GA 29/ago/2016

INTRODUÇÃO / AVISOS:

1) O curso tem uma página!

Como chegar lá:

a) Procure por "Eduardo Ochs" no Google ou vá direto para "http://angg.twu.net/..."

b) Clique em "GA" na barra de navegação.

GEOMETRIA **ANALÍTICA**

$\underbrace{\text{GEOMETRIA}}_{\text{figuras (conjuntos de pontos)}}$ $\underbrace{\text{ANALÍTICA}}_{\text{contas ("álgebrica")}}$

→ representar figuras formalmente

representar graficamente ⇐ HOJE

Lembrem que objetos matemáticos são de vários tipos

números { naturais, inteiros, racionais, reais

matrizes (revisão hoje)

booleanos / valores de verdade } V (verdadeiro), F (falso)

Olhando só pros tipos dos objetos de uma expressão, 1) sabemos o tipo do resultado; 2) sabemos que algumas expressões dão erro.

$$\underbrace{\underbrace{2 < \underbrace{x}_{5}}_{V} \;\&\; \underbrace{\underbrace{x}_{6} < 5}_{F}}_{F}$$

OUTROS TIPOS (próximas aulas):

pontos, vetores

$1234 \cdot 5678 = 5678 \cdot 1234$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Multiplicação de matrizes não é comutativa

GA 29/ago/2016

CONJUNTOS

Exemplos.

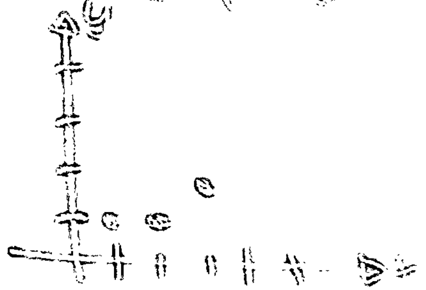
$A = \{2, 3, 5\}$

conjunto de números.

$B = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$

conjunto de pontos do plano ("plano" $= \mathbb{R}^2$)

$B =$



Porque o desenho de cima representa B e não algo como [illegible] 1,00, (...)?

TRUQUE:
Vamos tentar fazer desenhos inteligíveis, que todo mundo entenda.

Quem?
Eu, na prova!!!
Os colegas!!!

1) Representem graficamente.

$A = \{(1,4), (2,4), (1,3)\}$

$B = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}$

$C = \{(1,3), (1,4), (2,4), (2,4)\}$

$D = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$E = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$

2) Calcule e represente graficamente.

$A = \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\}$
$= \{(1, 3-1), (2, 3-2)\}$

$B = \{x \in \{0,1,2,3\}; (x, 3-x)\}$

Algumas operações matemáticas importantes envolvem cópias de subexpressões

$$\sum_{k=3}^{6} 10 \cdot k = (10\cdot 3) + (10 \cdot 4) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 6)$$

$$\forall x \in \{1,2,3,4\}: x^2 < 10 = \underbrace{(1^2<10)}_{V} \,\&\, \underbrace{(2^2<10)}_{V} \,\&\, \underbrace{(3^2<10)}_{V} \,\&\, \underbrace{(4^2<10)}_{F} = F$$

$\boxed{\text{GA 24/AGO/2016}}$

$$A = \{\underbrace{x \in \{1,2\}}_{\text{GERADOR}};\ \underbrace{(x,\ 3-x)}_{\text{EXPRESSÃO}}\}$$

(A GENTE GERA VÁRIAS CÓPIAS D'ISTO — UMA COM $x=1$, OUTRA COM $x=2$.)

$$E = \{\underbrace{a \in \{10, 20\}}_{\text{GER}},\ \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{GER}};\ \underbrace{a+b}_{\text{EXPR}}\}$$

a	b	$a+b$
10	3	13
10	4	14
20	3	23
20	4	24

$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GER}},\ \underbrace{a \leq 3}_{\text{FILT}};\ \underbrace{10 \cdot a}_{\text{EXPR}}\} = \{10, 20, 30\}$$

a	$a \leq 3$	$10 \cdot a$
1	V	$10 \cdot 1$
2	V	$10 \cdot 2$
3	V	$10 \cdot 3$
4	F	

RETAS, CÍRCULOS, ETC SÃO CONJUNTOS <u>INFINITOS</u>.

VAMOS APRENDER A USAR CONJUNTOS <u>FINITOS</u> PRIMEIRO.

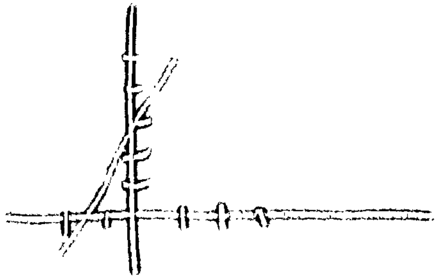
GA 31/AGO/2016

HOJE: CONTINUAÇÃO DO QUE A GENTE VIU NO FIM DA AULA PASSADA SOBRE CONJUNTOS.

NO FIM DA AULA DE HOJE VOCÊS VÃO ESTAR QUASE SABENDO: RETAS, EQUAÇÕES DE RETAS E RETAS COMO CONJUNTOS!

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y = 3+2x}_{\text{EQUAÇÃO}}\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2 = 5}_{\text{EQUAÇÃO}}\}$$



$$\{x,y \in \{2,3\},\ \underbrace{x=y}_{\text{FILT}};\ (x,y)\}$$

2 GERADORES

x	y	$x=y$	(x,y)
2	2	V	(2,2)
2	3	F	
3	2	F	
3	3	V	(3,3)

$$\{(x,y) \in \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\},\ x=y;\ (x,y)\}$$

(x,y)	x	y	$x=y$	(x,y)
(2,2)	2	2	V	(2,2)
(2,3)	2	3	F	
(3,2)				
(3,3)	3	3	V	(3,3)

$\boxed{\text{GA, 5/SET/2016}}$

$$\underbrace{\left(\overrightarrow{(5,10)}\cdot\overrightarrow{(10,100)}\right)}_{\text{[REGRA 7]}}\cdot\overrightarrow{(2,3)}$$

$$= 5\cdot 10 + 10\cdot 100$$

$$= 1050$$

$$\text{[REGRA 6]}$$

$$= \overrightarrow{(2100, 3150)}$$

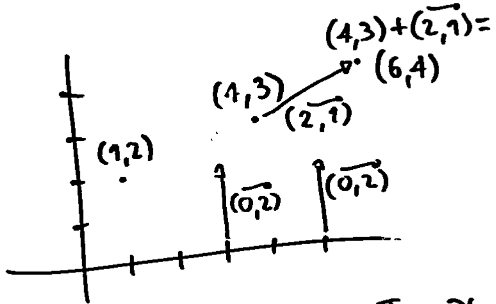
EXERCÍCIOS MAIS IMPORTANTES DAS PÁGS 1-4 (QUE INTRODUZEM NOTAÇÕES NOVAS):

2A, 2D, 2E, 2G, 2H, 2I, 2L, 2M,
3A, 4a, 4b, 5F, 5J

GA 12/SET/2016

O QUE NÓS (QUASE) VAMOS VER HOJE:

- REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS E VETORES
- RETAS
- APLICAÇÕES DO "·" (QUASE)
- "$\|\cdot\|$" E "$\perp$" (QUASE)



$\overrightarrow{(1,0)}$: DESLOCAMENTO DE 1 UNIDADE NA HORIZONTAL (PRA DIREITA) E 0 NA VERTICAL (PRA CIMA)

$\overrightarrow{(0,2)}$: 0 NA HORIZONTAL, 2 NA VERTICAL (PRA CIMA)

$\overrightarrow{(-1,0)}$: −1 NA HORIZONTAL − −1 PRA DIREITA, OU SEJA, 1 PRA ESQUERDA

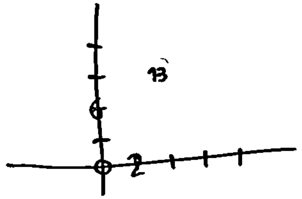
$\overrightarrow{(0,-3)}$: 3 PRA BAIXO

$\overrightarrow{(2,-3)}$: 2 PRA DIREITA 3 PRA BAIXO

DICA PRO EXERCÍCIO 9:

9a) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$

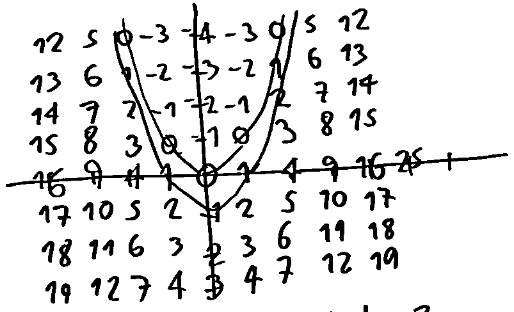
x	y	$\overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}$
0	0	0
1	0	2
0	2	6
2	3	13

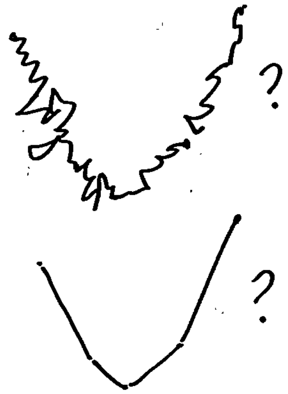


UMA CORREÇÃO NO ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 9d:

TROQUE $\{-5,5\}^2$ POR $\{-5,-4,\dots,5\}^2$

9e) $F(x,y) = x^2 - y$





10e0) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$

10e1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1$

GA 14/set/2016

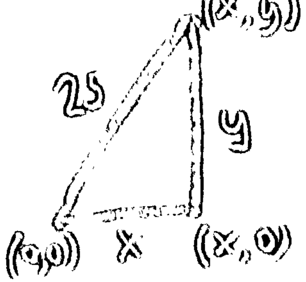
VOU SUPOR QUE TODO MUNDO FEZ TODOS OS EXERCÍCIOS DE RETAS (P. 4) E TODOS OS EXERCÍCIOS DE VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE 2 VARIÁVEIS... (OS MAIS IMPORTANTES SÃO O 9d E OS 10d25, 10d4, 10d1, 10d0)

