$\boxed{\text{LA } 6/\text{set}/2016}$

$$\lambda p : A\times B \,.\, (g(\pi p), f(\pi' p)) = \left\{\begin{array}{l}((1,3),(10,30)),\\ ((1,4),(10,40)),\\ ((2,3),(30,30)),\\ ((2,4),(30,40))\end{array}\right\}$$

$$\underbrace{(g(\underbrace{\underbrace{\underbrace{\pi p}_{(1,3)}}_{1}}_{10}), f(\underbrace{\underbrace{\underbrace{\pi' p}_{(1,3)}}_{3}}_{30}))}_{(10,30)}$$

p	$(g(\pi p), f(\pi' p))$
$(1,3)$	$(10,30)$
$(1,4)$	
$(2,3)$	
$(2,4)$	

$(\lambda p : A\times B.\, (\pi' p, \pi p)) =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p:}{\pi' p:}\pi' \quad \dfrac{p:}{\pi p:}\pi}{(\pi' p, \pi p):}\text{pair}}{(\lambda p : A\times B.\,(\pi' p,\pi p)):}\lambda$$

TYPE INFERENCE

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p : A\times B}{\pi' p : B}\pi' \quad \dfrac{p : A\times B}{\pi p : A}\pi}{(\pi' p, \pi p) : B\times A}\text{pair}}{(\lambda p : A\times B.\,(\pi' p, \pi p)) : A\times B \to B\times A}\lambda$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:A\times B}{:A}\pi \quad f:A\to D}{:D}\text{app} \quad \dfrac{:A\times B}{:B}\pi'}{:D\times B}\text{pair}}{:A\times B \to D\times B}\lambda$$

TERM INFERENCE

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p : A\times B}{\pi p : A}\pi \quad f : A\to D}{f(\pi p) : D}\text{app} \quad \dfrac{p : A\times B}{\pi' p : B}\pi'}{(f(\pi p), \pi' p) : D\times B}\text{pair}}{(\lambda p : A\times B.\,(f(\pi p), \pi' p)) : A\times B \to D\times B}\lambda$$

$(a,b) \mapsto (f(a), b)$

$(a,(b,c)) \mapsto ((a,b),c)$

$(1,(4,30)) \mapsto ((1,4),30)$

Que $\underbrace{\text{função}}_{\text{"h"}}$ faz isto?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t : A\times(B\times C)}{\pi t : A}\pi \quad \dfrac{\dfrac{t : A\times(B\times C)}{(\pi' t) : B\times C}\pi'}{\pi(\pi' t) : B}\pi}{(\pi t, \pi(\pi' t)) : A\times B}\text{pair} \quad \dfrac{\dfrac{t : A\times(B\times C)}{\pi' t : B\times C}\pi'}{\pi'(\pi' t) : C}\pi'}{\dfrac{((\pi t, \pi(\pi' t)), \pi'(\pi' t)) : (A\times B)\times C}{(\lambda t : A\times(B\times C).\,(\underbrace{(\pi t, \pi(\pi' t)), \pi'(\pi' t)})) : A\times(B\times C) \to (A\times B)\times C}\lambda}\text{pair}$$

Classical logic:

$\Omega = \{0,1\}$ $\qquad \Omega_{CL}$

$\& = \left\{\begin{matrix}((0,0),0),\\((0,1),0),\\((1,0),0),\\((1,1),1)\end{matrix}\right\}$ $\qquad \&_{CL}$

$\vee = \ldots$ $\qquad \vee_{CL}$

$\to = \ldots$

$\leftrightarrow = \ldots$

$\neg = \left\{\begin{matrix}(0,1),\\(1,0)\end{matrix}\right\}$

Logic:

$CL = (\Omega, \&, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg)$

$= \left(\{0,1\}, \left\{\begin{matrix}((0,0),0),\\((0,1),0),\\((1,0),0),\\((1,1),1)\end{matrix}\right\}, \ldots \right)$

Será que $\neg\neg P \to P$ é sempre verdade? $(\neg(\neg P)) \to P$

$\boxed{\text{Sim!!!}}$

Temos dois casos:

$P=0$: $\underbrace{\underbrace{\neg\underbrace{\neg \underbrace{P}_{0}}_{1}}_{0} \to \underbrace{P}_{0}}_{1}$

$P=1$: $\underbrace{\underbrace{\neg\underbrace{\neg \underbrace{P}_{1}}_{0}}_{1} \to \underbrace{P}_{1}}_{1}$

$\neg\neg P \to P$ é uma tautologia.

$\forall P \in \Omega . (\neg\neg P \to P)$ é verdadeiro.

3-valued logic:

$\Omega_3 = \{00, 01, 11\}$

$\&_3 =$

Exercício:

$\neg\neg P \to P$ é tautologia na lógica de 3 valores? Calcule os três casos: $P=00$, $P=01$, $P=11$. $\Rightarrow$ $\neg\neg P \to P$ ... $\boxed{01}$!!

Notação compacta:

$P=0$: $\neg\,\neg\, P \to P$ with 0, 1, 0, 0, $\boxed{1}$

Teorema (vamos entendê-lo e demonstrá-lo bem depois!): Tudo que é tautologia na lógica de 3 valores é tautologia na lógica clássica.

(E isto tem alguma relação com λ-cálculo)

Notações posicionais

Um Zset é um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ que:

a) não é vazio,

b) é finito,

c) toca o eixo vertical (ou seja, contém $(0,0)$ ou $(0,1)$ ou $(0,2)$ ...)

d) toca o eixo horizontal (contém $(0,0)$ ou $(1,0)$ ou $(2,0)$ ...)

Exemplos:

$K = \left\{\begin{matrix}(1,3),\\(0,2),\ (2,2),\\(1,1),\\(1,0)\end{matrix}\right\} = \ldots = \ldots$ "Kite"

$H = \{\ \ldots\ \} = \ldots = \ldots$ "House"

$V = \ldots = \ldots$

$\Lambda = \ldots = \ldots$

Notação posicional para subconjuntos

Exemplo: $\ldots \subset \ldots$

Notação posicional para funções de Zsets (em ...)

Exemplo:

$(\lambda(x,y):K.x) = \left\{\begin{matrix}((1,3),1),\\((0,2),0),\ ((2,2),2),\\((1,1),1),\\((1,0),1)\end{matrix}\right\} = \begin{matrix} & 1 & \\ 0 & & 2 \\ & 1 & \\ & 1 & \end{matrix}$

Notação posicional:

Exercícios:

Represente na notação posicional:

a) $\lambda(x,y):K.y$

b) $\lambda(x,y):H.y>0$

c) $\lambda(x,y):K.(x,y)\in \ldots$

c) $(\lambda(x,y):K.(x,y)\in \ldots) = \left\{\begin{matrix}((1,3),0),\\((0,2),0),\ ((2,2),1),\\((1,1),1),\\((1,0),1)\end{matrix}\right\} = \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & 1 & \end{matrix}$

LA 20/SET/2016

COORDENADAS (x,y):

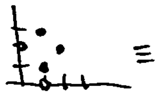
$$\begin{array}{cccc} \vdots & & & \\ (0,2) & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ (0,1) & (1,1) & & \\ (0,0) & (1,0) & (2,0) & \cdots \end{array}$$

COORDENADOS $\langle L,R\rangle$:
"ANGLE BRACKETS": $\langle\,\rangle$

$$\begin{array}{ccccc} \ddots & \vdots & & & \\ \langle 2,0\rangle & \langle 1,1\rangle & & \langle 0,2\rangle & \cdots \\ \langle 1,0\rangle & & \langle 0,1\rangle & & \\ & \langle 0,0\rangle & & & \end{array}$$

NOTAÇÃO CURTA:
$\langle a,b\rangle \equiv ab$

LEMBREM DAS NOTAÇÕES POSICIONAIS:

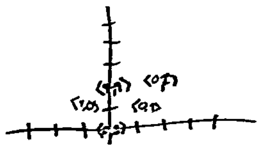


$\equiv \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \\ & \bullet & \\ & \bullet & \end{array} \quad (= K)$ "KITE"

$$\lambda(x,y):K.\,x \equiv \left\{\begin{array}{ccc} & ((1,3),1) & \\ ((0,2),0) & & ((2,2),2) \\ & ((1,1),1) & \\ & ((1,0),1) & \end{array}\right\} \equiv \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 2 \\ & 1 & \\ & 1 & \end{array}$$

$$\langle a,b\rangle = 0 + a\overrightarrow{(-1,1)} + b\overrightarrow{(1,1)} = (-a+b,\ a+b)$$

$\langle 0,0\rangle = (0,0)$
$\langle 1,1\rangle = (\ \ ,\ \ )$
$\langle 0,2\rangle = (\ \ ,\ \ )$



$\mathrm{valid}(\langle a,b\rangle) := \langle a,b\rangle \in \Omega = \Omega_{10}$

P.ex., $\mathrm{valid}(\langle 4,4\rangle) = 0$,
$\mathrm{valid}(\langle 3,2\rangle) = 1$.

$$\Omega_{10} = \left\{\begin{array}{ccccc} 32, & & & & \\ & 22, & & & \\ 21, & & 12, & & \\ 20, & 11, & & 02, & \\ & 10, & 01, & & \\ & & 00 & & \end{array}\right\}$$

EXERCÍCIOS:

(a) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle \leq \langle 1,1\rangle \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \end{array}$

OBS:
$$\underbrace{\langle \underbrace{2}_{:\mathbb{N}}, \underbrace{0}_{:\mathbb{N}} \rangle}_{:\Omega_{10}} \leq \underbrace{\langle \underbrace{1}_{:\mathbb{N}}, \underbrace{1}_{:\mathbb{N}} \rangle}_{:\Omega_{10}} \ \ := \ \ \underbrace{\underbrace{\underbrace{2}_{:\mathbb{N}} \leq \underbrace{1}_{:\mathbb{N}}}_{:\{0,1\}} \ \&\ \underbrace{0 \leq 1}_{:\{0,1\}}}_{:\{0,1\} = \Omega_{CL}}$$
$$\leq\ :\ \Omega_{10}\times\Omega_{10} \to \{0,1\} = \Omega_{CL}$$

(b) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle \leq \langle 1,2\rangle \equiv \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \end{array}$

(c) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle \geq \langle 1,1\rangle$

(d) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle$ leftof $\langle 1,1\rangle$

