left(\frac{3+4}{2}\right)(2-1)+\left(\frac{4+3}{2}\right)(3-2)$

$= 3.5\cdot 1 + 3.5\cdot 1$

$= 7$

$\int_{x=0}^{x=4} f_5(x)\,dx$ = Área



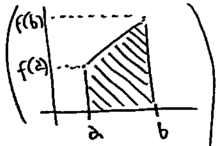
$= 1\cdot(2-1)+2\cdot(3-2)+1\cdot(4-3)$

Truque:
O que fizemos acima é Área(figura) → soma...
Às vezes dá pra gente fazer o contrário, e interpretar certas somas como áreas de figuras.

Exemplo: $2\cdot(3-1)+1\cdot(5-3)=$ Área

Outro: $\left(\frac{1+3}{2}\right)\cdot(3-1)+1\cdot(5-3)=$ Área

Área



$\underbrace{\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}_{\text{média das alturas}}\cdot\underbrace{(b-a)}_{\text{base}}$

Def:

$F_1(b)=\int_{x=0}^{x=b} f_1(x)\,dx,$

$F_2(b)=\int_{x=0}^{x=b} f_2(x)\,dx,$

etc.

Exercício:

1) Calcule $F_1(0), F_1(0.5), F_1(1), F_1(1.5), F_1(2)$.

2) Calcule $F_3(0), F_3(0.5), \ldots, F_3(4)$.

| $b$ | $F_1(b)$ | $F_3(b)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0.5 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1.5 | 1.5 | 0.25 |
| 2 | 2 | 1 |
| 2.5 | | 2 |
| 3 | | 3 |
| 3.5 | | 4 |
| 4 | | 5 |

Dica: se $1\le b\le 2$,
$\int_{x=0}^{x=b} F_3(x)\,dx = 0\cdot(1-0) + \left(\frac{0+(2b-2)}{2}\right)\cdot(b-1)$

3) Faça o gráfico de $F_1(x)$ para $0\le x\le 2$

4) Idem para $F_3(x)$ para $0\le x\le 4$.

5) Dê definições formais (por casos) de $F_1:[0,2]\to\mathbb{R}$ e $F_3:[0,4]\to\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C2 29/AGOSTO/2016}}$

$$F_1(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ & \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

EXERCÍCIO:
CALCULE $F_1'(x)$
E $F_3'(x)$
(ELAS NÃO EXISTEM EM TODOS OS PONTOS)
E DÊ DEFINIÇÕES FORMAIS, POR CASOS, DE $F_1'(x)$ E $F_3'(x)$.

CALCULEM $F_3(b)$ E:

| $b$ | $F_2(b)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 0.5 | |
| 1 | |
| 1.5 | |
| 2 | |
| 2.5 | |
| 3 | |

TRUQUES:

SE $1 \leq b \leq 2$,

$$\int_{x=0}^{x=b} f_3(x)\,dx = \underbrace{\int_{x=0}^{x=1} f_3(x)\,dx}_{\text{RETÂNGULO}} + \underbrace{\int_{x=1}^{x=b} f_3(x)\,dx}_{\text{TRAPÉZIO}}$$

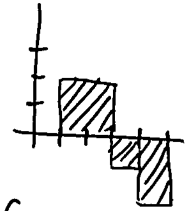
$$\underbrace{\int_{x=1}^{x=b} f_3(x)\,dx}_{\text{TRAPÉZIO}} = \left(\frac{f_3(1)+f_3(b)}{2}\right)(b-1) = \left(\frac{0+(2b-2)}{2}\right)(b-1) = (b-1)^2$$

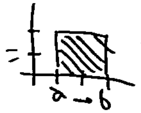
SE $2 \leq b \leq 4$,

$$\int_{x=0}^{x=b} f_3(x)\,dx = \underbrace{\int_{x=0}^{x=2} f_3(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{x=2}^{x=b} f_3(x)\,dx}_{\text{RETÂNGULO}} = 1 + 2\cdot(b-2)$$

COMO A GENTE INTERPRETA GRAFICAMENTE (COMO ÁREA) ISTO AQUI?

$$2\cdot(3-1) + (-1)\cdot(4-3) + (-2)\cdot(5-4)\,?$$



E ISTO? $\underbrace{2}_{h}\cdot(\underbrace{3}_{b}-\underbrace{1}_{a}) =$  $= 4$



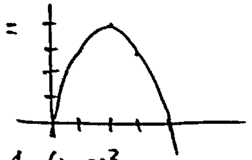
E ISTO? $\underbrace{2}_{h}\cdot(\underbrace{1}_{b}-\underbrace{3}_{a})$  $= -4$

$\boxed{\text{C2 31/AGO/2016}}$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS A DEFINIÇÃO DE INTEGRAL COMO ÁREA SOB UMA CURVA, E VIMOS COMO CALCULAR INTEGRAIS DE ALGUMAS FUNÇÕES - AS FUNÇÕES "C2-SIMPLES"...

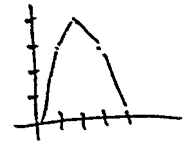
HOJE NÓS VAMOS VER VÁRIOS MÉTODOS PARA CALCULAR APROXIMAÇÕES PRA INTEGRAIS.

$f_5(x) =$



$f_5(x) = 4 - (x-2)^2$

$f_4(x) =$



$$\int_{x=0}^{x=4} f_4(x)\,dx = \frac{0+3}{2}(1-0) + \frac{3+4}{2}(2-1) + \frac{4+3}{2}(3-2) + \frac{3+0}{2}(4-3) \quad (\star)$$

EM $(\star)$ NÓS DIVIDIMOS O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO, $[0,4]$, EM 4 PARTES: $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$.

IDÉIA: ESSA DIVISÃO É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO ORIGINAL.

TEM VÁRIOS JEITOS DE DEFINIR FORMALMENTE O QUE É UMA PARTIÇÃO...

$$P = \{\underset{x_0}{0}, \underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{2}, \underset{x_3}{3}, \underset{x_4}{4}\}$$

NO PRIMEIRO JEITO A GENTE COMEÇA COM UM CONJUNTO FINITO $P$ COM $N+1$ PONTOS (NO EXEMPLO $N=4$) E AÍ A GENTE DEFINE $x_0, x_1, \ldots, x_N$ PONDO OS ELEMENTOS DE $P$ EM ORDEM.

SEGUNDO JEITO:

- ESCOLHA $N > 0$ (INTEIRO),
- ESCOLHA $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$

TERCEIRO JEITO: IDEM, MAS COM $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N$.

QUARTO JEITO (QUE VAMOS USAR NOS EXERCÍCIOS):

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 4 |

OBS: $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$, ETC, $a_i < b_i$

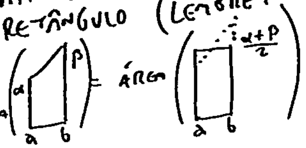
$\boxed{\text{OBS: } a = a_1,\ b_N = b}$

VAMOS APROXIMAR $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ POR $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \underbrace{h_i}_{\text{ALTURA}} \underbrace{(b_i - a_i)}_{\text{BASE}}$.

EXEMPLO (EXATO):

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | $\frac{0+3}{2}$ |
| 2 | 1 | 2 | $\frac{3+4}{2}$ |
| 3 | 2 | 3 | $\frac{4+3}{2}$ |
| 4 | 3 | 4 | $\frac{3+0}{2}$ |

$h_i$ VAI SER A ALTURA DO RETÂNGULO (LEMBREM QUE ÁREA $\left(\ \right)$ = ÁREA $\left(\ \right)$)




MÉTODOS

1) $h_i = f(a_i)$
2) $h_i = f(b_i)$
3) $m_i := \frac{a_i + b_i}{2}$, $h_i = f(m_i)$
4) $h_i = \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2}$
5) $h_i = \min(f(a_i), f(b_i))$
6) $h_i = \max(f(a_i), f(b_i))$

EXERCÍCIO: VISUALIZEM ESSES MÉTODOS!!! (COMO?)

EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO REPRESENTE GRAFICAMENTE E CALCULE $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} h_i (b_i - a_i)$.

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=3} f_4(x)\,dx$, 

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 |

, MÉTODO 1.

b) IDEM, MAS COM O MÉTODO 2.

c) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4} f_4(x)\,dx$, $P = \{0, 1, 3, 4\}$, MÉTODO 3.

d) " , " , MÉTODO 4

e) " " " 5

f) " " " 6

c') IDEM COM $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

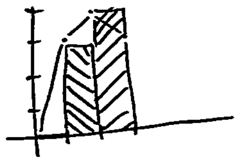
d') " " "

e') " " "

f') " " 

a)

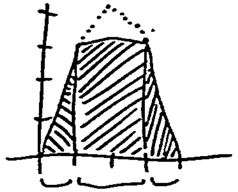
| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 4 |



c)

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $m_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0.5 | 1.5 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 3.5 | 1.5 |

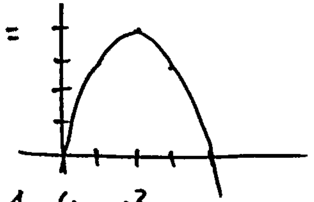
d)



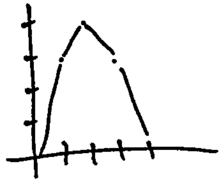
# C2 31/AGO/2016

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS A DEFINIÇÃO DE INTEGRAL COMO ÁREA SOB UMA CURVA, E VIMOS COMO CALCULAR INTEGRAIS DE ALGUMAS FUNÇÕES - AS FUNÇÕES "C2-SIMPLES"...

HOJE NÓS VAMOS VER <u>VÁRIOS</u> MÉTODOS PARA CALCULAR <u>APROXIMAÇÕES</u> PRA INTEGRAIS.

$f_5(x) =$ 

$f_5(x) = 4 - (x-2)^2$

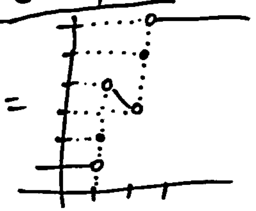
$f_4(x) =$ 

$$\int_{x=0}^{x=4} f_4(x)\,dx = \frac{0+3}{2}(1-0) + \frac{3+4}{2}(2-1) + \frac{4+3}{2}(3-2) + \frac{3+0}{2}(4-3) \quad (*)$$

MÉTODOS:

1) $h_i := f(a_i)$
2) $h_i := f(b_i)$
3) $m_i := \frac{a_i+b_i}{2}$, $h_i := f(m_i)$
4) $h_i := \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$
5) $h_i := \min(f(a_i), f(b_i))$
6) $h_i := \max(f(a_i), f(b_i))$
7) $C_i := [a_i, b_i]$, $h_i := \inf(f(C_i))$
8) $C_i := [a_i, b_i]$, $h_i := \sup(f(C_i))$
9) $C_i := (a_i, b_i)$, inf
10) $C_i := (a_i, b_i)$, sup

<u>IMAGENS, INFS E SUPS</u>

$g(x) =$ 

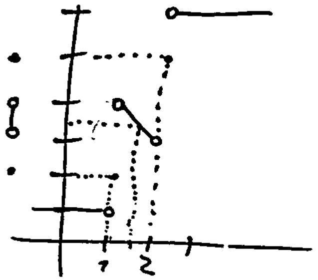
SE $C$ FOR UM CONJUNTO,

$g(C) = \{ g(x) \mid x \in C \}$

P. EX.,

$g([1,2]) = \{2\} \cup (3,4) \cup \{5\}$

$g((1.5, 3]) = (3, 3.5] \cup \{5\} \cup \{6\}$



$g(C)$ É A "IMAGEM DO CONJUNTO $C$ PELA FUNÇÃO $g$".

INF É QUE NEM MIN, SUP É QUE NEM MAX, MAS INF E SUP SABEM LIDAR COM CONJUNTOS INFINITOS...

$\inf([3,4] \cup [5,6]) = 3$

$\inf((3,4] \cup [5,6]) = 3$

$\sup(\{0, 1, 2, ...\}) = +\infty$

EXERCÍCIOS:

a) $f_4([0,1]) = [0,3]$

b) $f_4([1,3]) = [3,4]$

c) $\inf(f_4([1,3])) = 3$

d) $\sup(f_4([1,3])) = 4$

C2 5/SET/2016

NA AULA PASSADA APRENDEMOS A USAR PARTIÇÕES DE INTERVALOS —
P.EX., $P=\{1,2,4,5\}$ É UMA PARTIÇÃO DE $[1,5]$ EM TRÊS SUBINTERVALOS, COM $N=3$ (P TEM 3+1 PONTOS) E

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 4 | 5 |

...

VIMOS VÁRIOS JEITOS DE CALCULAR OS "$h_i$"S, E VIMOS COMO APROXIMAR

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} h_i(b_i-a_i).$$

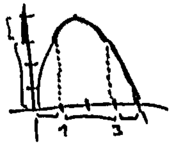
DEFS (NOVAS):

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i),$$

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i)$$

EXEMPLO:

$f(x) = 4-(x-2)^2$

$f(x) =$ 

SE $P=\{0,1,3,4\}$,

$$\sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i)$$
$$= \sup(f([0,1]))(1-0) + \sup(f([1,3]))(3-1) + \sup(f([3,4]))(4-3)$$
$$= \sup([0,3])(1-0) + \sup([3,4])(3-1) + \sup([0,3])(4-3)$$
$$= 3\cdot(1-0) + 4\cdot(3-1) + 3\cdot(4-3)$$

$=$ ÁREA (  )

$= 14$

$$\sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i)$$
$$= \inf(f([0,1]))(1-0) + \inf(f([1,3]))(3-1) + \inf(f([3,4]))(4-3)$$
$$= \inf([0,3])(1-0) + \inf([3,4])(3-1) + \inf([0,3])(4-3)$$
$$= 0\cdot(1-0) + 3\cdot(3-1) + 0\cdot(4-3)$$

$=$ ÁREA (  )

$= 6$

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$$

$=$ ÁREA (  )

SE $P$ É UMA PARTIÇÃO DE $[a,b]$ ENTÃO:

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \le \overline{\int}_P f(x)\,dx.$$

O QUE É REFINAR UMA PARTIÇÃO?

$P=\{0,1,3,4\}$,
$P'=\{0,1,2,3,4\}$,
$P''=\{0,0.5,1,2,3,4\}$

SÃO PARTIÇÕES DO MESMO INTERVALO ($[0,4]$), E ALÉM DISSO $P \subset P' \subset P''$...

QUANDO ISSO ACONTECE ($P \subset P'$ PARTS DO MESMO INTERVALO, $P \subset P'$) DIZEMOS QUE $P'$ REFINA $P$, OU QUE $P'$ É MAIS FINA QUE $P$...

NOTAÇÃO: $P \le P'$

MENOS PONTOS, MENOS INTERVALOS, INTERVALOS MAIORES

MAIS PONTOS, MAIS INTERVALOS, INTERVALOS MENORE

$\{0,4\} \le \{0,2,4\} \le \{0,1,2,3,4\}$

$\{0,4\} \le \{0,1,4\} \le \{0,1,3,4\} \le \{0,1,2,3,4\}$

$\{0,1,2,3,4\}$ É A MENOR PARTIÇÃO QUE É MAIS FINA QUE $\{0,2,4\}$ E $\{0,1,3,4\}$.

NORMA DE UMA PARTIÇÃO

A NORMA DE UMA PARTIÇÃO $P$ É O COMPRIMENTO DO MENOR DOS SEUS INTERVALOS.

SE $P=\{0,1,3,4\}$,

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $b_i-a_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 1 |

$\min(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)=1$

INTUITIVAMENTE,

SE $P_1 \le P_2 \le P_3 \le P_4 \le \ldots$

$\underline{\int}_{P_i} f(x)\,dx$ E $\overline{\int}_{P_i} f(x)\,dx$

VÃO FICAR CADA VEZ MAIS PRÓXIMOS...

$$\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx$$
$$\ge$$
$$\overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx$$
$$\ge$$
$$\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$$
$$\ge$$
$$\vdots$$

## C2 5/SET/2016

DIGAMOS QUE $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots$

E QUE

$$\overline{\int_{P_1}} f(x)dx \geq \overline{\int_{P_2}} f(x)dx \geq \overline{\int_{P_3}} f(x)dx \geq \ldots \geq \lim_{i\to\infty} \overline{\int_{P_i}} f(x)dx$$

$$\underline{\int_{P_1}} f(x)dx \leq \underline{\int_{P_2}} f(x)dx \leq \underline{\int_{P_3}} f(x)dx \leq \ldots \leq \lim_{i\to\infty} \underline{\int_{P_i}} f(x)dx$$

SE ISTO ACONTECE,

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} \underline{\int_{P_i}} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \overline{\int_{P_i}} f(x)dx}$$

ENTÃO DIZEMOS QUE $f$ É <u>INTEGRÁVEL</u> NO INTERVALO $[a,b]$, E $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ É O VALOR DESTES LIMITES.

### OBS 1:

A ESCOLHA DOS $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots$ <u>IMPORTA</u>.

POR EXEMPLO, DIGAMOS QUE $P_1 \leq P_2 \leq P_3, \ldots$ SÃO PARTIÇÕES DE $[0,4]$ QUE SEMPRE CONTÊM O INTERVALO $[2,4]$, ...

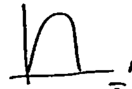
P. EX:

$P_1 = \{0, 2, 4\}$,

$P_2 = \{0, 1, 2, 4\}$,

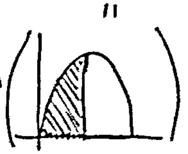
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 4\}$,

$P_4 = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 4\}, \ldots$

E $f(x) = 4 - (x-2)^2 =$ ,

ENTÃO $\lim_{i\to\infty} \underline{\int_{P_i}} f(x)dx < \lim_{i\to\infty} \overline{\int_{P_i}} f(x)dx \ldots$

$\quad\quad$ ‖ $\quad\quad\quad\quad$ ‖

ÁREA (  ) $\quad$ ÁREA (  )

### OBS 2:

(TEOREMA, QUE EU NÃO QUERO DEMONSTRAR AGORA):

SE PRA UMA $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots$ A GENTE VÊ QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ EXISTE,

ENTÃO ISTO VALE TAMBÉM PARA TODAS AS SEQUÊNCIAS $P'_1 \leq P'_2 \leq P'_3 \leq \ldots$ QUE OBEDECEM $\lim_{i\to\infty} \|P_i\| = 0$.

> CORREÇÃO!!!
> A NORMA DE P É O COMPRIMENTO DO <u>MAIOR</u> DOS INTERVALOS DE P!!!
> EU ESCREVI "MENOR" NO QUADRO ANTERIOR!

### OBS 3:

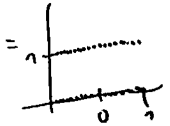
(TEOREMA IMPORTANTE!)

SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA ENTÃO ELA É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$.

("$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ <u>EXISTE</u>").

### OBS 4:

SEJA $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$g =$ 

$g(0) = 1$

$g(1/3) = 1$

$g(\pi) = 0$

$g(\pi + \frac{123}{345}) = 0$

ENTÃO PARA QUALQUER PARTIÇÃO $P$ DE $[0,1]$ TEMOS $\underline{\int_P} g(x)dx = 0$, $\overline{\int_P} g(x)dx = 1$ $\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} g(x)dx$ NÃO EXISTE.