IMPORTANTE: NOS EXERCÍCIOS 10a, 12b E 12c, REPRESENTE TAMBÉM OS VETORES

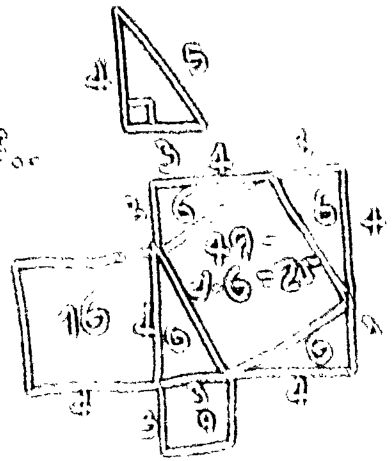
(2,1) (3,1) (2,-1)

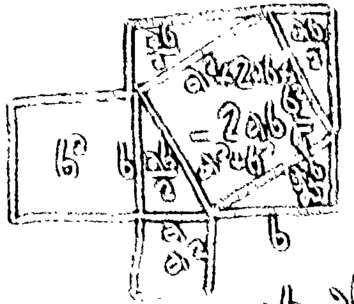
TEOREMA DE PITÁGORAS

$a^2+b^2=c^2$



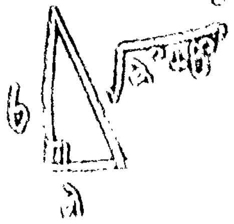
$x^2+y^2=25$

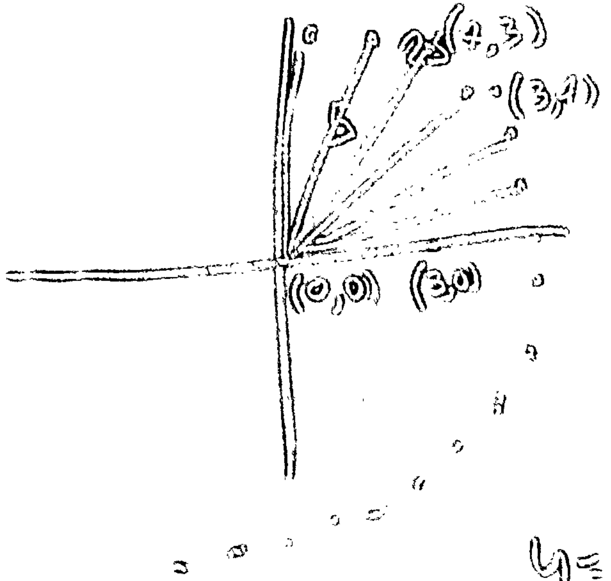




$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=2ab$





$y=x^2$

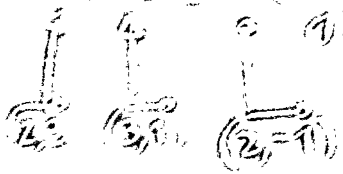
$0=x^2-y$

$y-x^2=0$

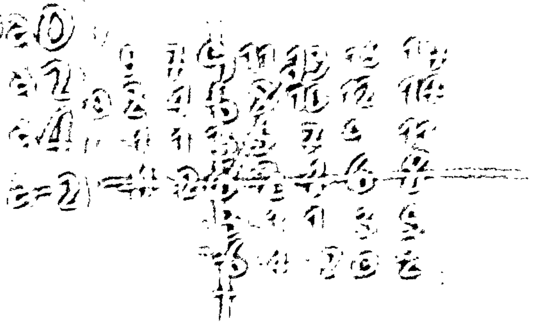
GA 11/SET/2019

VOU SUPOR QUE TODO MUNDO FEZ TODOS OS EXERCÍCIOS DE RETAS (P. 9) E TODOS OS EXERCÍCIOS DE VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE 2 VARIÁVEIS. (OS MAIS IMPORTANTES SÃO O 9d E OS 10d2b, 10d4, 10e1, 10e0)

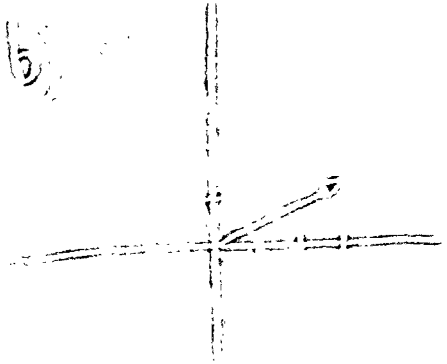
IMPORTANTE: NOS EXERCÍCIOS 10a, 10b e 10c REPRESENTE TAMBÉM OS VETORES



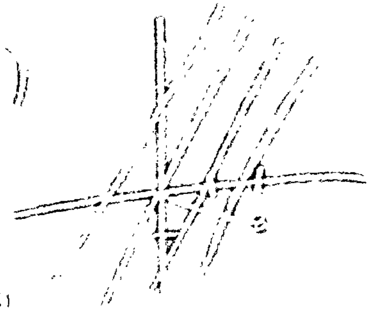
10a0)

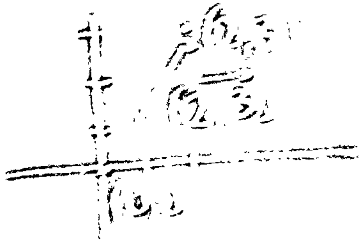


10b)



10c)





$(a,b)\cdot(c,d) = ac+bd$

PRA QUE ISSO SERVE?

DEF. $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

EM PARTICULAR,

$\|(a,b)\| = \sqrt{(a,b)\cdot(a,b)} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\|(3,4)\| = 5 = \sqrt{25}$

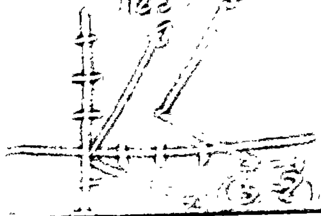
PRONÚNCIAS: "$\|\vec{v}\|$" é a "norma de $\vec{v}$" ou o "comprimento de $\vec{v}$".

DEF. $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

EXEMPLOS:

$(2,3)\perp(3,-2) \iff (2,3)\cdot(3,-2)=0 \iff 6-6=0 \iff 0=0$

PRONÚNCIA: "$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$" é "o vetor ... sobre a $\vec{v}$"



GA 14/set/2016

VOU SUPOR QUE TODO MUNDO FEZ TODOS OS EXERCÍCIOS DE RETAS (p. 9)

$r_g = \{ (3,-1) + t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$

$F(t) = \overbrace{(3,-1)}^{A} + t\underbrace{\overrightarrow{(-1,1)}}_{\vec{v}}$

$F(0) = (3,-1)$

$F(1) = (2,0)$

$F(2) = (1,1)$

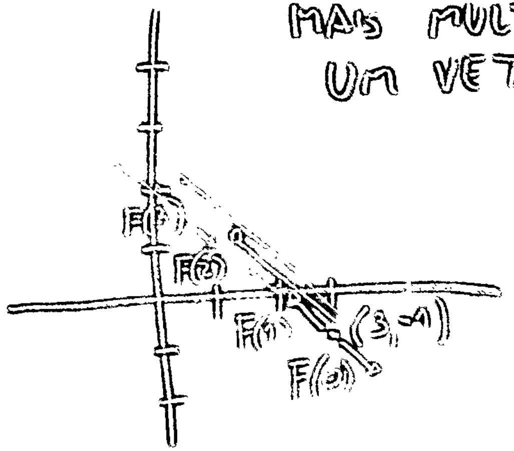
$F(3) =$

$F(-1) =$

$F(7.5) =$

OS EXERCÍCIOS r_g, r_h, r_i, r_j, r_k NOS DÃO "INTUIÇÃO GEOMÉTRICA" DO QUE É $A + t\vec{v}$...

ISTO É, UM PONTO (A) MAIS MÚLTIPLOS DE UM VETOR ($\vec{v}$).



VAMOS ENTENDER O QUE É PONTO MAIS MÚLTIPLOS DE DOIS VETORES.

(EXERCÍCIOS DA P. 14)

a) $O = (3,1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$

$\boxed{(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}}$

$(1,3)_\Sigma = O + 1\vec{u} + 3\vec{v}$

$= (3,1) + \underbrace{1\overrightarrow{(2,1)}}_{\overrightarrow{(2,1)}} + \underbrace{3\overrightarrow{(-1,1)}}_{\overrightarrow{(-3,3)}}$

$= (2,5)$

$B = (1,3)_\Sigma \quad C = (3,3)_\Sigma$

$D = (1,2)_\Sigma \quad E = (2,2)_\Sigma$

$A = (1,1)_\Sigma$

b) $O = (2,2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$

GA 19/SET/2016

HOJE:

SISTEMAS DE EQUAÇÕES,
SISTEMAS DE COORDENADAS,

$(A+\vec{u})+\vec{v} =$

$A+(\vec{u}+\vec{v}) =$

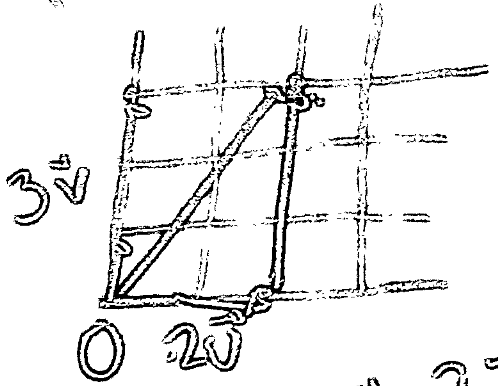
$A+(\vec{v}+\vec{u}) =$

$(A+\vec{v})+\vec{u}$

INTERSEÇÕES DE RETAS.

EXEMPLO:

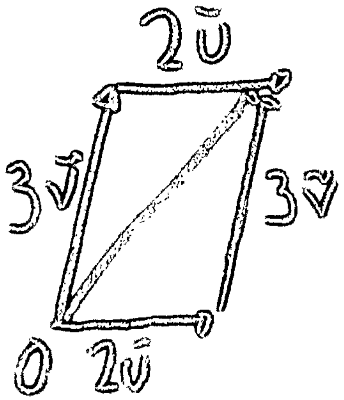
$(O+2\vec{u})+3\vec{v}$



$O+(2\vec{u}+3\vec{v})$

$O+(3\vec{v}+2\vec{u})$

$(O+3\vec{v})+2\vec{u}$



ESSE DESENHO É A "REGRA DO PARALELOGRAMO"

GA 26/SET/2016

HOJE: EXERCÍCIOS SOBRE USAR VÁRIOS SISTEMAS DE COOR-DENADAS DE UMA VEZ! ELES SÃO PREPARAÇÃO PRA VOCÊS ENTENDEREM OS LIVROS TEXTO (O DO CEDERJ E O REIS/SILVA) QUE COMEÇAM SEM SISTEMA DE COORDENADAS NENHUM...

