C2 20/mar/2017

Hoje: introdução!

"EDO" = "Equação Diferencial Ordinária"

("EDP" = "... parcial": as EDPs são bem mais complicadas)

C2 = integração (áreas)
+ EDO
+ vários assuntos "auxiliares" que vão nos ajudar a entender as coisas acima...
- números complexos
- fórmula de Taylor
- diferenciais

C1: $\frac{dy}{dx}$

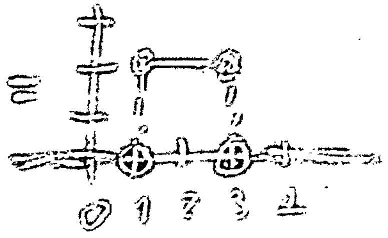
C2: $dy = f(x,y)\,dx$

Bônus: integral de função inversa, integração implícita.

Obs: a conexão entre integrais e áreas vai demorar um pouco pra aparecer ("TFC1", "TFC2")

Áreas sob curvas

Seja $f =$



Então:

x	f(x)
0	0
0.5	0
1	2
1.5	2
2	2
2.5	2
3	2
3.5	0
4	0

Área sob f

Obs:

Em C

A GO

Funç

E D

Fórm

A GO

Part

Defin

f(x)

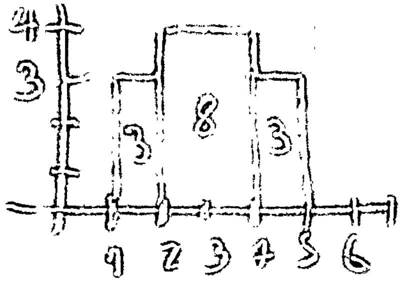
OBS:

EM CÁLCULO 1 A GENTE PREFERE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DEFINIDAS POR FÓRMULAS; EM C2 A GENTE VAI USAR BASTANTE FUNÇÕES DEFINIDAS POR CASOS

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x<1, \\ 2 & \text{QUANDO } 1\leq x<3 \\ 0 & \text{QUANDO } 3\leq x. \end{cases}$$

SEJA:

$g =$



ÁREA SOB g: $3+8+3=14$

ÁREA DE CADA RETÂNGULO É BASE · ALTURA

OU MELHOR: ALTURA · BASE

OBS: $\displaystyle\int_{x=2}^{x=5} \underbrace{f(x)}_{\text{ALTURA}}\,\underbrace{dx}_{\text{BASE}},$

TRUQUE (QUE OS LIVROS NÃO CONTAM):

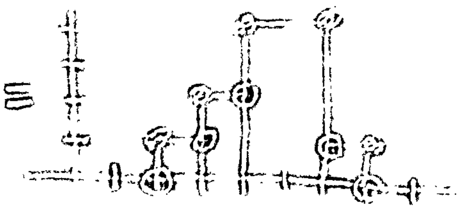
SE A GENTE CALCULAR A ÁREA SOB g DESSE JEITO, AÍ A GENTE CONSEGUE RECONSTRUIR A FIGURA A PARTIR DO SOMATÓRIO.

ÁREA SOB g =

$$\underbrace{3}_{\text{ALT}}\cdot\underbrace{(2-1)}_{\text{BASE}} + 4\cdot(4-2) + 3\cdot(5-4)$$

C2 [illegible]/mai/2017

Seja h =



Então

Área sob h:

Agora vamos na direção oposta... Se

Área sob $F_1 = 2\cdot(3-1) + 3\cdot(4-3)$
$+ 0\cdot(6-4)$
$+ 1\cdot(7-6)$,

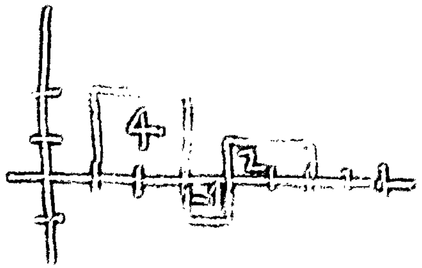
Represente graficamente F_1 (exceto pelos "•"s e "○"s).

Agora faça o mesmo com essa

$F_2 = 2\cdot(3-1) + (-1)\cdot(4-3) + 1\cdot($[illegible]$)$

$= 5$

$F_2 =$

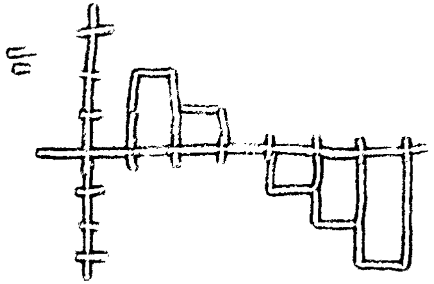


A "curva" do F_2 às vezes fica abaixo do eixo horizontal...

Quando isso acontece a área ali é contada negativamente.

Calcule a área sob

$F_3 =$



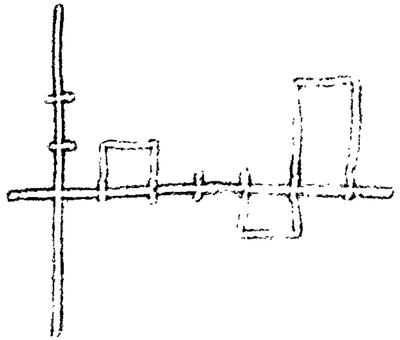
Resp: -3

Como é que a gente transforma esses somatórios "abertos" em somatórios com Σ?

Truque: $\sum_{i=1}^{N} \underbrace{c_i}_{\text{alt}} (b_i - a_i)$

onde $b_i = a_{i+1}$.

i	a_i	b_i	c_i
1	1	2	1
2	2	4	0
3	4	5	-1
4	5	6	2



Se $N=4$, $\sum_{i=1}^{4} c_i (b_i - a_i) =$

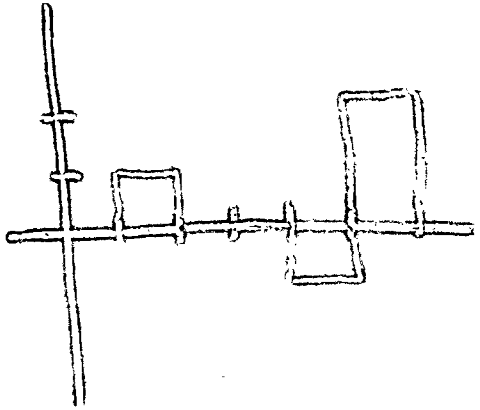
$\underbrace{1\cdot(2-1)}_{1} + \underbrace{0\cdot(4-2)}_{0} \underbrace{(-1)\cdot(5-4)}_{-1} + \underbrace{2\cdot(6-5)}_{2}$

Se

F

ATÓRIAS
ATÓRIOS

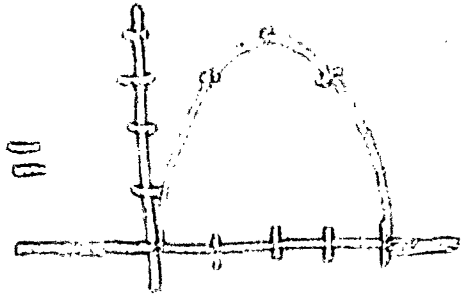
$(b_i - a_i)$



$(b_i = a_i) =$

$) \cdot \underbrace{(-1)\cdot(5-4)}_{-1} + \underbrace{2\cdot(6-5)}_{2}$

SEJA $F =$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 4-(x-2)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x \end{cases}$$

COMO É QUE A GENTE **APROXIMA** A ÁREA SOB F USANDO OS TRUQUES QUE A GENTE JÁ VIU?

IDÉIA: SEJA $P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$\min P_1 = 0$, $\max P_1 = 4$...

P_1 É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[0,4]$,

E A GENTE VAI USAR O P_1 PRA DIVIDIR O INTERVALO P_4 COM SUBINTERVALOS...

$$P_1 = \{\overbrace{0, 1}^{[0,1]}, \overbrace{2}^{[1,2]}, \overbrace{3}^{[2,3]}, \overbrace{4}^{[3,4}\}$$

$a_1 = 0 \quad b_1 = 1$

$a_2 = 1 \quad b_2 = 2$

$a_3 = 2 \quad b_3 = 3$

$a_4 = 3 \quad b_4 = 4$

FALTA A GENTE ESCOLHER OS c_iS...

A GENTE VAI VER VÁRIOS MÉTODOS PRA ESCOLHER OS c_iS

1º. $c_i = F(a_i)$

C2 20/mar/2017

Exercício:

Complete a tabela,

i	a_i	b_i	c_i
1			
2			
3			
4			

e interprete-a como uma figura feita de retângulos. Compare isto com o gráfico da F.

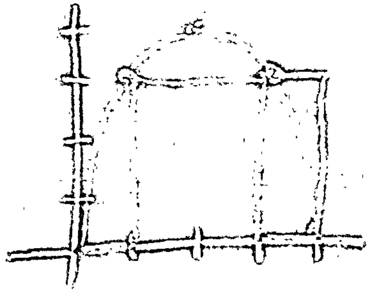
Agora faça a mesma coisa para $P_2 = \{0, 1, 3, 4\}$; monte a tabela e faça a figura.