### OBS 5:

SEJA $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

$h(x) =$ 


EXERCÍCIO:
CALCULE $\overline{\int_P} h(x)dx$ E $\underline{\int_P} h(x)dx$

PARA:

a) $P = \{0, 1\}$

b) $P = \{0, 0.5, 1\}$

c) $P = \{0, 0.1, 0.5, 1\}$

a) $\overline{\int} = \infty$, $\underline{\int} = 0$

b) $\overline{\int} = \infty$, $\underline{\int} = \frac{1}{2}$

c) $\overline{\int} = \infty$, $\underline{\int} = \frac{1}{2} + 0.4 \cdot 2 = 1.3$

C2 5/SET/2016

## OBS 6:

SE $f:[a,c]\to\mathbb{R}$

E $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE,

ENTÃO PARA QUALQUER $b\in[a,c]$

TEMOS:

- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ EXISTE,
- $\int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE,
- $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx.$

(LEMBRE QUE COM A DEFINIÇÃO DE "$\int$" QUE ESTAMOS USANDO <u>AGORA</u> $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ SÓ FAZ SENTIDO QUANDO $a\le c$)

## OBS 7:

(TEOREMA - TFC 1!)

SE $f:[a,c]\to\mathbb{R}$

É CONTÍNUA E

$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE,

ENTÃO PODEMOS DEFINIR:

$$F:[a,c]\to\mathbb{R}$$
$$b\mapsto \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dX$$

E:

- $F(a)=0$
- $F$ É CONTÍNUA E DERIVÁVEL EM TODO PONTO DE $[a,c]$.
- $\forall x\in(a,c)$ VALE: $F'(x)=f(x)$

EXERCÍCIO:

SEJA $f(x)=4-(x-2)^2$
$=4-(x^2-4x+4)$
$=4x-x^2.$

ENCONTRE $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

TAL QUE: $F(0)=0$,
$F'(x)=f(x)\quad(\forall x).$

(RESP: $F(x)=2x^2-\frac{x^3}{3}$)

## OBS 8:

(TEOREMA - TFC 2!)

SE $f:[a,c]\to\mathbb{R}$

É CONTÍNUA E

$F:[a,c]\to\mathbb{R}$

OBEDECE $F'(x)=f(x)$

EM TODO $x\in(a,c)$,

ENTÃO PARA QUAISQUER

$b_1, b_2$ COM $a\le b_1\le b_2\le c$

TEMOS:

$$\int_{x=b_1}^{x=b_2} f(x)\,dX = F(x)\Big|_{x=b_1}^{x=b_2} = F(b_2)-F(b_1)$$

$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dX = 2b^2-\frac{b^3}{3}$

$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dX = 32-\frac{64}{3} = \frac{96}{3}-\frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

$\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dX = ?$

# C2 12/set/2016

NA AULA PASSADA EU FIZ 8 "OBSERVAÇÕES", SENDO QUE A OBS. 7 ERA UMA VERSÃO FRACA DO TFC 1 E A OBS. 8 ERA UMA VERSÃO FRACA DO TFC 2...

## OBS 7:

SE $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ É CONTÍNUA E $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE, ENTÃO PODEMOS DEFINIR

$$F:[a,c]\to\mathbb{R}, \quad b\mapsto\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

E:

- $F(a)=0$
- F É CONTÍNUA E DERIVÁVEL EM TODO PONTO DE $[a,c]$
- $\forall x\in(a,c),\ F'(x)=f(x)$
- $F'(a)=f(a)$ E $F'(b)=f(b)$ (DERIVADAS LATERAIS)

## EXERCÍCIO:

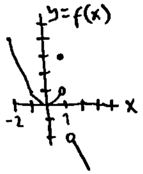
SEJA $f:[-2,7]\to\mathbb{R}$

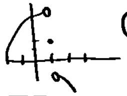
$$x\mapsto\begin{cases} x^2 & \text{se } x<1,\\ 3 & \text{se } x=1,\\ -2x & \text{se } x>1,\end{cases}$$

E SEJA $F(b)=\int_{x=-2}^{x=b} f(x)\,dx$

CALCULE $F(x)$.

| $F(x)$ | $F(-2)$ | $F'(x)$ em $(-2,1)$ | $F'(x)$ em $(1,7)$ | $F(1)$ (lim esq) | $F(1)$ (lim dir) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{cases} x^3/3 & \text{se } x<1\\ -x^2 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$ | $-\frac{8}{3}\ \overset{!!}{\frown}$ | | | | |
| $\begin{cases} x^3/3+\frac{8}{3} & \text{se } x<1\\ -x^2 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$ | $0\ \overset{!!}{\smile}$ | $x^2\ \overset{!!}{\smile}$ | $-2x\ \overset{!!}{\smile}$ | $3$ | $-1\ \overset{!!}{\frown}$ (★★) |
| $\begin{cases} x^3/3+\frac{8}{3} & \text{se } x<1\\ -x^2+4 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$ | $0\ \overset{!!}{\smile}$ | $x^2\ \overset{!!}{\smile}$ | $-2x\ \overset{!!}{\smile}$ | $3$ | $3\ \overset{!!}{\smile}$ |



(★★)

## OBS 8:

SE $f:[a,d]\to\mathbb{R}$ É CONTÍNUA E $F:[a,d]\to\mathbb{R}$ OBEDECE $F'(x)=f(x)$ $(\forall x\in[a,d])$ ENTÃO $\forall b,c$ COM $a\leq b\leq c\leq d$ TEMOS

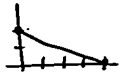
$$\int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)-F(b) = F(x)\Big|_{x=b}^{x=c}$$

← NOTAÇÃO NOVA

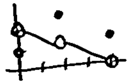
## OBS 9:

SE $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE E $g(x)$ COINCIDE COM $f(x)$ EXCETO NUM CONJUNTO FINITO

(EXEMPLOS: $f=$

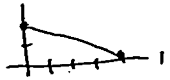


$g=$



;

$f=$



$g=f$ )

ENTÃO: $\underline{\int}_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=c} g(x)\,dx$,

IDEM PRA $\overline{\int}$

ENTÃO $\int_{x=a}^{x=c} g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$.

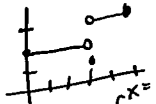
$$x^2-x+10\Big|_{x=2}^{x=3} = (3^2-3+10)-(2^2-2+10) = 16-12 = 4$$

## OBS 10:

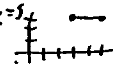
SE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ E $\int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTEM ENTÃO $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$ EXISTE E É A SOMA DAS INTEGRAIS ACIMA.

EXEMPLO:

SE $f(x)=$



ENTÃO: $\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=3}$  $dx$

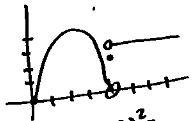
$\int_{x=3}^{x=5} f(x)\,dx = \int_{x=3}^{x=5}$  $dx$

## EXERCÍCIO:

SEJA $f(x)=\begin{cases} 4-(x-2)^2 & \text{se } 0\leq x<4,\\ 2 & \text{se } x=4,\\ 3 & \text{se } 4<x.\end{cases}$

ENCONTRE UMA FUNÇÃO $F:[0,6]\to\mathbb{R}$ CONTÍNUA EM $[0,6]$ E TAL QUE $F'(x)=f(x)$ EM TODOS OS PONTOS EM QUE $f$ É CONTÍNUA.

OBS: $f$ É CONTÍNUA NO SEGUINTE SUBCONJUNTO DE $[0,6]$: $[0,4)\cup(4,6]$



OBS: $4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = 4x-x^2$

| $F(x)$ | $F'(x)$ em $x\in(0,4)$ | $F'(x)$ em $x\in(4,6)$ | F é contínua em $x=4$? |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} 42 & \text{se } x\leq 4\\ 99 & \text{se } 4<x\end{cases}$ | $0$ | $0$ | NÃO |
| $\begin{cases} -\frac{x^3}{3}+2x^2 & \text{se } x<4\\ 2x+C & \text{se } x=4\\ 3x+C & \text{se } x>4\end{cases}$ | $4x-x^2\ \overset{!!}{\smile}$ | $3\ \overset{!!}{\smile}$ | DEPENDE DO C $\overset{!!}{\sim}$ SE $C=\frac{8}{3}$, |

## OBS 11:

SE $b\in[0,4]$, $\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx = ?$

SEJA $F(x)=2x^2-\frac{x^3}{3}$.

ENTÃO $F'(x)=f(x)$ EM $(0,4)$, E

$$\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(0) = \left(2b^2-\frac{b^3}{3}\right)-0$$

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = 2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}$$

SE $b\in[4,6]$, $\int_{x=4}^{x=b} f(x)\,dx = ?$

SEJA $F(x)=3x$.

ENTÃO $F'(x)=f(x)$ EM $(4,6)$, E

$$\int_{x=4}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(4) = 3b-12$$

E $\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx + \int_{x=4}^{x=b} f(x)\,dx = \frac{32}{3}+3b-12$

## C2 14/set/2016

Neste curso estamos interessados em funções
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

- integráveis,
- contínuas exceto num subconjunto $Q\subset[a,b]$ finito, e tais que
- se $P=Q\cup\{a,b\}$ então os limites laterais nos pontos de $P$ existem.

Vamos chamar estas funções de funções "boas".

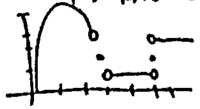
Repare que isto aqui não é uma função "boa":

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

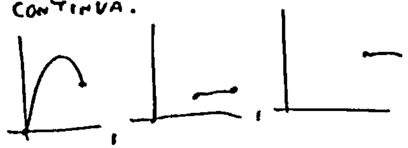
$f=$ 

Não tem $\lim_{x\to 0} f(x)$

Isto aqui é uma função boa:



Isto quer dizer em cada intervalo $(a_i,b_i)$ da partição a função $f$ restrita a $(a_i,b_i)$ pode ser estendida a uma $\bar{f}:[a_i,b_i]\to\mathbb{R}$ contínua.



Na aula passada eu pedi pra vocês usarem formas fracas dos TFCs 1 e 2 pra calcular isto:

Seja $f:[-2,7]\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\begin{cases}x^2 & \text{se } x<1,\\ 3 & \text{se } x=1,\\ -2x & \text{se } x>1,\end{cases}$$

e seja $F(b)=\int_{x=-2}^{x=b} f(x)\,dx$.

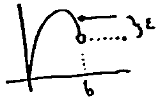
Encontre uma definição por casos como a acima para $F:[-2,7]\to\mathbb{R}$.

Dica: se $f:[a,d]\to\mathbb{R}$ é "boa" e seus pontos de descontinuidade são $b$ e $c$, com $a<b<c<d$, e

$$F(t)=\begin{cases}\int_{x=a}^{x=t}f(x)dx & \text{se } t\in[a,b],\\ \int_{x=a}^{x=b}f(x)dx+\int_{x=b}^{x=t}f(x)dx & \text{se } t\in[b,c],\\ \int_{x=a}^{x=c}f(x)dx+\int_{x=c}^{x=t}f(x)dx & \text{se } t\in[c,d]\end{cases}$$

então $\forall t\in[a,d].\ F(t)=\int_{x=a}^{x=t}f(x)dx$.

Aviso:
Vamos ver uma demonstração do TFC1 daqui a pouco que envolve integrar funções com esta cara:




Esboço da demonstração do TFC 1 (aplicado a um caso simples):

Seja $f:[0,4]\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 4-(x-2)^2$.

(Repare que ela é contínua!)

Sejam $a=0$, $b=3$, $d=4$.

Seja $F:[0,4]\to\mathbb{R}$
$t\mapsto\int_{x=a}^{x=t}f(x)dx$.

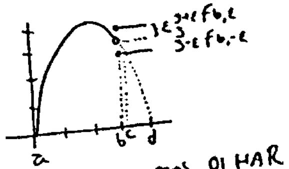
Vou (tentar) convencer vocês de que $F'(3)=f(3)$.

Def: $f_{b,\varepsilon}:[0,4]\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\begin{cases}f(x) & \text{se } x<b\\ f(b)+\varepsilon & \text{se } x\geq b.\end{cases}$$

Repare que como $f$ é contínua em $b$, pra todo $\varepsilon>0$ vai existir algum $c$, $b<c<d$ tal que $\forall x\in[a,c]$ a função $f$ obedece $f_{b,-\varepsilon}\leq f\leq f_{b,\varepsilon}$.

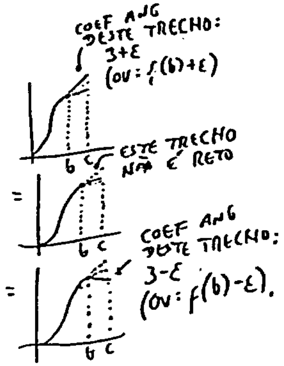
(obs: $f\leq g$ em $[a,b]$ quando $\forall x\in[a,b].\ f(x)\leq g(x)$)




Agora vamos olhar para

$$F_{b,\varepsilon}=\int_{x=a}^{x=t}f_{b,\varepsilon}(x)dx$$
$$\geq F \geq$$
$$F_{b,-\varepsilon}=\int_{x=a}^{x=t}f_{b,-\varepsilon}(x)dx,$$

definidas só em $[a,c]$




Agora o grande truque!!!

Se vocês olharem nos livros de cálculo essa condição, para qualquer ε>0,

de que uma função está entre uma reta de inclinação $3-\varepsilon$ e outra de inclinação $3+\varepsilon$, é exatamente a definição (ou: uma das várias definições equivalentes) de $F'(b)=3$.

## C2 14/set/2016

### O TFC 2

também usa alguns teoremas de Cálculo 1...

Ele diz (na versão forte):

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função boa e $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e $G'(x)=f(x)$ exceto nos pontos de $P$

($P$: a, b e descontinuidades da f)

então

$$\forall t\in[a,b].\ \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx = G(x)\Big|_{x=a}^{x=t} = G(t)-G(a).$$

Seja $F(t)=G(t)-G(a)$.

Então

$$\forall t\in[a,b].\ \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=t} = F(t)-F(a) = (G(t)-\cancel{G(a)})-(G(a)-\cancel{G(a)})$$

e $F(a)=\int_{x=a}^{x=a} f(x)\,dx = 0$

### Introdução (atrasada)

O curso tem duas partes:

1) Integração
2) EDOs (equações diferenciais ordinárias).

A gente acabou de ver que podemos calcular integrais usando "antiderivadas" – pra calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ a gente usa uma $F$ tal que $F'(x)=f(x)$.

| Equação diferencial | Algumas soluções (ou não) | |
|---|---|---|
| $f'(x)=3$ | $f(x)=3x$ | (sim) |
| | $f(x)=3x+20$ | (sim) |
| | $f(x)=e^x$ | (não) |
| $f'(x)=3+2x$ | $f(x)=3x+2x^2$ | (não) |
| | $f(x)=3x+x^2$ | (sim) |
| | $f(x)=3x+x^2+20$ | (sim) |
| $f''(x)+f'(x)-6f(x)=0$ | $f(x)=e^{3x}$ | |
| | $f(x)=e^{2x}$ | |
| | $f(x)=e^{-2x}$ | |
| | $f(x)=e^{-3x}$ | |
| $f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$ | $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ | |
| | $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ | |

### Regra da cadeia pelo método do chutar e testar

Se $f(x)=g(h(x))$ então $f'(x)=g'(h(x))\,h'(x)$.

Se $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,

| $g(y)$ | $h(x)$ | $g(h(x))$ | $g'(y)$ | $h'(x)$ | $g'(h(x))h'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y^{1/2}$ | $1-x^2$ | $(1-x^2)^{1/2}$ | $\frac12 y^{-\frac12}$ | $-2x$ | $\cancel{\tfrac12}(1-x^2)^{-\frac12}(-\cancel{2}x) = -x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

### Introdução à regra da substituição

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx \quad (!!!!) \quad \int_{x=a}^{x=b} f(h(x))\,h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} f(u)\,du$$

Vale para qualquer $f$ e $h$ deriváveis!!!

$$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

$$= g(h(b))-g(h(a))$$

Exemplos:

1) $h(x)=2x$, $f(u)=\operatorname{sen} u$, $a=3$, $b=4$: $\int_{x=3}^{x=4}\operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int_{u=2\cdot 3}^{u=2\cdot 4}\operatorname{sen} u\,du$

Exercícios (casa):

2) $h(x)=x^2$, $f(u)=\operatorname{sen} u$, $a=3$, $b=4$
3) Idem, mas não substitua $a$ e $b$ por números

C 19/set/2016

Hoje:
Substituição
(exercícios)

Lembre:

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx \qquad \boxed{1}$$

$$\|$$

$$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx \qquad \boxed{2}$$

$$\|$$

$$\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du$$

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx \quad \begin{bmatrix} u=h(x) \\ du=h'(x)dx \end{bmatrix} \qquad \boxed{3}$$

$$= \int g(u)\,du$$

Idéias:
- Vamos considerar $\boxed{3}$ como uma abreviação para $\boxed{2}$ e $\boxed{1}$
- Podemos expandir contas com $\boxed{3}$ para c.c. $\boxed{2}$ ou $\boxed{1}$
- Importante: tem funções que a gente sabe integrar... "fáceis"; funções que não... "difíceis"

A gente vai aprender a reescrever integrais difíceis como integrais fáceis.

