

LA 6/SET/2016

$$\lambda p : A \times B. (g(\pi p), f(\pi' p)) = \left\{ \begin{array}{l} ((1,3), (10,30)), \\ ((1,4), (10,40)), \\ ((2,3), (30,30)), \\ ((2,4), (30,40)) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cc} (g(\pi p), f(\pi' p)) & \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_1 & \underbrace{\quad \quad \quad}_3 \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{10} & \underbrace{\quad \quad \quad}_{30} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{(10,30)} & \end{array}$$

P	(g(πP), f(π'P))
(1,3)	(10,30)
(1,4)	
(2,3)	
(2,4)	

(λp: A × B. (π'P, πP)) =

$$\frac{\frac{P: \sigma \quad P: \pi}{\pi'P: \quad} \text{pair}}{(\pi'P, \piP): \quad} \lambda$$

TYPE INFERENCE

$$\frac{\frac{P: A \times B \quad \pi'P: B \quad \pi'P: A}{(\pi'P, \piP): B \times A} \text{pair}}{(\lambda p: A \times B. (\pi'P, \piP)): A \times B \rightarrow B \times A} \lambda$$

$$\frac{\frac{\frac{A \times B, \pi}{A \rightarrow D, \pi} \quad \frac{A \times B, \pi}{D \quad B} \text{pair}}{D \times B} \lambda}{A \times B \rightarrow D \times B} \lambda$$

TERM INFERENCE

$$\frac{\frac{\frac{P: A \times B \quad \pi'P: A \quad \pi'P: B}{f(\pi'P): D \quad \pi'P: B} \text{pair}}{f(\pi'P), \pi'P): D \times B} \lambda}{(\lambda p: A \times B. (f(\pi'P), \pi'P)): A \times B \rightarrow D \times B} \lambda$$

(a, b) ↦ (f(a), b)

(a, (b, c)) ↦ ((a, b), c)

(1, (4, 30)) ↦ ((1, 4), 30)

QUE FUNCÃO FAZ ISTO?

$$\frac{\frac{t: A \times (B \times C) \quad \pi}{\pi t: A} \text{pair}}{(\pi t, \pi(\pi' t)): A \times B} \text{pair}}{\frac{\frac{t: A \times (B \times C) \quad \pi}{\pi t: A} \quad \frac{(\pi' t): B \times C \quad \pi}{\pi'(\pi' t): B} \text{pair}}{(\pi t, \pi(\pi' t)): A \times B} \text{pair}}{\frac{(\pi t, \pi(\pi' t), \pi'(\pi' t)): (A \times B) \times C}{(\lambda t: A \times (B \times C). (\pi t, \pi(\pi' t), \pi'(\pi' t))) : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C} \lambda} \lambda$$

CLASSICAL LOGIC:

$\Omega = \{0, 1\}$ Ω_{cl}
 $\& = \left\{ \begin{matrix} ((0,0), 0) \\ ((0,1), 0) \\ ((1,0), 0) \\ ((1,1), 1) \end{matrix} \right\}$ $\&_{cl}$
 $\vee = \dots$ \vee_{cl}
 $\rightarrow = \dots$
 $\leftrightarrow = \dots$
 $\neg = \left\{ \begin{matrix} (0, 1) \\ (1, 0) \end{matrix} \right\}$

LOGIC:

$CL = (\Omega, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$
 $= (\{0, 1\}, \left\{ \begin{matrix} ((0,1), 0) \\ ((1,0), 0) \\ ((1,1), 1) \end{matrix} \right\}, \dots)$

SERÁ QUE $\neg\neg P \rightarrow P$ É SEMPRE VERDADE?

TEMOS DOIS CASOS:

$P=0:$ $\neg\neg P \rightarrow P$
 $\neg\neg 0 \rightarrow 0$
 $\neg(\neg 0) \rightarrow 0$
 $\neg(1) \rightarrow 0$
 $0 \rightarrow 0$
 1

$P=1:$ $\neg\neg P \rightarrow P$
 $\neg\neg 1 \rightarrow 1$
 $\neg(\neg 1) \rightarrow 1$
 $\neg(0) \rightarrow 1$
 $1 \rightarrow 1$
 1

$\neg\neg P \rightarrow P$ É UMA TAUTOLOGIA.

$\forall P \in \Omega. (\neg\neg P \rightarrow P)$ É VERDADEIRO.

3-VALUED LOGIC:

$\Omega_3 = \{00, 01, 11\}$
 $\&_3 =$

EXERCÍCIO:

$\neg\neg P \rightarrow P$ É TAUTOLOGIA

NA LÓGICA DE 3

VALORES? CALCULE OS

TRÊS CASOS: $P=00,$

$P=01,$

$P=11.$

$\neg\neg P \rightarrow P$
 $\neg\neg 00 \rightarrow 00$
 $\neg\neg 01 \rightarrow 01$
 $\neg\neg 11 \rightarrow 11$

TEOREMA

(VAMOS ENTENDE-LO E DEMONSTRAR-LO BEM DEPOIS!):

TUDO QUE É TAUTOLOGIA NA LÓGICA DE 3 VALORES É TAUTOLOGIA NA LÓGICA CLÁSSICA.

(E ISTO TEM ALGUMA RELAÇÃO COM λ -CÁLCULO)

NOTAÇÃO COMPACTA:

$P=0:$ $\neg\neg P \rightarrow P$
 $0 \rightarrow 1$

NOTAÇÕES POSICIONAIS

Um ZSET É UM SUBCONJUNTO DE \mathbb{N}^2 QUE:

a) NÃO É VAZIO,

b) É FINITO,

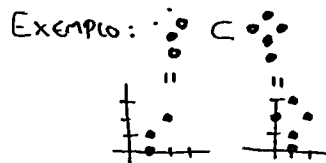
c) TOCA O EIXO VERTICAL (OU SEJA, CONTÉM $(0,0)$ OU $(0,1)$ OU $(0,2) \dots$)

d) TOCA O EIXO HORIZONTAL (CONTÉM $(0,0)$ OU $(1,0)$ OU $(2,0) \dots$)

NOTAÇÃO POSICIONAL:

EXEMPLOS:
 $K = \left\{ \begin{matrix} (0,2) \\ (1,1) \\ (2,2) \end{matrix} \right\}$
 "KITE"
 $H = \{ \dots \}$
 "HOUSE"
 $V =$
 $A =$

NOTAÇÃO POSICIONAL PARA SUBCONJUNTOS



NOTAÇÃO POSICIONAL PARA FUNÇÕES DE ZSETS (EM ...)

EXEMPLO:
 $(\lambda(x,y): K \cdot x) = \left\{ \begin{matrix} ((1,2), 1) \\ ((0,2), 0) \\ ((1,1), 1) \\ ((1,0), 1) \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$

EXERCÍCIOS:

REPRESENTE NA NOTAÇÃO POSICIONAL:

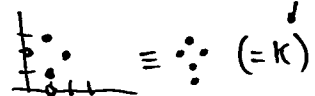
a) $\lambda(x,y): K \cdot y$

b) $\lambda(x,y): H \cdot y > 0$

c) $\lambda(x,y): K \cdot (x,y) \in \dots$

c) $(\lambda(x,y): K \cdot (x,y) \in \dots) = \left\{ \begin{matrix} ((1,3), 0) \\ ((0,2), 0) \\ ((1,1), 1) \\ ((1,0), 1) \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$

LEMBRE-SE DAS NOTAS DE POSICIONAIS:

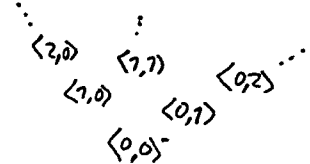


$\lambda(x,y) = K \cdot x \equiv \begin{pmatrix} ((1,y),1) \\ ((2,y),0) \\ ((1,y),1) \\ ((1,0),1) \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ & & 1 \end{matrix}$

COORDENADAS (x,y):

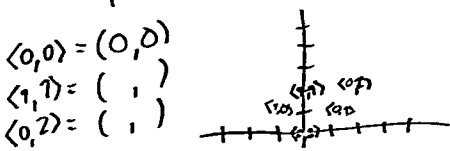
- (0,2)
- (0,1) (1,1)
- (0,0) (1,0) (2,0) ...

COORDENADAS (L,R):
"ANGLE BRACKETS": $\langle \rangle$



NOTAÇÃO CURTA:
 $\langle a,b \rangle \equiv ab$

$\langle a,b \rangle = 0 + a(-1,1) + b(1,1) = (-a+b, a+b)$



$\langle 0,0 \rangle = (0,0)$
 $\langle 1,1 \rangle = (1,1)$
 $\langle 0,2 \rangle = (1,1)$

$valid(\langle a,b \rangle) := \langle a,b \rangle \in \Omega$
 P. ex., $valid(\langle 4,4 \rangle) = 0$
 $valid(\langle 3,2 \rangle) = 1$

$\Omega_{10} = \left\{ \begin{matrix} 32, 22, 12, 02, \\ 21, 11, 01, \\ 20, 10, 00 \end{matrix} \right\}$

EXERCÍCIOS:
 a) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle \leq \langle 1,1 \rangle \equiv \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

OBS:
 $\langle 2,0 \rangle \leq \langle 1,1 \rangle := \begin{matrix} 2 \leq 1 & \& & 0 \leq 1 \\ \text{NU} & \text{NU} & \text{NU} & \text{NU} \\ \Omega_{10} & \Omega_{10} & \Omega_{10} & \Omega_{10} \end{matrix}$

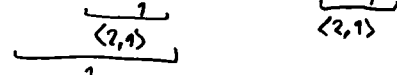
$\Omega_{10} \times \Omega_{10} \rightarrow \{0,1\}$
 Ω_{21}

b) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle \leq \langle 1,2 \rangle \equiv \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