OBS: VEJAM OS EXERCÍCIOS 15f E 15g.

OBS 2: SE VOCÊS AINDA NÃO APRENDERAM A PREENCHER A TABELA DO 15a SÓ OLHANDO PRO DIAGRAMA, CORRAM MUITO PRA APRENDER!!!

OS EXERCÍCIOS 15b A 15e ENVOLVEM ENTENDER NOTAÇÕES NOVAS, E NUM PRIMEIRO MOMENTO VOCÊS TALVEZ VEJAM VÁRIOS SIGNIFICADOS POSSÍVEIS PARA CADA UMA DELAS. SUGESTÃO: FAÇA O DESENVOLVIMENTO EM VÁRIAS COLUNAS MARCADAS "HIPÓTESE 1", "HIPÓTESE 2", ETC — LEMBRE QUE DEPOIS QUE A GENTE ESCREVE "HIPÓTESE" A GENTE PODE ESCREVER COISAS QUE A GENTE NÃO SABE SE SÃO VERDADE SEM PASSAR VERGONHA

GA 28/SET/2016

HOJE E NA PRÓXIMA AULA NÓS VAMOS TIRAR TODAS AS DÚVIDAS DO EXERCÍCIOS DAS FOLHAS, INCLUINDO OS DA FOLHA 17, SOBRE PROJEÇÕES...

A PARTIR DA OUTRA QUARTA NÓS VAMOS COMEÇAR UMA PARTE MAIS AVANÇADA DA MATÉRIA, COM MAIS VARIÁVEIS E EQUAÇÕES...

GA 3/out/2016

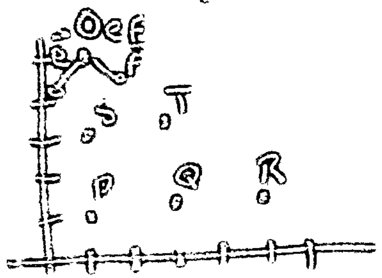
Hoje: últimas dúvidas sobre os exercícios de coordenadas e projeções!!!

DICAS:

1) Distâncias, vetores, "·" e "⊥" em vários sistemas de coordenadas
2) Coordenadas tortas
3) Projeções

Dica pro 15b:

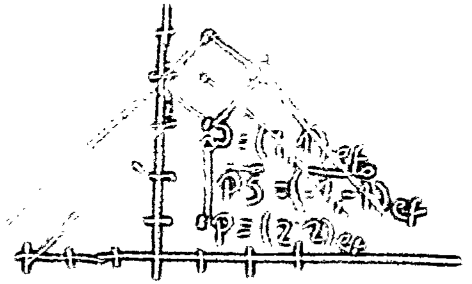
Como visualizar $P_e, P_f, Q_e, Q_f, P_e-Q_e$, etc?

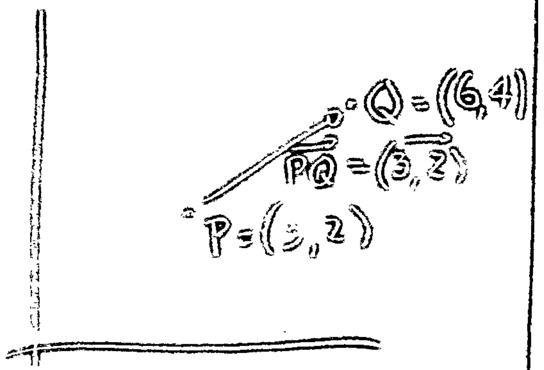


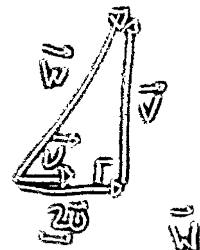
Dica pra projeções

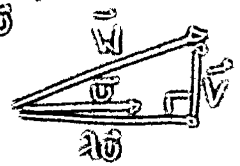
Nos exercícios 17a e 17b vocês aprendem a testar "λ"s...

No 17c e no 17d vocês vão chutar "λ"s no olhômetro e testá-los pra ver se os chutes estão certos.



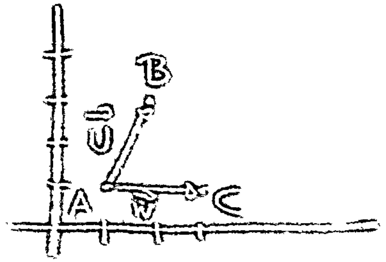






GA 5/out/2016

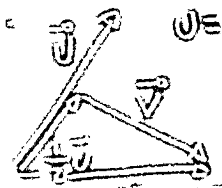
Digamos que:



Como é que a gente calcula $Pr_{\vec u}\vec w$?

Pelo olhômetro parece que $\lambda = \frac{1}{2}$...

$u = \overrightarrow{(1,2)}$



$\vec w = \overrightarrow{(2,0)}$

$\frac{1}{2}\vec u = (0.5, 1)$

$\vec v = (1.5, -1)$

$\vec u \cdot \vec v = 1 \cdot 1.5 + 2(-1) = -0.5$!!!

Como é que a gente calcula o λ certo?

1º jeito (no varejo):

Queremos λ tal que

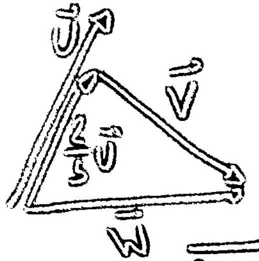
$$\vec u \cdot \vec v = 0$$

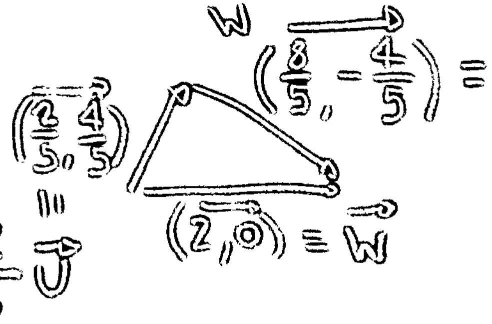
$$\begin{aligned}
&\vec u \cdot (-\lambda \vec u + \vec w) \\
&= \overrightarrow{(1,2)} \cdot \left(-\lambda \overrightarrow{(1,2)} + \overrightarrow{(2,0)}\right) \\
&= \overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(2-\lambda, -2\lambda)} \\
&= (2-\lambda) + 2(-2\lambda) \\
&= 2 - 5\lambda
\end{aligned}$$

$$2 - 5\lambda = 0$$

$$5\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{2}{5}$$





Será que $\vec u \perp \vec v$?

$$\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)}?$$

$$\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)} = 0?$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{8}{5} =$$

2º jeito (por atacado):

Queremos $\vec u \cdot (-\lambda \vec u + \vec w) = 0$

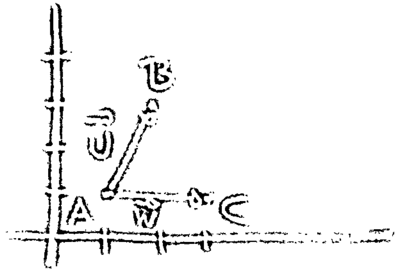
$$\begin{aligned}
&= \vec u \cdot (-\lambda \vec u) + \vec u \cdot \vec w \\
&= (-\lambda)(\vec u \cdot \vec u) + \vec u \cdot \vec w
\end{aligned}$$

$$\vec u \cdot \vec w = \lambda(\vec u \cdot \vec u)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec u \cdot \vec w}{\vec u \cdot \vec u}}$$

GA 5/out/2016

Digamos que.

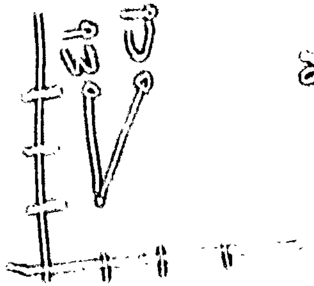


Como é que a gente calcula $Pr_{\vec u}\vec w$?

$$Pr_{\vec u}\vec w = \lambda \vec u = \frac{\vec u \cdot \vec w}{\vec u \cdot \vec u}\vec u$$

Exercícios:

Calcule, represente graficamente e teste (por "$\perp$").



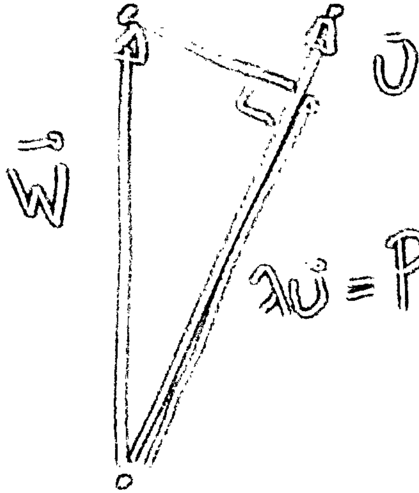
$\vec u = (1,2)$

$\vec w = (0,2)$

a) $Pr_{\vec u}\vec w$

b) $\frac{\vec u \cdot \vec w}{\vec u \cdot \vec u}\vec u = \frac{\vec w}{\vec u}\vec u = \vec w$

c) $Pr_{\vec w}\vec u$

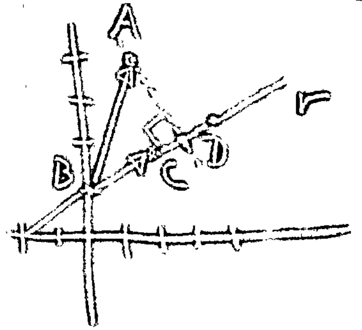


$\lambda \vec u = Pr_{\vec u}\vec w$

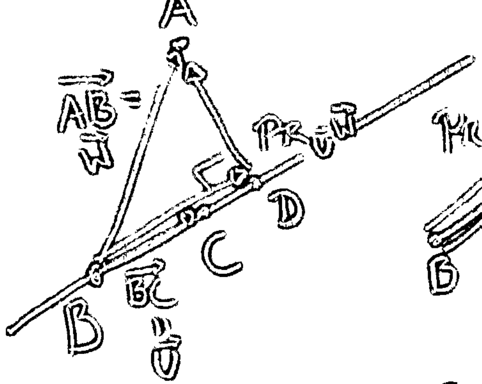
GA 5/out/2016

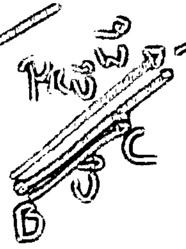
$$\boxed{Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}}$$

REPARE QUE AGORA A GENTE SABE ENCONTRAR O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE A...