(e) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle$ rightof $\langle 1,1\rangle$

(f) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle$ above $\langle 1,1\rangle$

(g) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \langle a,b\rangle$ below $\langle 1,1\rangle$

(h) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \mathrm{ne}(\langle a,b\rangle)$

(i) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \mathrm{nw}(\langle a,b\rangle)$

SUGESTÃO:
COMECE CALCULANDO $\mathrm{ne}(10)$ e $\mathrm{nw}(12)$.
OBS: $\mathrm{ne}(10) = \mathrm{ne}(11) = \mathrm{ne}(12) = 12$

Se $a=2$ e $b=0$,

$$\mathrm{ne}(\langle 2,0\rangle) := \text{if } \underbrace{\mathrm{valid}(\underbrace{\langle 2,\underbrace{0+1}_{1}\rangle}_{\langle 2,1\rangle})}_{1} \text{ then } \mathrm{ne}(\underbrace{\langle 2,\underbrace{0+1}_{1}\rangle}_{\langle 2,1\rangle}) \text{ else } \langle 2,0\rangle \text{ end}$$

$$\mathrm{ne}(\langle 2,1\rangle) := \text{if } \underbrace{\mathrm{valid}(\langle 2,2\rangle)}_{1} \text{ then } \mathrm{ne}(\langle 2,2\rangle) \text{ else } (\langle 2,1\rangle) \text{ end} = \mathrm{ne}(\langle 2,2\rangle)$$

$$\mathrm{ne}(\langle 2,2\rangle) := \underbrace{\text{if } \underbrace{\mathrm{valid}(\underbrace{\langle 2,\underbrace{2+1}_{3}\rangle}_{\langle 2,3\rangle})}_{0} \text{ then } \mathrm{ne}(\underbrace{\langle 2,2+1\rangle}_{\langle 2,3\rangle}) \ \underline{\text{else } (\langle 2,2\rangle)} \text{ end}}_{\langle 2,2\rangle}$$

$$(h) = \left\{\begin{array}{ccccc} (32,32), & & & & \\ & (22,22), & & & \\ (21,22) & & (12,12), & & \\ (20,22), & (11,12), & & (02,02), & \\ & (10,12), & (01,02), & & \\ & & (00,02) & & \end{array}\right\} = \begin{array}{ccccc} 32 & & & & \\ & 22 & & & \\ 22 & & 12 & & \\ 22 & 12 & & 02 & \\ & 12 & 02 & & \\ & & 02 & & \end{array}$$

(j) Se $P=20$ e $Q=11$,
CALCULE: $P\&Q$,
$P \vee Q$,
$P \to Q$.

(k) Se $P=02$ e $Q=11$,
CALCULE: $P\&Q$,
$P \vee Q$,
$P \to Q$.

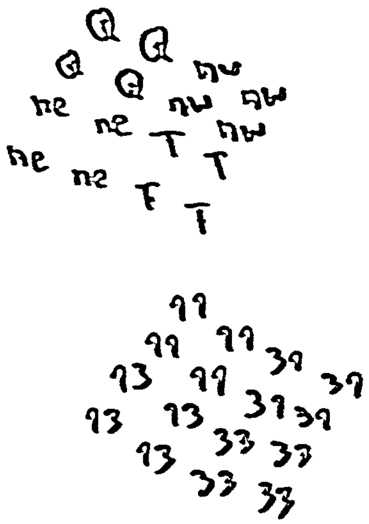
(l) $\lambda\langle a,b\rangle:\Omega_{10}.\ \neg\langle a,b\rangle$

1|)

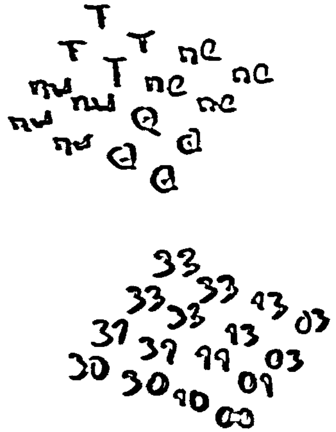
LA 27/set/2016

$\multimap \underbrace{Q}_{22}$

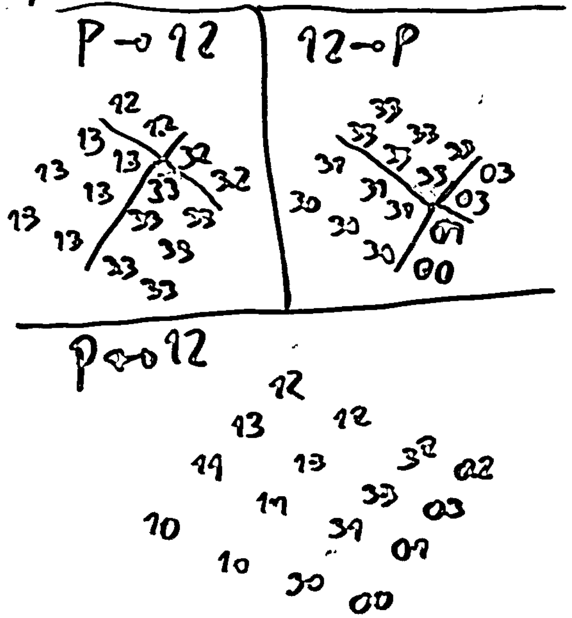
l) $P \multimap \underbrace{11}_{Q}$



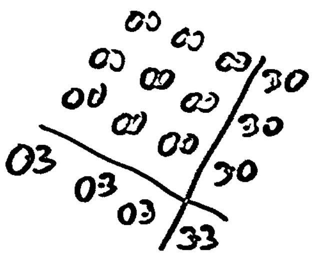
l') $\underbrace{22}_{P} \multimap Q$



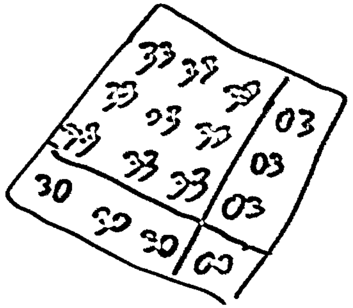
l'') $P \multimapboth 12$



m) $\neg P$
$(P \multimap \bot)$



m) $\neg\neg P$



$\boxed{\text{LA 4/out/2016}}$

$0 = 0'$
$p = p'$
$r' = r''$

CASOS PARTICULARES:

$(P \leq 21\&12) \leftrightarrow ((P \leq 21)\&(P \leq 12))$

$(21 \vee 12 \leq R) \leftrightarrow ((21 \leq R)\&(12 \leq R))$

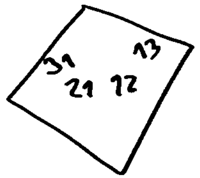
$(P \leq 21 \to 12) \leftrightarrow (P\&21 \leq 12)$

CASO GERAL:

$(P \leq Q\&R) \leftrightarrow ((P \leq Q)\&(P \leq R))$ $(\&)$

$(P \vee Q \leq R) \leftrightarrow ((P \leq R)\&(Q \leq R))$ $(\vee)$

$(P \leq Q \to R) \leftrightarrow (P\&Q \leq R)$ $(\to)$



$21 \to 12 = 13$ $\quad 12 \to 21 = 31$

$0 \to 1 = 1$ $\quad 21 \leftrightarrow 12 = 11$

$1 \to 0 = 0$

$(P \leq Q\&R) \to ((P \leq Q)\&(P \leq R))$

$(P \leq Q\&R) \to P \leq Q$

$(P \leq Q\&R) \to P \leq R$

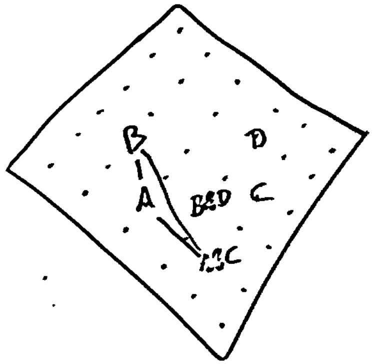
$(P \leq Q\&R) \leftarrow ((P \leq Q)\&(P \leq R))$ $\langle , \rangle$

$(P \leq Q \to R) \to (P\&Q \leq R)$ b

$(P \leq Q \to R) \leftarrow (P\&Q \leq R)$ #

$(Q\&R \leq Q\&R) \to Q\&R \leq Q$

$(Q\&R \leq Q\&R) \to$ $Q\&R \leq Q$ $\quad\pi$, $Q\&R \leq R$ $\quad\pi'$



$\boxed{\text{LA 11/OUT/2016}}$

HOJE: CATEGORIAS!!!

A GENTE VAI COMEÇAR POR ESSA IDÉIA DAQUI:

Set É A CATEGORIA ARQUETIPAL.

$$(f;g);h = f;(g;h)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f;g"'] \arrow[drr, bend left, "f;(g;h)"] \arrow[drr, bend right=60, "(f;g);h"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "g;h"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

$$(((h\circ g)\circ \underbrace{f}_{\substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}})(\underbrace{a}_{2}))$$

h: $5\mapsto 7$, $6\mapsto 7$; g: $3\mapsto 6$, $4\mapsto 5$; f: $1\mapsto 3$, $2\mapsto 4$; $a = 2$

$h\circ g$: $3\mapsto 7$, $4\mapsto 7$

$(h\circ g)\circ f$: $1\mapsto 7$, $2\mapsto 7$

$= 7$

$$h(g(f(\underbrace{a}_{2})))$$

h: $5\mapsto 7$, $6\mapsto 7$; g: $3\mapsto 6$, $4\mapsto 5$; f: $1\mapsto 3$, $2\mapsto 4$

4

5

7

1ª PROPRIEDADE: COMPOSIÇÃO É ASSOCIATIVA.

OBS: SÓ DÁ PRA COMPOR SETAS QUANDO O CODOMÍNIO DE UMA É O DOMÍNIO DA OUTRA.

$f;h = $!!

$h\circ f = $!!

EXISTEM "SETAS IDENTIDADE".