- c) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle \geq \langle 1,1 \rangle$
- d) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle$ left of $\langle 1,1 \rangle$
- e) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle$ right of $\langle 1,1 \rangle$
- f) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle$ above $\langle 1,1 \rangle$
- g) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \langle a,b \rangle$ below $\langle 1,1 \rangle$
- h) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot ne(\langle a,b \rangle)$
- i) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot nw(\langle a,b \rangle)$

SUGESTÃO:
 Comece calculando $ne(10)$ e $nw(12)$.
 OBS: $ne(10) = ne(11) = ne(12) = 12$

Se $a=2 \wedge b=0$,
 $ne(\langle 2,0 \rangle) =$ if $valid(\langle 2,0+1 \rangle)$ then $ne(\langle 2,0+1 \rangle)$ else $\langle 2,0 \rangle$ end



$ne(\langle 2,1 \rangle) :=$ if $valid(\langle 2,2 \rangle)$ then $ne(\langle 2,2 \rangle)$ else $\langle 2,1 \rangle$ end $= ne(\langle 3,2 \rangle)$

$ne(\langle 2,2 \rangle) :=$ if $valid(\langle 2,2+1 \rangle)$ then $ne(\langle 2,2+1 \rangle)$ else $\langle 2,2 \rangle$ end

$\langle 2,3 \rangle$

h) $= \left\{ \begin{matrix} (32,32), \\ (22,22), \\ (21,22), (12,12), \\ (20,22), (01,12), (02,02), \\ (10,12), (01,02), \\ (00,02) \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 32 & & & & \\ & 22 & & & \\ & 22 & & 12 & \\ & & & 12 & 02 \\ & & & & 02 \end{matrix}$

j) Se $P=20 \wedge Q=11$,
 CALCULE: $P \& Q$,
 $P \vee Q$,
 $P \rightarrow Q$.

k) Se $P=02 \wedge Q=11$,
 CALCULE: $P \& Q$,
 $P \vee Q$,
 $P \rightarrow Q$.

l) $\lambda \langle a,b \rangle: \Omega_{10} \cdot \neg \langle a,b \rangle$

LA 27/SET/2016

l) P → 11
Q

Q Q Q
ne ne ne ne
ne ne T T
ne ne F T

11
11 11 31 31
13 13 31 31
13 13 33 33
13 33 33

l') 22 → Q
P

T
T T ne ne
ne ne Q Q
ne Q Q

33
33 33 43 03
37 37 13 03
30 30 10 00

l'') P ↔ 12

P → 12	12 → P
 12 12 32 13 13 33 33 13 13 33 33 13 13 33 33 	 33 33 03 37 37 03 37 37 03 30 30 00

P ↔ 12

12
13 12 32 02
14 13 33 03
10 11 31 01
10 30 00

m) 1P
(P → 1)

00 00 00 30
00 00 00 30
03 03 00 30
03 03 33

m) 11P

33 33 03
33 33 03
33 33 03
30 33 03
30 30 00

LA 4/OCT/2016

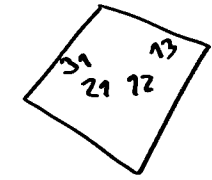
0 = 0'
 p = p'
 r' = r''

CASOS PARTICULARES:

$(P \leq 21 \& 12) \leftrightarrow ((P \leq 21) \& (P \leq 12))$
 $(21 \vee 12 \leq R) \leftrightarrow ((21 \leq R) \& (12 \leq R))$
 $(P \leq 21 \rightarrow 12) \leftrightarrow (P \& 21 \leq 12)$

CASO GERAL:

$(P \leq Q \& R) \leftrightarrow ((P \leq Q) \& (P \leq R)) \quad (\&)$
 $(P \vee Q \leq R) \leftrightarrow ((P \leq R) \& (Q \leq R)) \quad (\vee)$
 $(P \leq Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \& Q \leq R) \quad (\rightarrow)$

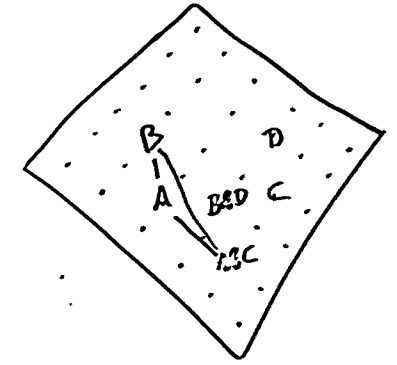


$21 \rightarrow 12 = 13$
 $0 \rightarrow 1 = 1$
 $1 \rightarrow 0 = 0$
 $12 \rightarrow 21 = 31$
 $21 \leftrightarrow 12 = 11$

$(P \leq Q \rightarrow R) \rightarrow (P \& Q \leq R) \quad b$
 $(P \leq Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \& Q \leq R) \quad \#$

$(P \leq Q \& R) \rightarrow ((P \leq Q) \& (P \leq R))$
 $(P \leq Q \& R) \rightarrow P \leq Q$
 $(P \leq Q \& R) \rightarrow P \leq R$
 $(P \leq Q \& R) \leftrightarrow ((P \leq Q) \& (P \leq R)) \quad <, >$

$(Q \& R \leq Q \& R) \rightarrow Q \& R \leq Q$
 $(Q \& R \leq Q \& R) \rightarrow Q \& R \leq R$
 $(Q \& R \leq Q \& R) \rightarrow Q \& R \leq R$



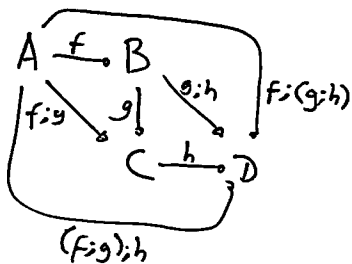
LA 11/OUT/2016

HOJE: CATEGORIAS!!!

A GENTE VAI COMEÇAR POR ESSA IDEIA DAQUI:

Set é a categoria ARQUETIPAL.

$(f \circ g); h = f; (g; h)$



$$((h \circ g) \circ f)(a) = h(g(f(a)))$$

Diagram showing the mapping of element 'a' through functions f, g, and h. The intermediate steps are shown as $3 \mapsto 4$ and $4 \mapsto 5$, resulting in 5 .

$$h(g(f(a)))$$

Diagram showing the direct mapping of element 'a' through the composition of functions, resulting in the same final value '5'.

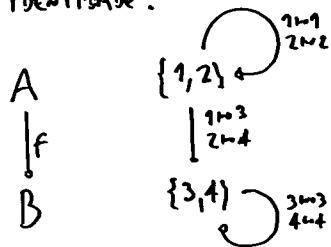
$f; h = \parallel$
 $h \circ f = \parallel$

1ª PROPRIEDADE:

COMPOSIÇÃO É ASSOCIATIVA.

OBS: SÓ DÁ PRA COMPAR SETAS QUANTO O DOMÍNIO DE UMA É O DOMÍNIO DA OUTRA.

EXISTEM "SETAS IDENTIDADE".

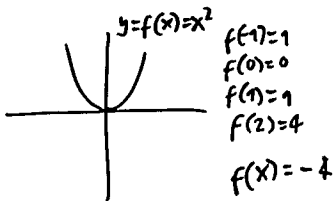


2ª PROPRIEDADE:
 $id_A \circ f = f = f \circ id_B$

"Set é uma categoria" QUER DIZER:

Set = (Obj(Set), Hom_{Set}, ^oSet, id_A; ...)

Obj(Set) = TODOS OS CONJUNTOS
 Hom_{Set}(A, B) = O CONJUNTO DE TODAS AS SETAS DE A EM B
^oSet = COMPOSIÇÃO
 id_A é A SETA IDENTIDADE



Set TEM MUITAS COISAS EXTRAS QUE NÃO SÃO CONSEQUÊNCIA DE Set

SEJA UMA CATEGORIA ...

POR EXEMPLO:

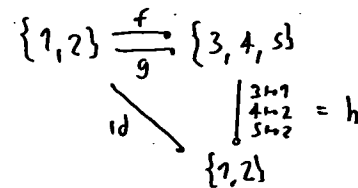
$A \times B$

$A \rightarrow B$

VAMOS VER ISSO DEPOIS.

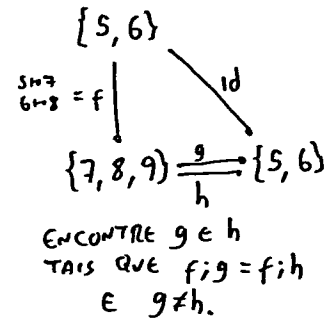
EXERCÍCIOS:

"MULTIPLE INVERSES"



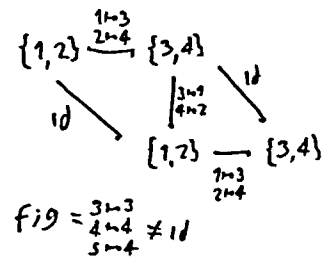
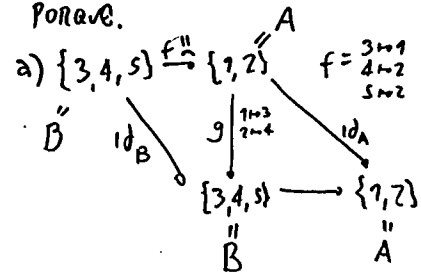
ENCONTRE f e g TAIS QUE f \circ h = g; h E f \neq g.

$f = \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \end{matrix} \quad g = \begin{matrix} 3 \mapsto 7 \\ 4 \mapsto 2 \end{matrix}$



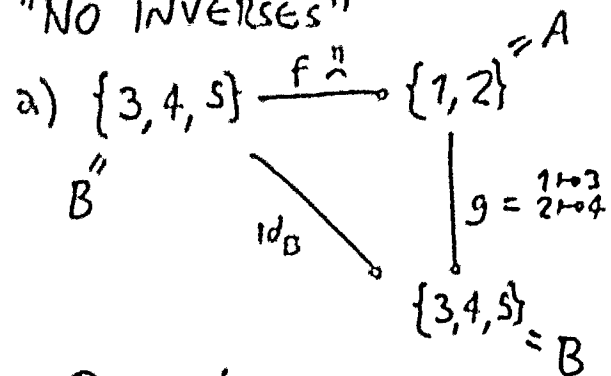
ENCONTRE g e h TAIS QUE f \circ h = g; h E g \neq h.