Exercício:
Usem $\boxed{3}$ (ou $\boxed{2}$ ou $\boxed{1}$) pra calcular:

a) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\,dx$

$h(x)=$
$h'(x)=$
$u=$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x+3)\,dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot x\,dx$

a) (por $\boxed{2}$)
Se $g(u)=\operatorname{sen}(u)$, $h'(x)=3$
$h(x)=3x+2$,
$a=1$,
$b=2$, a $\boxed{2}$ vira:

$$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\cdot 3\,dx$$

$$\|$$

$$\int_{u=5}^{u=8} \operatorname{sen}(u)\,du =$$

$\boxed{\text{C2 } 19/\text{SET}/2016}$

a) $\int_{x=1}^{x=2} sen(3x+2)\,dx = ?$

FAZENDO

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(u) = sen(u), & \\ h(x) = 3x+2, & h'(x)=3, \\ a = 1, & \\ b = 2 & \end{array}}$$

Em $\boxed{2}$, Temos:

$$\int_{x=1}^{x=2} sen(3x+2)\cdot 3\,dx = \int_{u=5}^{u=8} sen(u)\,du = (-\cos u)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

$$\parallel$$

$$3\int_{x=1}^{x=2} sen(3x+2)\,dx$$

$$\int_{x=1}^{x=2} sen(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}(-\cos u)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

FAZENDO:

$g(u) = \frac{1}{3} sen(u)$,

$h(x) = 3x+2$, $\quad h'(x)=3$,

$a = 1$,

$b = 2$,

Em $\boxed{2}$, Temos:

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{\cancel{3}} sen(3x+2)\cdot\cancel{3}\,dx = \int_{u=5}^{u=8} \frac{1}{3} sen(u)\,du = \left(-\frac{1}{3}\cos u\right)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

C2 19/SET/2016

a) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\,dx = ?$

FAZENDO

$g(u) = \operatorname{sen}(u)$, $h(x) = 3x+2$, $h'(x) = 3$, $a = 1$, $b = 2$

EM $\boxed{2}$, TEMOS:

$$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\cdot 3\,dx = \int_{u=5}^{u=8} \operatorname{sen}(u)\,du = (-\cos u)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

$$3\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\,dx$$

$$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen}(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}(-\cos u)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

FAZENDO:

$g(u) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(u)$, $h(x) = 3x+2$, $h'(x) = 3$, $a = 1$, $b = 2$

EM $\boxed{2}$, TEMOS:

$$\int_{x=1}^{x=2} \cancel{\tfrac{1}{3}}\operatorname{sen}(3x+2)\cdot\cancel{3}\,dx = \int_{u=5}^{u=8} \frac{1}{3}\operatorname{sen}(u)\,du = \left(-\frac{1}{3}\cos u\right)\Big|_{u=5}^{u=8}$$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x+3)\,dx = ?$

b') $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(4x+3)\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot x\,dx = ?$

c') $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot x\,dx = ?$

b') $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(4x+3)\,dx =$

FAZENDO

$g(u) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u$, $h(x) = 4x+3$, $h'(x) = 4$, $a = a$, $b = b$ (☆)

EM $\boxed{2}$, TEMOS:

$$\int_{x=a}^{x=b} \cancel{\tfrac{1}{4}}\operatorname{sen}(4x+3)\cdot\cancel{4}\,dx = \int_{u=4a+3}^{u=4b+3} \frac{1}{4}\operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{u=4a+3}^{u=4b+3} \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} u\Big|_{u=4a+3}^{u=4b+3}\right)$$

FAZENDO A MESMA SUBSTITUIÇÃO ACIMA, (☆), EM $\boxed{3}$, TEMOS:

$$\int \operatorname{sen}(4x+3)\,dx \quad [u = 4x+3]$$

$$\int \frac{1}{4}\operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{4}(-\cos u) = \frac{1}{4}(-\cos(4x+3))$$

$\boxed{1}$

$$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$$

$$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

$\boxed{2}$

$$\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du$$

$\boxed{3}$

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx \quad [u = h(x)]$$

$$= \int g(u)\,du$$

c') $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot x\,dx = ?$

FAZENDO

$g(u) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u$, $h(x) = x^2$, $h'(x) = 2x$, $a = a$, $b = b$ (☆☆)

$g(h(x)) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2)$

$g(h(x))h'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x$

EM $\boxed{2}$, TEMOS:

$$\int_{x=a}^{x=b} \cancel{\tfrac{1}{2}}\operatorname{sen}(x^2)\cdot\cancel{2}x\,dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} u\,du$$

E FAZENDO A SUBSTITUIÇÃO (☆☆) EM $\boxed{3}$ TEMOS:

$$\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot x\,dx \quad [u = x^2]$$

$$= \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u)\,du$$

C2 21/SET/2016

... DESCULPEM ENTEDIAR VOCÊS, MAS EU CONTINUO ACREDITANDO QUE O MELHOR JEITO DA GENTE APRENDER INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO E INTEGRAL INDEFINIDA É USANDO ESTAS TRÊS FÓRMULAS,

[1] $$g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$$
$$\parallel$$
$$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

[2] $$\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du$$

[3] $$\int g(h(x))h'(x)\,dx = \int g(u)\,du \quad [u=h(x)]$$

ESTE [ ] NÃO É UMA SUBSTITUIÇÃO SIMULTÂNEA COMO A ABAIXO.

OBS: $\begin{bmatrix} h(x)=x^2 \\ g(u)=\text{sen}\,u \\ a=2 \\ b=3 \end{bmatrix}$ INDICA SUBSTITUIÇÃO SIMULTÂNEA.

POR EXEMPLO:

[2] $\begin{bmatrix} h(x)=x^2 \\ g(\beta)=(\text{sen}\,\beta)/2 \\ a=2 \\ b=3 \end{bmatrix}$ =

$$\int_{x=2}^{x=3} \frac{\text{sen}(x^2)}{2}\cdot 2x\,dx = \int_{u=2^2}^{u=3^2} \frac{\text{sen}\,u}{2}\,du$$

EXERCÍCIO:
APLIQUE A MESMA SUBSTITUIÇÃO ACIMA
a) EM [3],
b) EM [1]

$h(\alpha)$
$h(3+4)=(3+4)^2$
$h(\text{sen}\,u)=(\text{sen}\,u)^2$

$$\int_{x=\frac{a}{2}}^{x=\frac{b}{3}} \underbrace{g(\underbrace{h(x)}_{x^2})}_{\frac{\text{sen}\,x^2}{2}}\;\underbrace{h'(x)}_{2x}\,dx = \ldots$$

a) [3] $\begin{bmatrix} h(\alpha):=\alpha^2 \\ g(\beta):=\frac{\text{sen}\,\beta}{2} \\ a:=2 \\ b:=3 \end{bmatrix}$ =

$$\int \frac{\text{sen}(x^2)}{2}\,2x\,dx = \int \text{sen}(u)\,du \qquad [u=x^2]$$

b) [1] $\begin{bmatrix} h(\alpha):=\alpha^2 \\ g(\beta):=\frac{\text{sen}\,\beta}{2} \\ a:=2 \\ b:=3 \end{bmatrix}$ =

$$\frac{\text{sen}(x^2)}{2}\Bigg|_{x=2}^{x=3} = \int_{x=2}^{x=3} \frac{\cos(x^2)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x\,dx$$
$$\parallel$$
$$\frac{\text{sen}\,u^2}{2}\Bigg|_{x=2^2}^{x=3^2} = \int_{x=2^2}^{x=3^2} \frac{\cos(u)}{2}\,du$$

EXERCÍCIO:
ENCONTRE UMA SUBSTITUIÇÃO [...] TAL QUE:

c) [1][...] MOSTRE COMO RESOLVER $\int_{x=2}^{x=3} \text{sen}(x^2)\cdot x\,dx$ "USANDO O TFC2 DUAS VEZES"

d) IDEM, MAS PARA $\int_{x=2}^{x=3} \text{sen}(3x+2)\,dx$

e) IDEM, MAS PARA $\int_{x=a}^{x=b} (3x+4)^5\,dx$

AGORA ENCONTRE UMA SUBSTITUIÇÃO [...] TAL QUE:

f) [2][...] MOSTRE COMO RESOLVER $\int_{x=a}^{x=b} (3x+4)^5\,dx$.

# C2 21/set/2016

... Desculpem entediar vocês, mas eu continuo acreditando que o melhor jeito da gente aprender integração por substituição e integral indefinida é usando estas três fórmulas,

$$\boxed{1}\quad g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$g(u)\Big|_{u=h(a)}^{u=h(b)} = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du$$

$$\boxed{2}\quad \int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx = \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du$$

$$\boxed{3}\quad \int g(h(x))h'(x)\,dx = \int g(u)\,du \quad [u=h(x)]$$

Este [ ] não é uma substituição simultânea como a abaixo.

Obs: $\begin{bmatrix} h(x):=x^2 \\ g(u):=\operatorname{sen} u \\ a:=2 \\ b:=3 \end{bmatrix}$ indica substituição simultânea.

Exercício f: Encontre [...] tal que $\boxed{2}$[...] mostre como resolver $\int_{x=a}^{x=b}(3x+4)^5\,dx$.

$$\boxed{2}\begin{bmatrix} g(\alpha):=\frac{\alpha^5}{3} \\ h(\beta):=3\beta+4 \end{bmatrix} =$$

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{(3x+4)^5}{3}\cdot 3\,dx = \int_{u=3a+4}^{u=3b+4}\frac{u^5}{3}\,du \qquad ☆$$

$$= \frac{u^6}{18}\Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}$$

$$= \frac{(3x+4)^6}{18}\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Se a gente apaga os limites de integração (e os da barra de diferença) no ☆ e a gente acrescenta a anotação "[u=3x+4]", a gente obtém:

$$\int\frac{(3x+4)^5}{3}\cdot 3\,dx = \int\frac{u^5}{3}\,du \quad [u=3x+4] \qquad ☆☆$$

$$= \frac{u^6}{18}$$

$$= \frac{(3x+4)^6}{18}$$

Se a gente acrescenta os limites de integração (e os das barras de diferença) em ☆☆, a gente obtém:

$$\int_{x=?}^{x=?}\frac{(3x+4)^5}{3}\cdot 3\,dx = \int_{u=\dots}^{u=\dots}\frac{u^5}{3}\,du \quad [u=3x+4] \qquad ☆☆☆$$

$$= \frac{u^6}{18}\Big|_{u=\dots}^{u=\dots}$$

$$= \frac{(3x+4)^6}{18}\Big|_{x=\dots}^{x=\dots}$$

E se agora a gente escolhe limites de integração (e pra barra) pro x, por exemplo, "$\int_{x=a}^{x=b}$", então os limites em u são consequência disso... A gente usa o [u=3x+4], e obtém: "$\int_{u=3a+4}^{u=3b+4}$", e:

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{(3x+4)^5}{3}\cdot 3\,dx = \int_{u=3a+4}^{u=3b+4}\frac{u^5}{3}\,du \qquad ☆☆☆☆$$

$$= \frac{u^6}{18}\Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}$$

$$= \frac{(3x+4)^6}{18}\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Obs: nós obtivemos:

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{(3x+4)^5}{3}\cdot 3\,dx = \frac{(3x+4)^6}{18}\Big|_{x=a}^{x=b} \qquad ☆'$$

e lembrem que, pelo TFC 2,

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Exercício: seja $F(x)=\frac{(3x+4)^6}{18}$. Calcule $F'(x)$. $(=(3x+4)^5)$

Exercícios: Tentem resolver, usando a notação sem os limites de integração: (Stewart, 4.5):

1) $\int \operatorname{sen}\pi x\,dx = ?$ $[u=\pi x]$

2) $\int x^3(2+x^4)^5\,dx = ?$ $[u=2+x^4]$

(E façam mais exercícios da sec. 4.5)

C2 26/set/2016

Lembrem que a gente está vendo integração por substituição, e uma das fórmulas - a mais curta - é:

$\int g(h(x))h'(x)\,dx$
$\quad ''$
$\int g(u)\,du \quad [u=h(x)]$

Como $u=h(x)$

$\frac{du}{dx}=\frac{dh(x)}{dx}=\frac{d}{dx}h(x)=h'(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int g(\underbrace{h(x)}_{u})\underbrace{h'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx \\ \quad '' \\ \int g(u)\,du \quad [u=h(x)]\end{array}}$$

Idéia importante:
$\frac{du}{dx}dx=du$

Mas o que são "$du$" e "$dx$" sozinhos... $\frac{du}{dx}$ a gente entende, "$h'(x)$",
mas $\frac{du}{dx}\underset{?}{dx}=\underset{?}{du}$ !!

Hoje: $dx, du, dy$, etc
Difenciais (por alto - só o início agora)
• Aproximações polinomiais
• Série de Taylor.

Notação (improvisada, temporária): $f \overset{4}{\approx} g$
se e só se:
$f(0)=g(0)$,
$f'(0)=g'(0)$,
$f''(0)=g''(0)$,
$f'''(0)=g'''(0)$,
$f''''(0)=g''''(0)$. ⇐ 4ª derivada.
ou:
$f^{(4)}(0)=g^{(4)}(0)$.

E "$f \overset{2}{\approx} g$" (pronúncia: $f$ e $g$ coincidem até grau 2 no ponto 0)
se e só se:
$f(0)=g(0)$,
$f'(0)=g'(0)$,
$f''(0)=g''(0)$.

Lembrem que a maior parte das funções de Cálculo 1 têm infinitas derivadas no ponto 0...
P.ex.,
$sen(x)$
$cos(x)$,
$cos(x^3-4x^2)$,
$e^{cos(x^3-4x^2)}$ ...

Idéia:
Vamos tentar aproximar funções por polinômios usando $\overset{0}{\approx}, \overset{1}{\approx}, \overset{2}{\approx}$, etc.

Exercício:
a) Seja $f(x)=\cos x$,
$g_0(x)=a_0$,
$g_1(x)=a_0+a_1x$,
$g_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$.
Encontre $a_0, a_1, a_2$ que façam com que
$f \overset{0}{\approx} g_0$,
$f \overset{1}{\approx} g_1$,
$f \overset{2}{\approx} g_2$.

Dica: calcule $f(0), f'(0), f''(0)$,
$g_0(0), g_0'(0), g_0''(0)$,
$g_1(0), g_1'(0), g_1''(0)$,
$g_2(0), g_2'(0), g_2''(0)$.

b) Encontre $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4$ tais que
$\cos x \overset{4}{\approx} \underset{1}{a_0}+\underset{0}{a_1}x+\underset{-\frac{1}{2}}{a_2}x^2+\underset{0}{a_3}x^3+\underset{\frac{1}{24}}{a_4}x^4$.

c) Encontre $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ tais que
$sen\ x \overset{5}{\approx} \underset{0}{a_0}+\underset{1}{a_1}x+\underset{0}{a_2}x^2+\underset{-\frac{1}{6}}{a_3}x^3+\underset{0}{a_4}x^4+\underset{1/120}{a_5}x^5$.

d) Idem, mas tais que
$e^x \overset{5}{\approx} \underset{1}{a_0}+\underset{1}{a_1}x+\underset{1/2}{a_2}x^2+\underset{1/6}{a_3}x^3+\underset{1/24}{a_4}x^4+\underset{1/120}{a_5}x^5$.

Truque (fórmula geral):
$f(x) \overset{4}{\approx} \underset{f(0)}{a_0} + \underset{f'(0)}{a_1}x + \underset{\frac{f''(0)}{2}}{a_2}x^2 + \underset{\frac{f'''(0)}{6} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}}{a_3}x^3 + \underset{\frac{f''''(0)}{24} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}}{a_4}x^4$

$f(x) \overset{n}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Mais uma idéia...
Notação (improvisada, temporária):
$f \underset{a}{\overset{4}{\approx}} g$ "$f$ e $g$ coincidem até grau 4 no ponto $a$".
se e só se:
$f(a)=g(a)$
$f'(a)=g'(a)$
$\vdots$
$f^{(4)}(a)=g^{(4)}(a)$.

Exercício:
$x^4-3x^2 \underset{1}{\overset{4}{\approx}} \underset{-2}{a_0}+\underset{-2}{a_1}(x-1)+\underset{\frac{6}{2}}{a_2}(x-1)^2+\underset{\frac{24}{6}}{a_3}(x-1)^3+\underset{\frac{24}{24}}{a_4}(x-1)^4$

$f(x)=x^4-3x^2$
$f'(x)=4x^3-6x$
$f''(x)=12x^2-6$
$f'''(x)=24x$
$f''''(x)=24$

$f(1)=-2$
$f'(1)=-2$
$f''(1)=6$
$f'''(1)=24$
$f''''(1)=24$

Repare:
$e^x \overset{\infty}{\approx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$

Fato: $\forall x.\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \to e^x\right)$

A gente pode usar séries de Taylor (esses limites de somatórios) pra calcular $e^x$, $sen\ x$, $cos\ x$,

$\boxed{\text{C2 26/set/2016}}$

LEMBREM QUE A GENTE ESTÁ VENDO <u>INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO</u>, E UMA DAS FÓRMULAS - A MAIS CURTA - É:

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx$$
$$\parallel$$
$$\int g(u)\,du \qquad [u=h(x)]$$

Como $u=h(x)$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dh(x)}{dx}=\frac{d}{dx}h(x)=h'(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\int g(\underbrace{h(x)}_{u})\underbrace{h'(x)}_{\frac{du}{dx}}dx \\ \parallel \\ \int g(u)\,du \qquad [u=h(x)]\end{array}}$$

IDÉIA IMPORTANTE:

$$\frac{du}{dx}dx=du$$

MAS O QUE SÃO "$du$" E "$dx$" SOZINHOS... $\frac{du}{dx}$ A GENTE ENTENDE, "$h'(x)$", MAS $\frac{du}{dx}\underset{?}{dx}=\underset{?}{du}$ !!

HOJE: $dx, du, dy$, ETC

DIFERENCIAIS (POR ALTO - SÓ O INÍCIO AGORA)

- APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS ⇐ OK
- SÉRIE DE TAYLOR. ⇐ OK.

SEJAM: $y=f(x)$,
$z=h(y)$.

DIGAMOS QUE TEMOS $x_0$ E $x_1$. A PARTIR DELES PODEMOS DEFINIR:

$\Delta x=x_1-x_0$,

$y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\Delta y=y_1-y_0$,

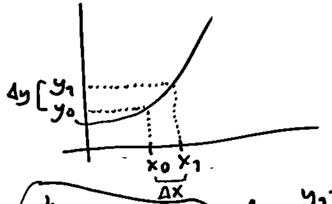
$z_0=f(y_0)$, $z_1=f(y_1)$, $\Delta z=z_1-z_0$.

REPAREM QUE ACIMA A GENTE COMEÇOU COM $x_0$ E $x_1$, E AÍ $\Delta x=x_1-x_0$; TAMBÉM PODERÍAMOS TER COMEÇADO COM $x_0$ E $\Delta x$, E AÍ $x_1=x_0+\Delta x$.

REPARE:
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$
$$\frac{dz}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

TRUQUE (SUJO, MAS QUE FUNCIONA): $dx$ É UMA <u>VARIÁVEL</u> NOVA - A GENTE ESCOLHE O VALOR DELE, COMO A GENTE ESCOLHE (DOIS DOS) $x_0, x_1$ E $\Delta x$, E AÍ A GENTE VAI DEFINIR:

$$dy=\frac{dy}{dx}dx,$$
$$dz=\frac{dz}{dy}dy.$$




$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

EXERCÍCIO:

a) SEJAM:
$y=f(x)=x^2$,
$z=g(y)=y^3$,
$x_0=2$, $\Delta x=0.5$.
CALCULE $x_1$, $y_0, y_1, \Delta y$, $z_0, z_1, \Delta z$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta y}$.

a') IDEM, MAS ⋮ $\Delta x=0.1$.

a'') IDEM, MAS $\Delta x=0.01$

b) ALÉM DISSO $dx=1$. CALCULE $dy$ E $dz$.

c) IDEM, MAS $dx=10$.

$$dy=\frac{dy}{dx}dx$$
$$=f'(x_0)dx$$
$$=f'(x_0)$$
$$dz=\frac{dz}{dy}dy$$
$$=g'(y_0)dy$$

$\boxed{\text{C2 28/set/2016}}$

**Hoje:**
Alguns truques com diferenciais e linearizações!

(Aula pesadíssima! Reveja o material de hoje muitas vezes! ☹☹☹)

Obs/sugestão: leiam a seção 2.9 do Stewart ("Linear approximations and differentials")
O que a gente vai fazer hoje é parecido com o que está lá, e complementa o que está lá.

**Idéia principal:**

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$f(x_1)-f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$y_1-y_0 \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$\Delta y \approx \frac{d}{dx}f(x_0)\Delta x$$
$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$
$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

A última linha é o truque sujo do final da aula passada: a gente vai definir $dy := \frac{dy}{dx}dx$.

**Exemplos:**

a) $f(x)=x^2$

$$f(x_0+\Delta x) = x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 \approx x_0^2+\underbrace{2x_0}_{f'(x_0)}\Delta x$$

⇑ contas bem fáceis.

b) $f(x)=\sqrt{x}$

contas mais difíceis, mas o livro tem uma boa discussão (com figuras!) de onde essa aproximação é boa e quão boa ela é (ou seja, qual é o erro).