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[loop right, "\substack{1\mapsto 1\\2\mapsto 2}"] \arrow[d, "\substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}"] \\ \{3,4\} \arrow[loop right, "\substack{3\mapsto 3\\4\mapsto 4}"] \end{tikzcd}$$

2ª PROPRIEDADE:

$$id_A;f = f = f;id_B$$

"**Set** É UMA CATEGORIA" QUER DIZER:

$$\mathbf{Set} = (\underbrace{Objs(\mathbf{Set})}_{\text{TODOS OS CONJUNTOS}},\ \underbrace{Hom_{\mathbf{Set}}}_{},\ \underbrace{\circ_{\mathbf{Set}}}_{\text{COMPOSIÇÃO}},\ \underbrace{id}_{},\ ;\ \ldots)$$

$Hom_{Set}(A,B)$ É O CONJ. DE TODAS AS SETAS DE A EM B

id_A É A SETA IDENTIDADE

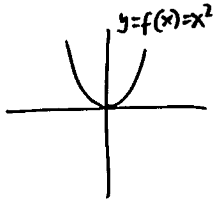
Set TEM MUITAS COISAS EXTRAS QUE NÃO SÃO CONSEQUÊNCIA DE **Set** SER UMA CATEGORIA...

POR EXEMPLO:

$A\times B$

$A\to B$

VAMOS VER ISSO DEPOIS.



$f(1)=1$

$f(0)=0$

$f(-1)=1$

$f(2)=4$

$f(x)=-4$

EXERCÍCIOS:

"MULTIPLE INVERSES"

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "id"'] & \{3,4,5\} \arrow[d, "h = \substack{3\mapsto 1\\4\mapsto 2\\5\mapsto 2}"] \\ & \{1,2\} \end{tikzcd}$$

ENCONTRE f E g TAIS QUE $f;h=g;h$ E $f\neq g$.

$f = \substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}$ $\quad g = \substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 5}$

$$\begin{tikzcd} \{5,6\} \arrow[d, "\substack{5\mapsto 7\\6\mapsto 8} = f"'] \arrow[dr, "id"] & \\ \{7,8,9\} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

ENCONTRE g E h TAIS QUE $f;g=f;h$ E $g\neq h$.

"NO INVERSES"

PRA CADA DOS "!!" EXPLIQUE EM PORTUGUÊS PORQUÊ.

a)
$$\begin{tikzcd} \underset{B}{\{3,4,5\}} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_B"'] & \overset{A}{\{1,2\}} \arrow[d, "g = \substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}"] \arrow[dr, "id_A"] & \\ & \underset{B}{\{3,4,5\}} \arrow[r] & \underset{A}{\{1,2\}} \end{tikzcd}$$

$f = \substack{3\mapsto 1\\4\mapsto 2\\5\mapsto 2}$

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, "\substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}"] \arrow[dr, "id"'] & \{3,4\} \arrow[d, "\substack{3\mapsto 1\\4\mapsto 2}"] \arrow[dr, "id"] & \\ & \{1,2\} \arrow[r, "\substack{1\mapsto 3\\2\mapsto 4}"'] & \{3,4\} \end{tikzcd}$$

$f;g = \substack{3\mapsto 3\\4\mapsto 4\\5\mapsto 4} \neq id$

$\boxed{\text{LA 11/OUT/2016}}$

"NO INVERSES"

a)

$$\begin{tikzcd} B = \{3,4,5\} \arrow[r, "f \overset{?}{=}"] \arrow[dr, "id_B"'] & \{1,2\} = A \arrow[d, "g = \substack{1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4}"] \\ & \{3,4,5\} = B \end{tikzcd}$$

PROP: $\nexists f : B \to A.\ f;g = id_B.$

OU: $\nexists (B \xrightarrow{f} A).\ f;g = id_B.$

DEMONSTRAÇÃO:

$f;g = g \circ f$

$$\forall x,y\ (x \in B \wedge y \in A)$$

$$(\underbrace{f : B \to A} \wedge \underbrace{g : A \to B}) \to g \circ f : B \to B$$

$$g \circ f(5) = 5 = g(f(5)) \in \{g(1), g(2)\} = \{3,4\}$$

$\therefore$

$5 \neq 3 \vee 5 \neq 4$

$$f;g = id_B$$

$$\Leftrightarrow f;g = \substack{3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 5}$$

$$\| \quad g \circ f$$

$$\Leftrightarrow (g \circ f)(3) = 3\ \&\ (g \circ f)(4) = 4\ \&\ (g \circ f)(5) = 5\ \&$$

$$\Leftrightarrow g(f(3)) = 3\ \&\ g(f(4)) = 4\ \&\ g(f(5)) = 5$$

PARA

$$g(f(5)) = g(1)$$
$$\vee\ g(f(5)) = g(2),$$

PORTANTO

$$g(f(5)) = 3$$
$$\vee\ g(f(5)) = 4,$$

PORTANTO

$$g(f(5)) \neq 5,$$

PORTANTO

$$g \circ f \neq id_B.$$

LA 25/OUT/2016

Hoje:

- MAIS EXERCÍCIOS DE FATORAÇÃO
- FATORAÇÃO ATRAVÉS DE PRODUTO
- CATEGORIAS
- Set E ORDENS PARCIAIS COMO CATEGORIAS
- PRODUTOS EM ORDENS PARCIAIS
- EXPONENCIAIS (?)

(NINGUÉM VEIO, FICOU TUDO PRA SEMANA QUE VEM !!)

$\boxed{\text{LA } 1^{\circ}/\text{nov}/2016}$

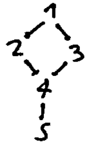
Hoje: Categorias!

Lembrando:

$D = (A, R)$

Grafo direcionado — Vértices (conjunto) — Relação (setas)

Obs: $R \subseteq A \times A$



$= (\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5)\})$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 9 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 18 \end{tikzcd} =$$

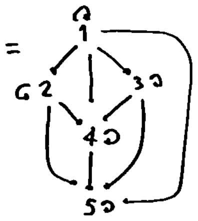
$6 \quad 1 \to 4 \circlearrowleft \quad 5 =$

Novidade:

Categoria:

$\mathbf{C} = (C_0, \mathrm{Hom}, \mathrm{id}, \circ)$

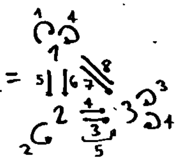
"objetos" (conjunto) — "homomorfismos" — setas identidade — composição

$K =$ 

Repare que a gente pode representar matematicamente as setas $1 \to 4 \in K$, $2 \to 5 \in K$ como $(1,4)$ e $(2,5)$ ou como outra convenção...

$\mathrm{Hom}_K(1,3) = \{1 \to 3\}$

$\mathrm{Hom}_K(5,1) = \{\}$

$L =$ 

$\mathrm{Hom}_L(1,2) = \{5,6\}$

$\mathrm{Hom}_L(1,3) = \{7,8\}$

$f \circ g \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[rr, bend right, "g;f"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$

Melhor:

$\mathrm{Hom}_L(1,2) = \{1 \xrightarrow{5} 2, 1 \xrightarrow{6} 2\}$

Se $A \xrightarrow{g} B$ e $B \xrightarrow{f} C$

então $A \xrightarrow{f \circ g} C$

Exemplo:

$1 \xrightarrow{5} 2$ e $2 \xrightarrow{3} 3$

então

$1 \xrightarrow{3 \circ 5} 3$

ou, mais precisamente,

$(\circ_{1,2,3})(5,3) = 7$

$\mathrm{id}_L(1) = 1 \xrightarrow{1} 1$

$\mathrm{id}_L(2) = 2 \xrightarrow{2} 2$

$\mathrm{id}_L(3) = 3 \xrightarrow{3} 3$

"5" é que seta?

Quem são $src(5)$ e $tgt(5)$?

1 ou 2? 2 ou 3?

Truque: vamos escrever as setas com seus src e tgt quando for preciso...

$src(1 \xrightarrow{5} 2) = 1 \qquad tgt(1 \xrightarrow{5} 2) = 2$

$src(2 \xrightarrow{5} 3) = 2 \qquad tgt(2 \xrightarrow{5} 3) = 3$

Se $f = \{(1,10),(2,20)\}$, $f(-5) = \text{ERRO}$

Melhorando a composição...

5 ou 6???

$(2 \xrightarrow{4} 3) \circ (1 \xrightarrow{5} 2) = 1 \longrightarrow 2$

Propriedades:

Numa categoria,

$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{f} B$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\mathrm{id}_B} B = A \xrightarrow{f} B$

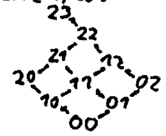
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D = A \xrightarrow[(h \circ g) \circ f]{h \circ (g \circ f) =} D$

LA 8/nov/2016

Algumas categorias:

- Set
- Ordens parciais

Exemplo:



$= H_{10}$

Aula que vem:
Modos de construir novas categorias – exemplos: como "somas" ou "produtos" de categorias conhecidas.

Agora:
O que é um terminal numa categoria?
É um inicial?
O que é um produto?

A B C A×B A

A×C → B×C

$A \times B \xrightarrow{f} C$

$A \to B{\to}C$

Uma categoria é uma estrutura:

$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_0, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$

Tais que:
- as identidades se comportam "como esperado"
- a composição é associativa.

Exemplo:
Em Set,

$\{1,2\} \xrightarrow[1\mapsto 4,\ 2\mapsto 3]{1\mapsto 3,\ 2\mapsto 4} \{3,4\}$

$\{1,2\} \in \mathrm{Set}_0$

$\{3,4\} \in \mathrm{Set}_0$

$\{1,2\} \xrightarrow{1\mapsto 3,\ 2\mapsto 4} \{3,4\} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{1,2\},\{3,4\})$

$= \left\{ \begin{smallmatrix}1\mapsto 3\\ 2\mapsto 3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\mapsto 3\\ 2\mapsto 4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\mapsto 4\\ 2\mapsto 3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\mapsto 4\\ 2\mapsto 4\end{smallmatrix} \right\}$

Revisão: $\exists!$

a) (F) $\exists! a \in \{1,2,3\}.\ a < 10$

b) (V) $\exists! a \in \{1,2,3\}.\ a^2 = 4$

c) (F) $\exists! a \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.\ a^2 = 4$

d) (F) $\exists! a \in \{1,2,3\}.\ a > 10$

Como é que a gente mostra cada um desses "F"s?
a) porque $a=2$ e $a=3$ obedecem $a<10$, e $2 \neq 3$.