DIGAMOS QUE A RETA r PASSE PELOS PONTOS A E B. ENTÃO:





$$D = B + Pr_{\vec{u}}\vec{w} = B + Pr_{\vec{BC}}\vec{AB}$$

EXERCÍCIO: CALCULE D NO EXEMPLO À ESQUERDA –

$A = (2,4)$

$B = (0,1)$

$C = (2,2)$

r PASSA POR B E C.

EXERCÍCIO (MAIS DIFÍCIL?): SEJA s A RETA QUE PASSA POR A E D. REPRESENTE r E s COMO CONJUNTOS E DESCUBRA COMO TESTAR SE AS RETAS r E s SÃO ORTOGONAIS.

OBS: AGORA VOCÊS JÁ DEVEM SER CAPAZES DE RESOLVER BOA PARTE DOS EXERCÍCIOS DAS LISTAS 1 E 2 DA ANA ISABEL!!!

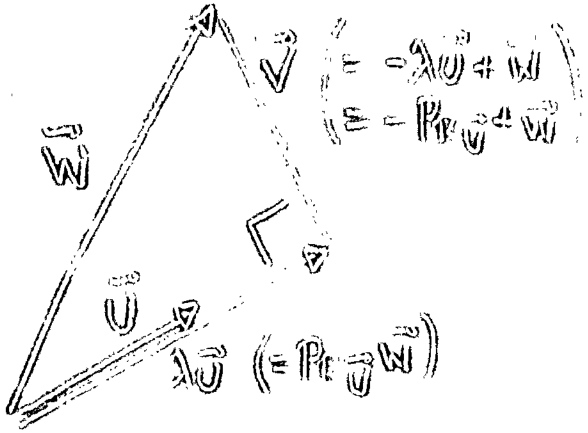
GA 10/out/2016!

Como a gente não tem quadro grande eu voltei pro esquema das folhas de exercícios.

LEMBREM:

Algumas pessoas na sala sabem fazer os exercícios de um modo bem visual bem rápido. — por exemplo eu

Descubra quem elas são, aprenda com elas, e torne-se uma delas!!!



Correção no exercício 11b.

Saiu $r = 2 + $ [illegible]

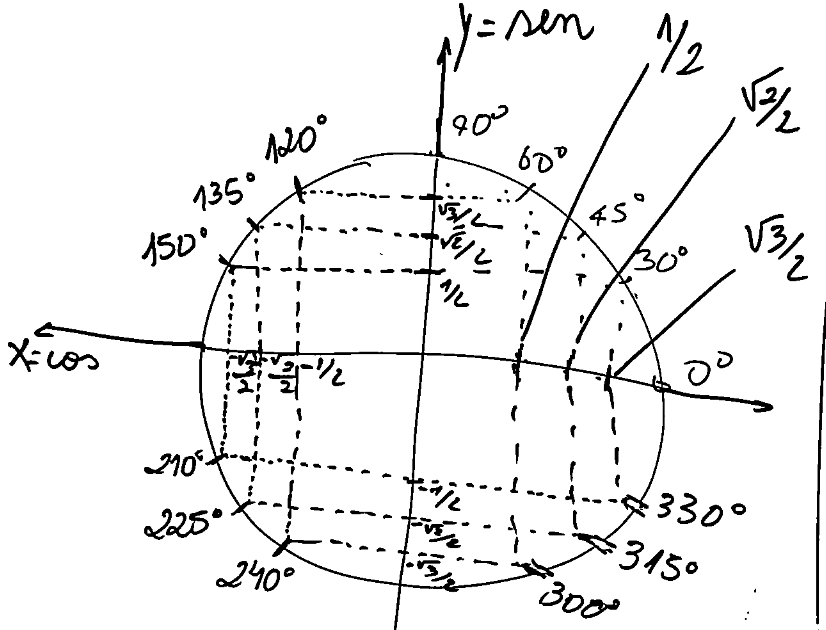
Era pra ser [illegible]

Na p. 15, no início dos exercícios

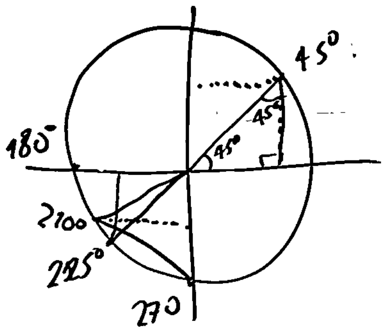
Saiu $t = 0$, $t = 1$, $u = 0$, $u = 2$

Era pra ser $t = 0$, $t = 1$, $u = 0$, $u = 1$

GA 24/OUT/2016



θ	$x=\cos\theta$	$y=\operatorname{sen}\theta$
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
210°		



$x=y \quad x^2=y^2 \quad x,y<0$

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$
$0° = 0$	1	0
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$45° = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$60° = \pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$90° = \pi/2$	0	1
$120° = 2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
$135° = 3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$150° = 5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
$180° = \pi$	-1	0
$210° = 7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$225° = 5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$240° = 4\pi/3$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
$270° = 3\pi/2$	0	-1
$300° = 5\pi/3$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
$315° = 7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$330° = 11\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$360 = 2\pi$	1	0

GA 24/OUT/2016

x	$\theta = \arccos x$
-1	180°
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	150°
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
1	

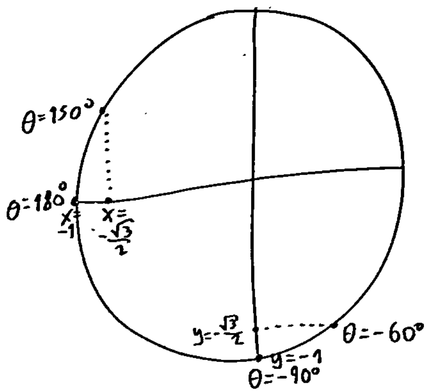
y	$\theta = \text{arcsen } y$
-1	-90°
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-60°
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
1	

(21b)

$x = \cos(\text{arcsen } y)$

(21c)

x	$y = \text{sen}(\arccos x)$
-1	
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
1	



GA 26/out/2016

O que ainda falta da matéria que vai cair na P1:

- Fórmula do cosseno ($\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\text{âng}(\vec{u},\vec{v}))$)
- Teoremas sobre projeções
- Determinantes e áreas
- Distância de ponto a reta
- Tangência
- Interseção de dois círculos

Hoje:
- Vetores unitários
- Elipses

Datas possíveis pra P1:

	2ª	4ª
OUT	31	~~2~~ ← feriado
NOV	7	9
	14?	16!!
	21?	23!!

$\boxed{\text{P1: 16/NOV}}$

Os problemas 25d até 25g são um pouco mais difíceis... Deixe pra fazê-los em casa (ou aqui na próxima aula) e vá pra p. 26.

Dúvida na 24b

$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2+(y-5)^2=5^2\}$

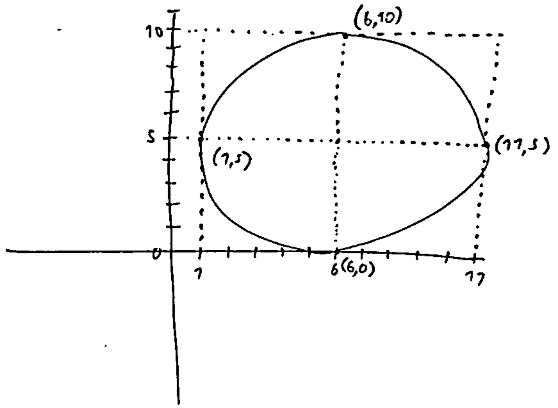
Seja $P=(3.5,\ 2.5)$.

Será que $P \in C$?

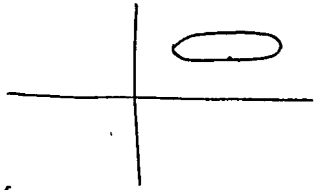
$\underbrace{(\underbrace{3.5-6}_{-2.5})^2}_{6.25} + \underbrace{(\underbrace{2.5-5}_{-2.5})^2}_{6.25} = 5^2$?

Não!

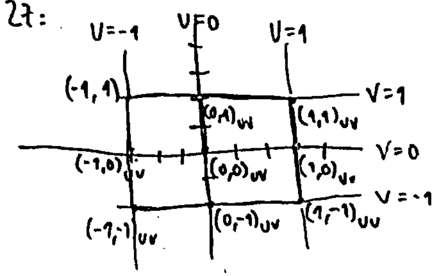
Dica: $3^2 + 4^2 = 5^2$



No exercício 23f vocês encontraram 4 pontos de uma figura um pouco mais complicada que um círculo...



P. 27:



P. 26:

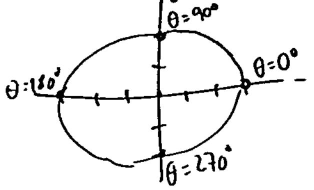
$E = \{ (0,0) + \cos\theta\,\underbrace{(3,0)}_{\vec{u}} + \operatorname{sen}\theta\,\underbrace{(0,2)}_{\vec{v}} \mid \theta\in\mathbb{R} \}$

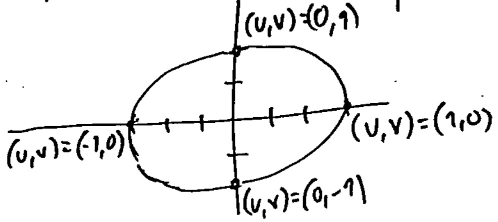
	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$
$\theta=0° \Rightarrow$	1	0
$\theta=90° \Rightarrow$	0	1
$\theta=180° \Rightarrow$	-1	0
$\theta=270° \Rightarrow$	0	-1

$E' = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overbrace{(x/3)}^{u}{}^2 + \overbrace{(y/2)}^{v}{}^2 = 1 \}$

$(x/3)^2$	$(y/2)^2$
0	1
1	0

E





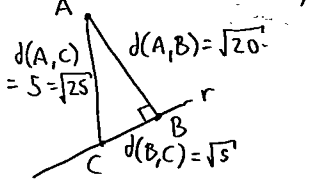
GA 31/out/2016

Obs: TALVEZ a gente interrompa a aula no meio - ela é portátil e vocês podem fazer os exercícios nas atividades da ocupação

- Distância de ponto a reta
- Interseção de dois círculos

Vocês não fazem ideia de quantos alunos eu já vi usando a fórmula de $d(P,r)$ errado... uns decoravam a fórmula errada outras só usavam ela errado !!