**Notações:**

O livro usa
$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$
$$L(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x$$
$$L(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$
↑ "aproximação linear" da $f$ em $x_0$

Como nós vamos querer aproximações lineares pra $f$ e $g$ vamos usar:

$\bar f \overset{1}{\approx} f$, $\bar f$ polinômio de grau 1, ponto 0.

$\bar f_{x_0} \overset{1}{\underset{x_0}{\approx}} f$, $\bar f_{x_0}$ polinômio de grau 1 tal que $\bar f_{x_0}(x_0)=f(x_0)$, $\bar f_{x_0}'(x_0)=f'(x_0)$.

**Exercício:**

Seja $f(x)=\sqrt{x+3}$, obtenha $\bar f(x)$ e $\bar f_1(x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\bar f(0+\Delta x) = f(0)+f'(0)\Delta x = \sqrt{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta x$$

$$\bar f_1(1+\Delta x) = f(1)+f'(1)\Delta x = \sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\Delta x = 2+\frac{1}{4}\Delta x$$

Obs: o livro compara:
$\bar f_1(1+0) = f(1+0)$
$\bar f_1(1+0.1) \approx f(1+0.1)$
$\bar f_1(1+0.2) \approx f(1+0.2)$
$\bar f_1(1+0.5) \approx f(1+0.5)$,
etc.

**Dicionário**

A gente vai querer:
$y=f(x)$,
$z=g(y)$.

$x_1 := x_0+\Delta x$
$y_0 := f(x_0)$ $\quad y_1 := f(x_1)$ $\quad \Delta y = y_1-y_0$
$z_0 := g(y_0)$ $\quad z_1 := g(y_1)$ $\quad \Delta z := z_1-z_0$

$$\frac{dy}{dx} := f'(x_0) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y_1-y_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Idem para:
$$\frac{dz}{dy} := g'(y_0) = \ldots = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

Queremos poder falar de coisas como $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$...

Repare que estas coisas fazem sentido:
$$\frac{dz}{dx} := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Truque (não vou demonstrar, mas a demonstração é algo simples com "ε"s e "δ"s):
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy}\ldots$$
Podemos substituir "$\lim_{\Delta y\to 0}$" por "$\lim_{\Delta x\to 0}$" em todo lugar.

Usando o truque,
$$\frac{dz}{dx} := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Lembrem que a gente integração por substituição usando integrais indefinidas, que pra gente eram abreviações...

A gente vai fazer a mesma coisa com diferenciais:
1º) usamos elas e chegamos rápido a resultados interessantes
2º) "expandimos as abreviações".

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}g(y) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) = g'(y)f'(x) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} 1/\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \;\vdots\; = 1/f'(x)$$

C2 28/set/2016

## Derivadas de funções inversas

Digamos que:

$y = f(x)$

$z = g(y)$

e $x = z$, isto é, $f$ e $g$ são inversas uma da outra.

Então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

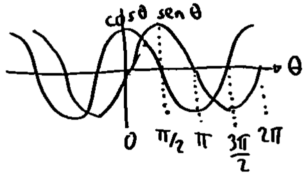
Se conhecemos $g, g', f$ isso nos permite descobrir $f'$!

Exemplo/exercício:

Sejam $g(y) = e^y$, $f(x) = \ln x$.

Calcule $f'(x)$.

Às vezes a gente vai usar esta idéia junto com truques extras...




Agora as nossas variáveis vão ser

$\theta$,

$c = \cos\theta$,

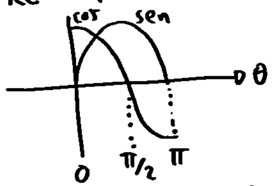
$s = \operatorname{sen}\theta$,

e às vezes:

$\theta = \arccos c$,

$\theta = \operatorname{arcsen} s$.

Restrição de intervalos:




Nesse trecho temos:

$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-(\cos\theta)^2}$

$s = \sqrt{1-c^2}$

Em outros trechos poderíamos ter

$s = -\sqrt{1-c^2}$...

Vamos nos restringir a $\theta \in [0, \pi]$.

Temos:
(neste trecho!)

$c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$c^2 + s^2 = 1$

$s = \sqrt{1-c^2}$

$\theta = \arccos c$

$\frac{ds}{d\theta} = c$

$\frac{dc}{d\theta} = -s$

Exercício (difícil):
Encontre expressões pra $\frac{d\theta}{dc}$, isto é, pra $\frac{d}{dc}\arccos c$.

$$\frac{d\theta}{dc} = \frac{1}{\frac{dc}{d\theta}} = \frac{1}{-s} = \frac{1}{-\sqrt{1-c^2}}$$

$$\frac{d}{dc}\arccos c = \frac{1}{-\sqrt{1-c^2}}$$

Bônus:

$$\arccos c \Big|_{c=c_0}^{c=c_1} = \int_{c=c_0}^{c=c_1} \left(\frac{d}{dc}\arccos c\right) dc = \int_{c=c_0}^{c=c_1} \frac{1}{-\sqrt{1-c^2}}\, dc$$

$$\arccos c = \int \frac{1}{-\sqrt{1-c^2}}\, dc$$

$$\frac{d \arccos}{dc} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$c = \sqrt{1-s^2} \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}}$$

## $\boxed{\text{C2 3/out/2016}}$

Na aula passada nós vimos como interpretar formalmente coisas como:

$y=f(x)$

$z=g(y)$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}, \frac{dz}{dx},$

e descobrimos que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

Com isso a gente integrar as funções mais básicas de Cálculo 1:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} & \text{quando } n \neq -1, \\ \ln x & \text{quando } n = -1. \end{cases}$$

ou melhor: $\ln|x|$.

$\int e^x dx = e^x,$

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x,$

$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x,$

Vou considerar que $\tan x$, $\sec x$ são "menos básicas"...

## Hoje:

Vamos aprender a integrar produtos de algumas dessas funções básicas.

1ª técnica: "Integração por partes".

Truque:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

As duas fórmulas de integração por partes:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Exemplo/exercício:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}dx = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}dx$$

$$= xe^x - e^x$$

Repare que conseguimos descobrir que

$$\underbrace{\boxed{\int xe^x dx}}_{\text{difícil}} = xe^x - \underbrace{\boxed{\int 1\cdot e^x dx}}_{\text{mais fácil...}}$$

Se tivéssemos feito

$$\underbrace{\boxed{\int \underbrace{x}_{f'(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)}dx}}_{\text{difícil}} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)} - \underbrace{\boxed{\int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}dx}}_{\text{mais difícil...}}$$

Uma coisa que nos ajuda é a gente ter uma noção de quão difícil cada integral é... (pra gente poder "resolver" integrais expressando elas em termos de integrais mais fáceis)

Eu nunca vi isso explicado precisamente, então a gente vai improvisar um pouco.

Integrais que a gente resolve com a aplicação de uma fórmula de integração têm "dificuldade 1"...

E, por exemplo:

$$\underbrace{\boxed{\int xe^x dx}}_{\text{dificuldade 2}} = xe^x - \underbrace{\boxed{\int e^x dx}}_{\text{dificuldade 1}}$$

Exercício/exemplo:

$\boxed{\int x^2e^x dx}$

dificuldade 3.

Calcule $\int x^2e^x dx$.

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2\boxed{\int xe^x dx}$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

Obs. muito importante:

Às vezes alguém vai considerar que você só "resolveu" (ou: "integrou") $\int x^2e^x dx$ quando você escreve:

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

Mas às vezes basta você usar o truque do "onde"...

$$\boxed{\begin{array}{l} \int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx \\ \text{onde} \\ \int xe^x dx = xe^x - e^x. \end{array}}$$

Exercício:

Calcule $\int x^3e^x dx$ e dê a resposta usando o "onde".

Resposta 1:

$$\int \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx = \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{3x^2}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}dx$$

$$= x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$$

onde

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

e

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x$$

Resposta 2:

$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$ onde já vimos como calcular $\int x^2e^x dx$.

Resposta 3:

$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$

(em situações, como tabelas de integração, em que o leitor lembra que a gente já viu como calcular $\int x^2e^x dx$.)

$\boxed{\text{C2 3/out/2016}}$

Às vezes a gente tem que usar int. por partes duas vezes e "passar algo pro outro lado"...

$$\int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f'}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g}\,dx$$

$$\int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g'}\,dx = \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f'}(-\cos x)\,dx$$
$$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x$$
$$= e^x\operatorname{sen} x - \left(-e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx\right)$$
$$= e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x$$

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x\right)$$

Exercícios (casa):

a) $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = ?$

b) Confira os resultados.
Dica: $\int f(x)dx = F(x)$ se e só se $f(x) = F'(x)$.

c) $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = ?$

d) (Trabalhoso - dei numa prova): $\int x e^x \operatorname{sen} x\,dx = ?$

Outra técnica:

$\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = ?$

$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\,dx = ?$

Aqui é melhor usar uma substituição...

Variáveis:
$\theta$,
$s = \operatorname{sen}\theta$,
$c = \cos\theta$.

$\frac{ds}{d\theta} = c \qquad ds = c\,d\theta$

$\frac{dc}{d\theta} = -s \qquad dc = -s\,d\theta$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \int s\,c\,d\theta = \int s\,ds = \frac{s^2}{2} = \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2}{2}$$

Exercícios:

a) $\int s^2 c\,d\theta = ?$

b) $\int s^3 c\,d\theta = ?$

c) $\int s^3 c^3\,d\theta = ?$

Nos próximos use $s\,d\theta = -dc$:

d) $\int c^2 s\,d\theta = ?$

e) $\int c^3 s^3\,d\theta = ?$

Reparem que:

1) $$\int \tan\theta\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}d\theta = \int \frac{s}{c}d\theta = \int c^{-1}s\,d\theta = \int c^{-1}(-1)dc = -\int c^{-1}dc = -\ln|c| = -\ln|\cos\theta| \text{ (acho)}$$

2) Essa técnica não resolve coisas como: $\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^4 d\theta$

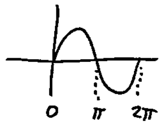
Ela só funciona quando um dos expoentes é ímpar.

(Truque: $s^2 = (1-c^2)$
$c^2 = (1-s^2)$)

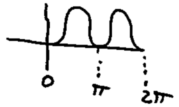
O que a gente pode fazer quando os expoentes são ambos pares?

Lembre:

$\operatorname{sen}\theta =$

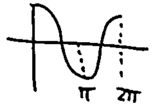


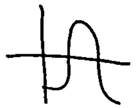

$(\operatorname{sen}\theta)^2 =$



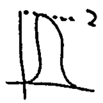

$\cos\theta =$

$-\cos\theta =$

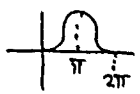


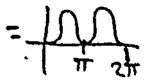
$1-\cos\theta =$




$\frac{1-\cos\theta}{2} =$




$\frac{1-\cos 2\theta}{2} =$




$= (\operatorname{sen}\theta)^2$ !!!

Como é que a gente demonstra $(\operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ ?

(Obs: $\int (\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta =$ ☹,
$\int \frac{1-\cos 2\theta}{2} =$ ☺)

GRANDE TRUQUE (PRÓXIMA AULA!!!):

Séries de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

Essas séries, i.e., estes somatórios, fazem sentido (e convergem!) quando $x$ é complexo...

Vamos ver que:
$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)$$

C2 5/out/2016

Dica pra um exercício pra casa da aula passada:

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x \operatorname{sen} x}_{g'} \, dx = ?$$

A gente viu como calcular $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ !!.

Hoje:

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (☆)
  e truques relacionados
- $\int \frac{a}{x-b} + \frac{c}{x-d} \, dx$

O (☆) é TÃO importante que eu vou mostrar os truques pra vocês deduzirem a fórmula.

Lembrem que:

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ldots \end{aligned}}$$

Vamos definir

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k$$

e fórmulas parecidas para sen e cos.

(Convensão: "x" é uma variável real, "z" é uma variável complexa)

O que acontece no $e^z$ quando $z = i\theta$ ($\theta$ real)?

$$e^z = e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{6} + \ldots$$

Vamos colocar as potências de i pra fora...

$$\begin{aligned} &= 1 + (i)\theta + (i)^2\frac{\theta^2}{2} + (i)^3\frac{\theta^3}{6} + (i)^4\frac{\theta^4}{24} + (i)^5\frac{\theta^5}{120} + \ldots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \ldots \\ &\quad + i\theta - i\frac{\theta^3}{6} + i\frac{\theta^5}{120} \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \ldots\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \ldots\right) \\ &= \cos\theta \\ &\quad + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Lembrando como somar e multiplicar complexos...

$$(2+3i) + (4+5i) = 6 + 8i$$

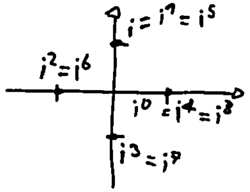
$$\begin{aligned} (2+3i)\cdot(4+5i) &= 2\cdot(4+5i) \\ &\quad + 3i\cdot(4+5i) \\ &= 2\cdot 4 + (2\cdot 5)i \\ &\quad + (3\cdot 4)i + (3\cdot 5)i^2 \\ &= (2\cdot 4 - 3\cdot 5) + (2\cdot 5 + 3\cdot 4)i \end{aligned}$$

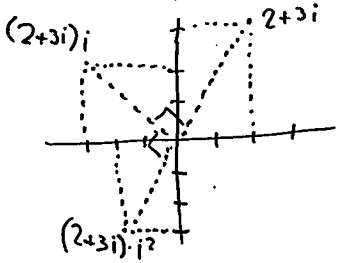
$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^5 = \ldots = i$




Vocês sabem que

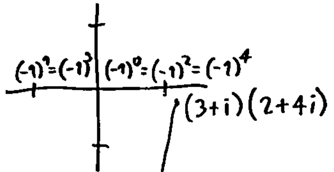
$$e^x e^y = e^{x+y}$$

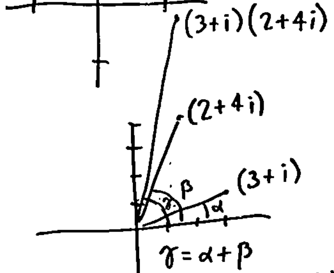
quando x e y são reais...

Por favor acreditem (é verdade, mas não dá pra eu dar uma prova decente agora) que

$$e^z e^w = e^{z+w}$$

para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.




$$|(3+i)(2+4i)| = |3+i|\,|2+4i| = \sqrt{3^2+1^2}\,\sqrt{2^2+4^2}$$

Então:

$$e^{a+i\theta} = ?$$

(Quando $a, \theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} e^{a+i\theta} &= e^a e^{i\theta} \\ &= e^a(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Exercícios: calculem e representem no plano complexo: (use $e \approx 3$)

a) $e^{i\pi}$

b) $e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

d) $e^1$

e) $e^{1+i\frac{\pi}{2}}$

f) $e^{1+i\pi}$

g) $e^{1+i\frac{3}{2}\pi}$

h) $e^{1+2\pi}$

i) $e^2$

C2 5/OUT/2016

VIMOS QUE:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ (☆)

$e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta}$

$= e^a(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

OBS (NÃO MUITO IMPORTANTE):

$e^{z+iw} = e^z e^{iw}$

$= e^z(\cos w + i\,\text{sen}\,w)$

ISTO VALE PRA $z, w \in \mathbb{C}$,
MAS A GENTE NÃO USA
PORQUE SENOS E COSSENOS
DE COMPLEXOS SÃO DIFÍCEIS
DE VISUALIZAR...

SE SUBSTITUÍMOS $[\theta := 42\theta]$
EM (☆) TEMOS:

$e^{i\cdot 42\theta} = \cos 42\theta + i\,\text{sen}\,42\theta.$

OBS: $e^{i\cdot 42\theta}\cdot e^{-i42\theta} = e^0 = 1$

$e^{-i42\theta} = \frac{1}{e^{i42\theta}}$

$e^{i\cdot 3\theta}\cdot e^{i\cdot 4\theta} = e^{i\cdot 7\theta}$

LEMBREM QUE A
GENTE QUERIA
"TRADUZIR" COISAS
COMO $(\cos\theta)^2(\text{sen}\,\theta)^4$
PRA COISAS MAIS
FÁCEIS DE INTEGRAR...

A GENTE DE FÓRMULAS
PRO $\cos\theta$ E
PRO $\text{sen}\,\theta$.

$$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta$$
$$= \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + \cancel{i\,\text{sen}\,\theta}) + (\cos\theta - \cancel{i\,\text{sen}\,\theta})$$
$$= 2\cos\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad (\cos)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cancel{\cos\theta} + i\,\text{sen}\,\theta) - (\cancel{\cos\theta} - i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= 2i\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}} \quad (\text{sen})$$

NOTAÇÃO CURTA

(PRA GENTE PODER,
POR EXEMPLO,
REDEDUZIR AS
FÓRMULAS (cos)
E (sen) NUM
CANTO DO PAPEL):

$C = \cos\theta$

$S = \text{sen}\,\theta$

$E = e^{i\theta}$

$E^2 = e^{i\theta}\cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta}$

$E^{-1} = e^{-i\theta}$

$C = \frac{E+E^{-1}}{2}$

$S = \frac{E-E^{-1}}{2i}$

SE SUBSTITUÍMOS $[\theta := 42\theta]$
EM (cos) E (sen) TEMOS:

$$\cos 42\theta = \frac{e^{i42\theta}+e^{-i42\theta}}{2} = \frac{E^{42}+E^{-42}}{2}$$

$$\text{sen}\,42\theta = \frac{e^{i42\theta}-e^{-i42\theta}}{2i} = \frac{E^{42}-E^{-42}}{2i}$$

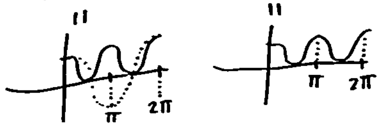
APLICAÇÕES

$$\int(\cos\theta)^2\,d\theta = ?$$

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{E^2+2+E^{-2}}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{E^2+E^{-2}}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$$\int(\cos\theta)^2\,d\theta = \int\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta + \frac{\theta}{2} \ldots$$

REPARE QUE É FÁCIL
"CONFERIR GRAFICAMENTE"
QUE $(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$ ...