Lembrem que

$\exists! a \in A.\ P(a)$

$\leftrightarrow \exists a \in A.\ P(a)\ \&$ "existe a"

$\forall a, a' \in A.\ P(a) \& P(a') \to a = a'$ "existe no máximo um a"

e) (F) $\exists! f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{1,2\},\{3,4\})$

Falso: $\{1,2\} \xrightarrow{1\mapsto 3,\ 2\mapsto 4} \{3,4\}$

$\{1,2\} \xrightarrow{1\mapsto 4,\ 2\mapsto 3} \{3,4\}$

f) (V) $\exists! f: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{3,4\},\{5\})$

$= \{\{(3,5),(4,5)\}\}$

$= \left\{\begin{smallmatrix}3\mapsto 5\\ 4\mapsto 5\end{smallmatrix}\right\}$

$\{3,4\} \xrightarrow{3\mapsto 5,\ 4\mapsto 5} \{5\}$

g) (V) $\exists! f: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{\}, \{1,2\})$

$\{\} \longrightarrow \{1,2\}$

$= \{\{\}\}$

h) (F) $\exists! f: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{1,2\},\{\})$

$= \{\}$

i) (V) $\exists! f: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{\},\{\})$

j) (F) $\exists! f: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\{3\},\{\})$

~~$\{(3,??)\}$~~

$\{\}$

k) (F) $\forall A \in \mathrm{Set}_0.\ \exists! f: A \to \{1,2\}$

Contra-exemplo: $A = \{3,4\}$

l) (F) $\forall A \in \mathrm{Set}_0.\ \exists! f: A \to \{\}$

m) (V) $\forall A \in \mathrm{Set}_0.\ \exists! f: A \to \{3\}$

Em H_{10}:

$\mathrm{Hom}_{H_{10}}(01, 12) = \{01 \to 12\}$

$\mathrm{Hom}_{H_{10}}(12, 01) = \{\}$

$\mathrm{Hom}_{H_{10}}(12, 12) = \{12 \xrightarrow{\mathrm{id}} 12\}$

n) (V) $\forall A \in (H_{10})_0.\ \exists! f: A \to 23$

o) (F) $\forall A \in (H_{10})_0.\ \exists f: A \to 12$

Def:
Um objeto $T \in \mathbf{C}_0$ numa categoria $\mathbf{C}$ é terminal se e só se:

$\forall A \in \mathbf{C}_0.\ \exists! f: A \to T$

Exemplos:
$\{3\}$ é terminal em Set
23 é terminal em H_{10}
$\{9\}$ é terminal em Set

$\{3\} \xrightarrow{3\mapsto 9} \{9\}$, $9\mapsto 9 = \mathrm{id}$

$3\mapsto 3 = \mathrm{id}$, $9 \mapsto 3$

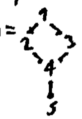
$\{3\} \xrightarrow{3\mapsto 9} \{9\}$

$\{2,3,4\}$
$\begin{smallmatrix}2\mapsto 5\\ 3\mapsto 6\\ 4\mapsto 7\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}5\mapsto 2\\ 6\mapsto 3\\ 7\mapsto 4\end{smallmatrix}$ "Isomorfismo"
$\{5,6,7\}$

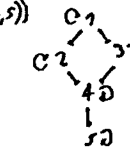
Fechos

Sejam:
$A = \{1,2,3,4,5\}$
$R = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

$D = (A,R) =$

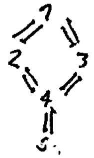


Fecho reflexivo de R:



Fecho transitivo:

Fecho simétrico:



$\boxed{\text{LA 8/nov/2016}}$

Algumas categorias:

- **Set**
- Ordens parciais

Exemplo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & 23 \arrow[d, dash] & & \\
 & & 22 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & 21 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 12 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
20 \arrow[dr, dash] & & 11 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 02 \arrow[dl, dash] \\
 & 10 \arrow[dr, dash] & & 01 \arrow[dl, dash] & \\
 & & 00 & &
\end{tikzcd} = H_{10}$$

Aula que vem: modos de construir novas categorias – exemplos: como "somas" ou "produtos" de categorias conhecidas.

Agora:
O que é um terminal numa categoria?
É um inicial?
O que é um produto?

Defs:

- $T \in C_0$ é terminal se $\forall A \in C_0. \exists! f: A \to T$
- $I \in C_0$ é inicial se $\forall B \in C_0. \exists! f: I \to B$

p) (F) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists! f: 12 \to B$

q) (F) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists! f: 23 \to B$

r) (V) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists! f: 00 \to B$

Introdução a produtos

Idéia: em **Set** estas três coisas são "product diagrams":

$\{3,4\} \leftarrow \{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\} \to \{5,6\}$

$\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45,46\} \to \{5,6\}$

$\{3,4\} \leftarrow \{53,54,63,64\} \to \{5,6\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} \arrow[dl, "{1\mapsto 3,\ 2\mapsto 3}"'] \arrow[d, "{1\mapsto 35,\ 2\mapsto 36}"] \arrow[dr, "{1\mapsto 5,\ 2\mapsto 6}"] & \\
\{3,4\} & \{35,36,45,46\} \arrow[l, "{35\mapsto 3,\ 36\mapsto 3,\ 45\mapsto 4,\ 46\mapsto 4}"] \arrow[r, "{35\mapsto 5,\ 36\mapsto 6,\ 45\mapsto 5,\ 46\mapsto 6}"'] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} \arrow[dl, "{1\mapsto 4,\ 2\mapsto 3}"'] \arrow[d, "{1\mapsto 45,\ 2\mapsto 35}"] \arrow[dr, "{1\mapsto 5,\ 2\mapsto 5}"] & \\
\{3,4\} & \{35,36,45,46\} \arrow[l] \arrow[r] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

Def:

$B \xleftarrow{\pi} P \xrightarrow{\pi'} C$ é um "product diagram" se e só se

$\forall A. \forall f: A \to B. \forall g: A \to C.$
$\quad \exists! h: A \to P.\ h;\pi = f \ \&\ h;\pi' = g$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\exists! h"] \arrow[dr, "g"] & \\
B & P \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & C
\end{tikzcd}$$

Exercícios:

s) Mostre que $\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45,46,406\} \to \{5,6\}$ não é um product diagram

t) Mostre que $\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45\} \to \{5,6\}$ não é um product diagram

s)
$$\begin{tikzcd}
 & \{2\} \arrow[dl, "2\mapsto 4"'] \arrow[d, "{\exists! h?\ \text{Não!}}"] \arrow[dr, "2\mapsto 6"] & \\
\{3,4\} & \{35,36,45,46,406\} \arrow[l] \arrow[r] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

t)
$$\begin{tikzcd}
 & \{2\} \arrow[dl, "2\mapsto 4"'] \arrow[d, "{\exists! h?\ \text{Não!}}"] \arrow[dr, "2\mapsto 6"] & \\
\{3,4\} & \{35,36,45\} \arrow[l] \arrow[r] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \{35,36,45,46\} \arrow[dl, "{35\mapsto 3,\ 36\mapsto 3,\ 45\mapsto 4,\ 46\mapsto 4}"'] \arrow[d, "{35\mapsto 53,\ 36\mapsto 63,\ 45\mapsto 54,\ 46\mapsto 64}"] \arrow[dr, "{35\mapsto 5,\ 36\mapsto 6,\ 45\mapsto 5,\ 46\mapsto 6}"] & \\
\{3,4\} & \{53,54,63,64\} \arrow[l, "{53\mapsto 3,\ 54\mapsto 4,\ 63\mapsto 3,\ 64\mapsto 4}"] \arrow[r, "{53\mapsto 5,\ 54\mapsto 5,\ 63\mapsto 3,\ 64\mapsto 4}"'] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

E na categoria H_{10}...

$21 \leftarrow 11 \to 12$ é um P.D.

$$\begin{tikzcd}
 & 11 \arrow[dl] \arrow[d, "\nexists!"] \arrow[dr] & \\
21 & 01 \arrow[l] \arrow[r] & 12
\end{tikzcd}$$

$21 \leftarrow 01 \to 12$ não é P.D.

LA 22/NOV/2016

CALENDÁRIO:

- 22/NOV (HOJE)
- 29/NOV
- 6/DEZ
- 13/DEZ
- 20/DEZ

DEF: $B \xleftarrow{\pi} P \xrightarrow{\pi'} C$

É UM "PRODUCT DIAGRAM" SE:

$\forall A.$
$\forall f : A \to B, \forall g : A \to C.$
$\exists! h : A \to C.$
$h;\pi = f \;\&\; h;\pi' = g.$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ B & P \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & C \end{tikzcd}$$

EXERCÍCIOS (AULA PASSADA):

5) MOSTRE QUE

$\{3,4\} \xleftarrow{\pi} \{35,36,45,46,405\} \xrightarrow{\pi'} \{5,6\}$

NÃO É UM PRODUCT DIAGRAM.

6) IDEM PARA

$\{3,4\} \xleftarrow{\pi} \{35,36,45\} \xrightarrow{\pi'} \{5,6\}$

DEF: $B \xrightarrow{i} S \xleftarrow{i'} C$

É UM "COPRODUCT DIAGRAM" SE:

$\forall A.$
$\forall f : A \leftarrow B, \forall g : A \leftarrow C.$
$\exists! h : A \leftarrow C.$
$h \circ i = f \;\&\; h \circ i' = g.$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & S \arrow[u, "h"] & C \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i'"] \end{tikzcd}$$

EXERCÍCIOS (NOVOS - "DUAIS" DOS DA AULA PASSADA):

5') MOSTRE QUE

$\{3,4\} \xrightarrow{i} \{3,4,5,6,7\} \xleftarrow{i'} \{5,6\}$

NÃO É UM COPRODUCT DIAGRAM.