"NO INVERSES" PRA CADA DUS "||" EXPLIQUE EM PORTUGUÊS PORQUE.



LA 11/OUT/2016

"NO INVERSES"



PROP: $\forall f: B \rightarrow A. f \circ g = id_B.$

OU: $\forall (B \xrightarrow{f} A). f \circ g = id_B.$

DEMONSTRAÇÃO:

$\forall x, y (x \in B \wedge y \in A)$

$(f: B \rightarrow A \wedge g: A \rightarrow B) \rightarrow g \circ f: B \rightarrow B$

$$g \circ f(5) = 5 = g(f(5))$$

$$\in \{g(1), g(2)\}$$

$$= \{3, 4\}$$

$5 \neq 3 \vee 5 \neq 4$

$f \circ g = id_B$

$\Rightarrow f \circ g = \begin{matrix} 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 5 \end{matrix}$

$g \circ f$

$\Rightarrow (g \circ f)(3) = 3 \ \&$

$(g \circ f)(4) = 4 \ \&$

$(g \circ f)(5) = 5 \ \&$

$\Rightarrow g(f(3)) = 3 \ \&$

$g(f(4)) = 4 \ \&$

$g(f(5)) = 5$

PARA

$g(f(5)) = g(1)$

$\vee g(f(5)) = g(2),$

PORTANTO

$g(f(5)) = 3$

$\vee g(f(5)) = 4,$

PORTANTO

$g(f(5)) \neq 5,$

PORTANTO

$g \circ f \neq id_B.$

LA 25/OUT/2016

Hoje:

- MAIS EXERCÍCIOS DE FATORAÇÃO
- FATORAÇÃO ATRAVÉS DE PRODUTO
- CATEGORIAS
- Set e ORDENS PARCIAIS COMO CATEGORIAS
- PRODUTOS EM ORDENS PARCIAIS
- EXPONENCIAIS (?)

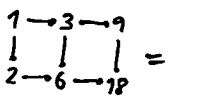
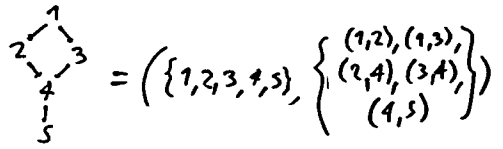
(NINGUÉM VEIO,
FICOU TUDO PRA
SEMANA QUE VEN !!)

LA 1º/NOV, 2016

HOJE: CATEGORIAS!

LEMBRANDO:

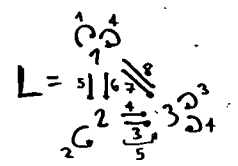
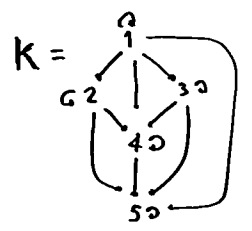
$D = (A, R)$
 GRAFO DIRECIONAL
 VERTICES (CONJUNTO) OBS: $R \subseteq A \times A$
 RELASÃO (SETAS)



$G \rightarrow 4 \rightarrow 5 =$

NOVIDADE:

CATEGORIA:
 $C = (C_0, Hom, id, \circ)$
 "OBJETOS" (CONJUNTO) "HOMO-MORFISMOS" SETAS IDENTIFICADORES COMPOSICÃO



$Hom_L(1,2) = \{f, g\}$
 $Hom_L(1,3) = \{h\}$

$f \circ g: A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$
 $h: A \xrightarrow{h} C$

REPARA QUE A GENTE PODE REPRESENTAR MATEMATICAMENTE AS SETAS $1 \rightarrow 4 \in K$, $2 \rightarrow 5 \in K$ COMO $(1,4)$ E $(2,5)$ OU COMO OUTRA CONVERSÃO...

$Hom_K(1,3) = \{1 \rightarrow 3\}$
 $Hom_K(5,1) = \{\}$

MELHOR:
 $Hom_L(1,2) = \{1 \xrightarrow{f} 2, 1 \xrightarrow{g} 2\}$

SE $A \xrightarrow{g} B \in B \xrightarrow{f} C$
 ENTÃO $A \xrightarrow{f \circ g} C$

EXEMPLO:
 $1 \xrightarrow{f} 2 \in 2 \xrightarrow{g} 3$
 ENTÃO $1 \xrightarrow{g \circ f} 3$
 OU, MAIS PRECISAMENTE,
 $(g \circ f)(1) = (g, 2) = 3$

MELHORANDO A COMPOSICÃO...
 $(2 \xrightarrow{g} 3) \circ (1 \xrightarrow{f} 2) = 1 \xrightarrow{g \circ f} 3$

$id_L(1) = 1 \xrightarrow{id} 1$
 $id_L(2) = 2 \xrightarrow{id} 2$
 $id_L(3) = 3 \xrightarrow{id} 3$

"5" É QUE SETA?
 QUEM SÃO SRC(S) E TGT(S)?
 1 OU 2? 2 OU 3?

TRUQUE: VAMOS ESCREVER AS SETAS COM SEUS SRC E TGT QUANDO FOR PRECISO...

$src(1 \xrightarrow{f} 2) = 1$ $tgt(1 \xrightarrow{f} 2) = 2$
 $src(2 \xrightarrow{g} 3) = 2$ $tgt(2 \xrightarrow{g} 3) = 3$

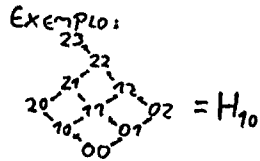
SE $f = \{(1,1), (2,2)\}$, $f(-) =$ ERRO

PROPRIEDADES:
 NUMA CATEGORIA,
 $A \xrightarrow{id} A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{f} B$
 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{id} B = A \xrightarrow{f} B$
 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D = A \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} D$

LA 8/NOV/2016

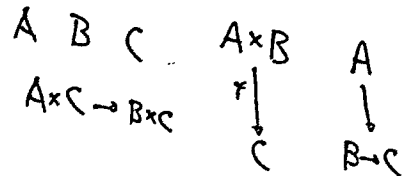
ALGUMAS CATEGORIAS:

- Set
- ORDENS PARCIAIS



AULA QUE VEM:
 MODOS DE CONSTRUIR
 NOVAS CATEGORIAS -
 EXEMPLOS: COMO
 "SOMAS" OU "PRODUTOS"
 DE CATEGORIAS CONHECIDAS.

AGORA:
 O QUE É UM TERMINAL
 NUMA CATEGORIA?
 É UM INICIAL?
 O QUE É UM PRODUTO?



UMA CATEGORIA
 É UMA ESTRUTURA:

$$C = (C_0, Hom_C, id_C, o_C)$$

- TAIS QUE:
- AS IDENTIDADES SE COMPORTAM COMO ESPERADO
 - A COMPOSIÇÃO É ASSOCIATIVA.

EXEMPLO:
 em Set

$$\{1,2\} \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \end{matrix}} \{3,4\}$$

$\{1,2\} \in Set_0$

$\{3,4\} \in Set_0$

$$\{1,2\} \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \end{matrix}} \{3,4\} \in Hom_{Set}(\{1,2\}, \{3,4\})$$

$$\{ \begin{matrix} 1 \mapsto 3 & 1 \mapsto 3 & 1 \mapsto 4 & 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 4 & 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 4 \end{matrix} \}$$

REVISÃO: $\exists!$

- a) (F) $\exists! a \in \{1,2,3\}. a < 10$
- b) (V) $\exists! a \in \{1,2,3\}. a^2 = 4$
- c) (F) $\exists! a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}. a^2 = 4$
- d) (F) $\exists! a \in \{1,2,3\}. a > 10$

COMO É QUE A GENTE MOSTRA
 CADA UM DESSSES "F"IS?

- a) PORQUE $a=2$ E $a=3$
 OBEDECEM $a < 10$,
 E $1 \neq 3$.

e) (F) $\exists! f \in Hom_{Set}(\{1,2\}, \{3,4\})$

FALSO: $\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \end{matrix}$

$\{1,2\} \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \end{matrix}} \{3,4\}$

$\{1,2\} \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 \end{matrix}} \{3,4\}$

$$\{ \begin{matrix} (3,3), (4,3) \end{matrix} \}$$

$$\{ \begin{matrix} 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 3 \end{matrix} \}$$

$$\{3,4\} \rightarrow \{5\}$$

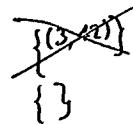
f) (V) $\exists! f: Hom_{Set}(\{3,4\}, \{5\})$

g) (V) $\exists! f: Hom_{Set}(\{ \}, \{1,2\})$

h) (F) $\exists! f: Hom_{Set}(\{1,2\}, \{ \})$

i) (V) $\exists! f: Hom_{Set}(\{ \}, \{ \})$

j) (F) $\exists! f: Hom_{Set}(\{3\}, \{ \})$



LEMBREM QUE

$$\exists! a \in A. P(a)$$

$$\leftrightarrow \exists a \in A. P(a) \ \&$$

$$\forall a, a' \in A. P(a) \ \& \ P(a') \rightarrow a = a'$$

"EXISTE 2"

"EXISTE NO MÁXIMO UM"

k) (F) $\forall A \in Set_0. \exists! f: A \rightarrow \{1,2\}$

CONTRA-EXEMPLO:

$$A = \{3,4\}$$

l) (F) $\forall A \in Set_0. \exists! f: A \rightarrow \{ \}$

m) (V) $\forall A \in Set_0. \exists! f: A \rightarrow \{3\}$

Em H_{10} :

$$Hom_{H_{10}}(01, 12) = \{01 \mapsto 12\}$$

$$Hom_{H_{10}}(12, 01) = \{ \}$$

$$Hom_{H_{10}}(12, 12) = \{12 \mapsto 12\}$$

n) (V) $\forall A \in (H_{10})_0. \exists! f: A \rightarrow 23$

o) (F) $\forall A \in (H_{10})_0. \exists! f: A \rightarrow 12$

DEF:

UM OBJETO $T \in C_0$

NUMA CATEGORIA C
 É TERMINAL SE E SÓ SE:

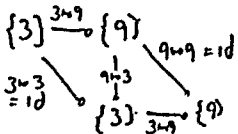
$$\forall A \in C_0. \exists! f: A \rightarrow T$$

EXEMPLOS:

$\{3\}$ É TERMINAL EM Set

23 É TERMINAL EM H_{10}

$\{9\}$ É TERMINAL EM Set



$$\{2,3,4\}$$

$$\{5,6,7\}$$

"ISOMORFISMO"

FECHOS

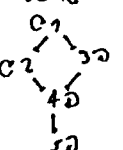
SEJAM:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (4,5)\}$$

$$D = (A, R) = \begin{matrix} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \\ \swarrow \searrow \\ 4 \quad 5 \end{matrix}$$

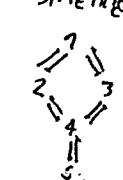
FECHO REFLEXIVO DE R:



FECHO TRANSITIVO:



FECHO SIMÉTRICO:

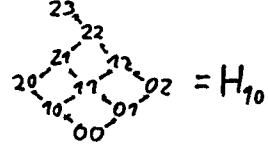


LA 8/NOV/2016

ALGUMAS CATEGORIAS:

- Set
- ORDENS PARCIAIS

EXEMPLO:



AULA QUE VEM:
MODO DE CONSTRUIR
NOVAS CATEGORIAS -
EXEMPLOS: COMO
"SOMAS" OU "PRODUTOS"
DE CATEGORIAS CONHECIDAS.

AGORA:

- O QUE É UM TERMINAL NUMA CATEGORIA?
- É UM INICIAL?
- O QUE É UM PRODUTO?

DEF:

• $T \in C_0$ É TERMINAL
SE $\forall A \in C_0. \exists ! f: A \rightarrow T$

• $I \in C_0$ É INICIAL
SE $\forall B \in C_0. \exists ! f: I \rightarrow B$

p) (F) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists ! f: 12 \rightarrow B$

q) (F) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists ! f: 23 \rightarrow B$

r) (V) $\forall B \in (H_{10})_0. \exists ! f: 00 \rightarrow B$

INTRODUÇÃO A PRODUTOS

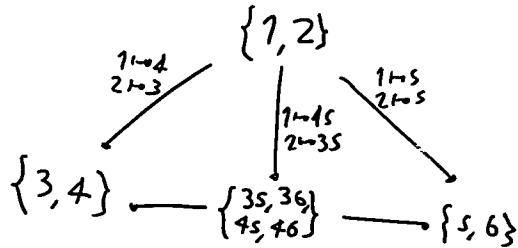
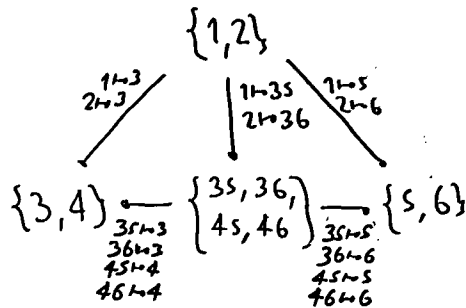
IDÉIA: em SET

ESTAS TRÊS COISAS
SÃO "PRODUCT DIAGRAMS":

$$\{3,4\} \leftarrow \{(3,5), (3,6)\} \rightarrow \{5,6\}$$

$$\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45,46\} \rightarrow \{5,6\}$$

$$\{3,4\} \leftarrow \{53,54,63,64\} \rightarrow \{5,6\}$$

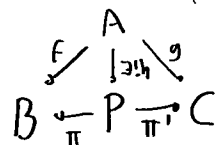


DEF:

$B \leftarrow P \xrightarrow{\pi} C$
É UM "PRODUCT
DIAGRAM" SE E SÓ SE

$\forall A. \forall f: A \rightarrow B. \forall g: A \rightarrow C.$

$\exists ! h: A \rightarrow P. h \circ \pi = f \ \& \ h \circ \pi' = g$



EXERCÍCIOS:

s) MOSTRE QUE

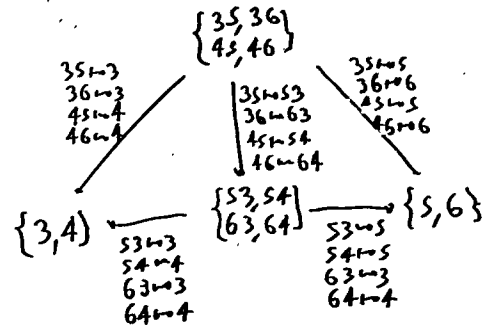
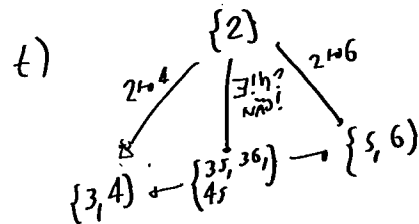
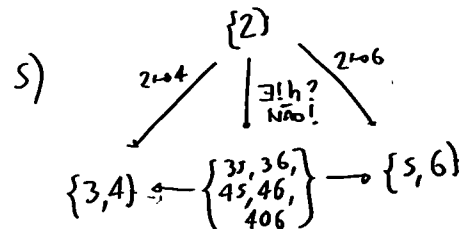
$$\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45,46,406\} \rightarrow \{5,6\}$$

NÃO É UM PRODUCT
DIAGRAM

t) MOSTRE QUE

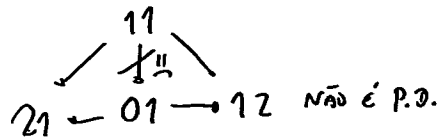
$$\{3,4\} \leftarrow \{35,36,45\} \rightarrow \{5,6\}$$

NÃO É UM PRODUCT
DIAGRAM



É NA CATEGORIA
 H_{10} ...

$21 \leftarrow 11 \rightarrow 12$ É UM P.D.



NÃO É P.D.

LA 22/NOV/2016

CALENDÁRIO:

22/NOV (HOJE)

29/NOV

6/DEZ

13/DEZ

20/DEZ

DEF: $B \xleftarrow{\pi} P \xrightarrow{\pi'} C$

É um "PRODUCT DIAGRAM"

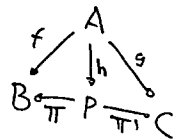
SE:

VA.

$\forall f: A \rightarrow B, \forall g: A \rightarrow C.$

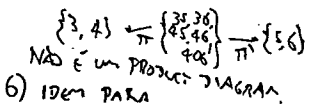
$\exists! h: A \rightarrow P.$

$h; \pi = f \text{ \& } h; \pi' = g.$



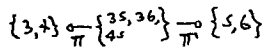
EXERCÍCIOS (AULA PASSADA):

5) MOSTRE QUE



NÃO É UM PRODUCT DIAGRAM.

6) IDEM PARA



DEF: $B \xleftarrow{i} S \xleftarrow{i'} C$

É um "COPRODUCT DIAGRAM"

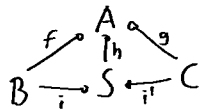
SE:

VA.

$\forall f: A \leftarrow B, \forall g: A \leftarrow C.$

$\exists! h: A \leftarrow S.$

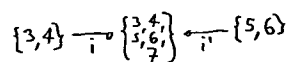
$h; i = f \text{ \& } h; i' = g.$



EXERCÍCIOS (NOVOS "BONS")

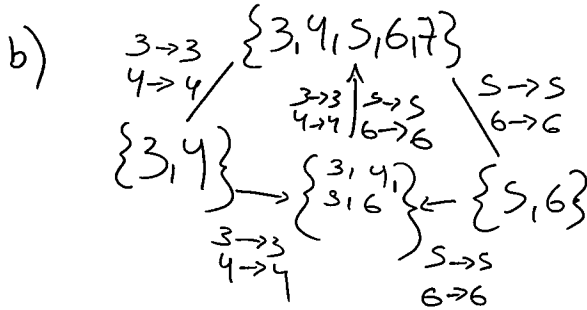
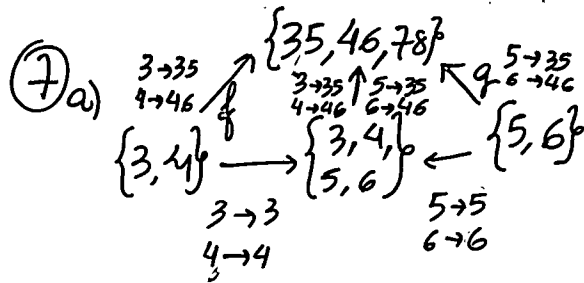
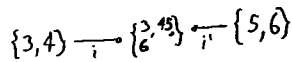
DOSS DA AULA PASSADA:

5) MOSTRE QUE

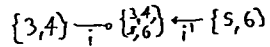


NÃO É UM PRODUCT DIAGRAM.