UM EXEMPLO MAIS COMPLICADO:

$$(\cos\theta)^2(\text{sen}\,\theta)^3 = ?$$

$$\left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2\left(\frac{E-E^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{(2i)^3}(E+E^{-1})^2(E-E^{-1})^3$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8i}\right)(E^2+2EE^{-1}+E^{-2})(E^3-3E^2E^{-1}-3E^1E^{-2}+E^{-3})$$
$$= -\frac{1}{32i}(E^2+2+E^{-2})(E^3-3E-3E^{-1}+E^{-3})$$
$$= -\frac{1}{32i}(E^5-E^3-8E-8E^{-1}-E^{-3}+E^{-5})$$
$$= -\frac{1}{32i}\left(E^5+E^{-5} - E^3-E^{-3} - 8(E-E^{-1})\right)$$
$$= -\frac{1}{32i}\left(2\cos 5\theta - 2\cos 3\theta - 16\cos\theta\right)$$

ALGO ASSIM ⇓

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5\ldots$

```
        1  2  1
     1 -3 -3  1
     ----------
        1  2  1
     -3 -6 -3
  -3 -6 -3
 1  2  1
 -------------
 1 -1 -8 -8 -1 1
```

EXERCÍCIOS:

$$\int(\text{sen}\,\theta)^2\,d\theta = ?$$
$$\int\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = ?$$
$$\int(\cos\theta)^2(\text{sen}\,\theta)^2\,d\theta = ?$$

C2 5/OUT/2016

AULA QUE VEM:
COMO INTEGRAR
FRAÇÕES COM
DENOMINADORES
COMPLICADOS USANDO
"FRAÇÕES PARCIAIS"!!!

$$\int 2+3x+4x^2\,dx =$$

$$\int 2x^{-3}+3x^{-2}+4x^{-1}+5+6x+7x^2\,dx =$$

$$\int 4x^{-1}\,dx =$$

$$4\int x^{-1}\,dx =$$

$$4\ln|x|$$

$$\int \frac{4}{x-3}\,dx =$$

$$\int \frac{5}{x+2}\,dx =$$

$$\int \frac{5}{(x+2)^2}\,dx =$$

FRAÇÃO COM
DENOMINADOR
BEM SIMPLES...

$$\int 5(x+2)^{-2}\,dx =$$

$$\int \frac{4}{x-3}+\frac{5}{x+2}\,dx =$$

$$\int \frac{4(x+2)}{(x-3)(x+2)}+\frac{(x-3)5}{(x-3)(x+2)}\,dx$$

$$\int \frac{4x+8+5x-15}{x^2-x-6}\,dx$$

$$\int \frac{9x-7}{x^2-x-6}\,dx$$

FRAÇÃO COM
DENOMINADOR
COMPLICADO

C2 10/out/2016

Hoje:

Como integrar frações com denominadores complicados, tipo isto?

$$\int \frac{9x-7}{x^2-x-6}\,dx = ?$$

Truque:

$$\int \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3| + 5\ln|x+2|$$

$$\int \frac{9x-7}{x^2-x-6}\,dx$$

Vamos começar reaprendendo a somar, subtrair, multiplicar e dividir polinômios.

Idéia: multiplicação de polinômios é uma multiplicação sem "vai um"!

$$\begin{array}{r} ax^2 + bx + c \\ dx^2 + ex + f \\ \hline afx^2 + bfx + cf \\ aex^3 + bex^2 + cex \\ adx^4 + bdx^3 + cdx^2 \\ \hline adx^4 + (ae+bd)x^3 + (af+be+cd)x^2 + (bf+ce)x + cf \end{array}$$

Se $x=10$ isto é exatamente a multiplicação usual!

$$\begin{array}{r} a10^2 + b10 + c \\ d10^2 + e10 + f \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 456 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & & af & bf & cf \\ & ae & be & ce & \\ ad & bd & cd & & \end{array}$$

Uma notação que eu gosto (nada padrão!):

$1x^2 + 2x + 3 \Rightarrow$ [1|2|3]

$1x^4 + 3x^2 + 9x \Rightarrow$ [1|0|3|9|0] = [1| |3|9| ]

$$\begin{array}{r} [1|2|3] \\ \times [4|5|6] \\ \hline [6|12|18] \\ [5|10|15] \\ [4|8|12] \\ \hline [4|13|28|27|18] \end{array}$$

E pra dividir polinômios?

$$\begin{array}{l} [1|2|3|4|5] \;\;\big|\; [1|0|-2] \\ -[1|0|-2] \qquad\quad [1|2|5] \\ \hline \quad [2|5|4|5] \\ \quad -[2|0|-4] \\ \hline \qquad [5|8|5] \\ \qquad -[5|0|-10] \\ \hline \qquad\quad [8|15] \end{array}$$

Vamos testar...

$$\underbrace{\underbrace{[1|0|-2]\cdot[1|2|5]}_{[1|2|3|-4|-10]} + [8|15]}_{[1|2|3|4|5]} = !!$$

Repare que podemos usar isso pra "juntar" frações "simples"...

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} = \frac{?}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{2\,[1|-2]\cdot[1|3]}{[1|1]\cdot[1|-2]\cdot[1|3]} = \frac{[2|2|-12]}{[1|2|-5|-6]}$$

$$\underbrace{\underbrace{[1|1]\cdot[1|-2]}_{[1|-1|-2]}\cdot[1|3]}_{[1|2|-5|-6]}$$

$$\begin{array}{r} 1\;-2 \\ 1\;\;\;3 \\ \hline 3\;-6 \\ 1\;-2\;\;\;\; \\ \hline 1\;\;1\;-6 \end{array}$$

E, segundo o computador,

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} = \frac{[1|18|5]}{[1|2|-5|-6]}$$

$\boxed{\text{C2 10/out/2016}}$

HOJE:
COMO INTEGRAR FRAÇÕES COM DENOMINADORES COMPLICADOS, TIPO ISTO?

$$\int \frac{9x-7}{x^2-x-6}\,dx = ?$$

TRUQUE:

$$\int \underbrace{\left(\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x+2}\right)}_{\text{SIMPLES}} dx = 4\ln|x-3| + 5\ln|x+2|$$

$$\parallel$$

$$\int \underbrace{\left(\frac{9x-7}{x^2-x-6}\right)}_{\text{COMPLICADO}} dx$$

VAMOS COMEÇAR REAPRENDENDO A SOMAR, SUBTRAIR, MULTIPLICAR E DIVIDIR POLINÔMIOS.

IDÉIA: MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS É UMA MULTIPLICAÇÃO SEM "VAI UM"!

A GENTE ACABOU DE VER COMO CONVERTER DE "SIMPLES" PRA "COMPLICADO"...

MAS A GENTE QUER APRENDER A INTEGRAR "FRAÇÕES COMPLICADAS", E PRA ISSO A GENTE VAI TER QUE CONVERTER DE "COMPLICADO" PRA "SIMPLES"...

QUEREMOS SEPARAR UMA FRAÇÃO "COMPLICADA" NUMA SOMA DE FRAÇÕES "SIMPLES"...

PRIMEIRO MÉTODO (MAIS ÓBVIO):

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx = ?$$

$$\frac{3x+4}{x^2+x-6} = \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{\boxed{3|4}}{\boxed{1|3}\cdot\boxed{1|-2}} = \frac{\overset{?}{a}}{\boxed{1|3}} + \frac{\overset{?}{b}}{\boxed{1|-2}}$$

$$= \frac{a\,\boxed{1|-2}}{\boxed{1|3}\,\boxed{1|-2}} + \frac{b\,\boxed{1|3}}{\boxed{1|3}\,\boxed{1|-2}}$$

$$= \frac{\boxed{a|-2a} + \boxed{b|3b}}{\boxed{1|1|-6}}$$

$$= \frac{\boxed{a+b|-2a+3b}}{\boxed{1|1|-6}}$$

SE $a=1$ E $b=2$,

$$\boxed{a+b|-2a+3b} = \boxed{3|4}$$

$$\frac{\boxed{3|4}}{\boxed{1|1|-6}} = \frac{1}{\boxed{1|3}} + \frac{2}{\boxed{1|-2}}$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-2}\,dx = \ln|x+3| + 2\ln|x-2|$$

DÁ PRA GENTE USAR ESSE MÉTODO — QUE ENVOLVE RESOLVER UM SISTEMA — PRA COISAS MAIORES, COMO:

$$\int \frac{\boxed{1|18|5}}{\boxed{1|2|-5|-6}}\,dx = ?$$

$\parallel$ SABEMOS, PELO EXEMPLO DO QUADRO ANTERIOR

$$\int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3}\,dx$$

... SÓ QUE A GENTE VAI TER QUE RESOLVER SISTEMAS MAIORES, O QUE PODE SER MEIO CHATO.

SEGUNDO MÉTODO (NADA ÓBVIO):

("MÉTODO DE HEAVISIDE")

DIGAMOS QUE ESTAMOS EM GRAU 3, E QUE:

$$\boxed{\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}} \quad (\star)$$

OBS: $p(x)$ É POLI DE GRAU 2, $a,b,c$ SÃO CONSTANTES (CONHECIDAS), E QUEREMOS DESCOBRIR $A, B, C$.

OBS: NO EXEMPLO DO QUADRO ANTERIOR,

$$\frac{\overbrace{x^2+18x+5}^{=p(x)}}{\underbrace{(x+1)}_{\substack{x-a\\ a=-1}}\underbrace{(x-2)}_{\substack{x-b\\ b=2}}\underbrace{(x+3)}_{\substack{x-c\\ c=-3}}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

TRUQUE:
MULTIPLICANDO $(\star)$ POR $(x-a)$,

$$\frac{(x-a)\,p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{(x-a)A}{x-a} + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}$$

E FAZENDO $\lim_{x\to a}$, TEMOS:

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)\,p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)A}{x-a} + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}\right)$$

$$\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)} \qquad A + 0 + 0 = A$$

MORAL: $A = \dfrac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$ !!!

NO EXEMPLO DO QUADRO ANTERIOR,

$$A = \frac{(-1)^2+18(-1)+5}{(-3)(2)} = \frac{1-18+5}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

EXERCÍCIO:
CALCULE $B$ NESSE EXEMPLO (MULTIPLIQUE $(\star)$ POR $(x-b)$ E FAÇA $\lim_{x\to b}$)

## C2 10/out/2016

Hoje:

Como integrar frações com denominadores complicados, tipo isto?

$$\int \frac{9x-7}{x^2-x-6}\,dx = ?$$

Truque:

$$\int \underbrace{\left(\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x+2}\right)}_{\text{simples}} dx = 4\ln|x-3| + 5\ln|x+2|$$

$$\parallel$$

$$\int \underbrace{\left(\frac{9x-7}{x^2-x-6}\right)}_{\text{complicado}} dx$$

Vamos começar reaprendendo a somar, subtrair, multiplicar e dividir polinômios.

Idéia: multiplicação de polinômios é uma multiplicação sem "vai um"!

O método de Heaviside nos permite encontrar A, B, C em:

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

Repare que quando a gente soma as três frações da direita a gente obtém um $p(x)$ que nunca tem grau maior que 2...

Se queremos integrar algo como

$$\frac{3x^4+4x^3+2x^2+5x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

A primeira coisa que a gente tem que fazer é reduzir o grau do denominador.

Exemplo:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = ?$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = \frac{x\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{1\,|\,0\,|\,0\,|\,0} & \boxed{1\,|\,0\,|\,-1} \\ -\ \boxed{1\,|\,0\,|\,-1} & \boxed{1\,|\,0} \\ \hline \boxed{1\,|\,0} & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int x + \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int x + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\,dx$$

$\boxed{\text{C2 24/out/2016}}$

## Frações parciais, cont...

A gente só viu como resolver coisas tipo

$$\int \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{\underbrace{(x-f)(x-g)(x-h)}_{\text{isto}}}\,dx$$

onde isto é um polinômio com raízes reais distintas.

Se o polinômio do denominador tiver fatores repetidos, p.ex,

$$\int \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x-f)(x-f)(x-g)}\,dx$$

é mais ou menos fácil lidar com isso...

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{(x-f)(x-f)(x-g)}\,dx = \int \frac{A}{x-f}+\frac{B}{(x-f)^2}+\frac{C}{(x-g)}\,dx$$

Isso é sem graça e a gente vai pular. :)

$$(x-i)(x+i) = x^2 \cancel{-ix+ix} - i^2 = x^2+1$$

$x^2+1$ tem duas raízes complexas, $i$ e $-i$...

1º jeito:

$$\int \frac{2}{x-i}+\frac{3}{x+i}\,dx = 2\ln|x-i| + 3\ln|x+i|$$

Isso precisa de um bocado de conhecimento sobre variáveis complexas... :(

2º jeito:

Depois — vai fazer sentido depois que virmos substituição trigonométrica...

## Substituição trigonométrica

Exemplos mais interessantes: $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$,

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^{\,\beta}\,dx = ? \Leftarrow \text{mais fácil.}$$

$$\int x^\alpha \sqrt{1+x^2}^{\,\beta}\,dx = ?$$

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-1}^{\,\beta}\,dx = ?$$

$$\int \underbrace{\underbrace{x}_{\operatorname{sen}\theta}{}^{\alpha}}_{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha} \underbrace{\underbrace{\sqrt{1-\underbrace{x^2}_{(\operatorname{sen}\theta)^2}}}_{\cos\theta}{}^{\beta}}_{(\cos\theta)^\beta}\,\underbrace{dx}_{\underset{\cos\theta\,d\theta}{?}} = ? = \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1}\,d\theta$$

$$(\cos\theta)^{\beta+1}$$

Se $x = \operatorname{sen}\theta$

$\theta = \operatorname{arcsen} x$

$dx = \dots$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \;\to\; dx = \cos\theta\,d\theta$

$$\int_{x=a}^{x=b} x^\alpha \sqrt{1-x^2}^{\,\beta}\,dx = \int_{\theta=\operatorname{arcsen} a}^{\theta=\operatorname{arcsen} b} (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1}\,d\theta$$

Meu modo preferido:

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta}\,ds$$

Pros outros dois tipos a gente vai usar $t = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{c}$

e $z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{c}$

$t$ e $z$ obedecem relações parecidas com o $c^2+s^2=1$...

$\Downarrow$

$c^2 = 1-s^2$

$c = \sqrt{1-s^2}$

Quais?

$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$

$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1+\frac{s^2}{c^2} = 1+t^2$

$z^2 = 1+t^2 \Rightarrow z = \sqrt{1+t^2}$

$z^2-1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{z^2-1}$

$$\int x^\alpha \sqrt{1+x^2}^{\,\beta}\,dx = \quad [t=x]$$

$$\int t^\alpha \underbrace{\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{z}{}^{\beta}}_{z^\beta}\,\underbrace{dt}_{\underset{z^2 d\theta}{?}} =$$

$\frac{dt}{d\theta} = ? = z^2$

$dt = z^2\,d\theta$

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-1}^{\,\beta}\,dx = ?$$

$$\int z^\alpha \underbrace{\underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{t}{}^{\beta}}_{t^\beta}\,\underbrace{dz}_{\underset{tz\,d\theta}{?}} =$$

$\frac{dz}{d\theta} = tz$

$dz = tz\,d\theta$

$\boxed{C2 \quad 24/\text{OUT}/2016}$

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = ?$$

SE $x = 2\operatorname{sen}\theta$ ENTÃO... !!

OUTRO JEITO:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\tfrac{1}{4}x^2\right)} = \sqrt{4}\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1-s^2} \qquad \left[s=\tfrac{x}{2}\right]$$

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \qquad ds = \frac{dx}{2}, \quad dx = 2ds$$

$$\int (2s)\left(2\sqrt{1-s^2}\right)2ds = 8\int s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

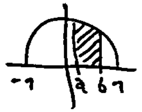
$$\int x\sqrt{1-9x^2}\,dx = ? \qquad \begin{bmatrix} s=3x \\ s^2=9x^2 \\ ds=3dx \\ dx=\tfrac{1}{3}ds \\ x=\tfrac{s}{3} \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{s}{3}\sqrt{1-s^2}\,\frac{1}{3}ds$$

E SE A RAIZ FOR ALGO COMO $\sqrt{2+3x+4x^2}$? AÍ É BEM MAIS CHATO E A GENTE VAI VER DEPOIS !!

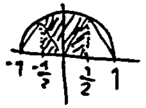
EXERCÍCIO:

$$\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1-x^2}\,dx =$$





$$\int_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx =$$





$$\int \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{c}\,\underbrace{ds}_{c\,d\theta} = \begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ \theta=\operatorname{arcsen} s \\ ds=c\,d\theta \end{bmatrix}$$

$$\int c^2\,d\theta =$$

$$\int \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$\int \frac{1}{2}d\theta + \frac{1}{2}\int \cos \underbrace{2\theta}_{u}\,d\theta = \qquad \begin{bmatrix} u=2\theta \\ \theta=u/2 \\ d\theta=\frac{du}{2} \end{bmatrix}$$

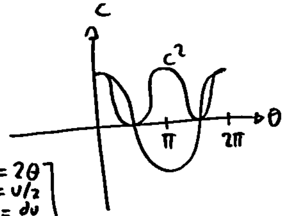
$$\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \cos u\,\frac{du}{2} =$$

$$\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\int \cos du =$$

$$\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u =$$

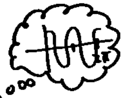
$$\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta =$$

$$\frac{\operatorname{arcsen} s}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} s)$$





$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$



$$\int_{s=-\frac{1}{2}}^{s=\frac{1}{2}}\sqrt{1-s^2}\,ds = \left(\frac{\operatorname{arcsen} s}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} s)\right)\Bigg|_{s=-\frac{1}{2}}^{s=\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\tfrac{1}{2}\right)\right) - \left(\frac{\operatorname{arcsen}-\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\pi/6}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\operatorname{sen} 2\tfrac{\pi}{6}}_{\sqrt{3}/2}\right) - \left(\frac{-\pi/6}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\operatorname{sen}-2\tfrac{\pi}{6}}_{-\sqrt{3}/2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ? \qquad [x=t]$$

$$\int t^0 \underbrace{\underbrace{\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{z^2}}_{z}}_{z^{-2}}{}^{-2}\,\underbrace{dt}_{z^2d\theta} = \int t^0 z^0\,d\theta = \theta = \operatorname{arctan} t$$

VAMOS DEIXAR PRA CONFERIR DEPOIS ISTO AQUI:

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctan} t$$

EXERCÍCIO:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = ?$$

**C2 26/out/2016**

Hoje:

- Talvez dê pra gente terminar integração!
- A P1 vai ser só sobre integração - precisamos marcar
- Coisas que eu fiquei devendo:
  - uns detalhes de identidades trigonométricas ①
  - $\int x^\alpha \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ②
- Não vamos ver substituições especiais
- Em que ordem tentar os vários métodos de integração

① Na aula de 5/out a gente viu este exemplo aqui...

$$\underbrace{(\cos\theta)}_{\frac{E+E^{-1}}{2}}{}^2\ \underbrace{(\operatorname{sen}\theta)}_{\frac{E-E^{-1}}{2i}}{}^3 = ?$$

$$c = \frac{E+E^{-1}}{2} \qquad s = \frac{E-E^{-1}}{2i}$$

$$E+E^{-1} = 2c \qquad E-E^{-1} = 2is$$

$$\underbrace{(1/2)^2}_{1/4}\underbrace{(E+E^{-1})^2}_{\|}\underbrace{\left(\frac{1}{2i}\right)^3}_{\frac{1}{-8i}}\underbrace{(E-E^{-1})^3}_{\|} \quad (**)$$

$$(E^2+2+E^{-2})\quad(E^3-3E+3E^{-1}-E^{-3}) \quad (*)$$

Vimos como multiplicar coisas como $(ax^3+bx^2+cx+d)\cdot(ex^2+fx+g)$, mas em (*) temos umas potências negativas...

Lembre que multiplicar $12.3 \cdot 45.67$ é parecido com multiplicar $123 \cdot 4567$... A novidade é que a gente põe o "." no resultado, deixando três dígitos depois dele.