6') IDEM PARA:

$\{3,4\} \xrightarrow{i} \{3,45,6\} \xleftarrow{i'} \{5,6\}$

7) (FAÇA ANTES DO 5' E DO 6'!) ISTO AQUI É UM "COPRODUCT DIAGRAM":

$\{3,4\} \xrightarrow{i} \{3,4,5,6\} \xleftarrow{i'} \{5,6\}$

ENCONTRE O h ADEQUADO EM CADA UM DESTES CASOS:

a)
$$\begin{tikzcd} & \{35,46,78\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "f"] & & \{5,6\} \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

b)
$$\begin{tikzcd} & \{3,4,5,6,7\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "f"] & & \{5,6\} \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

7a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] & \{35,46,78\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "f"', "{3\to35,\ 4\to46}"] \arrow[r, "{3\to3,\ 4\to4}"'] & \{3,4,5,6\} \arrow[u, "{3\to35,\ 4\to46,\ 5\to35,\ 6\to46}"] & \{5,6\} \arrow[ul, "g", "{5\to35,\ 6\to46}"'] \arrow[l, "{5\to5,\ 6\to6}"] \end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] & \{3,4,5,6,7\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "{3\to3,\ 4\to4}"] \arrow[r, "{3\to3,\ 4\to4}"'] & \{3,4,5,6\} \arrow[u, "{3\to3,\ 4\to4,\ 5\to5,\ 6\to6}"] & \{5,6\} \arrow[ul, "{5\to5,\ 6\to6}"'] \arrow[l, "{5\to5,\ 6\to6}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] & \{1,2\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "{f = 3\to1,\ 4\to2}"] \arrow[r, "{3\to3,\ 4\to4 = i}"'] & \{3,4,5,6,7\} \arrow[u, "{7\to1 / 7\to2,\ 3\to1,\ 4\to2,\ 5\to1,\ 6\to2 = h}"] & \{5,6\} \arrow[ul, "{5\to1,\ 6\to2 = g}"'] \arrow[l, "{5\to5,\ 6\to6 = i'}"] \end{tikzcd}$$

$h \circ i = f$? sim

$h \circ i' = g$? sim

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] & \{1,2\} & \\ \{3,4\} \arrow[ur, "{3\to1,\ 4\to2}"] \arrow[r, "{3\to3,\ 4\to45}"'] & \{3,45,6\} \arrow[u, "{3\to1,\ 6\to2,\ 45\to\ ?}"] & \{5,6\} \arrow[ul, "{5\to1,\ 6\to2}"'] \arrow[l, "{5\to45,\ 6\to6}"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{LA } 22/\text{NOV}/2016}$

Calendário:

22/nov (hoje)
29/nov
6/dez
13/dez
20/dez

Em Set,
$\{1\}$ é um terminal,
$\{\}$ é um inicial,

$B \xleftarrow{\pi} B\times C \xrightarrow{\pi} C$ é um product diagram para quaisquer B e C,

$B \xrightarrow{i} B\cup C \xleftarrow{i} C$ é um coproduct diagram quando B e C são disjuntos

e

$\{3,4\} \to \{3,4,5\} \leftarrow \{4,5\}$ ~~Não é~~ um coproduct diagram...

Lembre que $B \to C$ (ou C^B em notação tradicional) é o conjunto das funções de B em C...

Se $B=\{1,2\}$, $C=\{3,4\}$,

$$B\to C = \left\{ \begin{matrix} 1\mapsto 3 & 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 3, & 2\mapsto 4, \\ 1\mapsto 4 & 1\mapsto 4 \\ 2\mapsto 3, & 2\mapsto 4 \end{matrix} \right\}$$

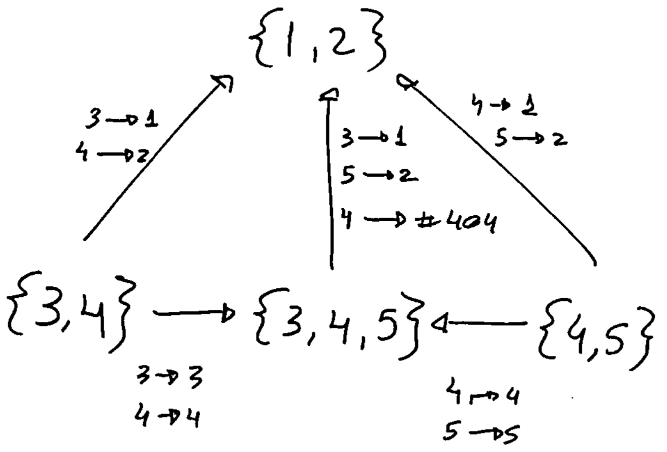
Como a gente "caracteriza categoricamente" o $B\to C$?

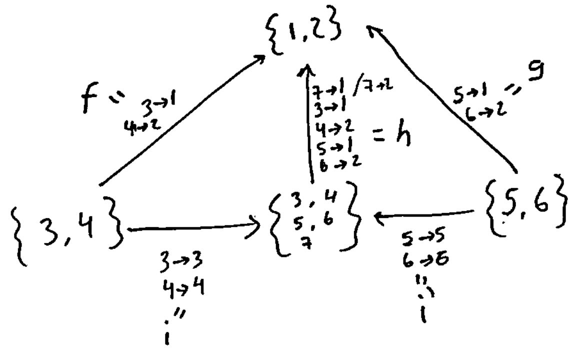
Idéia:

$$\begin{matrix} A\times B & & A \\ f\downarrow & \leftrightarrow & \downarrow g \\ C & & B\to C \end{matrix}$$

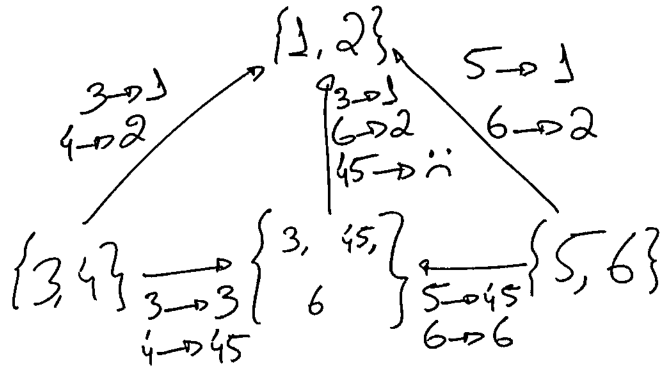
$$\mathrm{Hom}(A\times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, B\to C)$$

mesmo número de elementos; "naturalmente isomorfos"





$h\circ i = f$? sim
$h\circ i' = g$? sim



LA 29/NOV/2016

NA AULA PASSADA A GENTE VIU QUE ISTO É UM "PRODUCT DIAGRAM",

$$\{3,4\} \leftarrow \begin{Bmatrix}(3,5),(3,6)\\(4,5),(4,6)\end{Bmatrix} \rightarrow \{5,6\}$$

ISTO É UM "COPRODUCT DIAGRAM",

$$\{3,4\} \rightarrow \begin{Bmatrix}3,4,\\5,6\end{Bmatrix} \leftarrow \{5,6\}$$

E ISTO AQUI <u>NÃO É</u> UM "COPRODUCT DIAGRAM":

$$\{3,4\} \rightarrow \{3,4,5\} \leftarrow \{4,5\}$$

A NOTAÇÃO ABSTRATA DÁ UMA DICA:

$$A \leftarrow A\times B \rightarrow B$$

ISTO É UM PRODUCT DIAGRAM, E $|A\times B| = |A|\times|B|$.

$$A \rightarrow A+B \leftarrow B$$

ISTO É UM COPRODUCT DIAGRAM, E $|A+B| = |A|+|B|$.

TRUQUE DO LIVRO PARA UNIÕES DISJUNTAS:

$$A+B = \{(a,1) \mid a\in A\} \cup \{(b,2) \mid b\in B\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1\} & \\
A \arrow[ur, "f = {\substack{3\mapsto 0\\ 4\mapsto 1}}"] \arrow[r, "i"'] & A+B \arrow[u, "h"] & B \arrow[l, "i'"] \arrow[ul, "{\substack{4\mapsto 0\\ 5\mapsto 1}} = g"']
\end{tikzcd}$$

$A = \{3,4\}$, $A+B = \begin{Bmatrix}(3,1),\\(4,1),\\(4,2),\\(5,2)\end{Bmatrix}$, $B = \{4,5\}$

$i = \substack{3\mapsto(3,1)\\4\mapsto(4,1)}$ $\quad$ $i' = \substack{4\mapsto(4,2)\\5\mapsto(5,2)}$

$$B \xrightarrow{i} S \xleftarrow{i'} C$$

É UM COPRODUCT DIAGRAM SE E SÓ SE:

$\forall A.$
$\forall f: B\to A,\ \forall g: C\to A.$
$\exists! h: S\to A.$
$f = i;h\ \&\ g = i';h.$

LEMBRE QUE:
$f = \lambda p{:}A\times B.\,(\pi' p, \pi p)$.
SE $A = \{1,2\}$ E $B = \{3,4\}$
ENTÃO $f(2,3) = ?$
$\quad =$
$(\lambda \underbrace{p}_{(2,3)}{:}A\times B.\,\underbrace{(\underbrace{\pi' p}_{3}, \underbrace{\pi p}_{2})}_{(3,2)})(2,3)$

UMA NOTAÇÃO QUE (ACHO QUE) TODO MUNDO ENTENDE:

$$(\lambda(\underset{2}{x},\underset{3}{y}){:}A\times B.\,(\underset{3}{y},\underset{2}{x}))(2,3)$$

ISTO "ABREVIA" ISTO AQUI:

$$(\lambda \underbrace{p}_{(x,y)}{:}A\times B.\,(\underbrace{\pi'\underbrace{p}_{(x,y)}}_{y}, \underbrace{\pi \underbrace{p}_{(x,y)}}_{x}))(2,3)$$

DICIONÁRIO:

FORMAL	ABREVIADO
p	(x,y)
πp	x
$\pi' p$	y

P.S DO PAUL BLAIN LEVY:
"pm" QUER DIZER "pattern-match"
$\mathrm{inl}(x)$ É ALGO COMO $(x,1)$
$\mathrm{inr}(y)$ É ALGO COMO $(y,2)$

EXERCÍCIOS PRA ENTENDER A LINGUAGEM DA P.S...

ALIÁS ANTES PRECISAMOS ENTENDER O "$\vdash$"!