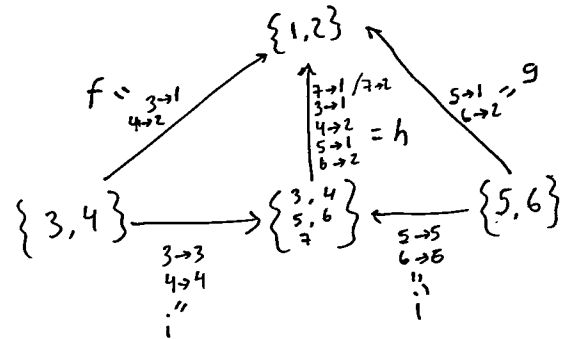
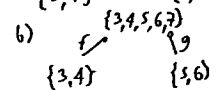
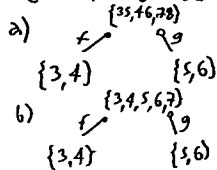
6) IDEM PARA:



7) (FAÇA ANTES DO 5 E DO 6!) ISTO AQUI É UM "COPRODUCT DIAGRAM":

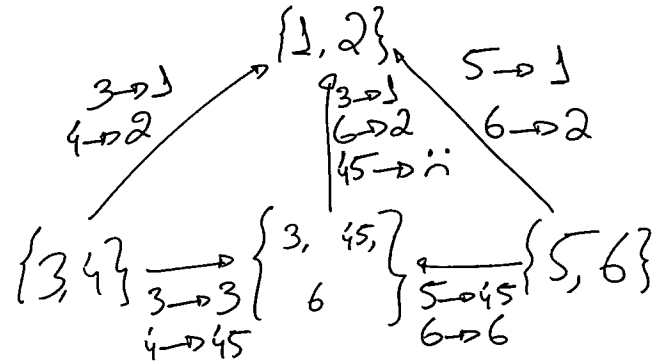


ENCONTRE O h ADEQUADO EM CADA UM DESTES CASOS:



$h; i = f ? \text{ SIM}$

$h; i' = g ? \text{ SIM}$



LA 22/NOV/2016

CALENDÁRIO:

- 22/NOV (HOJE)
- 29/NOV
- 6/DEZ
- 13/DEZ
- 20/DEZ

EM SET,

- {1} é um TERMINAL,
- { } é um INICIAL,

$B \xrightarrow{\pi} B \times C \xrightarrow{\pi} C$ é um PRODUCT DIAGRAM PARA QUALQUER B e C,

$B \xrightarrow{i} B \cup C \xrightarrow{j} C$ é um COPRODUCT DIAGRAM QUANDO B e C são DISJUNTO.

E

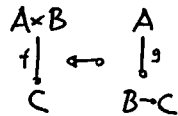
$\{3,4\} \rightarrow \{3,4,5\} \leftarrow \{4,5\}$ NÃO É UM COPRODUCT DIAGRAM...

LEMBRE QUE $B \rightarrow C$ (OU C^B EM NOTAS TRADICIONAIS) É O CONJUNTO DAS FUNÇÕES DE B em C...

Se $B = \{1,2\}$, $C = \{3,4\}$
 $B \rightarrow C = \left\{ \begin{matrix} 1 \rightarrow 3 & 1 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 4 \end{matrix} \right\}$

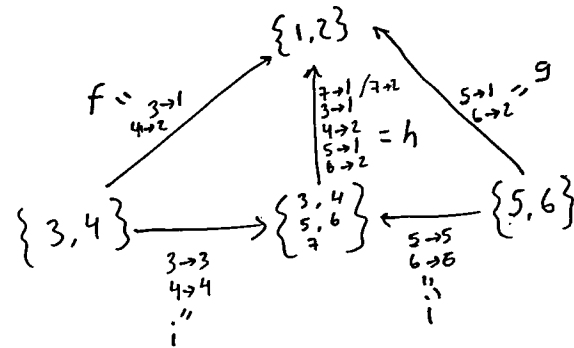
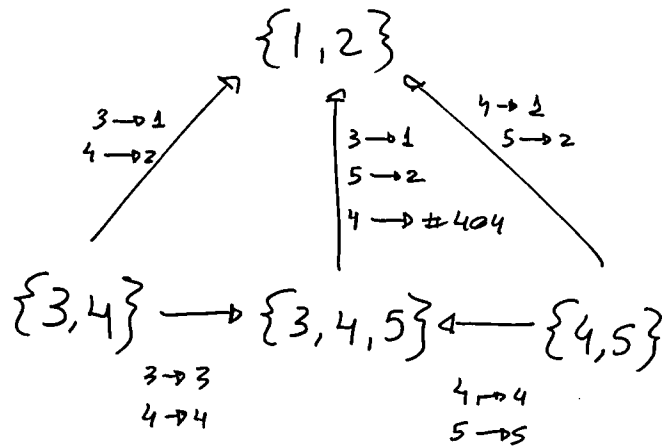
COMO A GENTE "CARACTERIZA CATEGORICAMENTE" O $B \rightarrow C$?

IDEIA:

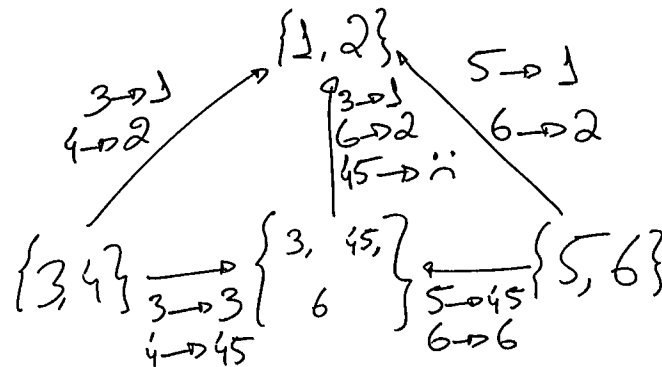


$$\text{Hom}(A \times B, C) \cong \text{Hom}(A, B \rightarrow C)$$

MESMO NÚMERO DE ELEMENTOS "NATURALMENTE ISOMORFOS"

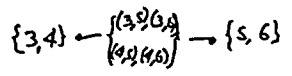


$h \circ i = f \rightarrow \text{SIM}$
 $h \circ j = g \rightarrow \text{SIM}$

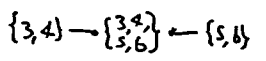


LA 29/NOV/2016

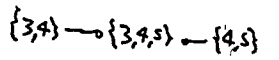
NA AULA PASSADA A GENTE VIU QUE ISTO É UM "PRODUCT DIAGRAM",



ISTO É UM "COPRODUCT DIAGRAM",



É ISTO AQUI NÃO É UM "COPRODUCT DIAGRAM",



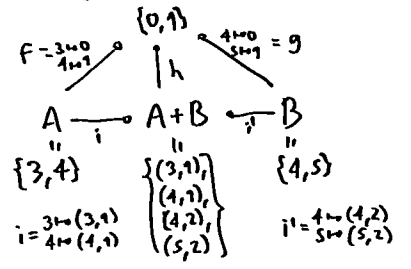
A NOTAÇÃO ABSTRATA DA UMA DICA:

$A \leftarrow A \times B \rightarrow B$
ISTO É UM PRODUCT DIAGRAM,
E $|A \times B| = |A| \times |B|$.

$A \rightarrow A + B \leftarrow B$
ISTO É UM COPRODUCT DIAGRAM,
E $|A + B| = |A| + |B|$.

TRUQUE DO LIVRO PARA UNIÕES DISJUNTAS:

$$A + B = \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}$$



$B \xrightarrow{j} S \leftarrow i \xrightarrow{i} C$
É UM COPRODUCT DIAGRAM SE E SÓ SE:
VA.
 $\forall f: B \rightarrow A, \forall g: C \rightarrow A$
 $\exists! h: S \rightarrow A$
 $f = i;h \ \& \ g = j;h$.

LEMBRE QUE:
 $F = \lambda p: A \times B. (\pi'p, \pi p)$
SE $A = \{1,2\}$ E $B = \{3,4\}$
ENTÃO $f(2,3) = ?$

$$(\lambda p: A \times B. (\pi'p, \pi p))(2,3)$$

UMA NOTAÇÃO QUE (ACHO QUE) TODO MUNDO ENTENDE:

$$(\lambda(x,y): A \times B. (y,x))(2,3)$$

ISTO "ABREVIAM" ISTO AQUI:

$$(\lambda p: A \times B. (\pi'p, \pi p))(2,3)$$

FORMAL	ABREVIADO
p	(x,y)
πp	x
$\pi'p$	y

P.S DO PAU BLAU LEVY:
"pm" OVER DIZER "pattern-match"
 $\text{inl}(x)$ É ALGO COMO $(x,1)$
 $\text{inr}(y)$ É ALGO COMO $(y,2)$

EXERCÍCIOS PARA ENTENDER A LINGUAGEM DA P.S...

ALIAS ANTES PRECISAMOS ENTENDER O "λ".

IDEIA:
 $p: A \times B, f: B \rightarrow C \vdash f(\pi'p): C$

"CONTEXTO" - UMA SÉRIE DE DECLARAÇÕES DE VARIÁVEIS.

"NESTE CONTEXTO ESSA EXPRESSÃO (A ESQ) FAZ SENTIDO, MAS NÃO É O RESULTADO DE TIPO C.

$$\frac{p: A \times B \vdash p: A \times B \quad f: B \rightarrow C \vdash f: B \rightarrow C}{p: A \times B \vdash \pi'p: B \quad f: B \rightarrow C \vdash f(\pi'p): C}$$

$$\frac{f: B \rightarrow C, p: A \times B \vdash f(\pi'p): C}{f: B \rightarrow C \vdash (\lambda p: A \times B. f(\pi'p)): A \times B \rightarrow C}$$

AS OPERAÇÕES QUE FORMAM TERMOS DE λ-CÁLCULO EM GERAL SÃO:

$$\frac{\Gamma \vdash a: A \quad \Gamma \vdash b: B}{\Gamma \cup \Gamma' \vdash c: C}$$

EXCETO O "λ", QUE RETIRA UMA VARIÁVEL DO CONTEXTO.
OBS: PODAMOS ADICIONAR MAIS VARIÁVEIS AO CONTEXTO...
 $f: B \rightarrow C, p: A \times B \vdash f(\pi'p)$
 $d: D, f: B \rightarrow C, p: A \times B \vdash f(\pi'p)$

VOLTAMOS À P.S...