(*)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \boxed{1} & & \boxed{2} & & \boxed{1} & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{-3} & & \boxed{3} & & \boxed{-1} & & \\
\hline
 & & & & & & \boxed{-1} & & \boxed{-2} & & \boxed{-1} \\
 & & & & \boxed{3} & & \boxed{6} & & \boxed{3} & & \\
 & & \boxed{-3} & & \boxed{-6} & & \boxed{-3} & & & & \\
\boxed{1} & & \boxed{2} & & \boxed{1} & & & & & & \\
\hline
\boxed{1} & & \boxed{-1} & & \boxed{-2} & & \boxed{2} & & \boxed{1} & & \boxed{-1}
\end{array}$$

$$(*) = E^5 - E^3 - 2E + 2E^{-1} + E^{-3} - E^{-5}$$

$$= \underbrace{(E^5 - E^{-5})}_{2i\operatorname{sen}5\theta} - \underbrace{(E^3 - E^{-3})}_{2i\operatorname{sen}3\theta} - 2\underbrace{(E - E^{-1})}_{2i\operatorname{sen}\theta}$$

$$(**) = -\frac{1}{32i}2i(\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$$

$$= \frac{1}{16}(\operatorname{sen}5\theta - \operatorname{sen}3\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$$

② Nós já vimos como "tirar" as constantes a e c de

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2+c}^{\,\beta}\,dx \quad \text{e} \quad \int x^\alpha \sqrt{ax^2+1}^{\,\beta}\,dx \ldots$$

Falta isto: $\sqrt{x^2+2bx+c}$

O que acontece se $x = u+k$?

$$\sqrt{\underbrace{(u+k)^2}_{u^2+2ku+k^2} + \underbrace{2b(u+k)}_{2bu+2bk} + c}$$

$$-2b^2$$

E se $k=-b$? !!

O que acontece se $x = u - \underset{k}{b}$?

Se $x = u-b$,

$$\sqrt{x^2 + 2bx + c} =$$

$$\sqrt{(u-b)^2 + 2b(u-b) + c} =$$

$$\sqrt{(u^2 \cancel{-2bu} + b^2) + (\cancel{2bu} - 2b^2) + c} =$$

$$\sqrt{u^2 - b^2 + c} =$$

$$\sqrt{u^2 + (c-b^2)}$$

A seção 7.5 do Stewart se chama "Strategy for integration" e explica qual costuma ser a melhor ordem pra aplicar as várias técnicas de integração...

Tentem fazer os exercícios da seção 7.5! !!

1) $\int \cos x(1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx = ?$

2) $\int_{x=0}^{x=1} (3x+1)^{\sqrt{2}}\,dx = ?$

3) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\tan x}\,dx = ?$

C2 26/OUT/2016

$$\int \frac{\text{sen}\,\theta + \sec\theta}{\tan\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{s + \frac{1}{c}}{s/c} d\theta$$

$$= \int \frac{c}{s}\left(s + \frac{1}{c}\right) d\theta$$

$$= \int \frac{c}{s} s + \frac{c}{s}\frac{1}{c} d\theta$$

$$= \int c + \frac{1}{s} d\theta$$

$$= \int c\, d\theta + \int \frac{1}{s} d\theta$$

$$= s \quad + \int \frac{1}{s} d\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = c \Rightarrow ds = c\,d\theta$$
$$d\theta = \frac{ds}{c}$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -s \Rightarrow dc = -s\,d\theta$$
$$d\theta = -\frac{dc}{s}$$

$$\int \frac{1}{s} d\theta = \int \frac{1}{s}(-1)\frac{dc}{s}$$

$$= \int -\frac{1}{s^2} dc$$

$$= \int -\frac{1}{1-c^2} dc$$

$$= \int \frac{1}{c^2-1} dc$$

$$= \int \frac{1}{(c+1)(c-1)} dc$$

$$= \int \frac{1/2}{c+1} - \frac{1/2}{c-1} dc$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot(c+1)^{-1} dc - \int \frac{1}{2}\cdot(c-1)^{-1} dc$$

$$= \frac{1}{2}\int (c+1)^{-1} dc - \frac{1}{2}\int (c-1)^{-1} dc$$

$$= \frac{1}{2}\ln|c+1| - \frac{1}{2}\ln|c-1|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\cos\theta + 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos\theta - 1|$$

$\boxed{\text{C2 31/out/2016}}$

P1:

| | | |
|---|---|---|
| OUT | | ~~X~~ Feriado |
| NOV | 7 | 9 !! |
| | 14 | 16 |

Hoje: Integrais impróprias! (Faltou! Esqueci!)

Lembrem que a gente começou vendo integrais de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados ("compactos")...

Depois é que a gente viu que algumas funções descontínuas(*) eram integráveis...

(*) A gente começou com funções-escada, descontínuas.

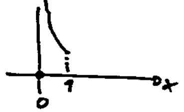
Se $f: A \to \mathbb{R}$ é contínua e $A$ é compacto então $f$ é limitada.

Quais são os problemas de funções não-limitadas?

• $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

Não é integrável



$\overline{\int_P} f\,dx = +\infty$

$\underline{\int_P} f\,dx < +\infty$

Agora a gente vai aprender uma outra definição de integral que "integra mais coisas"; ou melhor, existem funções que não eram integráveis no sentido antigo e vão ser integráveis no sentido novo.

Exemplo:

Seja $I$ um intervalo,

Sejam $I_1, I_2, I_3, \ldots$ intervalos "tendendo a $I$"...

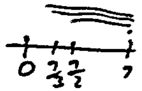
P. ex., $I=(0,1]$

$I_1 = [\frac{1}{1}, 1]$,

$I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$,

$I_3 = [\frac{1}{3}, 1]$,

$I_n = [\frac{1}{n}, 1]$.



Então: $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$

$\bigcup_{i \in \{1,2,3,\ldots\}} I_i = (0,1]$

Repare que sabemos calcular $\int_{I_i} f(x)\,dx = \int_{1/i}^{1} f(x)\,dx$

para qualquer $i$...

E $\lim_{i\to\infty} \int_{I_i} f(x)\,dx$.

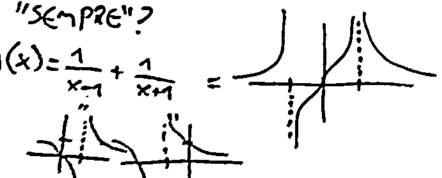
Def (temporária, intuitiva):

$\int_{(0,1]} f(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_{I_i} f(x)\,dx$.

no sentido novo

Será que dá pra fazer isso "sempre"?

Ex: $g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} =$



Será que dá pra calcular $\int_{(-1,1)} g(x)\,dx$?

Idéias:

1) $I_n = [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$

$I_{100} = [-0.99, 0.99]$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{I_n} g(x)\,dx}_{0}}_{0}$

2) $I_n = [-1+\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{n}]$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{I_n} g(x)\,dx}_{\text{negativo}}}_{-\infty}$

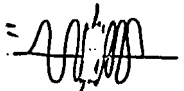
3) $I_n = [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{2n}]$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{I_n} g(x)\,dx}_{\text{positivo}}}_{+\infty}$

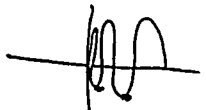
Nesse caso, será que a gente pode falar em $\lim_{I_n \to I} \int_{I_n} g(x)\,dx$ sem dizer qual é a sequência dos "$I_n$"s?

O limite não existe no sentido de que dá pra escolher duas sequências de intervalos tendendo a $I$ tais que os limites são diferentes...

Lembrem (!!) que se $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$

$h =$ 

Então $\lim_{x\to 0} h(x)$ não existe...



Existem $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ com $y=0$, $y=1$, $y=-1$.

Se a gente escolhe uma certa sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a gente vai achar que $\lim_{x\to 0} g(x)dx = -1$,

com outra sequência a gente vai achar que $\lim_{x\to 0} g(x)dx = 1$,

com outra $\lim_{x\to 0} g(x)dx$ "=" 0...

Vai acontecer a mesma coisa com o limite por intervalos.

C2 31/out/2016

P1:
OUT ... ~~X~~ FERIADO
NOV 7 9 !!
14!! 16!!

Idéia:

$$\int_{(-1,1)} g(x)\,dx$$

no sentido novo "não existe" porque o resultado depende da escolha da sequência de intervalos...

Acho que só vai dar pra gente ver uma introdução a integrais impróprias hoje, e a gente termina na próxima aula...

Stewart: 7.8 !!
Hernandez: 13-15 !!

Esses livros definem vários tipos de integrais impróprias...

$\int_{(2,3]} f(x)\,dx$, $\int_{[2,3)} f(x)\,dx$, $\int_{(2,3)} f(x)\,dx$ — casos mais simples. Integrais imp. em intervalos limitados

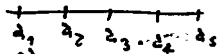
$\int_{(-\infty,2]} f(x)\,dx$, $\int_{(-\infty,2)} f(x)\,dx$, $\int_{[2,+\infty)} f(x)\,dx$, $\int_{(2,+\infty)} f(x)\,dx$, $\int_{(-\infty,+\infty)} f(x)\,dx$ — intervalos ilimitados

Depois: f descontínua.
P.ex.

Lembrem que em intervalos compactos, com f contínua, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Isso deve valer pra mais intervalos também



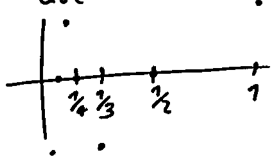
$$\int_{a_1}^{a_5} = \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \int_{a_3}^{a_4} + \int_{a_4}^{a_5}$$

E deve ("deveria", "gostaríamos") valer para infinitos intervalos...

Antes da gente ver a definição exata de "integrável" e "integral" no sentido novo vamos ver que problemas a gente vai enfrentar...

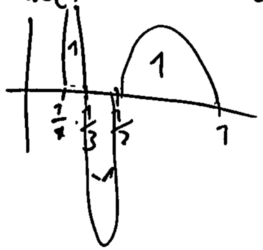
Exercício (trabalhoso):

1) Monte uma função f que:



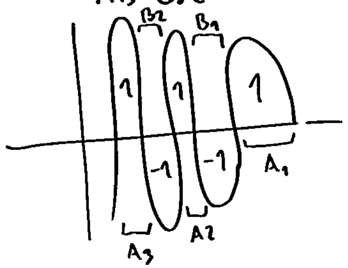
$f(1)=1$,
$f(\frac{1}{2})=0$,
$f(\frac{1}{3})=-1$,
$f(\frac{1}{4})=0$,
$f(\frac{1}{5})=1$,
$f(\frac{1}{6})=0$
etc.

2) Montem uma função g (tipo $\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$) que:



Dica: derive ou integre algo parecido com a resposta do item anterior.

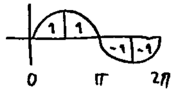
3) Defina intervalos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$ tais que:

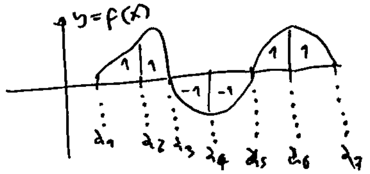


4) Sejam:
$C_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
$D_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$
$E_n = C_n \cup D_n$
$F_n = C_n \cup D_{2n}$
$G_n = C_{2n} \cup D_n$
e calcule $\lim_{n\to\infty}$ de:
$\int_{C_n} g(x)\,dx$, $\int_{D_n} g(x)\,dx$, $\int_{E_n} \ldots$, $\int_{F_n} \ldots$, $\int_{G_n} \ldots$.

Dica pra 2:

sen x =

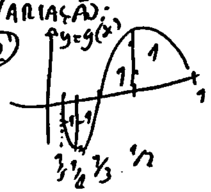




Se $g(x) = -1 + \int_{t=a_1}^{t=x} f(t)\,dt$,

calcule $g(a_1) = -1$,
$g(a_2)$,
$g(a_3)$,
$g(a_4)$,
⋮

Variação: (2')



$h(x) = 1 + \int_{t=\frac{1}{3}}^{t=x} g(t)\,dt$

$h(1/5) =$
$h(1/4) =$
$h(1/3) =$

C2 7/nov/2016

Hoje:
- Decidir data da P1 ⇒ 16/nov
- Integrais impróprias (três teoremas)
- EDOs

Lembrem que se $f$ é descontínua e $F$ é uma "primitiva" (com aspas) de $f$ então nem sempre

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Exemplo:

$f(x)=x^{-2}$ $\quad F(x)=-\frac{1}{x}$

$$\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx = ?$$

$$F(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} = F(1)-F(-1) = -\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{-1}\right) = -1-1 = -2$$

$$\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx =$$  $> 0$

Aviso:
Na prova vai cair integração de funções descontínuas

EDOs - Introdução

Exemplos:

$F'(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=?$
$F(x)=\int x^2\,dx\ (+C)$

$F''(x)=x^3 \Rightarrow$ integrar duas vezes.

$F''(x)+F'(x)-6F(x)=0 \Rightarrow ?$

$F'(x)-2F(x)=0 \Rightarrow ?$

Moral (adiantada):
da mesma forma que pra aprender a integrar a gente teve que aprender várias técnicas, pra resolver EDOs a gente também vai ter que aprender várias técnicas...

Vamos com uma técnica que tem algo a ver com álgebra linear (!!!)

Notação $\lambda$

(não faz parte do curso mas é fácil e deixa certas coisas mais claras).

Nem sempre $ab$ é uma multiplicação...

Se $f(x)=10x+4$
$f(5)=54$
$(f)(5)=54$
$f\ 5=54$

Notação tradicional:

nome, domínio, contradomínio

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 10x+4$

variável, como ela funciona, expressão que calcula o resultado.

$f(5)$
$\downarrow$
$10\cdot 5+4$
$\downarrow$
$54$

Notação $\lambda$

$f=\lambda x.\ 10x+4$

var, separador, expressão que calcula o resultado

$f(5)$
$\downarrow$
$(\lambda x.10x+4)(5)$
$\downarrow$
$10\cdot 5+4$
$\downarrow$
$54$

Exemplos:

$g=\lambda f.(\lambda a.f(a+2))$ $\quad (g(\lambda x.10x+4))(3)=?$

$(g(\lambda x.10x+4))(3)$
$\downarrow$
$((\lambda f.\lambda a.f(a+2))(\lambda x.10x+4))(3)$
$\downarrow$
$(\lambda a.(\lambda x.10x+4)(a+2))(3)$
$\downarrow$
$(\lambda x.10x+4)(3+2)$
$\downarrow$
$(\lambda x.10x+4)(5)$
$\downarrow$
$10\cdot 5+4$

Repare que "$\lambda x$" faz sentido e "$\lambda f$" faz sentido...

$D=\lambda f.\frac{d}{dx}f$

$D(\lambda x.x^3)$
$\downarrow$
$(\lambda f.\frac{d}{dx}f)(\lambda x.x^3)$
$\downarrow$
$\frac{d}{dx}(\lambda x.x^3)$ $\qquad \frac{d}{dx}x^3$
$\downarrow$
$\frac{d}{dx}x^3$
$\downarrow$
$3x^2$

Defs:
$\mathrm{sen}=\lambda x.\mathrm{sen}\,x$
$\cos=\lambda x.\cos x$

$D(\lambda x.\mathrm{sen}\,x)=?$
$D(\lambda x.2\,\mathrm{sen}\,3x)=?$
$D(\cos)=?$

Resps: $\lambda x.\cos x$, $\lambda x.6\cos 3x$, $\lambda x.-\mathrm{sen}\,x$

$\boxed{\text{C2 } 7/\text{nov}/2016}$

À notação $\lambda$ permite deixar bem clara a distinção entre números e funções — coisa que a notação de cálculo não faz...

P. ex., se $x=4$,
$x^3=4^3=64$,
$\frac{d}{dx}x^3=3x^2$

$x^3$ às vezes é função, às vezes é número...

A notação $\lambda$ e a notação de cálculo são um pouco incompatíveis!!...

Exemplo:

$G=\lambda f.\,f''+f'-6f$

$G(\lambda x.4)=(\lambda x.-24)$

$G(\lambda x.e^{2x})=?$

$G(\lambda x.e^{-2x})=?$

$G(\lambda x.e^{3x})=?$

$G(\lambda x.e^{-3x})=?$

Às vezes a gente tem usado os sinais $+,-,\cdot$, etc pra somar, subtrair, etc, funções...

$x^2+x^3$

$(\lambda x.x^2)+(\lambda x.x^3)=\lambda x.x^2+x^3$

$f+g=\lambda x.f(x)+g(x)$

$4+x^2$

$(\lambda x.4)+(\lambda x.x^2)$

$f\cdot g=\lambda x.f(x)\cdot g(x)$

$200\cdot g=\lambda x.200\cdot g(x)$

$=(\lambda x.200)\cdot\underbrace{(\lambda x.g(x))}_{g}$

Fatos

$(f+g)+h=f+(g+h)$

$k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$

$\vdots$

(axiomas de espaço vetorial)

$D(f+g)=Df+Dg$

$D(k\cdot f)=k\cdot Df$

$D$ é uma transformação linear!!!

Um jeito de entender isso:

$D(f+g)$

matriz quadrada (infinita) — vetores (infinitos)

Lembre que se $\vec{V}$ é um vetor de tamanho 4, então $\vec{V}=(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3,\vec{V}_4)$

A "informação" dentro de uma função $f$ são $f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$

$\ldots, f(-2), f(-1)$ $\quad f(\frac{1}{2})$ $\quad f(\frac{2}{3})$

$G=\lambda f.\,f''+f'-6f$

$G$ é uma transformação linear!

Um jeito:
verificar que

$G(f+g)=G(f)+G(g)$

$G(k\cdot f)=kG(f)$

$G(f+g)=(f+g)''+(f+g)'-6(f+g)$

$=f''+g''+f'+g'-6f-6g$

$=(f''+f'-6f)+(g''+g'-6g)$

$=Gf+Gg$

$G(k\cdot f)=(kf)''+(kf)'-6(kf)$

$=kf''+kf'-k\cdot 6f$

$=k(f''+f'-6f)$

$=k\cdot Gf$

Segundo jeito:

$Gf=f''+f'-6f$

$=D(Df)+Df-6f$

$=(D\cdot D)f+Df-6f$

$=(D\cdot D+D-6)f$

Já que $G$ é uma transformação linear e $G(\lambda x.e^{2x})=0$ e $G(\lambda x.e^{-3x})=0$, então

$G(\alpha(\lambda x.e^{2x})+\beta(\lambda x.e^{-3x}))=$

$\alpha G(\lambda x.e^{2x})+\beta G(\lambda x.e^{-3x})=$

$\alpha\cdot(\lambda x.0)+\beta(\lambda x.0)=$

$\lambda x.0$

Acabamos de encontrar todo um espaço vetorial (de dimensão 2), de soluções de $Gf=0$.

Exercícios:

Encontre $\alpha$ e $\beta$ tais que...

Seja $h=(\lambda x.\,\alpha e^{2x}+\beta e^{-3x})$

I) Tais que $h(0)=1$ e $h'(0)=0$.

II) Tais que $h(0)=0$ e $h'(0)=1$.

III) Tais que $h(0)=2$ e $h'(0)=3$.

$h(0)=\alpha+\beta$

$h'(0)=2\alpha-3\beta$

$\boxed{\text{C2 9/out/2016}}$

Hoje:

- Mais sobre a EDO $f''+f'-6f=0$ e outras parecidas
- (Talvez) integrais impróprias - teoremas de comparação

Na aula passada vimos que

$$f''+f'-6f=0$$
$$\parallel$$
$$D^2f+Df-6f$$
$$\parallel$$
$$\underbrace{(D^2+D-6)}_{\substack{\text{pode ser visto como}\\ \text{transformação linear}\\ \text{(e como matriz)}}}\underbrace{f}_{\text{"vetor"}}$$

Novidade:

$$(D^2+D-6)=(D+3)(D-2)$$
$$=(D-2)(D+3)$$

Lembre que algumas matrizes não comutam...

$$AB \neq BA$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}} \neq \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}$$

Mas toda matriz quadrada comuta com múltiplos da identidade...

$$(D+3I)(D-2I)=$$
$$D(D-2I)+3I(D-2I)=$$
$$D^2-2D+3D-6I=$$
$$D^2+D-6I$$

Quais são as soluções de $(D+3)f=0$?
$$\parallel$$
$$f'+3f$$

Quais são os "a"s tais que $(D+3)e^{ax}=0$?
$$\parallel$$
$$De^{ax}+3e^{ax}$$
$$\parallel$$
$$ae^{ax}+3e^{ax}$$
$$\parallel$$
$$(a+3)e^{ax}$$

Resp: $a=-3$, $e^{-3x}$.