IDÉIA:

$$\underbrace{p{:}A\times B,\ f{:}B\to C}_{\substack{\text{"CONTEXTO" — UMA SÉRIE DE}\\ \text{DECLARAÇÕES DE VARIÁVEIS.}}} \vdash \underbrace{f(\pi' p){:}C}_{\substack{\text{"NESTE CONTEXTO ESSA EXPRESSÃO}\\ \text{(A ESQ) FAZ SENTIDO, NÃO DÁ}\\ \text{ERRO, E DÁ UM RESULTADO}\\ \text{DE TIPO C.}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p{:}A\times B \vdash p{:}A\times B}{p{:}A\times B \vdash \pi' p{:}B} \qquad f{:}B\to C \vdash f{:}B\to C}{f{:}B\to C,\ p{:}A\times B \vdash f(\pi' p){:}C}}{f{:}B\to C \vdash (\lambda p{:}A\times B.\, f(\pi' p)){:}A\times B\to C}$$

AS OPERAÇÕES QUE FORMAM TERMOS DE λ-CÁLCULO <u>EM GERAL</u> SÃO:

$$\dfrac{\Gamma\vdash a{:}A \qquad \Gamma'\vdash b{:}B}{\Gamma\cup\Gamma'\vdash c{:}C}$$

EXCETO O "λ", QUE RETIRA UMA VARIÁVEL DO CONTEXTO.
OBS: PODEMOS ACRESCENTAR MAIS VARIÁVEIS AO CONTEXTO...

$$\dfrac{f{:}B\to C,\ p{:}A\times B\vdash f(\pi' p)}{d{:}D,\ f{:}B\to C,\ p{:}A\times B\vdash f(\pi' p)}$$

VOLTANDO À P.S...
$\mathrm{bool} = \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$
OS OUTROS "CONJUNTOS BÁSICOS" POSSÍVEIS SÃO CONJUNTOS DE NÚMEROS...

$A = \{1,2,3\}$ $\quad$ $B = \{2,3,4\}$

$A\times B$ É FORMADO POR PARES DE NÚMEROS.

REGRAS NÃO-TRIVIAIS:

2) $$\dfrac{\Gamma\vdash M{:}A \qquad \Gamma, x{:}A\vdash N{:}B}{\Gamma\vdash \mathrm{let}\ M\ \mathrm{be}\ x.\, N : B}$$

5) $$\dfrac{\Gamma\vdash M{:}\mathrm{bool} \qquad \Gamma\vdash N{:}B \qquad \Gamma\vdash N'{:}B}{\Gamma\vdash \mathrm{if}\ M\ \mathrm{then}\ N\ \mathrm{else}\ N' : B}$$

⋮

8) $$\dfrac{\Gamma\vdash M{:}A+A' \qquad \Gamma, x{:}A\vdash N{:}B \qquad \Gamma, x{:}A'\vdash N'{:}B}{\Gamma\vdash \mathrm{pm}\ M\ \mathrm{as}\ \{\mathrm{inl}\ x.N,\ \mathrm{inr}\ x.N'\} : B}$$

EXERCÍCIOS:

$$(2)\begin{bmatrix}A := C\times D\\ M := (3,4)\\ x := p\\ N := f(\pi p)\\ \Gamma := \Gamma, f{:}C\to B\end{bmatrix} = \dfrac{\begin{pmatrix}\Gamma,\\ f{:}C\to B\\ \vdash (3,4){:}C\times D\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\Gamma,\\ f{:}C\to B,\\ p{:}C\times D\\ \vdash f(\pi p){:}B\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Gamma,\\ f{:}C\to B\\ \vdash \mathrm{let}\ (3,4)\ \mathrm{be}\ p.\ f(\pi p){:}B\end{pmatrix}}$$

$g: a\mapsto f$

$$(5)\begin{bmatrix}M := a<2\\ N := a-10\\ N' := a+10\\ \Gamma := \Gamma, a{:}\mathbb{Z}\\ B := \mathbb{Z}\end{bmatrix} = \dfrac{\begin{pmatrix}\Gamma,\\ a{:}\mathbb{Z}\\ \vdash a<2{:}\mathrm{bool}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\Gamma,\\ a{:}\mathbb{Z},\\ \vdash a-10{:}\mathbb{Z}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\Gamma,\\ a{:}\mathbb{Z},\\ \vdash a+10{:}\mathbb{Z}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\Gamma,\\ a{:}\mathbb{Z}\\ \vdash \mathrm{if}\ a<2\ \mathrm{then}\ a-10\ \mathrm{else}\ a+10{:}\mathbb{Z}\end{pmatrix}}$$

$$(8)\left[\begin{array}{l} A := \{2,3\} \\ A' := \{3,4\} \\ B := \{10,20\} \\ N := (4-x)\cdot 10 \\ N' := 10(x-2) \\ M := f(c) \end{array}\right]$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \Gamma \vdash \\ f(c) : \{2,3\}+\{3,4\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma, \\ x : \{2,3\} \vdash \\ (4-x)\cdot 10 : \{10,20\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma, \\ x : \{3,4\} \vdash \\ 10(x-2) : \{10,20\} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \Gamma \vdash \\ \mathrm{pm}\ f(c)\ \mathrm{as} \\ \quad \{\mathrm{inl}\ x.(4-x)\cdot 10, \\ \quad \mathrm{inr}\ x.10(x-2)\} : \{10,20\} \end{pmatrix}}$$

VOLTANDO À p.5...

$\mathrm{bool} = \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$

OS OUTROS "CONJUNTOS BÁSICOS" POSSÍVEIS SÃO CONJUNTOS DE NÚMEROS...

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{2,3,4\}$

$A \times B$ É FORMADO POR PARES DE NÚMEROS.

REGRAS NÃO-TRIVIAIS:

$$2)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma, x : A \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathrm{let}\ M\ \mathrm{be}\ x.\,N : B}$$

$$5)\ \frac{\Gamma \vdash M : \mathrm{bool} \qquad \Gamma \vdash N : B \qquad \Gamma \vdash N' : B}{\Gamma \vdash \mathrm{if}\ M\ \mathrm{then}\ N\ \mathrm{else}\ N' : B}$$

$$8)\ \frac{\Gamma \vdash M : A+A' \qquad \Gamma, x : A \vdash N : B \qquad \Gamma, x : A' \vdash N' : B}{\Gamma \vdash \mathrm{pm}\ M\ \mathrm{as}\ \{\mathrm{inl}\ x.N, \mathrm{inr}\ x.N'\} : B}$$

EXERCÍCIOS:

$$(2)\left[\begin{array}{l} A := C\times D \\ M := (3,4) \\ x := p \\ N := f(\pi p) \\ \Gamma := \Gamma, f : C\to B \end{array}\right] = \frac{\begin{pmatrix} \Gamma, \\ f : C\to B \\ \vdash (3,4) : C\times D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma, \\ f : C\to B, \\ p : C\times D \\ \vdash f(\pi p) : B \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \Gamma, \\ f : C\to B \\ \vdash \mathrm{let}\ (3,4)\ \mathrm{be}\ p.\, f(\pi p) : B \end{pmatrix}}$$

$$(5)\left[\begin{array}{l} M := a<2 \\ N := a-10 \\ N' := a+10 \\ \Gamma := \Gamma, a : \mathbb{Z} \\ B := \mathbb{Z} \end{array}\right] = \frac{\begin{pmatrix} \Gamma, \\ a : \mathbb{Z} \\ \vdash a<2 : \mathrm{bool} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma, \\ a : \mathbb{Z}, \\ \vdash a-10 : \mathbb{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma, \\ a : \mathbb{Z}, \\ \vdash a+10 : \mathbb{Z} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \Gamma, \\ a : \mathbb{Z} \\ \vdash \mathrm{if}\ a<2\ \mathrm{then}\ a-10\ \mathrm{else}\ a+10 : \mathbb{Z} \end{pmatrix}}$$

LA 6/set/2016

Um programa em Lua com "λ"s e closures:

```
foo = function ()
  local storage
  return
    function () return storage end,
    function (x) storage=x; return x end
end

get1, set1 = foo()
get2, set2 = foo()
print (set1(22), get1 ())                  --> 22 22
print (set2(33), get1 (), get2 ())         --> 33 22 33
```

Em termos mais familiares, isto é:

```
foo = λ() (
        local s,
        (λ() s),
        (λx s:=x, x)
      )
(get1, set1) = foo()
(get2, set2) = foo()
print(set1(22), get1())
print(set2(33), get1(), get2())
```

$f = \lambda x.\ x^2$

$f(5) \quad \dashrightarrow 25$

$f := \lambda x. 10x$

$f(5) \quad \dashrightarrow 50$

OBS.

$\underbrace{(\lambda \underset{3}{a}\ \lambda b. 10a+b)(3)}_{(\lambda \underset{4}{b}\ 10\cdot 3+b)}(4) \to 10\cdot 3+4$

$(\lambda x\ \lambda y\ x)(3)(4)$

$(\lambda x\ \lambda y\ y)(3)(4)$

$(\lambda x. \underbrace{\lambda x\ x}_{\lambda y\ y})(3)(4)$

$\underbrace{(\lambda \underset{3}{x}\ \lambda x\ x)(3)}_{(\lambda \underset{4}{x}\ \underset{4}{x})}(4) \to 4$

Outro programa mais simples:

$s = 234$

$get := (\lambda().\ s)$

$set := (\lambda x.\ s := x;\ x)$

$print(\underbrace{get()}_{234}, \underbrace{set(22)}_{22}, \underbrace{get()}_{})$

Primeira observação:
(antes da gente ver a linguagem mais estranha)

Na aula passada a gente viu contextos...

$g = \lambda p\ (f(\pi p), \pi' p)$

só "faz sentido" (só "tem valor", só "pode ser calculado") quando a gente sabe f —

p. ex., se $f := \begin{smallmatrix}1 \mapsto 10 \\ 2 \mapsto 20\end{smallmatrix}$

e $f: \{1,2\} \to \{10,20,30\}$

então...

(dica: tudo fica mais fácil no caso

$g' = \lambda p : \{1,2\} \times \{3,4\}.\ (f(\pi p), \pi' p)$.

temos

$g'(1,3) \rightsquigarrow$

$g'(1,4) \rightsquigarrow$

$g'(2,3) \rightsquigarrow$

$g'(2,4) \rightsquigarrow$

e $g' = \{(10,3),(10,4),(20,3),(20,4)\}$

Se $f = \{(1,10),(2,20)\}$,

$A = \{1,2,3\}$,

$B = \{10,20,30\}$,

então $f : A \to B$?

Não, porque

$(\forall a \in A\ \exists! b \in B.\ (a,b) \in f)$

$\leftrightarrow$ $(\exists! b \in B\ (1,b) \in f$ ← vero $(b=10)$

$\&\ \exists! b \in B.\ (2,b) \in f$ ← vero $(b=20)$

$\&\ \exists! b \in B.\ (3,b) \in f)$ ← falso $(\nexists b)$

Pra calcular g', fazemos:

p	$g'(p)$
(1,3)	(10, 3)
(1,4)	(10, 4)
(2,3)	(20, 3)
(2,4)	(20, 4)

e aí $g' = \{((1,3),(10,3)), ((1,4),(10,4)), ((2,3),(20,3)), ((2,4),(20,4))\}$.