$\text{bool} = \{\text{true}, \text{false}\}$

OS OUTROS "CONJUNTOS BÁSICOS" POSSÍVEIS SÃO CONJUNTOS DE NÚMEROS...

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{2,3,4\}$$

$A \times B$ É FORMADO POR PARES DE NÚMEROS.

REGRAS NÃO-TRIVIAIS:

- 2) $\frac{\Gamma \vdash M: A \quad \Gamma, x: A \vdash N: B}{\Gamma \vdash \text{let } M \text{ be } x. N: B}$
- 5) $\frac{\Gamma \vdash M: \text{bool} \quad \Gamma \vdash N: B \quad \Gamma \vdash N': B}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } N': B}$
- 8) $\frac{\Gamma \vdash M: A + A' \quad \Gamma, x: A \vdash N: B \quad \Gamma, x: A' \vdash N': B}{\Gamma \vdash \text{pm } M \text{ as } \{\text{inl } x.N, \text{inr } x.N'\}: B}$

EXERCÍCIOS:

$$(2) \left[\begin{matrix} \Gamma \vdash a: C \times D \\ M := (3,4) \\ x := p \\ N := f(\pi p) \\ \Gamma := \Gamma, f: C \rightarrow B \end{matrix} \right] = \frac{\left(\frac{\Gamma, f: C \rightarrow B}{\Gamma, (3,4): C \times D} \right) \left(\frac{\Gamma, f: C \rightarrow B}{\Gamma, f(\pi p): B} \right)}{\left(\frac{\Gamma, f: C \rightarrow B}{\Gamma \vdash \text{let } (3,4) \text{ be } p. f(\pi p): B} \right)}$$

$$(5) \left[\begin{matrix} M := a < 2 \\ N := a - 10 \\ N' := a + 10 \\ \Gamma := \Gamma, a: \mathbb{Z} \\ B := \mathbb{Z} \end{matrix} \right] = \frac{\left(\frac{\Gamma, a: \mathbb{Z}}{\Gamma, a < 2: \text{bool}} \right) \left(\frac{\Gamma, a: \mathbb{Z}}{\Gamma, a - 10: \mathbb{Z}} \right) \left(\frac{\Gamma, a: \mathbb{Z}}{\Gamma, a + 10: \mathbb{Z}} \right)}{\left(\frac{\Gamma, a: \mathbb{Z}}{\Gamma \vdash \text{if } a < 2 \text{ then } a - 10 \text{ else } a + 10: \mathbb{Z}} \right)}$$

$g: a \rightarrow f$

$$(8) \left[\begin{array}{l} A := \{2, 3\} \\ A' := \{3, 4\} \\ B := \{10, 20\} \\ N := (4-x) \cdot 10 \\ N' := 10(x-2) \\ M := f(c) \end{array} \right]$$

$$= \frac{\left(\Gamma \vdash f(c) : \{2, 3\} + \{3, 4\} \right) \left(\Gamma, x : \{2, 3\} \vdash (4-x) \cdot 10 : \{10, 20\} \right) \left(\Gamma, x : \{3, 4\} \vdash 10(x-2) : \{10, 20\} \right)}{\left(\Gamma \vdash \text{pm } f(c) \text{ as } \left\{ \text{inl } x. (4-x) \cdot 10, \text{inr } x. 10(x-2) \right\} : \{10, 20\} \right)}$$

$$\left(\Gamma \vdash \text{pm } f(c) \text{ as } \left\{ \text{inl } x. (4-x) \cdot 10, \text{inr } x. 10(x-2) \right\} : \{10, 20\} \right)$$

VOLTANDO À p. 5...

bool = {true, false}

OS OUTROS "CONJUNTOS BÁSICOS" POSSÍVEIS

SÃO CONJUNTOS DE NÚMEROS...

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4\}$$

$A \times B$ é FORMADO POR PARES DE NÚMEROS.

REGRAS NÃO-TRIVIAIS:

$$2) \frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma, x : A \vdash N : B}{\Gamma \vdash \text{let } M \text{ be } x. N : B}$$

$$5) \frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : B \quad \Gamma \vdash N' : B}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } N' : B}$$

$$8) \frac{\Gamma \vdash M : A + A' \quad \Gamma, x : A \vdash N : B \quad \Gamma, x : A' \vdash N' : B}{\Gamma \vdash \text{pm } M \text{ as } \{\text{inl } x. N, \text{inr } x. N'\} : B}$$

EXERCÍCIOS:

$$(2) \left[\begin{array}{l} A := C \times D \\ M := (3, 4) \\ x := p \\ N := f(\pi p) \\ \Gamma := \Gamma, f : C \rightarrow B \end{array} \right] = \frac{\left(\Gamma, f : C \rightarrow B \right) \left(\Gamma, f : C \rightarrow B, p : C \times D \vdash f(\pi p) : B \right)}{\left(\Gamma, f : C \rightarrow B \vdash \text{let } (3, 4) \text{ be } p. f(\pi p) : B \right)}$$

$$(5) \left[\begin{array}{l} M := a < 2 \\ N := a - 10 \\ N' := a + 10 \\ \Gamma := \Gamma, a : \mathbb{Z} \\ B := \mathbb{Z} \end{array} \right] = \frac{\left(\Gamma, a : \mathbb{Z} \vdash a < 2 : \text{bool} \right) \left(\Gamma, a : \mathbb{Z} \vdash a - 10 : \mathbb{Z} \right) \left(\Gamma, a : \mathbb{Z} \vdash a + 10 : \mathbb{Z} \right)}{\left(\Gamma, a : \mathbb{Z} \vdash \text{if } a < 2 \text{ then } a - 10 \text{ else } a + 10 : \mathbb{Z} \right)}$$

LA 6/02/2016

Um programa em Lua com "2's e 3's" e classes:

```
foo = function ()
  local storage
  return
function () return storage end
function (a) storage = a, return a end
end
```

```
get1, set1 = foo()
get2, set2 = foo()
print (set1(22), get1()) --> 22 22
print (set2(33), set1(3), get2()) --> 33 22 33
```

Em termos mais formais, isto é:

```
foo = λ() (
  local s
  (λ(x) λ() (
    (λ(x) x)
    (λ(x) x)
  ))
  (λ(x) x)
)
(set1, set2) = foo()
(get1, get2) = foo()
print (set1(22), get1())
print (set2(33), set1(3), get2())
```

$$f = 2x^2$$

$$f(3) \rightarrow 2 \cdot 3^2$$

$$f \rightarrow 2x \cdot 10x$$

$$f(5) \rightarrow 50$$

OU:

$$\frac{(2x \cdot 2b \cdot 10a + b)(3)(4)}{\frac{(2b \cdot 10a + b)}{2}}$$

$$(2x \cdot 2y \cdot x)(3)(4)$$

$$(2x \cdot 2y \cdot y)(3)(4)$$

$$(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)$$

$$\frac{(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)}{2x \cdot x}$$

$$(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)$$

$$\frac{(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)}{x}$$

$$\frac{(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)}{x}$$

OUTRO PROGRAMA MAIS SIMPLES:

```
S = 234
get = (λ(). s)
set = (λ(x, s = 2x + 4)
  print(get(), set(22), get()))
  234
```

PRIMEIRA OBSERVAÇÃO:
(ADICIONAR UM GLOBO VEM A
LINGUAGEM MAIS ESTRUTURADA)

NA ALTA PARTIDA A GENTE
VEM COMPLEXO...

$g = \lambda p (f(p), p)$
SÓ "PAR JUNTAR" (SÓ
"TEM VALOR", SÓ "PODE
SER CALCULADO")
QUANTO A GENTE SABE F -
P. EX. SE $f = \lambda x x^2$
E $f(1, 2) = (10, 20, 30)$

ENTÃO... TUDO FOM MAIS SIMPLES

NO CASO

$g = \lambda p (2, 20 + 3, 5 (f(p), p))$

ENTÃO

$g(1, 2) \rightarrow$

$g(2, 3) \rightarrow$

$g(3, 4) \rightarrow$

$g(4, 5) \rightarrow$

$g(5, 6) \rightarrow$

$g(6, 7) \rightarrow$

$g(7, 8) \rightarrow$

$g(8, 9) \rightarrow$

$g(9, 10) \rightarrow$

Se $f = \{(1, 10), (2, 20)\}$,

$A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{10, 20, 30\}$,

ENTÃO $f = A \rightarrow B$?

NÃO, PORQUE

$(\forall a \exists! b \in B. (a, b) \in f)$

$\leftrightarrow (\exists! b \in B. (1, b) \in f \rightarrow \text{verdadeira } (b=10))$

$\& (\exists! b \in B. (2, b) \in f \rightarrow \text{verdadeira } (b=20))$

$\& (\exists! b \in B. (3, b) \in f)$

PRÁ CALCULAR g , FAZEMOS:

$P \quad g(P)$

$(1, 3) \quad (20, 3)$

$(1, 4) \quad (20, 4)$

$(2, 3) \quad (20, 3)$

$(2, 4) \quad (20, 4)$

E AF $g = \{(1, 3), (10, 3), (1, 4), (10, 4), (2, 3), (20, 3), (2, 4), (20, 4)\}$.