Na figura da p.29,



Repare que:

- Quando r é horizontal
  $d(A,C) = d(A,B)$
- Quando r é pouco inclinado
  $d(A,C)$ é um pouco maior que $d(A,B)$
- Quando r é muito inclinado
  $d(A,C)$ é bem maior que $d(A,B)$
- Quando r é quase vertical
  $d(A,C)$ é beeeeeem maior que $d(A,B)$

A p.29 termina com "...nos casos abaixo:"

Alguns casos:

a) $r: y = 1 + \frac{x}{2}$, $A = (0,6)$

b) $r: y = 1 + x$, $A = (0,5)$

c) $r: y = 1 + x$, $A = (1,4)$

d) $r: y = 1 + x$, $A = (2,3)$

e) $r: y = 1 + x$, $A = (3,2)$

DICA MUITO IMPORTANTE

No final da p.19 tem uns exercícios que vocês devem tentar aplicar a outros assuntos também!!!

(Eles ensinam a testar fórmulas !!!)

MUITO IMPORTANTE MESMO!!!

Interseção de dois círculos

Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c\}$, (1)

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-d)^2 + (y-e)^2 = f\}$ (2)

e $(x,y) \in C \cap C'$, então (3)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ (4) (por 3 e 1)

$(x-d)^2 + (y-e)^2 = f$ (5) (por 3 e 2)

$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = c$ (6) (por 4)

$(x^2 - 2dx + d^2) + (y^2 - 2ey + e^2) = f$ (7) (por 5)

$\cancel{x^2} - 2ax + a^2 + \cancel{y^2} - 2by + b^2$ (8)

$- \cancel{x^2} + 2dx - d^2 - \cancel{y^2} + 2ey - e^2 = c - f$

$2(d-a)x + 2(e-b)y + (a^2 + b^2 - d^2 - e^2 - c + f) = 0$ (*) (9)

e (*) é a equação de uma reta!!!

Seja $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (*)\}$.

Se $(x,y) \in C \cap C'$ então $(x,y) \in r$

Podemos calcular $C \cap C'$ calculando $C \cap r$!!!

$99 = 99$

$42 = 42$

$99 - 42 = 99 - 42$

$E_1 + E_2 = c$ (6')

$E_3 + E_4 = d$ (7')

$E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = c - d$ (8')

$\{\underbrace{t \in \{0,1,2,3,4\}}_{\text{ger}} \mid \underbrace{t=1}_{\text{filt}}, \underbrace{t=3}_{\text{filt}}\} = \cancel{\{1,3\}} = \emptyset$

t	t=1	t=3
0	F|	
1	V	F|
2	F|	
3	F|	
4	F|	

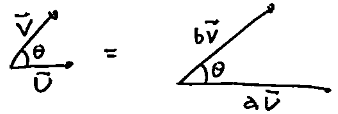
GA 7/NOV/2016

HOJE:
ÂNGULOS E TANGÊNCIA

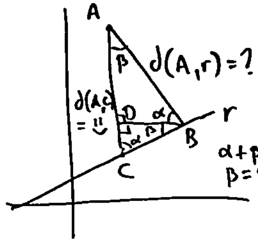
ÂNGULOS:
- NUM TRIÂNGULO
  - RETÂNGULO
  - QUALQUER
- ENTRE RETAS
- ENTRE VETORES
- COMO ARGUMENTO PARA SEN E COS

AULA PASSADA:
$d(P,r)$
FIQUEI DEVENDO A DEMONSTRAÇÃO.

SE $a,b>0$,
$\text{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \text{ANG}(a\vec{u}, b\vec{v})$



$\text{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \text{ang}(\vec{u}', \vec{v}')$

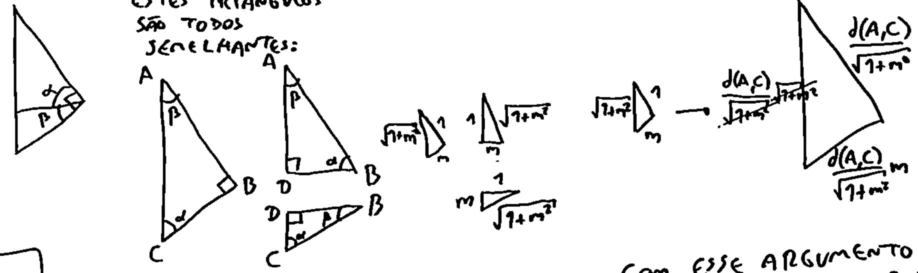


$\alpha+\beta+90° = 180°$
$\beta = 90° - \alpha$

NUM TRIÂNGULO
$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

É SEMELHANTE A

ESTES TRIÂNGULOS SÃO TODOS SEMELHANTES:



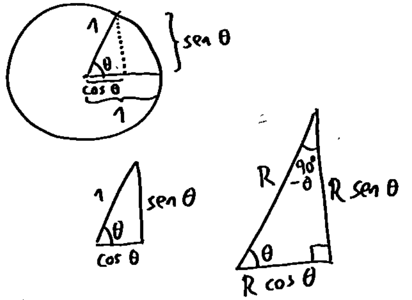
$\frac{d(A,C)}{\sqrt{1+m^2}} \cdot 1 = d(A,r)$

$\frac{d(A,C)}{\sqrt{1+m^2}} m$

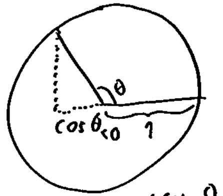
LEMBRE QUE O COEF. ANG. DE r É m...

COM ESSE ARGUMENTO DOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS A GENTE CONSEGUE VER QUE $d(A,r) = \frac{d(A,C)}{\sqrt{1+m^2}}$.

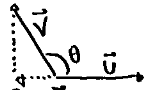
SEN E COS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS



LEMBREM QUE SEN E COS ESTÃO DEFINIDOS PARA $\theta > 90°$ E $\theta < 0°$...

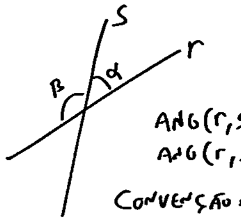


PRA QUEM LEU O CEDERJ:
SE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$



$Pr_{\vec{u}}\vec{v} = \cos\theta\, \vec{u}$

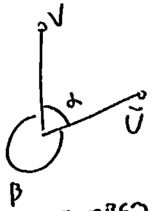
ÂNGULO ENTRE RETAS:



$\text{ANG}(r,s) = \alpha$ OU
$\text{ANG}(r,s) = \beta$?

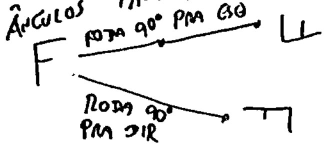
CONVENÇÃO:
A GENTE FALA DO "ÂNGULO MENOR ENTRE r E s" (OU MAIOR)
OU ÂNGULO AGUDO/OBTUSO.

ÂNGULO ENTRE VETORES



$\text{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$ OU
$\text{ANG}(\vec{u},\vec{v}) = \beta$?
OBS: $-\alpha$ "=" $360° - \alpha = \beta$

ÂNGULOS TAMBÉM SERVEM PRA ROTAÇÕES...



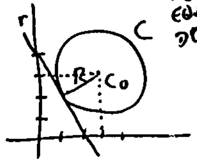
TANGÊNCIA

UMA RETA r E UM CÍRCULO C SÃO TANGENTES QUANDO SE TOCAM EM EXATAMENTE UM PONTO:

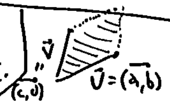
$d(C_0,r) > R$
C E r TANGENTES $d(C_0,r) = R$
$d(C_0,r) < R$

(TEM UNS EXERCÍCIOS DE TANGÊNCIA NA LISTA 3)

EXERC:



DÊ AS EQUAÇÕES DE r E C.

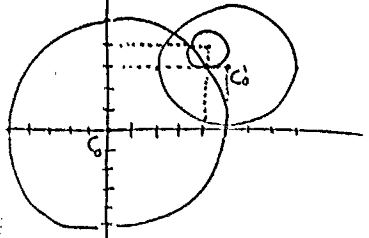


$\text{ÁREA}(\vec{u},\vec{v}) = \left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$

GA 9/NOV/2016

HOJE: DÚVIDAS!

SEJAM C e C'
OS CÍRCULOS ABAIXO:



ENCONTRE OS DOIS PONTOS
DE $C \cap C'$.

$D = B + Pr_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}$

$Pr_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BD} = \dfrac{(4,0) \circ (2,2)}{\|(2,2)\|^2} \cdot (2,2)$

$= \dfrac{8}{8} \cdot (2,2)$

$= (2,2)$

$(-2,0)$

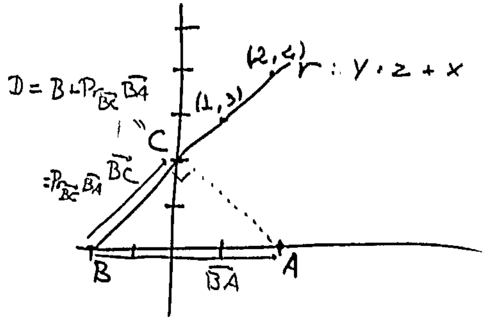
$D = B + (2,2)$

$D = (-2,0) + (2,2)$

$D = (0,2)$.

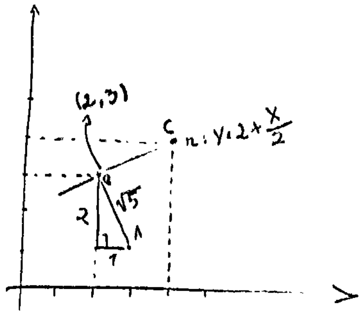
A: (2,0)
B: (-2,0)
C: (0,2)

19a)



19c)

b)



A: (3,1)
B: (2,3)
C: (4,4)

$\overrightarrow{BC} = (2,1)$
$\overrightarrow{BA} = (1,-2)$

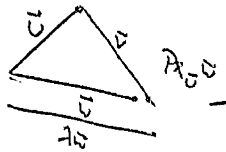
$Pr_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BD} = \dfrac{(1,-2) \circ (2,1)}{\|(2,1)\|^2} \cdot (2,1)$

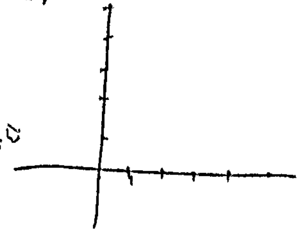
$D = B + Pr_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BD}$

$r: (2,1) + t\,(\overrightarrow{2,0})$

$t_1 1 = (2,1) + (\overrightarrow{2,0})$

$t_1 = (4,1)$





GA 21/nov/2016

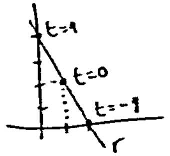
Hoje:
- Gabarito da prova
- Elipses

1) Sejam
$r = \{(1,2) + t(\overrightarrow{-1,2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$s = \{(0,4) + u(\overrightarrow{2,-4}) \mid u \in \mathbb{R}$

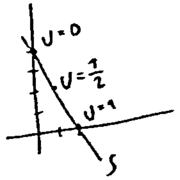
a) Represente r e s graficamente

b) Escolha dois pontos diferentes de r = s e dê as coordenadas e os valores de t e u associados a cada um.