OBS:
$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

OBS 2
Se $f = \begin{smallmatrix}1 \mapsto 10 \\ 2 \mapsto 20\end{smallmatrix}$ então $f = \{(1,10),(2,20)\}$
isto aqui é verdade?
a) $f\ \{1,2\} \to \{10,20,30\}$
b) $f\ \{1,2,3\} \to \{10,20,30\}$
c) $f\ \{1\} \to \{10,20,30\}$

Dica
$(f : A \to B)$
$\leftrightarrow (f \subseteq A \times B\ \&$
$\forall a \in A\ \exists! b \in B\ (a,b) \in f)$

LA 6/dez/2016

Um programa em Lua com "λ"s e closures:

```
foo = function ()
  local storage
  return
    function () return storage end,
    function (x) storage=x; return x end
end

get1, set1 = foo()
get2, set2 = foo()
print (set1(22), get1 ())                  --> 22 22
print (set2(33), get1 (), get2 ())         --> 33 22 33
```

Em termos mais familiares, isto é:

```
foo = λ() (
          local s,
          (λ() s),
          (λx s:=x, x)
      )
(get1, set1) = foo()
(get2 set2) = foo()
print(set1(22), get1())
print(set2(33), get1(), get2())
```

$f = \lambda x.x^2$

$f(5) \dashrightarrow 25$

$f := \lambda x.10x$

$f(5) \dashrightarrow 50$

OBS:

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda \underset{3}{a}.\ \lambda b.\ 10a+b)(3)}(4)}_{\underbrace{(\lambda \underset{4}{b}.\ 10\cdot 3+b)(4)}_{10\cdot 3+4}}$$

$(\lambda x.\ \lambda y.\ x)(3)(4)$

$(\lambda x.\ \lambda y.\ y)(3)(4)$

$(\lambda x.\ \underbrace{\lambda x.\ x}_{\overset{\shortparallel}{\lambda y.\ y}})(3)(4)$

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda \underset{3}{x}.\ \lambda x.\ x)(3)}(4)}_{\underbrace{(\lambda \underset{4}{x}.\ \underset{4}{x})(4)}_{4}}$$

Outro programa mais simples:

$s := 234$

$get := (\lambda().\ s)$

$set := (\lambda a.\ s := a;\ a)$

$print(\underbrace{get()}_{234}, \underbrace{set(22)}_{22}, get())$

Primeira observação:
(antes da gente ver a linguagem mais estranha)

Na aula passada a gente viu contextos...

$g := \lambda p.(f(\pi p), \pi' p)$

só "faz sentido" (só "tem valor", só "pode ser calculado")
quando a gente sabe f...
p. ex., se $f := \begin{smallmatrix}1\mapsto 10\\ 2\mapsto 20\end{smallmatrix}$

e $f: \{1,2\} \to \{10,20,30\}$

Então...
(dica: tudo fica mais fácil no caso
$g' = \lambda p{:}\{1,2\}\times\{3,4\}.(f(\pi p), \pi' p)$ ...
temos

$$g' = \left\{\begin{matrix}((1,3),(10,3)),\\ ((1,4),(10,4)),\\ ((2,3),(20,3)),\\ ((2,4),(20,4))\end{matrix}\right\}\ )$$

OBS. $g' : \{1,2\}\times\{3,4\} \to \{10,20,30\}\times\{3,4\}$
$g' : \{1,2\}\times\{3,4\} \to \{10,20,30,40\}\times\{3,4\}$

Mas digamos que a gente sabe A e B e não sabe f...
Então dá pra gente imaginar uma linguagem na qual isto vale,

$g := \lambda p{:}\{1,2\}\times\{3,4\}.(f(\pi p), \pi' p)$

e aí o g não é "calculado na hora da definição" como a gente fez com g'...

Isto aqui,

$g\ (1,3)$

só é calculado na hora em que a g recebe argumentos, e aí o f é "consultado" entre as variáveis globais

Em algumas linguagens toda função pode alterar as variáveis globais quando é executada

Lembrando...

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p{:}A\times B]^1}{\pi p : A} \quad f{:}A\to C}{f(\pi p) : C} \quad \dfrac{[p{:}A\times B]^1}{\pi' p : B}}{(f(\pi p), \pi' p) : C\times B}}{(\lambda p{:}A\times B.\ (f(\pi p), \pi' p)) : A\times B \to C\times B}1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\&Q]^1}{P} \quad P\to R}{R} \quad \dfrac{[P\&Q]^1}{Q}}{R\&Q}}{P\&Q \to R\&Q}1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\&Q \vdash P\&Q}{P\&Q \vdash P} \quad P\to R \vdash P\to R}{P\to R, P\&Q \vdash R} \quad \dfrac{P\&Q \vdash P\&Q}{P\&Q \vdash Q}}{P\to R, P\&Q \vdash R\&Q}}{P\to R \vdash P\&Q \to R\&Q}$$

$$\dfrac{f{:}A\to C,\ p{:}A\times B \vdash (f(\pi p), \pi' p) : C\times B}{f{:}A\to C \vdash (\lambda p{:}A\times B.\ (f(\pi p), \pi' p)) : A\times B \to C\times B}$$

E em categorias?

$$\begin{array}{ccc} (f,p) & (A\to C)\times(A\times B) & \\ \downarrow & & \\ (f(\pi p), \pi' p) & A\times B \to C\times B & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (A\to C)\times(A\times B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda(f,p).(f(\pi p),\pi' p)} \\ A\times B \to C\times B \end{array}$$

LA 13/Dez/2016

NA ÚLTIMA AULA A GENTE VIU ESTA NOTAÇÃO AQUI:

$$\frac{p:A\times B,\ f:B\to C \vdash (\pi p, f(\pi' p)):A\times C}{f:B\to C\vdash \lambda p{:}A\times B.(\pi p, f(\pi' p)):A\times B\to A\times C}$$

E A GENTE VIU QUE A GENTE PODE ENTENDER A EXPRESSÃO COM "⊢" ACIMA DA BARRA COMO UMA FUNÇÃO

$$(A\times B)\times(B\to C) \xrightarrow{(p,f)\mapsto(\pi p, f(\pi' p))} A\times C$$

E A DA DIREITA COMO ISTO:

$$B\to C \xrightarrow{f\mapsto \lambda p:A\times B.(\pi p, f(\pi' p))} A\times B\to A\times C$$

COMO É QUE A GENTE AUMENTA O λ-CÁLCULO PRA ELE PERMITIR ACESSAR E <u>MODIFICAR</u> VARIÁVEIS GLOBAIS?

$(\pi p, f(\pi' p))$ É UMA EXPRESSÃO EM λC – ELA RETORNA UM VALOR.

NO "λ-CÁLCULO COM GLOBAIS" CADA EXPRESSÃO QUE RETORNA UM VALOR PODE SER <u>PRECEDIDA</u> POR UM ASSIGNMENT.

EXEMPLO:

$$\underbrace{a:=\pi p}_{\text{ASSIGNMENT}};\ \underbrace{(\pi p, f(\pi' p))}_{\text{RETORNA UM VALOR.}}$$

HOJE:

COMO INTERPRETAR λ-CÁLCULO COM ASSIGNMENTS ("λCA") EM SET?

TRUQUE:

PRECISAMOS FIXAR UM "CONTEXTO" – VARIÁVEIS GLOBAIS E SEUS TIPOS.

P.ex.:

$a: A \qquad A=\{1,2\}$

$f: A\times A\to B \qquad B=\{10,20\}$

$b: B$

$g: A\to B$

DETERMINE OS TIPOS DAS SUBEXPRESSÕES MARCADAS COM "⌣"S.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a:=1;\ g:=\underbrace{\lambda \underbrace{\alpha}_{A}:A.\underbrace{10\cdot\underbrace{\alpha}_{A}}_{B}}_{A\to B};\ \underbrace{b:=\underbrace{20}_{B};\ \underbrace{\lambda \underbrace{p}_{A\times A}:A\times A.\underbrace{\pi p}_{A}}_{A\times A\to A}}_{A\times A\to A}}}_{A\times A\to A}}}_{A\times A\to A}}$$

2ª PARTE DO TRUQUE:

UM <u>VALOR PRO CONTEXTO</u> É UMA 4-UPLA (a,f,b,g), COM UM VALOR PRA CADA UM DOS GLOBAIS.

ALGO COMO $\underbrace{\lambda \underbrace{p}_{A\times A}:A\times A.\underbrace{\pi p}_{A}}_{A\times A\to A}$ SÓ RETORNA UM VALOR,

MAS ALGO COMO $b:=20;\ \lambda p:A\times A.\pi p$ ALTERA O CONTEXTO...

EXERCÍCIO:

CALCULEM:

p	πp
(1,1)	1
(1,2)	1
(2,1)	2
(2,2)	2

$\lambda p:A\times A.\pi p$

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$\lambda p:A\times A.\pi p = \begin{pmatrix}(1,1)\mapsto 1\\ (1,2)\mapsto 1\\ (2,1)\mapsto 2\\ (2,2)\mapsto 2\end{pmatrix}$

LEMBRE QUE A SINTAXE É:

λ VARIÁVEL : CONJUNTO . EXPRESSÃO

E LEMBRE QUE

$\lambda a:\{2,3\}.10a = \{(2,20),(3,30)\} = \begin{pmatrix}2\mapsto 20\\ 3\mapsto 30\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}(1,1)\mapsto 1\\ (1,2)\mapsto 1\\ (2,1)\mapsto 2\\ (2,2)\mapsto 2\end{pmatrix}$

$\delta = \lambda(x,y,z):A\times A\times B.\,y$

$\delta(1,2,10)=2$

$\delta(u,v,10)=v$

$\beta = \lambda p:A\times A.\pi p$

$\gamma = b:=20;\ \lambda p:A\times A.\pi p$

PODEMOS INTERPRETAR γ COMO:

$\lambda(a,f,b,g):\ldots.((a',f',b',g'),\beta)$

$\overline{\gamma} = \lambda(\underbrace{a}_{1},\underbrace{f}_{f},\underbrace{b}_{10},\underbrace{g}_{g}):\begin{pmatrix}A\times\\(A\times A\to B)\times\\B\times\\(A\to B)\end{pmatrix}.((\underbrace{a}_{1},\underbrace{f}_{f},20,\underbrace{g}_{g}),(\lambda p:A\times A.\pi p))$

$\overline{\gamma}(1,f,10,g) = ((1,f,20,g),\underbrace{(\lambda p:A\times A.\pi p)}_{\begin{pmatrix}(1,1)\mapsto 1\\(1,2)\mapsto 1\\(2,1)\mapsto 2\\(2,2)\mapsto 2\end{pmatrix}})$

LA 20/DEZ/2016

HOJE: ÚLTIMA AULA!
- FUNTORES
- TRANSFORMAÇÕES NATURAIS
- ADJUNÇÕES
- CATEGORIAS ESTRANHAS

JÁ VIMOS CATEGORIAS... FALTOU COMUTATIVIDADE DE DIAGRAMAS.
EXEMPLO:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

A GENTE DIZ QUE ELE "COMUTA" SE TODOS OS JEITOS DE CALCULAR $A \to D$ NELE DÃO O MESMO RESULTADO...
OU SEJA: $g;k = f;h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & C \arrow[d, "l"] \\ D \arrow[r, "m"'] & E \arrow[r, "n"'] & F \end{tikzcd}$$

AQUI A GENTE DIZ QUE O DIAGRAMA "COMUTA" SE TODOS OS JEITOS NATURAIS DE CALCULAR $A \to E$ ...,
IDEM PARA $B \to F$ ...,
IDEM PARA $A \to F$.