E tais que $(D-2)e^{ax}=0$?

Resp: $a=2$, $e^{2x}$.

A gente usa o termo "soluções básicas" pra EDOs como estas pra se referir às funções mais simples que formam uma base pro espaço de soluções.

Vamos ver depois que as soluções de $f''+f'-6f=0$ formam um espaço vetorial de dimensão 2, e as soluções de $f'+3f=0$ (e $f'-2f=0$) formam um espaço vetorial de dimensão 1.

Repare:

$$\underbrace{(D+3)\underbrace{(D-2)e^{2x}}_{0}}_{0}=0$$

$$\underbrace{(D-2)\underbrace{(D+3)e^{-3x}}_{0}}_{0}=0$$

Moral:

Se conseguimos fatorar
$$(D^2+D-6)=(D+3)(D-2)$$
a gente consegue as duas soluções básicas para
$$(D^2+D-6)f=0\ldots$$

Exercício:

Encontre as soluções básicas de $(D^3-D^2-20D)f=0$.
$$\parallel$$
$$f'''-f''-20f'$$
$$(D^3-D^2-20D)$$
$$\parallel$$
$$(D-5)(D+4)(D+0)$$

Resp: $e^{5x}$, $e^{-4x}$, $1$.

Encontre a solução básica de $f'=0$
$$\parallel$$
$$(D+0)f.$$

E depois encontre uma solução de $(D+0)f=0$ tal que $f(0)=4$.

E neste caso aqui?

$$(D+i)(D-i)f=0$$
$$\parallel$$
$$(D^2+1)f$$
$$\parallel$$
$$f''+f$$

Exercício: calcule

$(D^2+1)(\lambda x.\,\text{sen}\,x)$, $\quad =0$

$(D^2+1)(\lambda x.\cos x)$. $\quad =0$

As "soluções básicas reais" de $f''+f=0$ são sen e cos.

As "soluções básicas" são $e^{ix}$ e $e^{-ix}$.

Lembre: $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$,
$\text{sen}\,x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$,

e $\cos x$ e $\text{sen}\,x$ são combinações lineares de $e^{ix}$ e $e^{-ix}$!

Um truque nada óbvio

$$(D-2)(D-2)f=0 \qquad (*)$$
$$\parallel$$
$$(D^2-4D+4)f$$
$$\parallel$$
$$f''-4f+4$$

$D(xe^{2x})=e^{2x}+2xe^{2x}$

$(D-2)(xe^{2x})=e^{2x}$

Uma solução óbvia:

$$\underbrace{(D-2)\underbrace{(D-2)e^{2x}}_{0}}_{0}=0$$

A outra solução:

$$\underbrace{(D-2)\underbrace{(D-2)(xe^{2x})}_{e^{2x}}}_{0}=0$$

Exercício:

Encontre as soluções básicas e as soluções básicas reais de
$$(D-(a+bi))(D-(a-bi))f=0$$
onde $a,b\in\mathbb{R}$.

$f_1=e^{(a+bi)x}$ ok

$f_2=e^{(a-bi)x}$ ok

C2 9/out/2016

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$
$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}$$
$$= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$
$$e^{(a+ib)x} = e^{ax+ibx}$$
$$f_1 \;\; = e^{ax} e^{ibx}$$
$$= e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$$

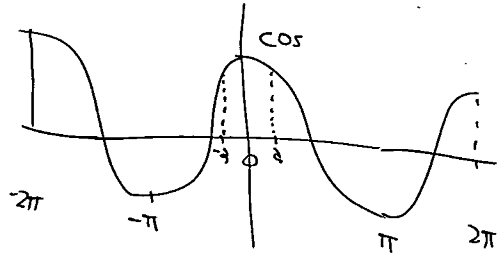
$$f_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax-ibx}$$
$$= e^{ax} e^{-ibx}$$
$$= e^{ax}(\cos(-bx) + i \operatorname{sen}(-bx))$$
$$= e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)$$

$$f_1 + f_2 = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$$
$$+ e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)$$
$$= 2e^{ax} \cos bx$$
$$f_1 - f_2 = 2e^{ax} i \operatorname{sen} bx$$

LEMBRE QUE AS "SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS" DE UMA EDO SÃO AS FUNÇÕES MAIS SIMPLES QUE FORMAM UMA BASE PRO ESPAÇO DE SOLUÇÕES...

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{2} = e^{ax} \cos bx$$
$$f_4 = \frac{f_1 - f_2}{2i} = e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

$$\cos a = \cos -a$$
$$\operatorname{sen} a = -\operatorname{sen} a$$




ALGUNS PROBLEMAS DE OSCILAÇÕES AMORTECIDAS EM FÍSICA (SISTEMAS COM MOLAS E ATRITO) CORRESPONDEM A EDOs DA FORMA

$$(D-(a+ib))(D-(a-ib))\,f = 0$$
$$\|$$
$$(D^2 - (a+\cancel{ib}+a-\cancel{ib})D + (a+ib)(a-ib))\,f$$
$$\|$$
$$(D^2 - 2aD + (a^2+b^2))\,f$$
$$\|$$
$$f'' - 2af' + (a^2+b^2)f \quad (\star\star)$$

$$\cos\pi = \cos -\pi$$
$$\cos a = \cos -a$$

$$(a+ib)(a-ib) =$$
$$a^2 + \cancel{iab} - \cancel{iab} + ib(-ib) =$$
$$a^2 + b^2$$

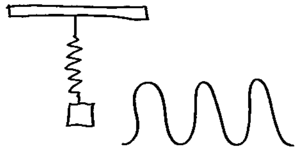
$$-(i \cdot i) = -(-1) = 1$$

EXERCÍCIO (CASA):

1) ENCONTRE $\alpha$ TAL QUE $f = e^{\alpha x}$ OBEDEÇA:
$f(0)=1$
$f(1)=\frac{1}{2}$
$f(2)=\frac{1}{4}$
$f(3)=\frac{1}{8}$

2) ENCONTRE $\beta$ TAL QUE $g = \cos \beta x$ OBEDEÇA:
$g(0)=1$
$g(1)=0$
$g(2)=-1$
$g(3)=0$
$g(4)=1$

3) ENCONTRE UMA EDO DA FORMA $(\star\star)$ QUE TENHA $fg$ COMO UMA DAS SUAS SOLUÇÕES.



MESMA COISA COM ATRITO

$\boxed{\text{C2 21/nov/2016}}$

Hoje: gabarito da prova; introdução a EDOs com variáveis separadas e EDOs exatas.

1) Truque pra derivar o arcsen:

$c = \cos\theta$

$s = \text{sen}\,\theta$

$\theta = \text{arcsen}\, s$

$\frac{ds}{d\theta} = c = \sqrt{1-s^2}$

$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

$\frac{d}{ds}\text{arcsen}\, s = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

Derivada da arctan:

$t = \tan\theta = \frac{s}{c}$

$z = \sec\theta = \frac{1}{c}$

$\theta = \arctan t$

$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$

$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1 + \frac{s^2}{c^2} = 1+t^2$

$z^2 = 1+t^2 \qquad t^2 = z^2-1$

$z = \sqrt{1+t^2} \qquad t = \sqrt{z^2-1}$

$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{(\frac{d}{d\theta}s)c - s(\frac{d}{d\theta}c)}{c^2} = \frac{cc - s(-s)}{c^2}$

$= \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$\frac{dt}{d\theta} = z^2 = 1+t^2$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{1+t^2}$

$\boxed{\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}}$

2) Explique porque

$$\boxed{\int_{x=-1}^{x=1} x^{-4}\,dx} \neq \boxed{\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{x=-1}^{x=1}} = -\frac{2}{3}$$

$+\infty =$

$\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \left(\frac{1^{-3}}{-3}\right) - \left(\frac{(-1)^{-3}}{-3}\right)$

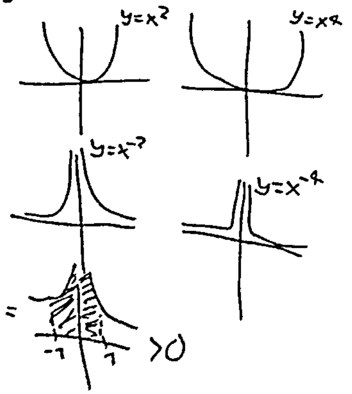
$= \left(\frac{1}{-3}\right) - \left(\frac{-1}{-3}\right)$

$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$

$= -\frac{2}{3}$

$\int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3}$

Gráficos:




$\int_{x=-1}^{x=1} x^{-4}dx = \ldots > 0$

$x^{-4}$ não tá definido em 0

e $\lim_{x\to 0} x^{-4} = +\infty \ldots$

$\int_{x=-1}^{x=1} x^{-4}dx = \int_{x=-1}^{x=0} x^{-4}dx + \int_{x=0}^{x=1} x^{-4}dx$

$= \underbrace{\lim_{t\to 0^-}\int_{x=-1}^{x=t} x^{-4}dx}_{= +\infty} + \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\int_{x=t}^{x=1} x^{-4}dx}_{+\infty}$

3) Calcule $\int_{x=-1}^{x=2} \frac{1}{1+|x|}dx$. (☆)

Quando $x \leq 0$, $\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1-x}$

Quando $x \geq 0$, $\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+x}$.

$\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2|$

$\int \frac{1}{2-x}dx = -\int\frac{1}{x-2}dx$

$(☆) = \int_{x=-1}^{x=0} \frac{1}{1+|x|}dx + \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{1+|x|}dx$

$= \int_{x=-1}^{x=0} \frac{1}{1-x}dx + \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{1+x}dx$

$= \int_{x=-1}^{x=0} -\frac{1}{x-1}dx + \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{x+1}dx$

$= \left(-\ln|x-1|\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} + \left(\ln|x+1|\right)\Big|_{x=0}^{x=2}$

$= \Big(\underbrace{-\ln|\underbrace{0-1}_{-1}|}_{0}\Big) - \Big(-\ln|\underbrace{-1-1}_{-2}|\Big) + \Big(\underbrace{\ln|2+1|}_{\ln 3}\Big) - \Big(\underbrace{\ln|0+1|}_{0}\Big)$

$= \ln 2 + \ln 3$

$\boxed{C2\ 21/NOV/2016}$

HOJE: GABARITO DA PROVA; INTRODUÇÃO A EDOs COM VARIÁVEIS SEPARADAS E EDOs EXATAS.

4) CALCULE

$$\int \frac{x^2}{x^2-4x-5}\,dx.$$

$$\frac{x^2}{x^2-4x-5} = \frac{(x^2-4x-5)+4x+5}{x^2-4x-5}$$

$$= 1 + \frac{4x+5}{x^2-4x-5}$$

$$\frac{4x+5}{x^2-4x-5} = \frac{4x+5}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$$

$$\lim_{x\to5} (x-5)\frac{4x+5}{(x-5)(x+1)} = \lim_{x\to5} (x-5)\left(\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1}\right) = A$$

$$\lim_{x\to5} \frac{4x+5}{x+1} = \frac{4\cdot5+5}{5+1} = \frac{25}{6} \qquad \boxed{A=\frac{25}{6}}$$

$$\lim_{x\to-1} (x+1)\frac{4x+5}{(x-5)(x+1)} = \lim_{x\to-1} (x+1)\left(\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1}\right) = B$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{4x+5}{x-5} = \frac{4(-1)+5}{(-1)-5} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6} \qquad \boxed{B=-\frac{1}{6}}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{x^2-4x-5} = 1+\frac{25/6}{x-5}+\frac{-1/6}{x+1}}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4x-5}\,dx = \int 1+\frac{25}{6}\frac{1}{x-5}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x + \frac{25}{6}\ln|x-5| - \frac{1}{6}\ln|x+1|$$

5) CALCULE POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

$$c^2+s^2=1 \qquad t^2=z^2-1$$
$$z^2=1+t^2 \qquad t=\sqrt{z^2-1}$$
$$z=\sqrt{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{(\frac{d}{d\theta}s)c - s(\frac{d}{d\theta}c)}{c^2}$$
$$= \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

a)
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^2}\,dx \qquad [x=t]$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^2}\,dt \qquad \begin{bmatrix} t=\tan\theta \\ \theta=\arctan t\end{bmatrix} \quad dt = z^2\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^2} z^2\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{z^2} z^2\,d\theta$$

$$= \int 1\,d\theta$$

$$= \theta = \arctan t$$
$$= \arctan x$$

5b)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u=2x \\ x=\frac{u}{2} \\ dx=\frac{1}{2}du \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{2}\,du =$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \ldots \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{arcsen} u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} u)}{4}\right)$$

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \qquad [s=u]$$

$$= \int \frac{s^2}{\cancel{c}}\cancel{c}\,d\theta \qquad \begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ ds=c\,d\theta \\ \theta=\operatorname{arcsen} s \end{bmatrix}$$

$$= \int s^2\,d\theta$$

$$= \int (\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

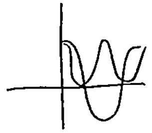
$$= \int \frac{1}{2}\,d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$$

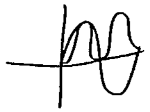
$$= \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$$

$$= \frac{\operatorname{arcsen} s}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} s)}{4}$$

$$= \frac{\operatorname{arcsen} u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} u)}{4}$$



$$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$



$$(\operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

C2 21/NOV/2016

HOJE: GABARITO DA PROVA; INTRODUÇÃO A EDOS COM VARIÁVEIS SEPARADAS E EDOS EXATAS.

6) $\int x \operatorname{sen}(4x+5)\,dx =$ $\left[\begin{array}{l} u=4x+5 \\ u-5=4x \\ x=\frac{u-5}{4} \\ dx=\frac{1}{4}du \\ du=4\,dx \end{array}\right]$

$\int\left(\frac{u}{4}-\frac{5}{4}\right)\operatorname{sen} u \cdot 4du =$

$\int \frac{u}{\cancel{4}}\operatorname{sen} u \cdot \cancel{4}du + \int -\frac{5}{\cancel{4}}\operatorname{sen} u \cdot \cancel{4}du =$

$\int u \operatorname{sen} u\,du - 5\int \operatorname{sen} u\,du = (-u\cos u + \operatorname{sen} u) + 5\cos u$

$= -(4x+5)\cos(4x+5) + \operatorname{sen}(4x+5) + 5\cos(4x+5)$

$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{(-\cos x)}_{g}dx$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -x\cos x + \operatorname{sen} x$

EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

IDÉIA PRELIMINAR:

DIGAMOS QUE QUEREMOS RESOLVER ISTO:

$\frac{dy}{dx} = g(x,y)$, $(*)$

OU SEJA, QUEREMOS UMA $f(x)$ TAL QUE $y=f(x)$ RESOLVE $(*)$... OU SEJA,

$\frac{d}{dx}f(x) = g(x,f(x))$.

COMO VISUALIZAR $(*)$?

EXEMPLOS:

a) $\frac{dy}{dx} = g(x,y) = 3x+4y$

$\frac{d}{dx}f(x) = g(x,f(x)) = 3x+4y$

SE $f(1)=2$

$\frac{d}{dx}f(1) = g(1,f(1)) = 3\cdot 1 + 4\cdot f(1)$

$= 3 + 4\cdot 2$

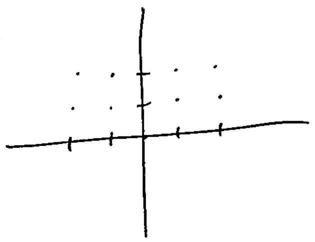
$= 11$

EXERCÍCIOS:

b) $g(x,y) = x$ $\Leftarrow$ $f'(x) = g(x,f(x)) = x$

DESENHE TRACINHOS INDICANDO O COEF. ANG. DE $f$ EM CADA UM DESTES PONTOS:

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 2 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |
| 1 | 2 | |
| 2 | 0 | |
| 2 | 1 | |
| 2 | 1 | |
| -1 | 0 | |
| -1 | 1 | |
| -1 | 2 | |
| -2 | 0 | |
| -2 | 1 | |
| -2 | 2 | |



... E ESBOCE NO OLHÔMETRO DUAS SOLUÇÕES DIFERENTES DE $f'(x)=x$ - UMA COM $f(0)=0$, OUTRA COM $f(0)=1$.

OBS:

$f'(x) = x$

$f(x) = \int x\,dx + C$

$= \frac{x^2}{2} + C$

c) $f'(x) = g(x,f(x)) = y$

I) ESBOCE NO OLHÔMETRO VÁRIAS SOLUÇÕES DIFERENTES DE $f'(x)=y$

II) TENTE ENCONTRAR SOLUÇÕES EXATAS DE $f'(x)=f(x)$.

$\boxed{\text{C2 23/nov/2016}}$

Hoje: mais sobre EDOs!

Na aula passada a gente como uma EDO desta forma

$$\underbrace{f'(x)}_{\text{coef ang da solução}} = g(\underbrace{x, f(x)}_{\text{ponto do plano}})$$

gera um campo de direções, que permite à gente visualizar como devem ser as soluções.

Exercício:
Desenhe o campo de direções desta EDO,

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad (☆)$$

Chute soluções dela e teste-as.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$dy = -\frac{x}{y}\,dx$$

$$y\,dy = -x\,dx \qquad (☆☆)$$

Lembre que quando vimos diferenciais nós vimos um jeito de interpretar o (☆☆)...

$dx$ é uma variável
$dy := \frac{dy}{dx}dx$.

E se integrarmos os dois lados do (☆☆)?

$$\int y\,dx = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 \qquad -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \underbrace{C_2 - C_1}_{C_3}$$

$$x^2 + y^2 = \underbrace{2C_3}_{C_4}$$

$$x^2 + y^2 = C_4$$

As soluções de (☆) e (☆☆) parecem ser as de

$$x^2 + y^2 = C_4$$

$$y^2 = C_4 - x^2$$

$$y = \sqrt{C_4 - x^2} \quad \text{ou}$$

$$y = -\sqrt{C_4 - x^2}$$

Por exemplo, estas coisas aqui devem ser soluções de (☆) e (☆☆):

$y = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad y = -\sqrt{1-x^2}$
$y = \sqrt{4-x^2}$ $\qquad y = -\sqrt{4-x^2}$
$y = \sqrt{25-x^2}$ $\qquad y = -\sqrt{25-x^2}$

Isto sugere um método geral... em EDOs nas quais a gente saber fazer este passo,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dy$$

No qual a gente separa tudo que tem $x$ prum lado e tudo que tem $y$ pro outro.