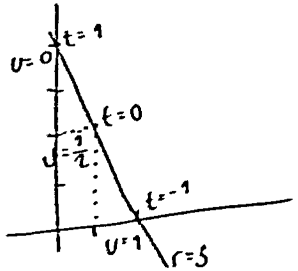
t	$(1,2)+t(\overrightarrow{-1,2})$
0	(1,2)
1	(0,4)



u	$(0,4)+u(\overrightarrow{2,-4})$
0	(0,4)
1	(2,0)

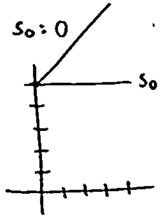


(x,y)	t	u
(0,4)	1	0
(1,2)	0	1/2
(2,0)	-1	1



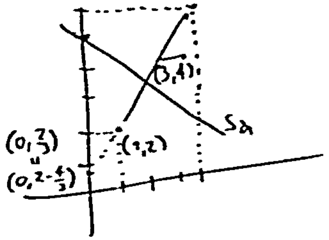
2) Sejam $\quad r: y = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x$
$r = \{(1,2) + t(\overrightarrow{3,4}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ← coef ang: 4/3
$s_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 + ax\}$

Coef ang de s_0: 0
de $s_1 = 1$
de $s_a = a$



a) Encontre o valor de a que faz com que $r \perp s_a$.

b) Calcule $P = r \cap s_a$, onde o a é o do item anterior. Represente tudo graficamente



Qual deve ser o coef. ang. de s_a pra que $r \perp s_a$?

coef. ang. $s_a = -\frac{3}{4}$

$a = -\frac{3}{4}$

$s_a: y = 5 - \frac{3}{4}x$

$r \cap s_a = ?$

(x,y) tal que: $y = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x$

e $y = 5 - \frac{3}{4}x$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x = 5 - \frac{3}{4}x$

$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = 5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$

$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = \frac{16+9}{12}x = \frac{25}{12}x$

$\frac{25}{12}x = \frac{13}{3}$

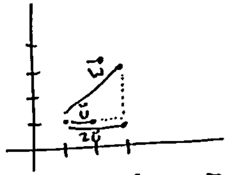
$x = \frac{13}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{25} = \frac{52}{25}$

3) V/F/Justifique:

a) (F) $Pr_{2\vec{v}}(\vec{w}) = 2\,Pr_{\vec{v}}(\vec{w})$

b) ( ) $Pr_{\vec{v}}(3\vec{w}) = 3\,Pr_{\vec{v}}(\vec{w})$

a)



Se $\vec{v} = (\overrightarrow{1,0})$ e $\vec{w} = (\overrightarrow{2,2})$,

$Pr_{(2\vec{v})}(\vec{w}) = Pr_{(\overrightarrow{2,0})}(\overrightarrow{2,2}) = (\overrightarrow{2,0})$

$2\,Pr_{\vec{v}}(\vec{w}) = 2\,Pr_{(\overrightarrow{1,0})}(\overrightarrow{2,2}) = 2 \cdot (\overrightarrow{2,0}) = (\overrightarrow{4,0})$

b) Se $\vec{v} = (\overrightarrow{1,0})$ e $\vec{w} = (\overrightarrow{2,2})$,

$Pr_{\vec{v}}(3\vec{w}) = \ldots = (\overrightarrow{6,0})$

$3\,Pr_{\vec{v}}(\vec{w}) = \ldots = (\overrightarrow{6,0})$

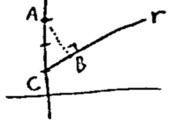
Como provar que isto <u>sempre</u> vale?

$Pr_{\vec{v}}(3\vec{w}) \overset{?}{=} 3\,Pr_{\vec{v}}(\vec{w})$

$Pr_{\vec{v}}(3\vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot(3\vec{w})}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} = \frac{3(\vec{v}\cdot\vec{w})}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} = 3\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right) = 3\,Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

4) Sejam
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \frac{3}{4}x\}$, coef. ang.: $m = \frac{3}{4}$
$s = \{(0,1) + t(\overrightarrow{2,1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

a) Calcule $d((0,3), r)$.



$A = (0,3)$
$C = (0,1)$
$d(A,C) = 2$

$d(A,r) = \frac{d(A,C)}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{2}{5/4} = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$

GA 21/nov/2016

Hoje:
- Gabarito da prova
- Elipses

b) Encontre dois pontos $P_1, P_2 \in s$ que estão à distância 1 de r.

Se $A = (A_x, A_y)$,

$d(A, r) = ?$

$C = (C_x, C_y) = (A_x, 1 + \frac{3}{4}A_x)$

$d(A, C) = |A_y - (1 + \frac{3}{4}A_x)|$

$= |A_y - 1 + \frac{3}{4}A_x|$

$d(A, r) = \dfrac{d(A,C)}{\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{|A_y - 1 + \frac{3}{4}A_x|}{5/4} = \frac{4}{5}|A_y - 1 + \frac{3}{4}A_x|$

$s = \{(0,1) + t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2t, 1+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Queremos $t \in \mathbb{R}$ tal que quando $(A_x, A_y) = (2t, 1+t)$ temos $\frac{4}{5}|A_y - 1 + \frac{3}{4}A_x| = 1$,

$\frac{4}{5}|\cancel{1}+t-\cancel{1}+\frac{3}{4}2t| = \frac{4}{5}|-\frac{1}{2}t| = \frac{2}{5}|t| \Rightarrow t = \frac{5}{2}$ ou $t = -\frac{5}{2}$.

Quando $t = \frac{5}{2}$,

$(2t, 1+t) = (5, 1 + \frac{5}{2})$

$= (5, \frac{7}{2})$

$d((5, \frac{7}{2}), r) = \frac{4}{5}|\frac{7}{2} - 1 + \frac{4}{3}5|$

$= \frac{4}{5}|\frac{21}{6} - \frac{6}{6} + \frac{40}{6}|$

$= \frac{4}{5}|\frac{55}{6}|$

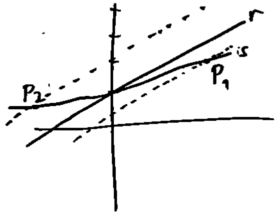
(Errei !!)

c) Sejam $P_1, P_2 \in s$ os dois pontos de s que estão à distância 1 de r... A gente teria encontrado eles no item anterior se eu não tivesse errado em contas !! ...

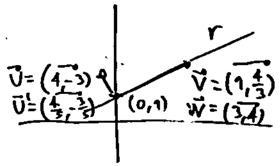
Encontre duas retas, r' e r'', que são paralelas a r e tau que $d(r, r') = 1 = d(r, r'')$.

r' passa por P_1 e tem coef. ang. $\frac{3}{4}$.

r'' passa por P_2 e tem coef. ang. $\frac{3}{4}$.

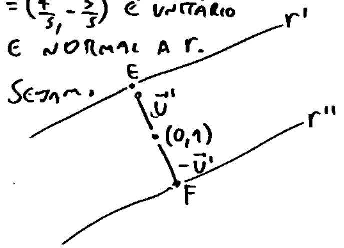


Outro jeito de resolver:



$\vec{u}' = \overrightarrow{(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})}$ é unitário e normal a r.

Sejam...



5) Sejam C o círculo com $C_0 = (0,5)$ e $R = 5$, e C' o círculo com $C_0' = (1,0)$ e $R' = 1$.

a) Obtenha as equações dos dois círculos.

$C: x^2 + (y-5)^2 = 25$

$C': (x-1)^2 + y^2 = 1$

b) Subtraia as duas equações...

$C: x^2 + y^2 - 10y + \cancel{25} - \cancel{25} = 0$

$C': x^2 - 2x + \cancel{1} + y^2 - \cancel{1} = 0$

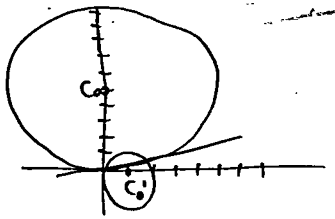
$C: x^2 + y^2 - 10y = 0$

$C': x^2 - 2x + y^2 = 0$

$r: -10y + 2x = 0$

$10y = 2x$

$y = \frac{x}{5}$



$(x-1)^2 + (\frac{x}{5})^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2}{25} = 1$

$\frac{26}{25}x^2 - 2x = 0$

$\frac{13}{25}x^2 - x = 0$

$x^2 - \frac{25}{13}x = 0$

Raízes: $x = 0$, $x = \frac{25}{13}$

$x^2 + ax + b = 0$

soma das raízes

produto

GA 23/nov/2016

Hoje:
Elipses!

Vamos começar lembrando que a gente sabe encontrar os 4 pontos mais óbvios e a "caixa" de uma elipse, e a partir disto sabemos esboçar a elipse...

Exercício:
Represente graficamente

$$E_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1\right\}$$

$$E_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1\right\}$$

$$E_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1\right\}$$

Seja:

$$E_F = \{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)+d(P,F')=10\}$$

Vamos tentar descobrir a cara deste conjunto para várias escolhas de F e F'...

a) $F=(0,0)$, $F'=(0,0)$
b) $F=(-3,0)$, $F'=(3,0)$
c) $F=(-4,0)$, $F'=(4,0)$
d) $F=(-5,0)$, $F'=(5,0)$.

Exercícios:

I) Encontre dois pontos P_1 e P_2 no eixo horizontal que pertençam a E_F em cada um dos casos acima (a, b, c, d).