Depois faça o mesmo para $P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

Se você souber fazer o desenho direto sem montar a tabela, melhor ainda.

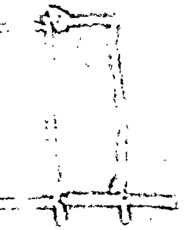
i	a_i	b_i	c_i
1	0	1	$F(0)$
2	1	3	$F(1)$
3	3	4	$F(3)$

$$(1-0)\cdot F(0) + (3-1)\cdot F(1) + (4-3)\cdot F(3) =$$



AGORA FAÇA A MESMA COISA PARA $c_i = F(a_i)$

COM AS SEGUINTES PARTIÇÕES.

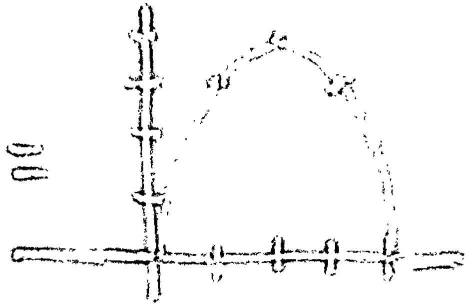


$P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$P_2 = \{0, 1, 3, 4\}$,

$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$.

SEJA $F =$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 4-(x-2)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x \end{cases}$$

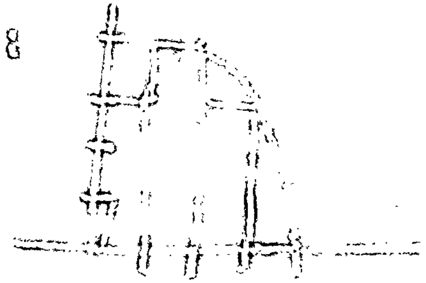
DEPOIS FAÇA A MESMA COISA COM $c_i = F\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)$ NAS PARTIÇÕES P_1, P_2 E

$P_4 = \{0, 4\}$,

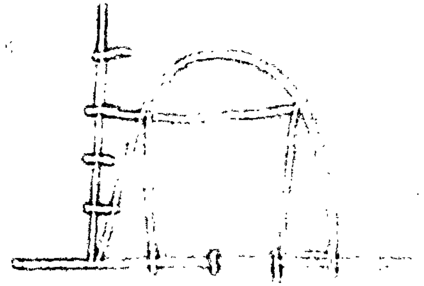
$P_5 = \{0, 2, 4\}$.

GAB: $c_i = F(b_i)$,

P_1:



P_2:



P_3:

C2 22/MAR/2017

ESTAMOS VENDO COMO APROXIMAR A <u>ÁREA SOB O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO</u> USANDO SOMAS DE RETÂNGULOS.

IDÉIA 1:

$\{0,1,3,4\}$ É UMA <u>PARTIÇÃO</u> DO INTERVALO $[0,4]$ E 3 SUBINTERVALOS: $[0,1], [1,3], [3,4]$

NA VERDADE "REPRESENTA"

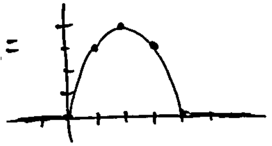
$\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ É UMA PARTIÇÃO DO $[0,4]$ EM 8 INTERVALOS

E SE $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$ ENTÃO $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $(x_1, x_{N+1}]$ EM N SUBINTERVALOS.

NOSSA FUNÇÃO PREFERIDA POR ENQUANTO:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x<0 \\ 4-(x-2)^2 & \text{QUANDO } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{QUANDO } 4<x \end{cases}$$

$F =$



IDÉIA 2:

i	a_i	b_i	$c_i = F(a_i)$
1	0	1	0
2	1	3	3
3	3	4	3

SE $b_i = a_{i+1}$ SEMPRE E $a_i < b_i$ SEMPRE ENTÃO PODEMOS INTERPRETAR

$$(*) \sum_{i=1}^{N} c_i (b_i - a_i)$$

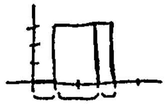
COMO UMA SOMA DE RETÂNGULOS...

NESTE CASO,

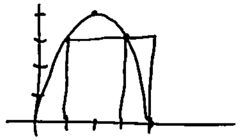
$$(*) = c_1(b_1-a_1) + c_2(b_2-a_2) + c_3(b_3-a_3)$$
$$= 0(1-0) + 3(3-1) + 3(4-3)$$

ALT ESQ DIR

$=$



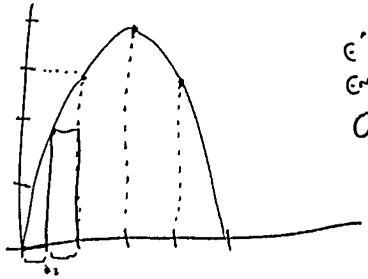
E SE DESENHARMOS F E $\sum_{i=1}^{N} c_i(b_i - a_i)$ NO MESMO GRÁFICO TEMOS:



SE FIZERMOS A MESMA COISA PRA $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

TEMOS:

i	a_i	b_i	$c_i = F(a_i)$
1	0	0.5	
2	0.5	1	
3	1	1.5	
4	1.5	2	
5	2	2.5	
6	2.5	3	
7	3	3.5	
8	3.5	4	



PARTIÇÕES QUE A GENTE USOU NA AULA PASSADA (TODAS DO INTERVALO $[0,4]$):

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$
$P_2 = \{0,1,\ \ 3,4\}$
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$
$P_4 = \{0,4\}$
$P_5 = \{0,2,4\}$

AGORA VAMOS TENTAR VISUALIZAR OUTROS SOMATÓRIOS QUE APROXIMAM A ÁREA SOB A CURVA...

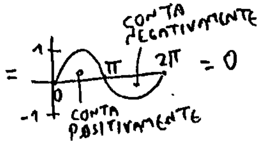
OBS: GEOMETRICAMENTE,

$$\int_{x=0}^{x=4} F(x)\,dx \quad \left(\approx \sum_{i=1}^{N} F(a_i)(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)(x_{i+1} - x_i)\right)$$

É A ÁREA <u>SOB</u> A CURVA $F(x)$ ENTRE $x=0$ E $x=4$.

OBS: EM

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \text{sen}(x)\,dx =$$



$= 0$

EXERCÍCIO:

AGORA VAMOS USAR $c_i = \max(F(a_i), F(b_i))$.

VISUALIZE ESTE SOMATÓRIO

$$\sum_{i=1}^{N} c_i (b_i - a_i) \left(= \sum_{i=1}^{N} \max(F(a_i), F(b_i))(b_i - a_i) \right)$$

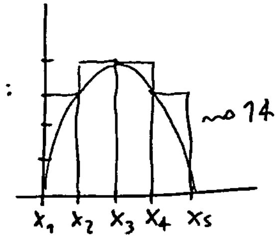
NAS SEGUINTES PARTIÇÕES:

P_1, P_5, P_2, P_4, P_3

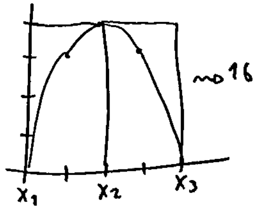
REPRESENTEM NO MESMO GRÁFICO A FUNÇÃO F E A SOMA DE RETÂNGULOS.

SUGESTÃO: FAÇAM A TABELA.

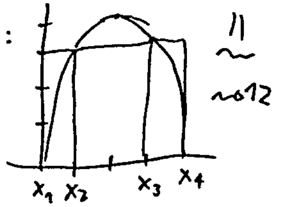
P_1:



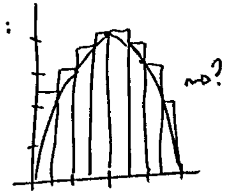
P_5:



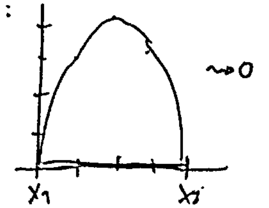
P_2:



P_3:



P_4:



C2 22/MAR/2017

ESTAMOS VENDO COMO APROXIMAR A ÁREA SOB O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO USANDO SOMAS DE RETÂNGULOS.

AGORA VAMOS VER UM JEITO UM POUCO MAIS COMPLICADO DE CALCULAR OS "c_i"S QUE VAI GARANTIR QUE OS RETÂNGULOS ESTÃO SEMPRE ACIMA DA CURVA ORIGINAL (F).

$$\max(10,2,5) = 10$$

$$\max(\{10,2,5\}) = 10$$

$$\max([2,3]) = 3$$

$$\max([2,3)) = 3$$

$$\sup([2,3)) = 3$$

$$\sup(\{0,1,2,3,4,\ldots\}) = +\infty$$

$$\sup(\emptyset) = -\infty$$

$$\sup_{x\in[1,3]} F(x) = 4$$

$$\max(\underbrace{F(1)}_{3}, \underbrace{F(3)}_{3}) = 3$$

$$\max(\underbrace{F(1)}_{3}, \underbrace{F(2)}_{4}, \underbrace{F(3)}_{3}) = 4$$

AGORA $c_i = \sup_{x\in[a_i,b_i]} F(x)$.