$h;m = f;k$,
$k;n = g;l$,
$h;m;n = f;k;n = f;g;h$.

$wd(A \to E)$
$wd(B \to F)$
$wd(A \to F)$

DIZER QUE UM DIAGRAMA MAIS COMPLICADO "COMUTA" É DIZER QUE "TODAS AS CONSTRUÇÕES NATURAIS DE __ DÃO O MESMO RESULTADO" PARA TODOS OS "__".

GRANDE TRUQUE (PRINCIPAL MOTIVO DA GENTE QUERER ASSOCIATIVIDADE EM CATEGORIAS):

[SUB-TRUQUE: $wd(A \to E)$ É "$A \to E$ ESTÁ "WELL-DEFINED"", TODAS AS CONSTRUÇÕES NATURAIS PRA ELE DÃO O MESMO RESULTADO]

PEGUE UM DIAGRAMA PLANAR NO QUAL TODA "CÉLULA" TEM EXATAMENTE UMA "SOURCE" E UMA "SINK"; ENTÃO SE CADA CÉLULA COMUTA O DIAGRAMA TODO COMUTA.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & F \arrow[d] \\ G \arrow[rr] & & H \end{tikzcd}$$

$wd(A \to E)$ $wd(B \to F)$
$wd(D \to H)$

REPARA: $ABCF = ADEF$

$A \to B \to C \to F =$
$A \to (B \to C \to F) =$
$A \to (B \to E \to F) =$
$(A \to B \to E) \to F =$
$(A \to D \to E) \to F =$

EXERC: MOSTRE QUE $ABCFH = ADGH$.

⇩

$A - B - C - F - H =$
$A \to (B \to C \to F) \to H =$
$A \to (B \to E \to F) \to H =$
$(A \to B \to E) \to F \to H =$
$(A \to D \to E) \to F \to H =$
$A \to (D \to E \to F \to H) =$
$A \to (D \to G \longrightarrow H)$

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, "\substack{1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4}"] \arrow[dr, "\substack{1 \mapsto 5 \\ 2 \mapsto 6}"'] & \{3,4\} \arrow[d, "\substack{3 \mapsto 5 \\ 4 \mapsto 6}"] \\ & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

FUNTORES

A GENTE JÁ VIU ALGUNS, MAS DISFARÇADOS...

$$\begin{tikzcd} \{3,4\} \arrow[d, "\substack{3 \mapsto 5 \\ 4 \mapsto 6}"] \\ \{5,6\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{1,2\} \times \{3,4\} \arrow[d] \\ \{1,2\} \times \{5,6\} \end{tikzcd}$$

$(1,3) \mapsto (1,5)$
$(1,4) \mapsto (1,6)$
$(2,3) \mapsto (2,5)$
$(2,4) \mapsto (2,6)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times B \arrow[d, "(A\times)(f)"] \\ A \times C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A\times)(B) \arrow[d, "(A\times)(f)"] \\ (A\times)(C) \end{tikzcd}$$

UM FUNTOR F (OU, NO EXEMPLO, $A\times$) LEVA CADA OBJETO B NUM OBJETO FB $((A\times)B)$
E C FC $((A\times)C)$
("AÇÃO SOBRE OBJETOS")
E ELE LEVA CADA MORFISMO $\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ C \end{tikzcd}$ NUM $\begin{tikzcd} FB \arrow[d, "Ff"] \\ FC \end{tikzcd}$ $\left(\begin{tikzcd} (A\times)B \arrow[d, "(A\times)f"] \\ (A\times)C \end{tikzcd}\right)$

$f: B \to C$ $Ff: FB \to FC$
("AÇÃO SOBRE MORFISMOS")

REPARA QUE FUNTORES "DUPLICAM DIAGRAMAS"!!!

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & D \arrow[d, "j"] \\ E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m"'] & G \arrow[r, "l"] & H \arrow[d, "n"] \\ I \arrow[rr, "o"'] & & J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FB \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Fh"'] & FC \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "Fi"] & FD \arrow[d, "Fj"] \\ FE \arrow[r, "Fk"] \arrow[d, "Fm"'] & FG \arrow[r, "Fl"] & FH \arrow[d, "Fn"] \\ FI \arrow[rr, "Fo"'] & & FJ \end{tikzcd}$$

... E UM FUNTOR TEM QUE OBEDECER DUAS CONDS EXTRAS, QUE FORAM INVENTADAS PRA GARANTIR QUE SE O DIAGRAMA ORIGINAL COMUTAVA, O NOVO COMUTA TAMBÉM.

CONDIÇÕES: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$

$wd(FA \to FC)$!!!
OU SEJA: $Ff;Fg = F(f;g)$

OUTRA CONDIÇÃO:
$A \xrightarrow{id_A} A$

$FA \to FA$
$wd(FA \to FA)$

$$\dfrac{\dfrac{A}{id_A : A \to A}}{F(id_A) : FA \to FA}$$

$$\dfrac{\dfrac{A}{FA}}{id_{FA} : FA \to FA}$$

LA 20/Dez/2016

Hoje: Última aula!

- Funtores
- Transformações naturais
- Adjunções
- Categorias estranhas

Transformações naturais "relacionam" dois funtores... Se a gente conhece funtores F e G, um TN $T: F \to G$ é isso aqui:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dd, bend right, "TA"'] & FB \arrow[d, "Fh"] \arrow[dd, bend left, "TB"] \\ FC \arrow[r, "Fi"] \arrow[dd, bend right, "TC"'] & FD \arrow[dd, bend left, "TD"] \\ GA \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "Gg"'] & GB \arrow[d, "Gh"] \\ GC \arrow[r, "Gi"'] & GD \end{tikzcd}$$

Obs:

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & GB \arrow[ddd] \\ & FA \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d] & FB \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & FC \arrow[dl] \arrow[r] & FD \arrow[dr] & \\ GC \arrow[rrr] & & & GD \end{tikzcd}$$

Um transformação natural ("TN") tem que obedecer isto pra garantir que o diagrama todo comuta:

$\forall A \xrightarrow{f} B.\ wd(FA \to GC)$, isto é:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "TA"'] & FB \arrow[d, "TB"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] & GB \end{tikzcd}$$

isto é: $TA;Gf = Ff;TB$.

Exercício:

Considere estes dois funtores:

$F = (\{0,1\}\times)$

$G = (\{2,3\}\times)$

e este diagrama:

$\{4,5\} \xrightarrow{\substack{4\mapsto 6\\ 5\mapsto 7}} \{6,7\} \xrightarrow{\substack{6\mapsto 8\\ 7\mapsto 9}} \{8,9\}$

$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$

e esta TN:

$T: F \to G$

onde T funciona assim:

$$\{10,20\} \qquad \begin{array}{c} \{0,1\}\times\{10,20\} \\ \downarrow \\ \{2,3\}\times\{10,20\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} (0,10)\mapsto(2,10) \\ (0,20)\mapsto(2,20) \\ (1,10)\mapsto(3,10) \\ (1,20)\mapsto(3,20) \end{array}$$

Escreva por extenso o diagrama:

$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "TC"'] & FD \arrow[r] \arrow[d] & FE \arrow[d] \\ GC \arrow[r] & GD \arrow[r] & GE \end{tikzcd}$$

A gente acabou de entender que:

$(A\times)$ é um funtor

$(B\times)$ é outro funtor

e uma função

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[d, "\substack{0\mapsto 2\\ 1\mapsto 3}"] \\ \{2,3\} \end{tikzcd}$$

induz uma transformação natural

$T: (A\times) \to (B\times)$

$$\begin{tikzcd} B\times A = (\times A)B \arrow[d, "(\times A)f"'] & B \arrow[l, mapsto] \arrow[d, "f"] \\ C\times A = (\times A)C \arrow[d, "h"'] & C \arrow[l, mapsto] \arrow[d, "k"] \\ D \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & (A\to)D \arrow[d, "(A\to)g"] \\ E \arrow[r, mapsto] & (A\to)E \end{tikzcd}$$

Tem um outro funtor que é muito importante...

$A = \{0,1\}$

$$\begin{tikzcd} \{2,3\} \arrow[d, "f"', "\substack{2\mapsto 4\\ 3\mapsto 5}"] \\ \{4,5\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\{0,1\}\to\{2,3\}) \arrow[d, "(\{0,1\}\to)(f)"] \\ (\{0,1\}\to\{4,5\}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \substack{0\mapsto 2\\ 1\mapsto 3} \arrow[d] \\ \substack{0\mapsto 4\\ 1\mapsto 5} \end{tikzcd}$$

A relação entre $(\times A)$ e $(A\to)$ é muito importante...

Existe uma adjunção entre $(\times A)$ e $(A\to)$...

e ela é composta de duas operações (inversas uma da outra):

$$\begin{tikzcd} C\times A \arrow[d, "k^\flat"', "h"] & & C \arrow[d, "k", "h^\sharp"'] \\ D & & A\to D \end{tikzcd}$$

$\longmapsfrom \qquad \longmapsto$