II) Encontre dois pontos P_3 e P_4 no eixo vertical que pertençam a E_F em cada um dos casos acima (a, b, c, d).

III) Supondo que E_F é uma elipse, esboce E_F em cada um dos casos a, b, c, d, e...

IV) ... dê a equação de E_F (como nos exercícios sobre E_1, E_2, E_3 à esquerda).

Uma conta sinistra mas importante

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=C \qquad (\text{Obs: } A,B\geq 0)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 = C^2$$

$$\sqrt{A}^2 + 2\sqrt{A}\sqrt{B} + \sqrt{B}^2 = C^2$$

$$A + 2\sqrt{AB} + B = C^2$$

$$2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{AB})^2 = (C^2-A-B)^2$$

$$\begin{aligned}
4AB &= -A(-A-B+C^2) \\
&\quad - B(-A-B+C^2) \\
&\quad + C^2(-A-B+C^2) \\
&= A^2+AB-AC^2 \\
&\quad +AB+B^2-BC^2 \\
&\quad -AC^2-BC^2+C^4 \\
&= A^2+2AB-2AC^2 \\
&\quad +B^2-2BC^2 \\
&\quad +C^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= A^2-2AB-2AC^2 \\
&\quad +B^2-2BC^2 \\
&\quad +C^4 \\
&= C^2(C^2-2A-2B)+(A^2-2AB+B^2) \\
&= C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$$

$$\Rightarrow C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2 \qquad (\star)$$

Se a gente aplica $(\star)$ em

$$d((x,y),(-3,0))+d((x,y),(3,0))=10,$$

temos:

$$\underbrace{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}_{A} + \underbrace{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}_{B} = \underbrace{10}_{C}$$

$A = x^2+6x+9+y^2$
$B = x^2-6x+9+y^2$
$A-B = 12x$
$A+B = 2(x^2+9+y^2)$
$C^2 = 100$

$$\underbrace{C^2}_{100}(\underbrace{C^2}_{100}-2(\underbrace{A+B}_{2(x^2+9+y^2)}))+(\underbrace{A-B}_{12x})^2 = 0$$

$$4(x^2+9+y^2)$$

$$4x^2+36+4y^2$$

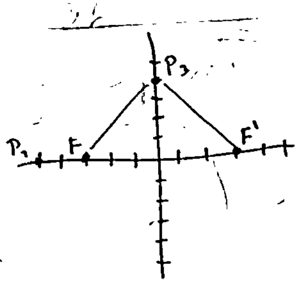
$$-4x^2 \quad +64-4y^2$$

$$-400x^2 \quad +6400-400y^2 \qquad (A-B)^2 = 144x^2$$

$$-256x^2+6400-400y^2$$

$$\underset{\substack{\| \\ 16\cdot 400 \\ \| \\ 4^2\cdot4^2\cdot5^2}}{6400} = \underbrace{256}_{4^2\cdot4^2}x^2+\underbrace{400}_{4^2\cdot5^2}y^2 \Rightarrow 4^2\cdot5^2 = 4^2x^2+5^2y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2} = \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2$$



e) $F=(-3,2)$, $F'=(3,2)$
f) $F=(0,2)$, $F'=(6,2)$
g) $F=(0,3)$, $F'=(0,-3)$

GA 28/NOV/2016

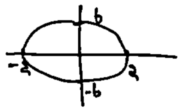
HOJE:
- HIPÉRBOLES
- MARCAR DATAS DAS PROVAS

NA AULA PASSADA:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1\}$

PONTOS ÓBVIOS: $(a,0)$, $(0,b)$, $(-a,0)$, $(0,-b)$.



ELIPSES DADAS POR FOCOS:

$E_F = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F)+d(P,F')=10\}$

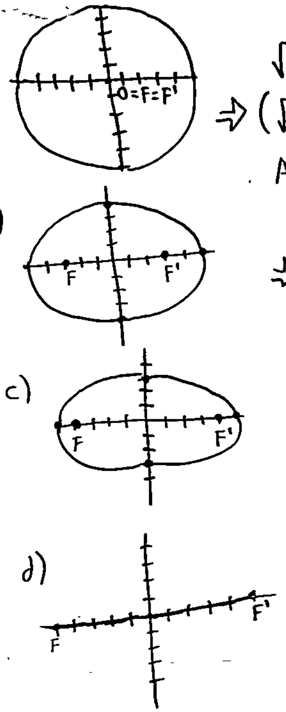
CASOS PARTICULARES:

a) $F=(0,0)$, $F'=(0,0)$

b) $F=(-3,0)$, $F'=(3,0)$

c) $F=(-4,0)$, $F'=(4,0)$

d) $F=(-5,0)$, $F'=(5,0)$



(OBS: $A,B \geq 0$)

$\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$

$\Rightarrow (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2=C^2$

$A+2\sqrt{AB}+B=C^2$

$2\sqrt{AB} = C^2-A-B$

$\Rightarrow (2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$

$4AB = -A(-A-B+C^2)$
$-B(-A-B+C^2)$
$+C^2(-A-B+C^2)$
$= A^2+AB-AC^2$
$+AB+B^2-BC^2$
$-AC^2-BC^2+C^4$
$= A^2+2AB-2AC^2$
$+B^2-2BC^2$
$+C^4$

$0 = \begin{pmatrix} A^2-2AB \\ +B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2AC^2 \\ -2BC^2 \\ +C^4 \end{pmatrix}$

$0=(A-B)^2+C^2(C^2-(A+B))$

SE $F=(-3,0)$ E $F'=(3,0)$,

$d((x,y),(-3,0))+d((x,y),(3,0))=10$

$\underbrace{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}_{A} + \underbrace{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}_{B} = \underbrace{10}_{C}$

$A = x^2+6x+9+y^2$, $B = x^2-6x+9+y^2$

$A-B=12x$

$A+B=2(x^2+9+y^2)$

$0=(\underbrace{\underbrace{A-B}_{12x}}_{144x^2})^2+\underbrace{C^2}_{100}(\underbrace{C^2}_{100}-(\underbrace{A+B}_{2(x^2+9+y^2)}))$

SE $F=(-5,0)$ E $F'=(3,0)$

$\vdots$

$0=(\underbrace{\underbrace{A-B}_{20x}}_{400x^2})^2+\underbrace{C^2}_{100}(\underbrace{C^2}_{100}-(\underbrace{\underbrace{A+B}_{2(x^2+25+y^2)}}_{2x^2+50+2y^2}))$

(OOPS, ERREI ⇑ !!)

$\vdots$

O RESULTADO É ALGO COMO:

$0=400y^2$

QUE É OBEDECIDO EXATAMENTE QUANDO $y=0$...

OUTRA CONTA PARECIDA...

$\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$

$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=C^2$

$A-2\sqrt{AB}+B=C^2$

$-2\sqrt{AB}=C^2-A-B$

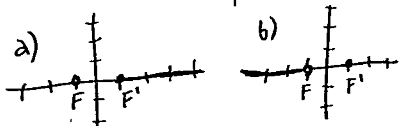
$\Rightarrow (-2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$

$4AB = (C^2-A-B)^2$
$= \ldots$
$= A^2+2AB-2AC^2$
$+B^2-2BC^2$
$+C^4$

$0=(A-B)^2+C^2(C^2-(A+B))$

COMO A GENTE REPRESENTA GRAFICAMENTE ESTES CONJUNTOS AQUI?

a) $H_1=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,\underbrace{(-1,0)}_{F})-d(P,\underbrace{(1,0)}_{F'})=2\}$

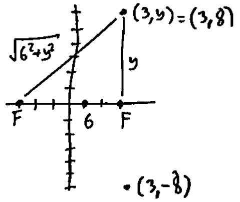


b) $H_2=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,\underbrace{(-1,0)}_{F})-d(P,\underbrace{(1,0)}_{F'})=-2\}$

c) $H_3=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(-3,0))-d(P,(3,0))=2\}$

d) $H_4=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(-3,0))-d(P,(3,0))=\pm 2\}$

$d((3,y),(-3,0))-d((3,y),(3,0))=2$



DICA PRO (c):
PROCURE UM PONTO NO SEGMENTO HORIZONTAL ENTRE $(-3,0)$ E $(3,0)$ E OUTROS DOIS PONTOS NA RETA VERTICAL $x=3$.

$\underbrace{d((x,0),(-3,0))}_{\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|}-\underbrace{d((x,0),(3,0))}_{|x-3|}=2$

$\Rightarrow x=1.$

GA 5/DEZ/2016

HOJE: HIPÉRBOLES!

NÓS JÁ VIMOS QUE COISAS COMO

$$\underbrace{3x^2+4y^2}_{\text{POSITIVOS}}\underbrace{-5}_{\text{NEGATIVO}}=0$$

SÃO ELIPSES... MAS NO FIM DA AULA PASSADA A GENTE ESTAVA TENTANDO DESENHAR

$$H_1=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,\underbrace{(-1,0)}_{F})-d(P,\underbrace{(1,0)}_{F'})=2\},$$

E ALGUMAS PESSOAS EXPANDIRAM A EQUAÇÃO DO H_1 E OBTIVERAM ALGO COMO

$$\underbrace{3x^2-4x^2}_{\text{SINAIS OPOSTOS!}}+5=0$$

HOJE A GENTE VAI APRENDER A DESENHAR COISAS COMO

$$H'_{ab}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+ay)}_{U}\underbrace{(x-ay)}_{V}=b\}.$$

PRIMEIROS CASOS INTERESSANTES:

a) $H'_{1,0}=?$

b) $H'_{2,0}=?$

c) $H'_{\frac{1}{2},0}=?$

d) $H'_{1,1}=?$

DICA: COMECE LOCALIZANDO AS RETAS $U=0$ E $V=0$.

NO ITEM d VOCÊ TAMBÉM VAI PRECISAR DAS RETAS $U=1$, $U=-1$, $V=1$, $V=-1$.

SE VOCÊ TIVER DIFICULDADE NO d FAÇA ESTES AQUI:

SEJA $H''_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x}_{U}\underbrace{y}_{V}=a\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE

e) H''_0,

f) H''_1,

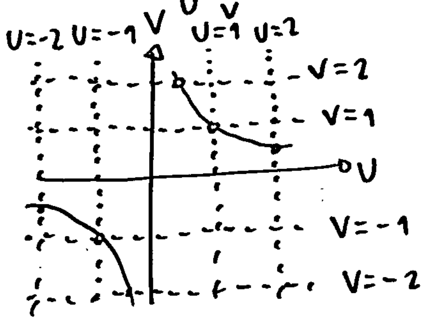
g) H''_2,

h) H''_{-1}.