REPRESENTEM GRAFICAMENTE

$$\sum_{i=1}^{N} c_i(b_i-a_i)$$

$$\left(= \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{x\in[a_i,b_i]} F(x)\right)(b_i-a_i)\right)$$

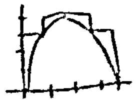
PARA AS PARTIÇÕES

$P_1, P_5, P_2, P_4, P_3.$

$\boxed{\text{PRA CASA!!!}}$

REPARE QUE A "CURVA" FORMADA PELOS RETÂNGULOS FICA SEMPRE ACIMA DA F...

$P_1 =$



$P_5 =$

$P_2 =$

$P_4 =$

$P_3 =$

DEF:

SE P É UMA PARTIÇÃO DE $[a,b]$,

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\right)(x_{i+1}-x_i)$$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\right)(x_{i+1}-x_i)$$

FATO IMPORTANTE:

PARA QUALQUER FUNÇÃO f E PRA QUALQUER PARTIÇÃO P DO INTERVALO $[a,b]$ TEMOS:

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx$$

$$\geq$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

$$\geq$$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx$$

C2 27/MAR/2017

NO FIM DA AULA PASSADA VIMOS QUE, PARA QUALQUER PARTIÇÃO P DO INTERVALO [a,b], ISTO AQUI É INTUITIVAMENTE E VISUALMENTE VERDADE...

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\Big)(x_{i+1}-x_i) \qquad (\star)$$

$$\geq$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

$$\geq$$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \Big(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)\Big)(x_{i+1}-x_i)$$

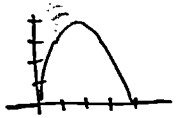
OS PROXIMOS PASSOS VÃO FICAR MAIS SIMPLES SE A GENTE INTERPRETAR ESSES SOMATÓRIOS COMO (INTEGRAIS DE) FUNÇÕES ESCADA...

DEFS:

$$\overline{f}_P : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sup\limits_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) & \text{se } x_i < x < x_{i+1} \\ \max\big(\lim\limits_{t\to x^-} f(t), \lim\limits_{t\to x^+} f(t)\big) & \text{se } x \in P \end{cases}$$

EXEMPLO: SE $f=$



E $P=\{0,1,3,4\}$,

ENTÃO $x_1=$

$x_2=$

$x_3=$

$x_4=$

$N=$

$\overline{f}_P(2)= 4$ ← $x=2$, $x_2<x<x_3$, $i=2$, $\sup\limits_{t\in[1,3]} f(t) = 4$ $\sup\limits_{t\in\{1,2,3\}} f(t)$

$\overline{f}_P(0.5)=3$ ← $x=0.5$, $x_1<x<x_2$, $i=1$

$\overline{f}_P(1)=$

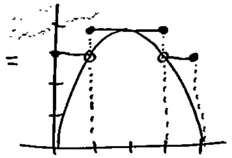
$\overline{f}_P =$

$\max\big(\lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=4,\ \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=3\big)=4$

$f(0)=3$

$f(4)=3$

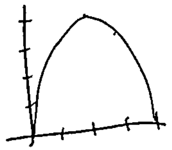
$\overline{f}_P =$



$$\underline{f}_P : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \inf\limits_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) & \text{se } x_i < x < x_{i+1}, \\ \min\big(\lim\limits_{t\to x^-} f(t), \lim\limits_{t\to x^+} f(t)\big) & \text{se } x \in P \end{cases}$$

$\underline{f}_P =$

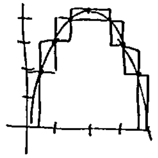


NÓS ACABAMOS DE VER UM JEITO DE CERCAR A FUNÇÃO f ORIGINAL POR UMA FUNÇÃO ESCADA EM CIMA E OUTRA EMBAIXO...

NÓS CERCAMOS A f, QUE AINDA NÃO SABEMOS INTEGRAR, ENTRE DUAS FUNÇÕES QUE SABEMOS INTEGRAR...

E SE TROCAMOS A PARTIÇÃO P POR ESTA?

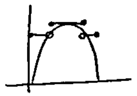
$P_3=\{0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4\}$?



AGORA VAMOS VOLTAR PRO $(\star)$...

NO CASO DA F,

$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \Sigma\ldots = \int_{x=a}^{x=b} \overline{f}_P(x)\,dx =$

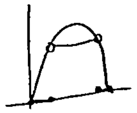


$$\geq$$

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx =$

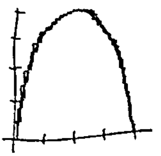
$$\geq$$

$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \Sigma\ldots = \int_{x=a}^{x=b} \underline{f}_P(x)\,dx =$



E SE TROCAMOS P POR ESTA PARTIÇÃO DAQUI?

$P_6=\{0,0.1,0.2,0.3,\ldots,3.9,4\}$



REPARE QUE $\underline{f}_P \leq f \leq \overline{f}_P$ EM TODO PONTO...

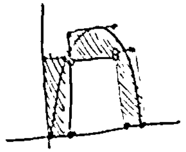
$\overline{f}_P(x)\,dx$

$\geq$

$f(x)$

$\geq$

$\underline{f}_P(x)$



C2 27/MAR/2017

MAIS DEFINIÇÕES:

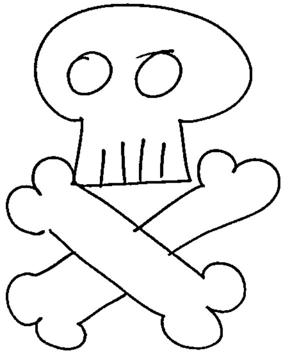
$$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \inf_{\substack{P \text{ PART.} \\ \text{DE } [a,b]}} \overline{\int_P} f(x)dx$$

$$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \sup_{\substack{P \text{ PART.} \\ \text{DE } [a,b]}} \underline{\int_P} f(x)dx$$

f É <u>INTEGRÁVEL EM [a, b]</u>

SE E SÓ SE $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx$.

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = A}$$ QUANDO $$\boxed{A = \overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx}$$

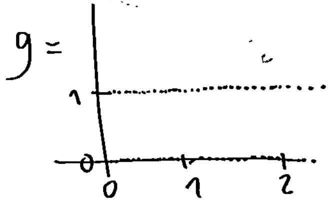


EXISTEM FUNÇÕES NÃO-INTEGRAVEIS.

SEJA: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{SE } x \text{ É RACIONAL} \\ 0 & \text{SE NÃO} \end{cases}$$

g =

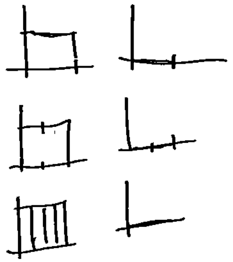


DESENHE A "APROXIMAÇÃO DE g POR RETÂNGULOS POR CIMA" E A "APROXIMAÇÃO DE g POR RETÂNGULOS POR BAIXO" PARA ESTAS PARTIÇÕES:

$P_7 = \{0, 1\}$

$P_8 = \{0, 0.5, 1\}$,

$P_9 = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$



... AGORA A GENTE SABE <u>APROXIMAR</u> INTEGRAIS DE FUNÇÕES COMO A F = 

USANDO SOMATÓRIOS...

POR EXEMPLO AGORA A GENTE JÁ É CAPAZ DE FAZER UM PROGRAMA DE COMPUTADOR QUE CALCULA APROXIMAÇÕES CADA VEZ MELHORES PARA

$$\int_{x=0}^{x=4} F(x)dx.$$

NA PRÓXIMA AULA:

O QUE ACONTECE SE A GENTE VARIA O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO?

EXEMPLO:

g = 

h = 

$G(b) = \int_{x=0}^{x=b} g(x)\,dx$ $H(b) = \int_{x=0}^{x=b} h(x)\,dx$

$G(4) = ?$ ← FOI SÓ ESSE VALOR (PRA b=4) QUE A GENTE DISCUTIU ATÉ AGORA...

A GENTE PODE TENTAR FAZER O GRÁFICO DA G (!!) E DA H (!!)...
E SE A GENTE OLHAR PRA <u>DERIVADA</u> DE G E H A GENTE VAI VER QUE
$G' = g$, $H' = h$...

ALEM DISSO $G(0) = 0$ E $H(0) = 0$...

$$\begin{aligned} g(x) &= 4 - (x-2)^2 \\ &= 4 - (x^2 - 4x + 4) \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

VOCÊS CONHECEM ALGUMA FUNÇÃO CUJA DERIVADA SEJA...

a) $4x \Rightarrow 2x^2$
b) $-x^2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^3$
c) $4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{3}x^3 = x^2$$

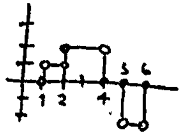
$$\frac{d}{dx} -\frac{1}{3}x^3 = -x^2$$

C2 29/mar/2017

Hoje: TFC1 e TFC2...
Aliás, na verdade a gente vai <u>se convencer</u> de que eles são verdade e ver <u>aplicações</u> deles.