OU:

$(1, 20) \rightarrow (2, 4) =$

$(1, 3), (1, 4),$

$(2, 3), (2, 4)$

OU 2

Se $f = \{(1, 10), (2, 20)\}$

110 NÃO É VERDADEIRO

$20 f(1, 2) = (10, 20, 30)$

$20 f(1, 3) = (10, 20, 30)$

$0 f(1) = (10, 20, 30)$

DISC
(f.A-B)
 $\leftrightarrow (f \in A \rightarrow B \&$
VIA $\exists! b \in B. (a, b) \in f$

LA 6/02/2016

Um programa em
Lua com "2's e
Clareza:

foo = function ()
local storage
return
function () return storage end
function () storage, return row
end

get1, set1 = foo()
get2, set2 = foo()
print (set2(22), get1(3)) --> 22 22
print (set2(33), set1(1), get2(1)) --> 33 22 33

Em termos mais formais, isto
é:

```
foo = function ()
  local s
  (41) s
  (2x 22 22)
  (set1, set2) = foo()
  (set2(22)) print
  print (set1(1), set2(1))
  print (set2(33), set1(1), set2(1))
end
```

$$f = 2x \cdot x^2$$

$$f(3) \rightarrow 25$$

$$f = 2x \cdot 10x$$

$$f(5) \rightarrow 50$$

Obs:

$$\frac{(2a \quad 2b \quad 10a+b)(3)(4)}{3}$$

$$\frac{(2b \quad 10a+b)}{3}$$

$$(2x \cdot 2y \cdot x)(3)(4)$$

$$(2x \cdot 2y \cdot y)(3)(4)$$

$$(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)$$

$$\frac{(2x \cdot 2x \cdot x)(3)(4)}{3}$$

$$\frac{(2x \cdot x)}{3}$$

OUTRO PROBLEMA MAIS SIMPLES:
S = 234
get := (2(1), 5)
set := (2x, 5=2x+2)
print (get(1), set(22), get(1))

PRIMEIRA OBSERVAÇÃO:
(ANTES DE COMEÇAR VER A
LINGUAGEM MAIS ESTRANHA)

NA AULA PASSAMOS A COMEÇAR
VIA "COMPLEXO"...

$g = 2p \cdot (f(1p), 1p)$
JÁ "FAZ SENTIDO" (JÁ
"TEM VALOR", JÁ "PODE
SER CALCULADO")
QUANTO A COMEÇAR NUNCA
P. EX, SE $f = \frac{1-20}{1-20}$
E $f(1,1) = (10, 20, 30)$

ENTÃO...
(DICA: TODO FILHO MAIS MÓDICO
NO CASO)

$$g' = 2p \cdot (2, 2x(1, 2), (f(1p), 1p)) \dots$$

TENHO

$$g' = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 3), (10, 50) \\ (1, 1, 4), (10, 41) \\ (2, 3), (20, 31) \\ (2, 4), (20, 41) \end{array} \right\}$$

Obs: $g' = (1, 3) = 2 \cdot 10 = (10, 20, 30) = (3, 4)$
 $g' = (1, 2) = (2, 4) = (10, 20, 30) = (3, 4)$

MAS QUANTO
QUE A COMEÇAR SÃO A e B
E NÃO SÃO F...
COMO SE PUA COME
IMAGINAR UMA LINGUAGEM
NA QUAL UTO VALÉ,
 $g = 2p \cdot (1, 2) = (2, 4), (f(1p), 1p)$
E AÍ O g NÃO É "CALCULADO"
NA HORA DE DEFINIÇÃO? COMO
A COMEÇAR COM g...

Isto aqui,
 $g(1, 2)$

JÁ É CALCULADO NA HORA
EM QUE A g RECEBE ARGUMENTOS,
E AÍ O f É "CALCULADO"
ENTÃO AS VARIÁVEIS GLOBAIS

EM ALGUMAS LINGUAGENS
TODA FUNÇÃO PODE ATERRAR
AS VARIÁVEIS GLOBAIS QUANTO À
EXECUÇÃO

Lembrando...

$$\frac{(p \cdot A \cdot B)^2}{p \cdot A} = \frac{f \cdot A \cdot C}{f(1p): C} = \frac{(p \cdot A \cdot B)^2}{p \cdot B}$$

$$\frac{(f(1p), 1p): C \cdot B}{(2p \cdot A \cdot B (f(1p), 1p)) \cdot A \cdot B - C \cdot B} = 1$$

$$\frac{(P \cdot Q)^2}{P} = \frac{P \cdot A}{A} = \frac{(P \cdot Q)^2}{Q}$$

$$\frac{P \cdot Q}{P \cdot Q - R \cdot Q} = 1$$

$$\frac{P \cdot Q + P \cdot Q}{P \cdot Q + P} = \frac{P \cdot R + P \cdot R}{P \cdot R + P \cdot R} = \frac{P \cdot Q + P \cdot Q}{P \cdot Q + Q}$$

$$\frac{P \cdot R + P \cdot R + R \cdot Q}{P \cdot R + P \cdot R - R \cdot Q}$$

$$\frac{f \cdot A \cdot C + p \cdot A \cdot B + (f(1p), 1p) \cdot C \cdot B}{f \cdot A \cdot C + (2p \cdot A \cdot B (f(1p), 1p)) \cdot A \cdot B - C \cdot B}$$

E em outras linguagens?

$$(f \cdot A \cdot C) = (A \cdot B)$$

$$\left. \begin{array}{l} 10, 11 \\ f(1p), 1p \end{array} \right\}$$

$$(f(1p), 1p) \cdot A \cdot B - C \cdot B = A \cdot B - C \cdot B$$

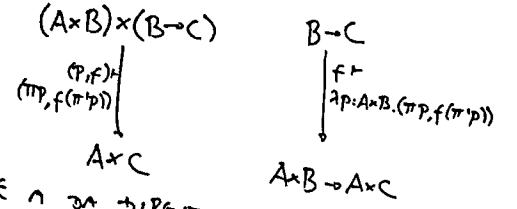
LA 13/Dez/2016

NA ÚLTIMA AULA A GENTE VIU ESTA NOTASSÃO AQUI:

$$p: A \times B, f: B \rightarrow C \vdash (\pi p, f(\pi' p)): A \times C$$

$$f: B \rightarrow C \vdash \lambda p: A \times B. (\pi p, f(\pi' p)): A \times B \rightarrow A \times C$$

E A GENTE VIU QUE A GENTE PODE ENTENDER A EXPRESSÃO COM "λ" ACIMA DA BARRA COMO UMA FUNÇÃO



E A DA DIREITA COMO ISTO: ↓

COMO É QUE A GENTE AUMENTA O λ-CÁLCULO PRA ELE PERMITIR ACESSAR E MODIFICAR VARIÁVEIS GLOBAIS?

$(\pi p, f(\pi' p))$ É UMA EXPRESSÃO EM λC - ELA RETORNA UM VALOR. NO "λ-CÁLCULO COM GLOBAIS" CADA EXPRESSÃO QUE RETORNA UM VALOR PODE SER PRECEDIDA POR UM ASSIGNMENT.

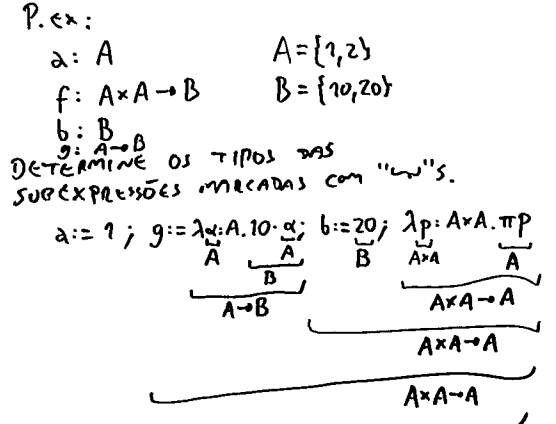
EXEMPLO:

$$\alpha := \pi p; (\pi p, f(\pi' p))$$

ASSIGNMENT RETORNA UM VALOR.

HOJE: COMO INTERPRETAR λ-CÁLCULO COM ASSIGNMENTS ("λCA") EM SET?

TRUQUE: PRECISAMOS FIXAR UM "CONTEXTO" - VARIÁVEIS GLOBAIS E SEUS TIPOS.



$$A \times A \rightarrow A$$

2ª PARTE DO TRUQUE: UM VALOR PRO CONTEXTO É UMA 4-TUPLA (α, f, b, g) , COM UM VALOR PARA CADA UM DOS GLOBAIS. ALGO COMO $\lambda p: A \times A. \pi p$ SÓ RETORNA UM VALOR, MAS ALGO COMO $b := 20; \lambda p: A \times A. \pi p$ ALTERN O CONTEXTO...

EXERCÍCIO: CALCULEM:

p	π p
(1,1)	1
(1,2)	1
(2,1)	2
(2,2)	2

$$\lambda p: A \times A. \pi p$$

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$\lambda p: A \times A. \pi p = (1,1) \mapsto 1$$

$$(1,2) \mapsto 1$$

$$(2,1) \mapsto 2$$

$$(2,2) \mapsto 2$$

LEMBRE QUE A SINTAXE É:

λ VARIÁVEL: CONJUNTO. EXPRESSÃO

E LEMBRE QUE

$$\lambda \alpha: \{2, 3\}. 10\alpha = \{(2, 20), (3, 30)\}$$

$$= 2 \mapsto 20$$

$$3 \mapsto 30$$

$$(1,1) \mapsto 1$$

$$(1,2) \mapsto 1$$

$$(2,1) \mapsto 2$$

$$(2,2) \mapsto 2$$

$$\beta = \lambda p: A \times A. \pi p$$

$$\gamma = b := 20; \lambda p: A \times A. \pi p$$

PODEMO INTERPRETAR γ COMO:

$$\lambda (\alpha, f, b, g): \dots ((\alpha', f', b', g'), p)$$

$$\bar{\gamma} = \lambda (\alpha, f, b, g): \left(\begin{matrix} A \times \\ (A \times A \rightarrow B) \times \\ B \times \\ (A \rightarrow B) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \alpha \\ f \\ b \\ g \end{matrix} \right) (\lambda p: A \times A. \pi p)$$

$$\bar{\gamma}(1, f, 20, g) = ((1, f, 20, g), (\lambda p: A \times A. \pi p))$$

$$(1,1) \mapsto 1$$

$$(1,2) \mapsto 1$$

$$(2,1) \mapsto 2$$

$$(2,2) \mapsto 2$$

$$\delta = \lambda (x, y, z): A \times A \times B. y$$

$$\delta(1, 2, 10) = 2$$

$$\delta(u, v, 10) = v$$

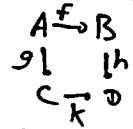
LA 20/DEZ/2016

HOJE: ÚLTIMA AULA!