DICA PRA f:

$$H''_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x}_{U}\underbrace{y}_{V}=1\}$$

U	V
1	1
2	1/2
3	1/3
1/2	2
1/3	3
-1	-1
-2	-1/2
-3	-1/3
-1/2	-2
-1/3	-3



$\boxed{\text{GA } 12/12/2016}$

Hoje:
Mais coisas sobre cônicas:
Revisão de hipérboles;
Diretrizes;
Parábolas.

Exercícios da aula passada:

$$H'_{a,b} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\overbrace{(x+ay)}^{u}\overbrace{(x-ay)}^{v}}_{x^2-a^2y^2} = b\}$$

Pedi pra todo mundo representar graficamente:

a) $H'_{1,0}$

b) $H'_{2,0}$

c) $H'_{\frac{1}{2},0}$

d) $H'_{1,1}$

Dica: comece encontrando as retas
$u=0$,
$v=0$,
$u=1$,
$v=1$

$$H''_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x}_{u}\underbrace{y}_{v} = a\}$$

e) H''_0,

f) H''_1,

g) H''_2,

h) H''_{-1}.

Lembre que nós vimos que:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1\} \text{ e}$$

$$\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)+d(P,F')=2a\}$$

são elipses, e

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=a\},$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=a\},$$

$$\{P\in\mathbb{R}^2 \mid |d(P,F)-d(P,F')|=a\}$$

são hipérboles.

Novidade:
Sejam F ("foco") um ponto e r_d ("reta diretriz") uma reta, com $F\notin r_d$.

Seja $C_e = \{P\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{d(P,F)}{d(P,r_d)} = e\}$.

Então os conjuntos C_e são:

- parábolas quando $e=1$
- elipses quando $0<e<1$,
- hipérboles quando $e>1$.

Vamos entender isto aos poucos.

Sejam $P_1=(1,0)$,
$P_2=(-1,0)$,
$F=(a,0)$,
$F'=(-a,0)$,
$D=(\frac{1}{a},0)$, $r_d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{a}\}$
$D'=(-\frac{1}{a},0)$.

Exercícios:

I) Para cada um dos valores de a abaixo calcule $\frac{d(P_1,F)}{d(P_1,r_d)}$ e $\frac{d(P_2,F)}{d(P_2,r_d)}$.

a) $a=\frac{1}{2}$

b) $a=\frac{1}{3}$

c) $a=2$

d) $a=3$

II) Repare que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r_d)} = e \qquad (\star)$$

$$\Rightarrow d(P,F) = e\, d(P,r_d)$$

$$\Rightarrow (d(P,F))^2 = e^2 (d(P,r_d))^2 \qquad (\star\star)$$

Para os valores de a e e abaixo use o truque $(\star)\Rightarrow(\star\star)$ para encontrar uma equação de elipse ou hipérbole para C_e.

a) $a=\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{2}$

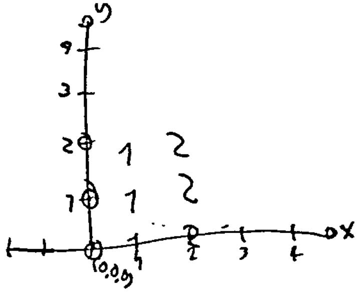
b) $a=2$, $e=2$

GA 19/DEZ/2016

HOJE:
ALGUMAS COISAS DE $\mathbb{R}^3$:
VISUALIZAÇÃO (NO QUADRO) +
PLANOS E RETAS (EXERCS NAS LISTAS)

DETERMINANTES:
INTRODUÇÃO (HOJE)
VÁRIAS PROPRIEDADES,
VÁRIOS TRUQUES PRA
CALCULAR COISAS
DIFÍCEIS RAPIDAMENTE
USANDO DETERMINANTES ← E ORTOGONALIDADE E VETORES UNITÁRIOS

A GENTE NÃO VAI VER QUÁDRICAS (ACHO).



OBS: O MATERIAL DESTA AULA E DA PRÓXIMA CORRESPONDE ÀS LISTAS 7, 8 E 9 (SÓ PARTE DA 9) DA ANA ISABEL, E É PREPARAÇÃO PRA ELAS.

ENCONTRE 3 PONTOS NÃO COLINEARES DE:

a) $[z=0]$ $(1,1,0), (2,1,0), (3,2,0)$

b) $[z=2]$ $(1,1,2), (2,1,2), (3,2,2)$

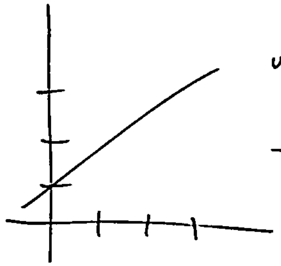
c) $[x=1]$ $(1,1,0), (1,2,0), (1,2,1)$

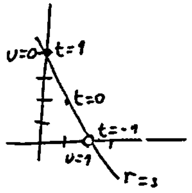
d) $[y=3]$

e) $\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\right]$ $(2,0,0)$ $(0,3,0)$ $(0,0,4)$

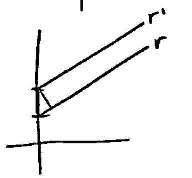
$\underbrace{\tfrac{x}{2}}_{0}$ $\underbrace{\tfrac{y}{3}}_{0}$ $\underbrace{\tfrac{z}{4}}_{1}$

x	y	z (=x)
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	1
1	1	1
1	2	1
2	0	2
2	1	2
2	2	2

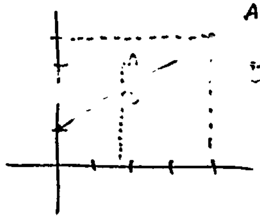




(x, y)



$y = \overbrace{1}^{b} + \overbrace{\tfrac{3}{4}}^{m}x$



$A = (\overbrace{\tfrac{5}{3}}^{x_0}, \overbrace{3}^{y_0}) = (\tfrac{5}{3}, \tfrac{12}{4})$ $d(A,B) =$

$B = (\tfrac{5}{3}, \overbrace{1}^{b} + \overbrace{\tfrac{3}{4}}^{m}\overbrace{\tfrac{5}{3}}^{x_0})$

$= (\tfrac{5}{3}, 1 + \tfrac{5}{4})$

$= (\tfrac{5}{3}, \tfrac{9}{4})$

$$\frac{\left|\overbrace{\tfrac{3}{4}}^{m}\cdot\overbrace{\tfrac{5}{3}}^{x_0}+\overbrace{3}^{b}-\overbrace{3}^{y_0}\right|}{\sqrt{1+\left(\tfrac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\left|\tfrac{5}{4}\right|}{\sqrt{\tfrac{16+9}{16}}} = \frac{\left|\tfrac{5}{4}\right|}{\tfrac{5}{4}} = 1$$

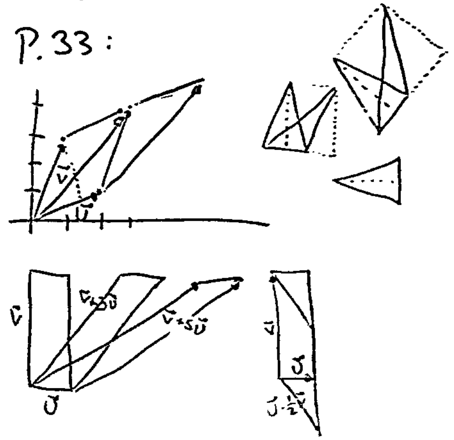
GA 21/dez/2016

No meio da folha 32, na fórmula do determinante, a expressão do meio tem uns "u_4", "u_5", "v_4", "v_5", "w_4", "w_5"...

Truque:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & u_1 & u_2 \\ & & & \shortparallel & \shortparallel \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array}$$

P.33:



P.34)

4, versão consertada:

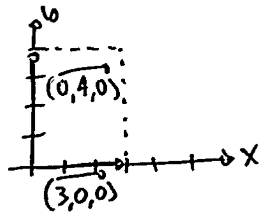
4') Para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\|\vec{w}\|=1$, então $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}) = c\cdot \text{área}(\vec{u},\vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal)

5) Para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\|\vec{w}\|=1$, então $(\vec{u}\times\vec{v}) = \text{área}(\vec{u},\vec{v})\cdot\vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:
Use o 5 pra tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u}\times\vec{v}$ nestes casos:

a) $\vec{u}=\overrightarrow{(3,0,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,4,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,0,1)}$

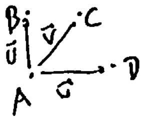
b) $\vec{u}=\overrightarrow{(0,3,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,3,3)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,0,0)}$



Alguns usos do "x"
(aula de 11/jul/2016 (2016.1); vou digitar)

1. $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \text{área}(\vec{u},\vec{v})$
2. $\vec{u}\times\vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
3. $\vec{u}\times\vec{v}=\overrightarrow{(0,0,0)}$ se e só se $\text{área}(\vec{u},\vec{v})=0$, ou seja, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (paralelos).
4. $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$, $s=\{B+t'\vec{v} \mid t'\in\mathbb{R}\}$. Será que r e s são reversas?

   Dica: faça $B=A+\vec{w}$ $(\vec{w}=B-A)$ e olhe para $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. Se $\neq 0$, são reversas. Se $=0$, são paralelas ou coincidentes ou se cortam.
5. Um truque parecido testa se quatro pontos A,B,C,D são coplanares.



$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0 \Rightarrow$ coplanares.

6. Sejam $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$, $s=\{B+t'\vec{v} \mid t'\in\mathbb{R}\}$. Como é que a gente encontra $d(r,s)$? Seja $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$.

$$d(r,s)=\underbrace{\underbrace{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}_{\text{volume}} \Big/ \underbrace{\text{área}(\vec{u},\vec{v})}_{\text{área de base}}}_{\substack{\text{altura} \\ \text{(distância entre } r \text{ e } s)}}$$

7. Sejam r e s como no 6. Como a gente encontra os pontos onde r e s ficam mais próximos? Queremos $A+t\vec{u}$ e $B+t'\vec{v}$ pros t e t' certos... Seja $\vec{w}=(B+t'\vec{v})-(A+t\vec{u})$. Queremos $\vec{w}\perp\vec{u}$ e $\vec{w}\perp\vec{v}$, ou seja $\vec{w}\parallel\vec{u}\times\vec{v}$, ou seja, $\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})=\overrightarrow{(0,0,0)}$.