Truque: se a gente aprender a integrar funções definidas por casos o resto fica fácil.

P.ex., se $f=$



Então

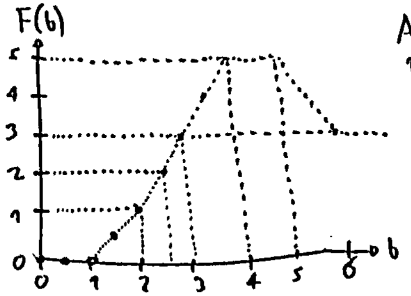
$$\int_{x=1.5}^{x=5.5} f(x)\,dx = \left.\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx\right\}0.5$$
$$+\left.\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx\right\}4$$
$$+\left.\int_{x=4}^{x=5} f(x)\,dx\right\}0$$
$$+\left.\int_{x=5}^{x=5.5} f(x)\,dx\right\}-1$$

...dá pra gente fazer algo parecido variando o intervalo de integração.

Calcule $\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)$

para os valores de b abaixo:

b	F(b)
0	0
0.5	0
1	0
1.5	0.5
2	1
2.5	2
3	3
3.5	4
4	5
4.5	5
5	5
5.5	4
6	3
6.5	3



Como <u>deve ser</u> o gráfico da F?
Faça hipóteses !!

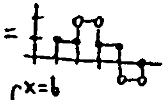
Dica: a gente pode começar calculando F(b) para mais valores de b...

$F(1.1)=?$

$$F(1.1)-F(1.0)=\int_{x=1.0}^{x=1.1} f(x)\,dx = \underbrace{1}_{\text{alt}}\cdot\underbrace{(1.1-1.0)}_{\text{base}} = 0.1$$

$F(1.2)-F(1.1)=0.1$

Exercício:
Digamos que $g=$



e que $G(b)=\int_{x=0}^{x=b} g(b)\,dx$.

Faça o gráfico de $G(b)$.

Agora encontre definições por casos para F' e G' (onde elas estiverem definidas).

$$F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<1 \\ 1 & \text{se } 1<x<2 \\ 2 & \text{se } 2<x<4 \\ 0 & \text{se } 4<x<5 \\ -2 & \text{se } 5<x<6 \end{cases}$$

$F'=f$ e $G'=g$ nos pontos em que f e g são contínuas! !!

Reparem (obs: não é "teorema", é "reparem") que pra qualquer função-escada h se definirmos

$$H(b)=\int_{x=0}^{x=b} h(x)\,dx$$

a H vai ser contínua e $H'(x)=h(x)$ onde h for contínua...

E se fizermos isto aqui?

$$H_a(b)=\int_{x=a}^{x=b} h(x)\,dx$$

Exerc: faça o gráfico de F_2.

b	$F_2(b)$
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
4.5	
5	
5.5	
6	
6.5	
7	

$$F_2(3.5)=\int_{x=2}^{x=3.5} f(x)\,dx$$

Reparem que $F_2(b)=F(b)-1$ para todo b onde as duas estão definidas...

E além disso:
$F_2(2)=0$
$F(0)=0=$
$F(b)=F_0(b)$

Será que a gente pode definir $F_2(b)$ pra $b<2$?

Truque...
Lembre que a "área sob uma curva" às vezes era negativa porque isso deixava as contas mais simples...

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

se $a\le b\le c$...

Vamos tirar essa restrição!

P.ex: $$\int_{x=2}^{x=3} = \underbrace{\int_{x=2}^{x=1}}_{\text{"ordem errada"}} + \int_{x=1}^{x=3}$$

Truque: $$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx$$

Usem este truque ← pra calcular

b	$F_2(b)$
0	-1
0.5	-1
1	-1
1.5	-0.5
2	0

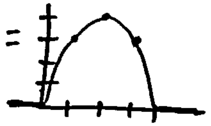
Em particular, se $a=c$,

$$\underbrace{\int_{x=a}^{x=a}}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \int_{x=a}^{x=b} + \int_{x=b}^{x=a}$$

C2 29/MAR/2017

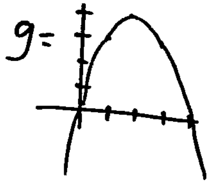
VAMOS VOLTAR ÀS FUNÇÕES QUE EU USEI COMO EXEMPLOS NAS PRIMEIRAS AULAS...

$f =$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x<0 \\ 4-(x-2)^2 & \text{SE } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{SE } 4<x \end{cases}$$

$g =$



$$g(x) = 4-(x-2)^2$$
$$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$$
$$= 4x-x^2$$

E LEMBREM QUE PRA CADA PARTIÇÃO P NÓS SABÍAMOS DEFINIR $\overline{f}_P$ E $\underline{f}_P$,

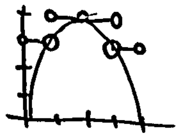
E $\overline{g}_P$ E $\underline{g}_P$...

SEJAM:

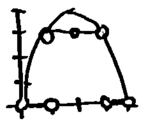
$P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P_2 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

$\overline{f}_{P_1} =$



$\underline{f}_{P_1} =$



REPARE QUE AINDA NÃO SABEMOS CALCULAR $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$...

MAS SABEMOS CALCULAR

$$\int_{x=a}^{x=b} \overline{f}_{P_1}(x)\,dx$$

E $$\int_{x=a}^{x=b} \underline{f}_{P_1}(x)\,dx$$

PRA QUAISQUER $a,b \in [0,4]$

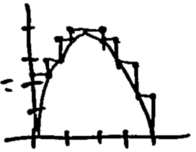
E IDEM PRA $\overline{f}_{P_2}$, $\underline{f}_{P_2}$.

E IDEM PRA OUTRAS PARTIÇÕES DO INTERVALO $[0,4]$...

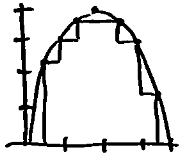
A GENTE SABE QUE

$$\begin{array}{ccc} \overline{f}_{P_1} & \geq & \overline{f}_{P_2} \\ \geq & & \geq \\ f & , & f \\ \geq & & \geq \\ \underline{f}_{P_1} & \leq & \underline{f}_{P_2} \end{array}$$

$\overline{f}_{P_2} =$



$\underline{f}_{P_2} =$



...E SE PEGARMOS PARTIÇÕES COM MAIS PONTOS AINDA NÓS VAMOS TER APROXIMAÇÕES CADA VEZ MELHORES PRA f...

PEGUE UMA PARTIÇÃO P_n DE $[0,4]$.

SABEMOS FAZER O GRÁFICO DE

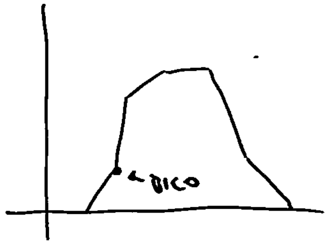
$$\int_{x=0}^{x=b} \overline{f}_{P_N}(x)\,dx \ldots \quad \Leftarrow F(b)$$

VAI SER UMA FUNÇÃO CONTÍNUA, FEITA DE SEGMENTOS DE RETA,

$F(0)=0$,

$F'(x) = \overline{f}_{P_N}(x)$ FORA DOS PONTOS DA PARTIÇÃO...

TERMINOLOGIA (INFORMAL):



CONTÍNUA, FEITA DE SEGMENTOS DE RETA...

EM CADA BICO DELA A GENTE PODE CALCULAR A DERIVADA DELA À ESQUERDA E À DIREITA, E A DIFERENÇA DAS DERIVADAS

(...)

PEGANDO UMA PARTIÇÃO MUITO FINA (OU: "INFINITAMENTE FINA") A GENTE CONSEGUE $\overline{f}_{P_N}(x)$ MUITA PRÓXIMA DA f,

E $\int_{x=0}^{x=b} \overline{f}_{P_N}(x)\,dx$ VAI SER (QUASE) DERIVÁVEL,

$\boxed{\text{C2 3/ABRIL/2017}}$

O QUE NÓS JÁ VIMOS:

1) $P = \{\underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_1}}, x_2, \ldots, \underset{b}{\overset{\shortparallel}{x_{N+1}}}\}$

$x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$

É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM SUBINTERVALOS $[x_1,x_2], [x_2,x_3], \ldots, [x_N,x_{N+1}]$

2) ESTES SOMATÓRIOS PODEM SER INTERPRETADOS COMO SOMAS DE RETÂNGULOS:

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_{i+1})\,(x_{i+1}-x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \max(f(x_i), f(x_{i+1}))\,(x_{i+1}-x_i)$$

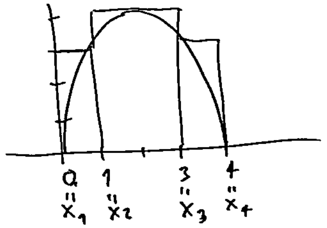
$$\sum_{i=1}^{N} (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i), \quad (\star)$$

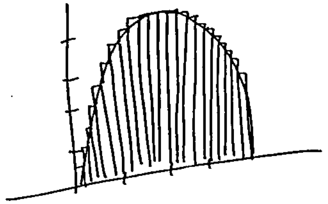
$$\sum_{i=1}^{N} (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i) \quad (\star\star)$$

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ = ÁREA SOB A (O GRÁFICO) CURVA DE f ENTRE $x=a$ E $x=b$

$\overline{\int_P} f(x)dx = (\star)$ ÁREA DE UMA FIGURA UM POUCO ACIMA DA f

$\underline{\int_P} f(x) = (\star\star)$ ÁREA DE UMA FIGURA UM POUCO ABAIXO DA f.