- FUNTORES
- TRANSFORMAÇÕES NATURAIS
- ADJUNÇÕES
- CATEGORIAS ESTRANHAS

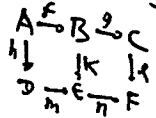
JÁ VIMOS CATEGORIAS...
FALTOU COMUTATIVIDADE DE
DIAGRAMAS.

EXEMPLO:



A GENTE DIZ QUE ELE
"COMUTA" SE TODOS OS
JEITOS DE CALCULAR $A \rightarrow D$
NELE DÃO O MESMO RESULTADO...

OU SEJA: $gk = fh$.



AQUI A GENTE DIZ QUE
O DIAGRAMA "COMUTA" SE
TODOS OS JEITOS NATURAIS
DE CALCULAR $A \rightarrow E$... ,
DEM TAMBÉM $B \rightarrow F$... ,
DEM PARA $A \rightarrow F$.

$$\begin{aligned} h; m &= f; k, \\ k; n &= g; l, \\ h; m; n &= f; k; n = f; g; l; n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wd}(A \rightarrow E) \\ \text{wd}(B \rightarrow F) \\ \text{wd}(A \rightarrow F) \end{aligned}$$

DIZER QUE UM DIAGRAMA
MAIS COMPLICADO "COMUTA"
É DIZER QUE
"TODAS AS CONSTRUÇÕES
NATURAIS DE $A \rightarrow D$
O MESMO RESULTADO"
PARA TODOS OS "...".

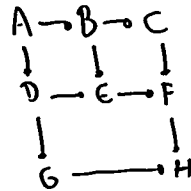
GRANDE TRUQUE
(PRINCIPAL MOTIVO
DA GENTE QUERER
ASSOCIATIVIDADE
EM CATEGORIAS):

[SUB-TRUQUE:

$\text{wd}(A \rightarrow E)$ É
"A → E ESTA "WELL-DEFINED",
TODAS AS CONSTRUÇÕES
NATURAIS PARA ELE DÃO O
MESMO RESULTADO.]

PEGUE UM DIAGRAMA PLANO
NO QUAL TÓDA "CÉLULA"
TEM EXATAMENTE UMA "SOURCE"
E UMA "SINK";

ENTÃO SE CADA CÉLULA COMUTA
O DIAGRAMA TODO COMUTA.



$$\begin{aligned} \text{wd}(A \rightarrow E) & \quad \text{wd}(B \rightarrow F) \\ \text{wd}(D \rightarrow H) \end{aligned}$$

REPARA: $ABC F = ADEF$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F =$$

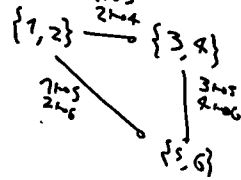
$$A \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow F) =$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow E \rightarrow F) =$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow E) \rightarrow F =$$

$$(A \rightarrow D \rightarrow E) \rightarrow F =$$

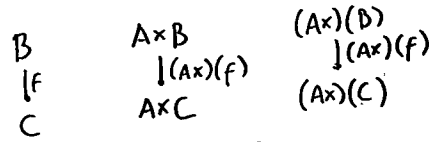
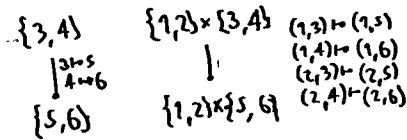
EXERC. MOSTRE QUE $ABC F H = A D G H$.



$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H &= \\ A \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow F) \rightarrow H &= \\ A \rightarrow (B \rightarrow E \rightarrow F) \rightarrow H &= \\ (A \rightarrow B \rightarrow E) \rightarrow F \rightarrow H &= \\ (A \rightarrow D \rightarrow E) \rightarrow F \rightarrow H &= \\ A \rightarrow (D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H) &= \\ A \rightarrow (D \rightarrow G \rightarrow H) &= \end{aligned}$$

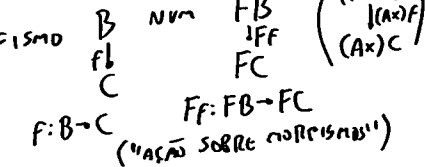
FUNTORES

A GENTE JÁ VIU
ALGUNS, MAS DESFARÇADOS...



UM FUNTOR F (OU, NO EXEMPLO, $A \times$)
LEVA CADA OBJETO B NUM OBJETO FB
E C

("AÇÃO SOBRE OBJETOS")
E ELE LEVA CADA MORFISMO



... É UM FUNTOR TEM QUE
OBEDECER DUAS COISAS EXTRAS,
QUE FORAM INVENTADAS PARA
GARANTIR QUE SE O DIAGRAMA
ORIGINAL COMUTAVA, O NOVO
COMUTA TAMBÉM.

$$\text{CONDICÕES: } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$$

$$\text{wd}(FA \rightarrow FC)!!!$$

$$\text{OU SEJA: } Ff; Fg = F(Fg)$$

OUTRA CONDIÇÃO:

$$A \xrightarrow{id_A} A$$

$$FA \rightarrow FA$$

$$\text{wd}(FA \rightarrow FA)$$

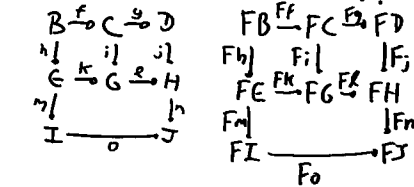
$$\frac{A}{id_A: A \rightarrow A}$$

$$\frac{A}{FA}$$

$$id_{FA}: FA \rightarrow FA$$

REPARA QUE FUNTORES

"DUPLICAM DIAGRAMAS!!!"



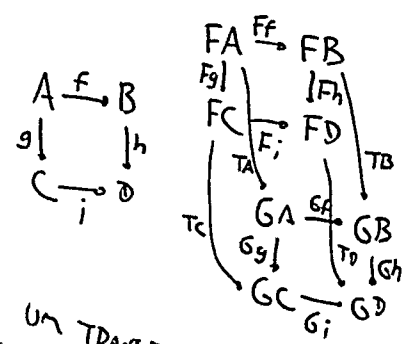
LA 20/DEZ/2016

HOJE: ÚLTIMA AULA!

- FUNTORES
- TRANSFORMAÇÕES NATURAIS
- ADJUNÇÕES
- CATEGORIAS ESTRANHAS

TRANSFORMAÇÕES NATURAIS "RELACIONAM" DOIS FUNTORES...

SE A GENTE CONHECE FUNTORES F E G , UM TN $T: F \rightarrow G$ É ISSO AQUI:



UM TRANSFORMAÇÃO NATURAL ("TN") TEM QUE OBEDECER ALGO PRA GARANTIR QUE O DIAGRAMA NÃO COMUTA:

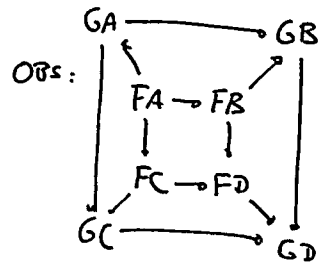
$\forall A \rightarrow B$. $WD(FA \rightarrow GC)$, ISTO É:

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{FF} & FB \\
 \downarrow T_A & & \downarrow T_B \\
 GA & \xrightarrow{GF} & GB
 \end{array}$$

ISTO É: $T_A \circ GF = FF \circ T_B$

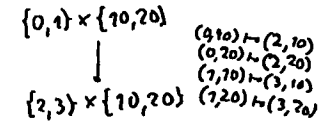
EXERCÍCIO:
CONSIDERE ESTES DOIS FUNTORES:
 $F = ((0,1) \times)$
 $G = ((2,3) \times)$
E ESTE DIAGRAMA:
 $\{4,5\} \xrightarrow{f} \{6,7\} \xrightarrow{g} \{8,9\}$

$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$

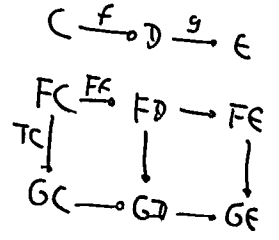


E ESTA TN:

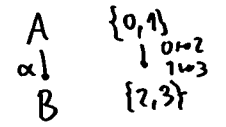
$T: F \rightarrow G$
ONDE T FUNCIONA ASSIM:



ESCREVA POR EXTENSO O DIAGRAMA:



A GENTE AGORA DE ENTENDER QUE:
 (Ax) É UM FUNTOR
 (Bx) É OUTRO FUNTOR
E UMA FUNÇÃO



INCLUI UMA TRANSFORMAÇÃO NATURAL
 $T: (Ax) \rightarrow (Bx)$

$B \times A = (xA)B \rightarrow B$

$\downarrow (xA)F \rightarrow \downarrow F$

$C \times A = (xA)C \rightarrow C$

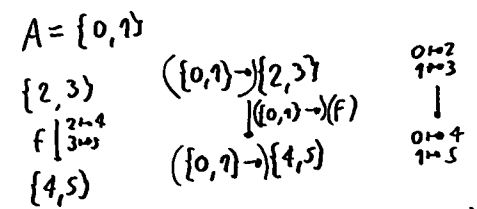
$\downarrow h \rightarrow \downarrow k$

$D \rightarrow (A \rightarrow) D$

$\downarrow g \rightarrow \downarrow (A \rightarrow) g$

$E \rightarrow (A \rightarrow) E$

TEM UM OUTRO FUNTOR QUE É MUITO IMPORTANTE...



A RELAÇÃO ENTRE (xA) E $(A \rightarrow)$ É MUITO IMPORTANTE...

EXISTE UMA ADJUNÇÃO ENTRE (xA) E $(A \rightarrow)$...

E-A É COMPOSTA DE DUAS OPERAÇÕES (INVERSA S UMA DA OUTRA):