Se conseguirmos chegar a algo como

$$g(x)dx = h(y)dy \qquad (☆☆☆)$$

(Ops: em (☆☆) tínhamos

$$\underbrace{y}_{h(y)}dy = \underbrace{-x}_{g(x)}dx \;)$$

Então:

$$\int g(x)dx = \int h(y)dy$$

$$G(x) + C_1 \qquad H(y) + C_2$$

$$G(x) - H(y) = C$$

Se conseguirmos fazer isto então as soluções são os $y = f(x)$ tais que:

$$G(x) - H(f(x)) = C$$

$$H(f(x)) = G(x) - C$$

$$f(x) = H^{-1}(G(x) - C) \qquad (4☆)$$

(Cada $C$ dá uma solução diferente.)

E (☆☆☆) corresponde a:

$$g(x)dx = h(y)dy$$

$$\frac{g(x)}{h(y)} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Moral:
EDOs da forma

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

são EDOs que a gente sabe resolver.

Exercício:
Sejam $H(y) = e^y$, $G(x) = \frac{x^3}{3}$.

Encontre:
$f(x)$ (pra $C$ variável), (solução)
$g(x)$,
$h(y)$,
$g(x)dx = h(y)dy$, (EDO)
$f'(x) =$ alguma função de $x$ e $f(x)$. (EDO)

Depois teste as suas soluções, i.e., verifique que elas obedecem a EDO. Depois encontre uma solução pra essa EDO que obedeça $f(1)=0$, e outra que obedeça $f(0)=0$.

$$H^{-1}(x) = \ln x$$

$$f(x) = H^{-1}(G(x) - C) = \ln\left(\frac{x^3}{3} - C\right) \qquad \text{(solução)}$$

$$g(x) = x^2$$

$$h(y) = e^y$$

$$x^2dx = e^y dy \qquad \text{(EDO)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{e^y} \qquad f'(x) = \frac{x^2}{e^{f(x)}} \qquad \text{(EDO)}$$

Esse tipo de EDO que a gente acabou de resolver se chama EDOs com variáveis separáveis.

Agora: EDOs exatas.

Nas separáveis a gente primeiro encontrou estas curvas de nível:

$$G(x) - H(y) = C$$

e depois encontramos as soluções...

Considere isto aqui:

$$z = r(x,y)$$

Qual é a EDO cujas soluções são as curvas de nível de $z = r(x,y)$,
ou seja, as curvas com $z = r(x,y) = C$?

C2 23/NOV/2016

SE $y = f(x)$;

$$\frac{d}{dx} r(x, f(x)) = 0$$

EXATAMENTE QUANDO O $f$ PERCORRER UMA CURVA DE NÍVEL DA $r$...

$$\frac{d}{dx} r(x, f(x)) = r_x(x, f(x)) + f_y(x, f(x)) f'(x)$$

EM OUTRA NOTAÇÃO:

$$\frac{d}{dx} z = z_x + z_y f'(x)$$
$$= z_x + z_y \frac{dy}{dx}$$

A NOSSA EDO VAI SER:

$$z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

**C2 28/nov/2016**

Na aula passada nós vimos EDOs com variáveis separáveis, que eram as que podiam ser postas na seguinte forma:

$$g(x)\,dx = h(y)\,dy \qquad (\star)$$

Nós as resolvemos deste jeito:

$$\int g(x)\,dx = \int h(y)\,dy$$

$$\overset{\shortparallel}{G(x)+C_1} \qquad \overset{\shortparallel}{H(y)+C_2}$$

$$H(y) = G(x)+C_3$$

$$y = H^{-1}(G(x)+C_3).$$

Repare que $(\star)$ vem de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

Agora nós vamos ver EDOs exatas, que vêm desta ideia aqui:

$z = F(x,y)$

$y = f(x)$ percorre uma curva de nível da $z$ quando

$$\frac{d}{dx}F(x,f(x)) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{F_x + F_y f'(x)}$$

$$\overset{\shortparallel}{z_x + z_y \frac{dy}{dx}}$$

e aí:

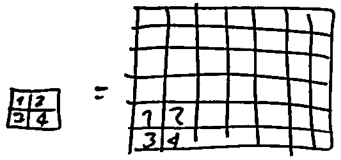
$$z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$z_y \frac{dy}{dx} = -z_x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}$$

$$z_y\,dy = -z_x\,dx$$

$$z_x\,dx + z_y\,dy = 0$$

OBS:

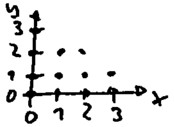


**Um truque de notação**

Lembre que

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&b&c&d\\\hline\end{array} = ax^3+bx^2+cx+d\ldots$$

Notação nova, para polinômios em $x$ e $y$:



$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&&&\\\hline b&c&d&\\\hline e&f&g&h\\\hline i&j&k&l\\\hline\end{array} =$$

$$\begin{aligned} &ay^3 + \\ &by^2 + cxy^2 + dx^2y^2 + \\ &ey + fxy + gx^2y + hx^3y + \\ &i + jx + kx^2 + lx^3 \end{aligned}$$

Exercícios:

a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&\\\hline &\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array} =$

b) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&1\\\hline &&\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} =$

c) $\frac{d}{dx}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&6&\\\hline 5&12&\\\hline 8&18&\\\hline\end{array}$

d) $\frac{d}{dy}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline 2&4&6\\\hline 4&5&6\\\hline\end{array}$

e) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&10\\\hline 100&1000\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} = \left(\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&\\\hline &\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline &10\\\hline &\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} \\ + \begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline 100&\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline &1000\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&\\\hline 3&4&\\\hline &&\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline &10&20\\\hline &30&40\\\hline &&\\\hline\end{array} \\ + \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline 100&200&\\\hline 300&400&\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline &1000&2000\\\hline &3000&4000\\\hline\end{array}\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&12&20\\\hline 103&1234&2040\\\hline 300&3400&4000\\\hline\end{array}$

A gente vai começar com EDOs exatas nas quais $z = F(x,y)$ é um polinômio em $x$ e $y$.

Exemplo/exercício:

Se $z = F(x,y) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$,

$$z_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline 5&12\\\hline 8&18\\\hline\end{array}$$

$$z_y = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&6\\\hline 4&5&6\\\hline\end{array}$$

$$z_x + z_y\frac{dy}{dx} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline 5&12\\\hline 8&18\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&6\\\hline 4&5&6\\\hline\end{array}\frac{dy}{dx}$$

$$z_x\,dx + z_y\,dy =$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline 5&12\\\hline 8&18\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&6\\\hline 4&5&6\\\hline\end{array}} \qquad (**)$$

$$= \frac{2y^2+6xy^2+5y+12xy+8+18x}{2y+4xy+6x^2y+4+5x+6x^2}$$

A gente vai considerar que "soluções implícitas" de EDOs são soluções aceitáveis...

Então uma resposta tipo "as soluções de $(**)$ são as curvas de nível de $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$" vai ser aceitável como solução.

OBS: encontrar numericamente uma "solução pra um campo de direções" é difícil — envolve métodos complicados, muitas contas e tem um "erro numérico" grande... — mas encontrar numericamente uma curva de nível é "computacionalmente barato"...

Exercício: encontre soluções implícitas de

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline &60&\\\hline &&\\\hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline &&30\\\hline\end{array}\,dy = 0$$

e depois encontre uma solução explícita $y = f(x)$ que obedeça $f(1) = k$.

Exercício:

Digamos que $z_x = \begin{array}{|c|c|c|}\hline &60&\\\hline &&\\\hline\end{array}$ e $z_y = \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline &&30\\\hline\end{array}$.

Encontre $z$. Resp: $z = \begin{array}{|c|c|c|}\hline &&30\\\hline C&&\\\hline\end{array}$

$$\boxed{\text{C2 28/NOV/2016}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 60 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}}_{z_x}dx + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 30 \\ \hline\end{array}}_{z_y}dy = 0$$

$$z = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 30 \\ \hline & & \\ \hline\end{array} = x^2y$$

AS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $F(x,y)=30x^2y$.

SE $f(1)=k$ ESTAMOS NA CURVA DE NÍVEL QUE PASSA PELO PONTO $(1,k)$, E NESTE PONTO TEMOS $F(x,y)=30\cdot 1^2k=30k$, OU SEJA, QUEREMOS $\underbrace{F(x,y)}_{x^2y}=30k$

OU SEJA, $y=\frac{30k}{x^2}$.

REPARE QUE DÁ PRA REESCREVER A EDO COMO:

$$60xy\,dx+30x^2dy=0$$

$$60xy+30x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{60xy}{30x^2}=-\frac{2y}{x}$$

$$x\,dy=-2y\,dx$$

$$2y\,dx+x\,dy=0$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline & \\ \hline\end{array}}_{z_x}dx+\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}}_{z_y}dy=0$$

EXERCÍCIO:
ENCONTRE $z$ TAL QUE

$$z_x=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline & \\ \hline\end{array} \text{ e } z_y=\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}.$$

SE $z=\begin{array}{|c|c|}\hline & a \\ \hline & \\ \hline\end{array}$ ENTÃO

$$z_x=\begin{array}{|c|c|}\hline a & \\ \hline & \\ \hline\end{array} \text{ e } z_y=\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & a \\ \hline\end{array}$$ !!!

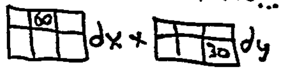
C2 5/dez/2016

Hoje:
Mais sobre EDOs exatas (coisas com cara de Cálculo 3 e 4);
marcar provas

A gente viu que as soluções de uma EDO desta forma

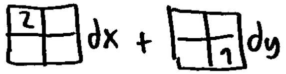
$$z_x dx + z_y dy = 0$$

são as curvas de nível de z...
E se a nossa EDO era $g(x,y)dx + h(x,y)dx$, o que a gente faz?
Às vezes a gente consegue uma z, e às vezes não.
Até agora todos os exemplos que a gente viu são com polinômios...



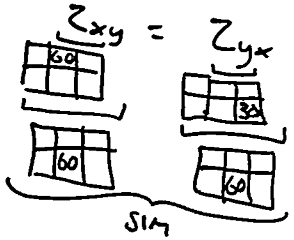
tem solução,

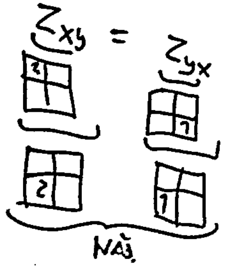
Mas



não tem.

Truque:
Se a gente sabe $z_x$ e $z_y$ e a gente tá procurando z, esse critério diz se a z existe ou não:
Se $z_{xy} = z_{yx}$ então z existe, senão não.
Nos exemplos:




Def:
A EDO

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$$

é exata quando

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y). \quad (*)$$

Agora a gente vai ver várias coisas geométricas (interpretações do critério de exatidão e outras).

Uma idéia importante: exatidão é equivalente a isto: toda integral por caminhos desta forma □ em (g,h) é 0. (**)

Lembrem que as curvas de nível de $(z_x, z_y)$ são sempre ortogonais a $\overrightarrow{(z_x, z_y)}$. (***)

Exercícios pra gente entender o (**) e o (***).

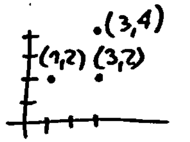
Vamos considerar dois casos:

(I) $z = x^2 + y^2$
(calculem $z_x, z_y$ e representem graficamente o campo de vetores $(z_x, z_y)$; verifiquem (***) no olho.

$z_x = 2x$
$z_y = 2y$

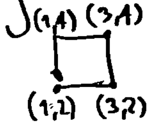
(II) $\overrightarrow{(z_x, z_y)} = \overrightarrow{(y, -x)}$
representem graficamente o campo de vetores.

Exercício pra entender o (**):
Se sabemos $z(x,y)$ então, por exemplo,




$$z(3,2) - z(1,2) = \int_{x=1}^{x=3} z_x \, dx \qquad z(3,4) - z(3,2) = \int_{y=2}^{y=4} z_y \, dy$$

$\int$ $z_t \, dt$ = soma de 4 integrais.




Calcule essa integral, nesse caminho quadrado acima, para (I) e o (II).

Obs:
Se $x(t) = t$ e $y(t) = 2$,

$$\int_{t=1}^{t=3} \frac{d}{dt} z(x(t), y(t)) \, dt =$$
$$\int_{t=1}^{t=3} \frac{d}{dt} z(t,2) \, dt =$$
$$\int_{t=1}^{t=3} z_x(t,2) \, dt =$$
$$\int_{x=1}^{x=3} z_x(x,2) \, dx$$

## C2 12/DEZ/2016

HOJE: TERMINAR EDOs EXATAS; MARCAR P2

NAS DUAS ÚLTIMAS AULAS A GENTE VIU COMO RESOLVER EDOs DA FORMA

$$z_x dx + z_y dy = 0,$$

ONDE ALGUÉM DÁ PRA GENTE AS FUNÇÕES $z_x$ E $z_y$ E A GENTE PROCURA ENCONTRAR A FUNÇÃO $z=z(x,y)$ QUE "GERA" ESSAS $z_x$ E $z_y$.

VIMOS QUE ÀS VEZES ESSA $z$ NÃO EXISTE, E EU PEDI PRA TODO MUNDO TENTAR CALCULAR ISTO AQUI, EM DOIS CASOS NOS QUAIS EU DAVA $z_x$ E $z_y$...

$$\int_{(1,2)\to(3,2)\to(3,4)\to(1,4)\to(1,2)} z_t\,dt \qquad (*)$$

1º CASO:

$z = x^2 + y^2$

E $z_x$ E $z_y$ SÃO "GERADAS" POR ESTA $z$:

$z_x = \frac{\partial}{\partial x} z$

$z_y = \frac{\partial}{\partial y} z$

2º CASO:

$z_x = y$

$z_y = -x.$

2º CASO:

1) $\int_{(1,2)\to(3,2)} z_t\,dt = \int_{(1,2)\to(3,2)} z_x\,dx = \int_{x=1}^{x=3} 2\,dx$

2) $\int_{(3,2)\to(3,4)} z_t\,dt = \int_{(3,2)\to(3,4)} z_y\,dy = \int_{y=2}^{y=4} -3\,dy$

3) $\int_{(3,4)\to(1,4)} z_t\,dt =$

4) $\int_{(1,4)\to(1,2)} z_t\,dt =$

LEMBRE QUE QUANDO A GENTE PROCURA UMA $z$ GERADA POR FUNÇÕES $z_x$ E $z_y$ DADAS, SE HOUVER UMA SOLUÇÃO HÁ VÁRIAS:

SE $z = f(x,y)$ É SOLUÇÃO ENTÃO $z = f(x,y) + 4$ TAMBÉM É.

OBS: COMO INTEGRAR ISTO AQUI?

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} z_t\,dt$$

TRUQUE: ENCONTRAR UMA TRAJETORIA (EXPLÍCITA).

EXEMPLO:

$x = 2t,$

$y = 4t,$

$t$ DE 0 ATÉ 1.

$$\int_{t=0}^{t=1} z_t\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \frac{d}{dt} z(x(t),y(t))\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} \frac{d}{dt} z(2t,4t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} z_x(2t,4t)\cdot 2 + z_y(2t,4t)\cdot 4\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} 6\cdot 2t\cdot 2 + 12\cdot(4t)^2\cdot 4\,dt$$

SE $z(x,y) = 3x^2 + 4y^3$,

$z_x(x,y) = 6x$

$z_y(x,y) = 12y^2$

DOIS MODOS (CHUTADOS!) DE ENCONTRAR $z$ A PARTIR DE $z_x$ E $z_y$:

$$\bar{z}(x,y) = \int_{(0,0)\to(x,0)\to(x,y)} z_t\,dt =$$

$$\bar{\bar{z}}(x,y) = \int_{(0,0)\to(0,y)\to(x,y)} z_t\,dt =$$

OBS: $-\bar{\bar{z}}(x,y) = \int_{(x,y)\to(0,y)\to(0,0)} z_t\,dt$

$$\bar{z}(x,y) - \bar{\bar{z}}(x,y) = \int_{(0,0)\to(x,0)\to(x,y)\to(0,y)\to(0,0)} z_t\,dt$$

FATO

(TEOREMA QUE VOCÊS VÃO VER A DEMONSTRAÇÃO EM CÁLCULO 3 OU CÁLCULO 4):

O CAMPO VETORIAL $(z_x, z_y)$ É "CONSERVATIVO" — ISTO É, INTEGRAIS DO TIPO $\int_{\square} z_t\,dt$ EM RETÂNGULOS FECHADOS SÃO SEMPRE ZERO — SE E SÓ SE $(z_x, z_y)$ OBEDECE A "CONDIÇÃO DE EULER" $z_{xy} = z_{yx}$.

EXERCÍCIOS ("EXEMPLOS" NO LIVRO DA HERNANDEZ, PAGS 169 E 170):

1) SEJA:

$$\underbrace{4x^3y}_{z_x}\,dx + \underbrace{(x^4+2y)}_{z_y}\,dy = 0$$

a) MOSTRE QUE $(z_x, z_y)$ OBEDECE A CONDIÇÃO DE EULER.

b) ENCONTRE $z$ (PELO MÉTODO $\bar{z}$ OU $\bar{\bar{z}}$; COMPARE COM O $z$ OBTIDO PELO CHUTAR E TESTAR).

$$\bar{z}(a,b) = \int_{(0,0)\to(a,0)\to(a,b)} z_t\,dt$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} z_x(x,0)\,dx + \int_{y=0}^{y=b} z_y(a,y)\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} 0\,dx + \int_{y=0}^{y=b} a^4 + 2y\,dy$$

$$= 0 + \left(a^4 y + y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=b}$$

$$= a^4 b + b^2$$

2) SEJA $\underbrace{(e^{3y} - y\cos xy)}_{z_x}\,dx + \underbrace{(3xe^{3y} - x\cos xy + y^3)}_{z_y}\,dy$

C2 14/DEZ/2016

HOJE: REVISÃO!

SUGESTÃO:

VAMOS COMEÇAR COM EDOS DA FORMA

$$f''+af'+bf=0 \quad (\star)$$

COM SOLUÇÕES DA FORMA

$$f_1(x)=e^{(c+id)x} \quad \text{E}$$
$$f_2(x)=e^{(c-id)x}. \quad (\star\star)$$

EXERCÍCIOS:

1. ENCONTRE $\alpha$ E $\beta$ TAIS QUE $x^2+\alpha x+\beta$ TENHA RAÍZES $c+id$ E $c-id$.

2. ENCONTRE $a$ E $b$ TAIS QUE $(\star)$ TENHA SOLUÇÕES $(\star\star)$.

0. ENCONTRE $\alpha$ E $\beta$ TAIS QUE $x^2+\alpha x+\beta$ TENHA RAÍZES $c$ E $d$.

$$(x-c)(x-d) = x^2+(-c-d)x+cd$$

$$x(x+\alpha)+ \quad x(x+\alpha+\tfrac{\beta}{x})$$

3. QUAIS SÃO AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE $(D-2)\underbrace{\underbrace{(D+3)f}_{f'+3f}}_{(f''+3f')-2(f'+3f)}=0$?

E AS DE $\underbrace{(D-4)f}_{f'-4f}=0$?

4. ENCONTRE SOLUÇÕES DA FORMA

$$f_3(x)=e^{\gamma x}(\cos\delta x)$$
$$f_4(x)=e^{\gamma x}(\operatorname{sen}\delta x)$$

PARA $(\star)$.

5. SABEMOS QUE $e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$.

ENTÃO:

$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)=$

$\cos\theta=$

$\operatorname{sen}\theta=$