ÁREA

V

ÁREA

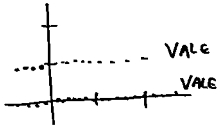
f É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$

QUANDO

$$\inf_{P \text{ PART } [a,b]} \overline{\int_P} f(x)\,dx$$
$$\shortparallel$$
$$\sup_{P \text{ PART } [a,b]} \underline{\int_P} f(x)\,dx$$

ALGUMAS FUNÇÕES NÃO SÃO INTEGRÁVEIS...

EXEMPLO:



NOTAÇÃO / DEFINIÇÃO:

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = K$ QUER DIZER:

$$\overline{\int_P} f(x)dx = \underline{\int_P} f(x)dx = K.$$

A GENTE COMEÇOU VENDO ÁREAS...

PORQUE EM ALGUM SENTIDO CALCULAR ÁREAS É O OPOSTO DE DERIVAR.

FINAL DA AULA PASSADA:

SE f É ESCADA EM $[a,c]$

ENTÃO:

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

E F:

- F É CONTÍNUA EM $[a,c]$,
- $F(a) = 0$,
- F É DERIVÁVEL ONDE f FOR CONTÍNUA E $F'(b) = f(b)$

...E USEI ISSO PRA CONVENCER AS PESSOAS DE QUE SE A GENTE APROXIMAR  $= f$ POR FUNÇÕES ESCADA A GENTE ACABA VENDO QUE:

SE f É CONTÍNUA EM $[a,c]$

ENTÃO:

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

E F:

- É CONTÍNUA EM $[a,c]$
- $F(a) = 0$
- $F'(b) = f(b)$ SEMPRE.

} TFC.

HOJE:

CALCULANDO INTEGRAIS PELO MÉTODO DO CHUTAR-E-TESTAR + TFC1

C2 3/APRIL/2017

O QUE NÓS JÁ VIMOS:

1) $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{N+1}\}$, $x_1 = a$, $x_{N+1} = b$

$x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1}$

É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM SUBINTERVALOS

$[x_1,x_2], [x_2,x_3], \dots, [x_N, x_{N+1}]$

2) ESTES SOMATÓRIOS PODEM SER INTERPRETADOS COMO SOMAS DE RETÂNGULOS:

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_{i+1})\,(x_{i+1}-x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \max(f(x_i), f(x_{i+1}))\,(x_{i+1}-x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i), \quad (\star)$$

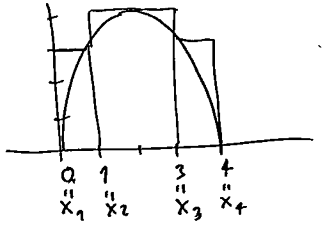
$$\sum_{i=1}^{N} (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i) \quad (\star\star)$$

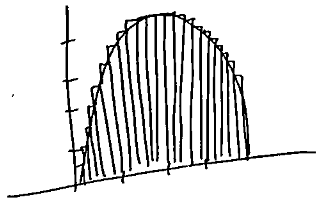
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{ÁREA SOB A CURVA DE } f \text{ ENTRE } x=a \text{ E } x=b$$

(O GRÁFICO)

$\overline{\int_P} f(x)dx = (\star)$ ÁREA DE UMA FIGURA UM POUCO ACIMA DA f

$\underline{\int_P} f(x) = (\star\star)$ ÁREA DE UMA FIGURA UM POUCO ABAIXO DA f.





ÁREA

∨

ÁREA

f É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$

QUANDO

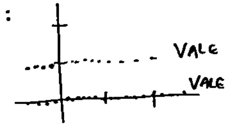
$$\inf_{P \text{ PART } [a,b]} \overline{\int_P} f(x)\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$\sup_{P \text{ PART } [a,b]} \underline{\int_P} f(x)\,dx$$

ALGUMAS FUNÇÕES NÃO SÃO INTEGRÁVEIS...

EXEMPLO:



VALE 1 NOS RACIONAIS

E

VALE 0 NOS IRRACIONAIS

NOTAÇÃO / DEFINIÇÃO:

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = K$ QUER DIZER:

$$\overline{\int_P} f(x)dx = \underline{\int_P} f(x)dx = K.$$

A GENTE COMEÇOU VENDO ÁREAS...

PORQUE EM ALGUM SENTIDO CALCULAR ÁREAS É O OPOSTO DE DERIVAR.

FINAL DA AULA PASSADA:

SE f É ESCADA EM $[a,c]$

ENTÃO:

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

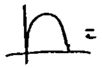
E F:

① F É CONTÍNUA EM $[a,c]$,

② $F(a)=0$,

③ F É DERIVÁVEL ONDE f FOR CONTÍNUA E $F'(b)=f(b)$

...E USEI ISSO PRA [illegible] CONVENCER AS PESSOAS DE QUE SE A GENTE APROXIMAR



$= f$

POR FUNÇÕES ESCADA A GENTE ACABA VENDO QUE:

SE f É CONTÍNUA EM $[a,c]$

ENTÃO:

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

E F:

① É CONTÍNUA EM $[a,c]$

② $F(a)=0$

③ $F'(b)=f(b)$ SEMPRE.

} TFC.

HOJE:

CALCULANDO INTEGRAIS PELO MÉTODO DO CHUTAR-E-TESTAR + TFC1

C2 3/APRIL/2017

1) EXERCÍCIO:

a) SEJA $f_1(x) = 2x + 3$.

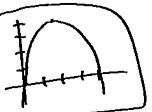
ENCONTRE $F_1(x)$ TAL QUE $F_1'(x) = f_1(x)$ $(\forall x)$.

UMA POSSIBILIDADE:
$F_1(x) = x^2 + 3x$.
OUTRAS:
$F_1(x) = x^2 + 3x + 200$.
$F_1(x) = x^2 + 3x + C$.

b) ENCONTRE $F_1(x)$ TAL QUE:
- $F_1'(x) = f_1(x)$
- $F_1(0) = 4$

$C = 4$

c) SEJA
$$f_2(x) = 4 - (x-2)^2 = 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4x - x^2.$$

$f_2 =$ 

ENCONTRE $F_2(x)$ TAL QUE $F_2'(x) = f_2(x)$.

$F_2(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} + C$

d) ENCONTRE $F_2(x)$ TAL QUE $F_2'(x) = f_2(x)$ E $F_2(1) = 0$.

$$F_2(1) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{3} + C = \frac{6-1}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{5}{3}$$

$F_2(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$

... AGORA VAMOS TENTAR USAR O TFC1!

SEJAM $f(x) = 4x - x^2$,
$a = 1$, $c = 4$.

- ENCONTRE UMA $G(x)$ QUE OBEDEÇA:
  - $G(a) = 0$,
  - $G'(b) = f(b)$ SEMPRE.

RESP: $G(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$.

SEJA $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

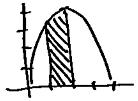
ENTÃO F E G SÃO CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS EM TODO PONTO E $F(1) = G(1)$.

ENTÃÃÃÃO POR UM TEOREMA DE CÁLCULO 1 (TVM?)
$F(x) = G(x)$ EM TODO PONTO...
...OU PELO MENOS PRA TODO $x \geq b$
SE A GENTE TIVER DIFICULDADE DE INTERPRETAR F À ESQUERDA DE a.

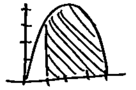
ENTÃO:
$$\int_{x=1}^{x=b} 4x - x^2\,dx = 2b^2 - \frac{b^3}{3} - \frac{5}{3}.$$

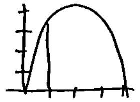
AGORA CALCULEM:
$\int_{x=1}^{x=b} 4x - x^2\,dx$ PRA: $b = 1$,
$b = 2$,
$b = 3$,
$b = 4$,
$b = 0$.

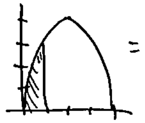
E REPRESENTEM GRAFICAMENTE A ÁREA QUE VOCÊ ESTÁ CALCULANDO.

EX: $\int_{x=1}^{x=2} 4x - x^2\,dx =$  $= 2 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{24-8-5}{3} = \frac{11}{3}$

$\int_{x=1}^{x=3} 4x - x^2\,dx =$  $= 2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{54-27-5}{3} = \frac{22}{3}$

$\int_{x=1}^{x=4} 4x - x^2\,dx =$  $= 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{96-64-5}{3} = \frac{27}{3} = 9$

$\int_{x=1}^{x=1} 4x - x^2\,dx =$  $= 2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} - \frac{5}{3} = 0$

$\int_{x=1}^{x=0} 4x - x^2\,dx =$  $= 2 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$

QUE É EVIDÊNCIA (?) DE QUE $\int_{x=0}^{x=1} 4x - x^2\,dx =$  $= \frac{5}{3}$

EXERCÍCIO:

CALCULE
$$\int_{x=0}^{x=4} x\,dx$$
USANDO
a) O MÉTODO ANTERIOR
b) VISUALMENTE.

HOJE:

CALCULANDO INTEGRAIS PELO MÉTODO DO CHUTAR-E-TESTAR + TFC1

EXERCÍCIO:
TENTEM CALCULAR

 −  =  = $\frac{5}{3}$

$\int_{x=1}^{x=4} 4x - x^2\,dx$ = $\frac{27}{3}$

$\int_{x=1}^{x=3} 4x - x^2\,dx$ = $\frac{22}{3}$

$\boxed{\text{C2 3/APRIL/2017}}$

$$\int_{\substack{x=0\\ \shortparallel\\ a}}^{x=b} \overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{x}}\,dx = F(b) \qquad = \frac{b^2}{2}$$

ENCONTREM $F(b)$ TAL QUE:

- $F'(b) = f(b) = b$
- $F(\underset{0}{\overset{a}{\shortparallel}}) = 0$

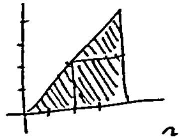
$$\begin{pmatrix} F'(x) = x \\ F(0) = 0 \end{pmatrix}$$

RESP: $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$F(b) = \frac{b^2}{2}$

$$\int_{x=0}^{x=b} x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=4} x\,dx = \frac{4^2}{2} = 8 =$$



$$\int_{x=2}^{x=4} x\,dx = \int_{x=0}^{x=4} x\,dx - \int_{x=0}^{x=2} x\,dx = 8 - \frac{2^2}{2} = 6 =$$

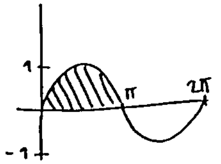
$$\int_{\substack{x=0\\ \shortparallel\\ a}}^{x=b} \overset{f(x)}{\overbrace{\text{sen } x}}\,dx = F(b)$$

ENCONTRE $F(b)$ TAL QUE:

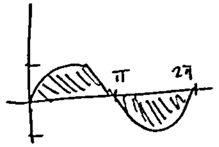
- $F'(b) = f(b) = \text{sen } b \qquad F'(x) = \text{sen } x$
- $F(\underset{0}{\overset{a}{\shortparallel}}) = 0$

RESP: $F(x) = 1 - \cos x$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \text{sen } x\,dx =$$



$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \text{sen } x\,dx =$$



EXERCICIO:

CALCULE

$$\int_{x=0}^{x=4} x\,dX$$

USANDO

a) O MÉTODO ANTERIOR

b) VISUALMENTE.

$$= 2\cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{24-8-5}{3} = \frac{11}{3}$$

$$= 2\cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{54-27-5}{3} = \frac{22}{3}$$

$$= 2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{96-64-5}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$= 2\cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} - \frac{5}{3} = 0$$

$$= 2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

QUE É EVIDÊNCIA (?) DE QUE

$$\int_{x=0}^{x=1} 4x - x^2\,dx =$$

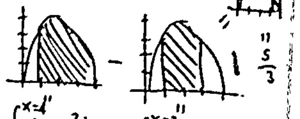
$= \frac{5}{3}$

HOJE:

CALCULANDO INTEGRAIS PELO MÉTODO DO CHUTAR-E-TESTAR + TFC1

EXERCÍCIO:

TENTEM CALCULAR



$$\int_{x=1}^{x=4} 4x - x^2\,dx \qquad \int_{x=1}^{x=3} 4x - x^2\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{27}{3}} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{22}{3}} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{5}{3}}$$

$\boxed{\text{C2 3/ABRIL/2017}}$

$$\int_{\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{x=0}}^{x=b} \overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{x}}\, dx = F(b) = \frac{b^2}{2}$$

ENCONTREM $F(b)$ TAL QUE:

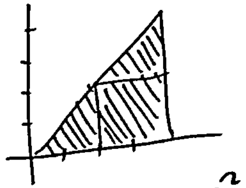
- $F'(b) = f(b) = b$ $\quad \left(\begin{matrix} F'(x) = x \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right)$
- $F(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a}) = 0$

RESP: $F(x) = \frac{x^2}{2}$

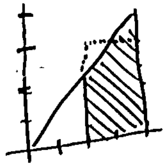
$F(b) = \frac{b^2}{2}$

$$\int_{x=0}^{x=b} x\, dx = \frac{b^2}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=4} x\, dx = \frac{4^2}{2} = 8 =$$



$$\int_{x=2}^{x=4} x\, dx = \int_{x=0}^{x=4} x\, dx - \int_{x=0}^{x=2} x\, dx = 8 - \frac{2^2}{2} = 6 =$$



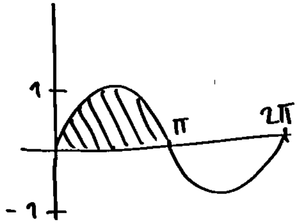
$$\int_{\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{x=0}}^{x=b} \overbrace{\text{sen } x}^{f(x)}\, dx = F(b)$$

ENCONTRE $F(b)$ TAL QUE:

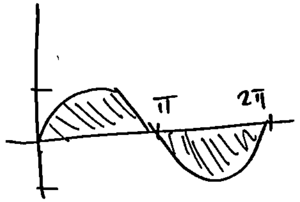
- $F'(b) = f(b) = \text{sen } b$ $\quad F'(x) = \text{sen } x$
- $F(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a}) = 0$

RESP: $F(x) = 1 - \cos x$

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \text{sen } x\, dx =$$



$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \text{sen } x\, dx =$$



C2 5/ABRIL/2017

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO ~~CALCULAR ÁREAS~~ INTEGRAR FUNSÕES BEM SIMPLES USANDO O TFC1...

HOJE NÓS VAMOS VER UMA VERSÃO DO TFC2 – A MAIS SIMPLES E "OPERACIONAL", QUE SE APLICA A CASOS EM QUE A f É CONTÍNUA, DERIVÁVEL E DADA POR UMA FÓRMULA SÓ...

TFC2 (VERSÃO 1):

SE f É CONTÍNUA EM $[a,d]$,
F É $\overset{\text{(CONTÍNUA E)}}{\text{DERIVÁVEL}}$ EM $[a,d]$
E $F'(x)=f(x)$ EM $[a,d]$
ENTÃO

$$\int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)-F(b) \qquad (\star)$$

PARA $\forall b,c \in [a,d]$...

OU:

$$\int_{x=b}^{x=c} F'(x)\,dx = F(c)-F(b) \qquad (\star\star)$$

COMO A GENTE USA ISSO?
TRUQUE: SUBSTITUIÇÃO!

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := -\cos x \\ b := 0 \\ c := \pi \end{array}\right] =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) \right)$$

EXERCÍCIOS:
USE $(\star\star)$ E SUBSTITUIÇÃO (QUAL? INDIQUE!) PARA CALCULAR:

a) $\displaystyle\int_{x=4}^{x=5} 2x^3\,dx$

b) $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2x^3\,dx$

c) $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} x^k\,dx$

d) $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} cx^3+dx^2+ex+f \quad dx$

e) $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos 2x\,dx$

f) $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos(3x+4)\,dx$

$$(\ast\ast)\left[\begin{array}{l} F(x) = 2\frac{x^4}{4} \\ c := 5 \\ b := 4 \end{array}\right] = \left(\int_{x=4}^{x=5} 2x^3\,dx = \left(2\frac{5^4}{4}\right) - \left(2\frac{4^4}{4}\right) \right)$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := 2\frac{x^4}{4} \\ c := b \\ b := a \end{array}\right]$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ c := b \\ b := a \end{array}\right]$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := c\frac{x^4}{4} + d\frac{x^3}{3} + e\frac{x^2}{2} + fx \\ c := b \\ b := a \end{array}\right]$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \\ c := b \\ b := a \end{array}\right]$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) := \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+4) \\ c := b \\ b := a \end{array}\right]$$

AVISO: A GENTE VAI USAR O "CALCULUS, 7TH ED" DO STUART – TEM LINK PRA ELE NA PÁGINA DO CURSO. EU ÀS VEZES VOU TENTAR COMPLEMENTAR O QUE ELE APRESENTA... P.EX., NA PARTE DE INTEGRAIS DEFINIDAS OS ARGUMENTOS QUE A GENTE VIU EM SALA NÃO SÃO COMPLETOS, SÃO PRA CONVENCER VOCÊS DE QUE A COISA FUNCIONA, MAS A PROVA COMPLETA TÁ NO STEWART.

UM TRUQUE PRA TENTAR RESOLVER A e E A f...
CHUTAR, TESTAR, MELHORAR, REPETIR.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 2x = 2\cos 2x$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) = \cos 2x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(3x+4) = \cos(3x+4)\cdot 3$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+4) = \cos(3x+4)$$

REGRA DA SUBSTITUISÃO

IDÉIA:

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} F(x) = f(g(x)) \\ c := b \\ b := a \end{array}\right] =$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(b)) - f(g(a)) \qquad (\star\star\star)$$

$$(\star\star)\left[\begin{array}{l} x := u \\ c := g(b) \\ b := g(a) \\ F(u) := f(u) \end{array}\right] =$$

$$\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du = f(g(b)) - f(g(a)) \qquad (\star\star\star\star)$$

COMBINANDO $(\star\star\star)$ E $(\star\star\star\star)$,

$$\begin{array}{c} f(g(b)) - f(g(a)) = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \shortparallel \\ f(g(b)) - f(g(a)) = \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \qquad (S_0)$$

EXERCÍCIOS:

g) $(S_0)\left[\begin{array}{l} g(x) = 3x+4 \\ f(u) = \operatorname{sen} u \end{array}\right] =$

$$\begin{array}{c} \operatorname{sen}(3b+4) - \operatorname{sen}(3a+4) = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos(3x+4)\cdot 3\,dx \\ \shortparallel \\ \operatorname{sen}(3b+4) - \operatorname{sen}(3a+4) = \displaystyle\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos(u)\,du \end{array}$$

h) $(S_0)\left[\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(u) = \operatorname{sen} u \end{array}\right] =$

$$\begin{array}{c} \operatorname{sen}(b^2) - \operatorname{sen}(a^2) = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx \\ \shortparallel \\ \operatorname{sen}(b^2) - \operatorname{sen}(a^2) = \displaystyle\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos(u)\,du \end{array}$$

i) USEM O ITEM ANTERIOR PRA CALCULAR

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx$$

UMA POSSIBILIDADE:

$$(S_0)\left[\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ b := 3 \\ a := 2 \end{array}\right] =$$

$$\begin{array}{c} \operatorname{sen}(3^2) - \operatorname{sen}(2^2) = \displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx \\ \shortparallel \\ \operatorname{sen}(3^2) - \operatorname{sen}(2^2) = \displaystyle\int_{u=2^2}^{u=3^2} \cos(u)\,du \end{array}$$

C2 5/ABRIL/2017

$$f(g(b))-f(g(a))=\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$f(g(b))-f(g(a))=\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (S_0)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \qquad (S_1)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} h(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} h(u)\,du \qquad (S_2)$$

$$(S_2)\left[h(u):=f'(u)\right]=(S_1)$$

A S_2 É MAIS ÚTIL.

VAMOS VER COMO USÁ-LA NA PROXIMA AULA...

EM BREVE:

$$\int h(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{d}{dx}g(x)}}_{\frac{du}{dx}}dx}_{du} = \int h(u)\,du \qquad \left[u=g(x)\right]$$

C2 12/ABRIL/2017

NOSSA FÓRMULA PREFERIDA PRA INTEGRASÃO POR SUBSTITUIÇÃO:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

OBS: SUBSTITUIÇÃO É DIFÍCIL E IMPORTANTE... A SOLUÇÃO É TREINAR MUITO !!

NA AULA PASSADA VIMOS COMO RESOLVER COISAS COMO

$$\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen } x^2)\cdot x\,dx$$

E AGORA VAMOS VER UM TRUQUE IMPORTANTE.

EM QUASE TODAS AS FORMULAS DE INTEGRASÃO OS LIMITES DE INTEGRASÃO SE REPETEM...

EXCETO QUANDO A GENTE USA A REGRA DE SUBSTITUIÇÃO.

ALÉM DISSO,

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

$$= \underbrace{F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}_{\text{NOTAÇÃO NOVA.}}$$

$\boxed{\text{TFC 2}}$

IDÉIA:
VAMOS PRIMEIRO FAZER AS CONTAS SEM INDICAR OS LIMITES DE INTEGRASÃO...

$$\int_{x=a}^{x=b} \ldots\,dx \to \int \ldots\,dx \qquad \ldots\Big|_{x=a}^{x=b} \to \ldots$$

$$\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} \ldots\,du \to \int \ldots\,du \qquad \ldots\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \to \ldots$$

...E NO FINAL A GENTE VAI RECOLOCAR OS LIMITES (DO JEITO CERTO).

EXEMPLO:

$$\int_{x=2}^{x=3} \cos \underbrace{5x}_{u}\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{5}du} =$$

$$\begin{bmatrix} u=5x \\ \frac{du}{dx}=5 \\ du=5dx \\ dx=\frac{1}{5}du \\ x=\frac{1}{5}u \end{bmatrix}$$

$F(x)=5x$

$x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{5}u$
$2=\frac{1}{5}u$
$u=2\cdot5$
$x=3 \Rightarrow u=3\cdot5$

$$\int_{u=2\cdot5}^{u=3\cdot5} \frac{1}{5}\cos u\,du =$$

$$\frac{1}{5}\left(\int_{u=2\cdot5}^{u=3\cdot5} \underbrace{\cos u}_{F'(u)}\,du\right) = \frac{1}{5}\left(\underbrace{\text{sen } u}_{F(u)}\Big|_{u=2\cdot5}^{u=3\cdot5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\text{sen } 3\cdot5 - \text{sen } 2\cdot5\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\text{sen } 5x\Big|_{x=2}^{x=3}\right)$$

SE A GENTE APAGA OS LIMITES DE INTEGRASÃO (E DO OPERADOR DE DIFERENÇA), ISTO VIRA:

$$\int \cos \underbrace{5x}_{u}\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{5}du} =$$

$$\int \frac{1}{5}\cos u\,du =$$

$$\frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\text{ sen } \underbrace{u}_{5x}$$

$$= \frac{1}{5}\text{ sen } 5x$$

NOTAÇÃO NOVA! VAMOS TRATAR ELA COMO UMA ABREVIAÇÃO DA NOTAÇÃO COMPLETA! (POR ENQUANTO!)

SE A GENTE ESQUECE OS PASSOS INTERMEDIÁRIOS...

$$\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\text{ sen } 5x$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \underbrace{\cos 5x}_{F'(x)}\,dx = \left(\underbrace{\frac{1}{5}\text{ sen } 5x}_{F(x)}\right)\Big|_{x=2}^{x=3}$$

A REGRA DE SUBSTITUIÇÃO É CONSEQUÊNCIA DO TFC2

E SE A GENTE FOR MUITO BOM NO MÉTODO DO CHUTAR E TESTAR A GENTE PODE RESOLVER TUDO SÓ COM TFC2.-

A REGRA DE SUBSTITUIÇÃO ACABA NOS LEVANDO AO RESULTADO CERTO (VERIFICÁVEL PELO TFC2) COM MENOS CHUTES.

EXERCÍCIOS:
RESOLVAM, USANDO A NOTAÇÃO NOVA:

a) $\int (\underbrace{3x+4}_{u})^5\,dx =$

b) $\int \sqrt{\underbrace{3x+4}_{u}}\,dx =$

c) $\int x^3 \cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\,dx =$

a) $$\int (\underbrace{3x+4}_{u})^5\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du} = \qquad \begin{bmatrix} u=3x+4 \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

$$\int u^5\cdot\frac{1}{3}du =$$

$$\frac{1}{3}\int u^5 du =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6 =$$

$$\frac{1}{18}(3x+4)^6$$

b) $$\int (\underbrace{3x+4}_{u})^{1/2}\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du} \qquad \begin{bmatrix} u=3x+4 \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

$$= \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$= \frac{2}{9}u^{3/2}$$

$$= \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2}$$

c) $$\int x^3\cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\,\underbrace{dx}_{du/4x3} = \ldots \qquad \begin{bmatrix} u=x^4+2 \\ \frac{du}{dx}=4x^3 \\ du=4x^3dx \\ dx=\frac{du}{4x^3} \\ du=4x^3dx \\ x^3dx=\frac{du}{4} \end{bmatrix}$$

$$\int \cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\,\underbrace{x^3dx}_{du/4} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\text{ sen } u = \frac{1}{4}\text{sen}(x^4+2)$$

C2 12/ABRIL/2017

SUGESTÃO:

FAÇAM EM CASA OS EXERCÍCIOS DO STEWART, PAGS 335-336 (EXERCÍCIOS DA SEÇÃO 4.5)

... VÁRIOS DESSES EXERCÍCIOS ENVOLVEM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. A GENTE LEMBRA $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$ E $\frac{d}{dx}\cos x$, MAS NÃO AS DA TANGENTE, SECANTE, ETC...

TRUQUE (QUE VAI SER IMPORTANTE EM SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!!!):

SE $s = \operatorname{sen}\theta$,

$c = \cos\theta$,

$t = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{c}$,

$z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{c}$

ENTÃO DÁ PRA GENTE DEDUZIR BASTANTE COISA SOBRE ESSAS VARIÁVEIS NOVAS COM CONTAS BEM CURTAS, QUE CABEM NUM CANTO DE PAPEL...

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = c$$

$$\frac{dc}{d\theta} = \qquad = -\operatorname{sen}\theta = -s$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$s^2 + c^2 = 1$$

$$s^2 = 1 - c^2 \qquad \sqrt{1-c^2} = \sqrt{s^2} = \pm s = s$$

$$c^2 = 1 - s^2 \qquad \sqrt{1-s^2} = \sqrt{c^2} = \pm c = c$$

ÀS VEZES

(EM CERTOS INTERVALOS TEMOS $\sqrt{1-c^2} = s$ E $\sqrt{1-s^2} = c$)

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\sec\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta} =$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} =$$

PRA CASA:

1) APRENDA A REDEDUZIR RAPIDAMENTE AS FÓRMULAS PARA

$\frac{d}{dx} f(x)^k$,

$\frac{d}{dx} f(x)^{-1}$,

$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}$

2) TENTE CALCULAR

$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{c}$

E $\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c}$

USANDO AS FÓRMULAS ACIMA.

DICAS:

$$\frac{d}{dx} f(x)^k = k f(x)^{k-1} f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x)^{-1} = -f(x)^{-2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$$

E SE $g(u) = u^k$, ENTÃO $g'(u) = \frac{d}{du} g(u) = \frac{d}{du} u^k = k u^{k-1}$

$$\frac{d}{dx} f(x)^k = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(\underbrace{f(x)}_{u}) f'(x) = k f(x)^{k-1} f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x)h(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$$

E SE $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, ENTÃO $\frac{d}{dx} f(x)h(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$\boxed{\text{C2 17/ABRIL/2017}}$

Hoje: mais uma técnica de integração: integrais por partes!

Lembre que:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \quad (\text{TFC2})$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x) \quad \left(\begin{matrix}\text{versão}\\ \text{abreviada}\end{matrix}\right)$$

Se $F(x) = f(x)g(x)$,

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx \overset{''}{} + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \quad (\text{IP1})$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (\text{IP2})$$

Como usar essas fórmulas?

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x$$

$$\int x e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Exercício:

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{2x}_{f'(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

Como é que a gente confere essa conta?

$$\int \underbrace{x^2e^x}_{F'(x)}\,dx = \underbrace{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x}_{F(x)}$$

Será que a derivada disto é realmente isto?

Tabelas de integrais

Quase todo livro de cálculo tem uma tabela de integrais (geralmente na penúltima capa, ou perto).

Essas tabelas servem pra quando a gente tem pressa e prática.

Isso é o nosso caso – a gente vai ver como deduzir algumas das fórmulas que aparecem nessas tabelas.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (+C)$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int x e^x\,dx = xe^x - x$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$\int x^3e^x\,dx = \ldots$$

Obs:

$$\int \underbrace{x^4}_{f'(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^5}{5} + 200}_{f(x)},$$

$$\int \underbrace{x^4}_{G'(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^5}{5} + 99}_{G(x)},$$

Exercícios:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g(x)}\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$\int (ax+b)\cos x\,dx = a\int x\cos x\,dx + b\int \cos x\,dx$$

$$=$$

$$\int \underbrace{x}_{\frac{u-b}{a}}\cos\underbrace{(ax+b)}_{u}\,\underbrace{dx}_{\frac{du}{a}} = ?$$

$$\left[\begin{matrix} u = ax+b \\ x = \frac{u-b}{a} \\ \frac{du}{dx} = a \\ du = a\,dx \\ dx = \frac{du}{a} \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int (u-b)\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int u\cos u\,du$$

$$- \frac{b}{a^2}\int \cos u\,du$$

Moral: Qual a gente resolve um problema tipo $\int x\cos x\,dx = ?$

A gente tá encontrando uma fórmula que vai servir pra resolver um monte de problemas um pouco mais complicados...

C2 17/ABRIL/2017

... ESTES PROBLEMAS AQUI ENVOLVEM UM TRUQUE EXTRA...

$$\int e^x \cos x \, dx = ?$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = ?$$

TRUQUE: COMECE APLICANDO INTEGRAÇÃO POR PARTES UMA VEZ A CADA UMA DESSAS FÓRMULAS:

$$\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\cos x}_{g(x)} dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{(\cos x)}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} (-\operatorname{sen} x) dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \quad ①$$

$$② \quad \int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{g(x)} dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\left(\int e^x \cos x \, dx\right) + \left(\int e^x \cos x \, dx\right) = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x \cancel{- \int e^x \cos x \, dx + \int e^x \cos x \, dx}$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right)$$

EXERCÍCIO:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = ?$$

(PRA AGORA)

AULA QUE VEM:

- UM JEITO DE FORMALIZAR OS "dx", "du", ETC QUE ESTÃO APARECENDO ⇦ "DIFERENCIAIS" (RELACIONADO: "APROXIMAÇÕES LINEARES")
- COMO DERIVAR E INTEGRAR FUNÇÕES INVERSAS... P.EX.:

$$\int \arccos x \, dx = ?$$

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = ?$$

$$\int \ln x \, dx = ?$$ (ln É INVERSA DO EXP)

- VAMOS COMEÇAR A VER

$$\int \frac{1}{x-a} dx = ?$$

$$\int \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} dx = ?$$

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3+dx^2+ex+f} dx = ?$$

C2 19/ABRIL/2017

HOJE:
DIFERENCIAIS,
APROXIMAÇÕES
LINEARES,
ETC...

$\leftarrow \frac{du}{dx}dx = du$ (???)

VAMOS COMEÇAR COM
DOIS CASOS:

a) $y = f(x)$
$z = g(y)$
← FUNÇÕES QUAISQUER

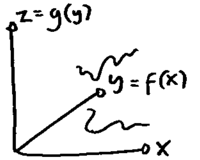
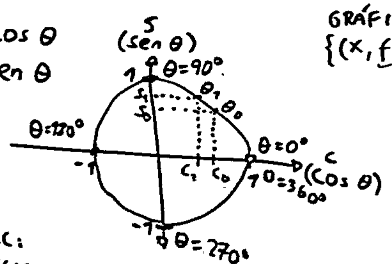


GRÁFICO 3D:
$\{(x, \underbrace{f(x)}_{y}, \underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{y})}_{z}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $c = \cos\theta$
$s = \text{sen}\,\theta$



EXERC:
REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\theta=0°$, $\theta=90°$, $\theta=180°$, $\theta=270°$, $\theta=360°$

θ	c	s
0°	1	0
90°	0	1
180°	-1	0
270°	0	-1
360°	1	0

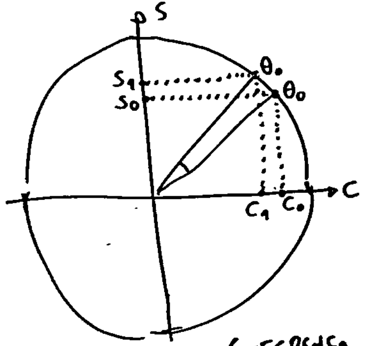
MAIS UMA NOTAÇÃO:

$x_0 \rightsquigarrow y_0 = f(x_0) \rightsquigarrow z_0 = g(y_0)$
$x_1 \rightsquigarrow y_1 = f(x_1) \rightsquigarrow z_1 = g(y_1)$
$x_2 \rightsquigarrow \ldots$

$\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta y = y_1 - y_0 \qquad \Delta z = z_1 - z_0$

NO CÍRCULO:

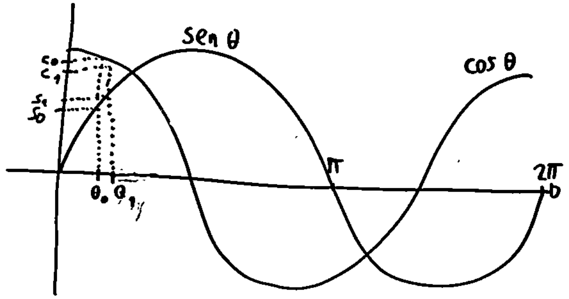


$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ (DIFERENÇA ENTRE DOIS ÂNGULOS!!)

$\Delta c = c_1 - c_0$
$\Delta s = s_1 - s_0$

... AGORA QUE A GENTE TEM TUDO ISSO (PORQUE A GENTE ESCOLHEU θ_0 E θ_1!)
TEMOS: $\frac{\Delta c}{\Delta\theta}$, $\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$...

OUTROS GRÁFICOS
RELACIONADOS:



AGORA DIGAMOS QUE
A GENTE FIXA θ_0 (0.7)
MAS A GENTE VAI FAZER
VÁRIOS DESENHOS...
UM COM $\Delta\theta = 0.2$ $\quad(\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta)$
OUTRO COM $\Delta\theta = 0.1$
OUTRO COM $\Delta\theta = 0.05$...

O QUE VAI ACONTECER?

$$\frac{\Delta c}{\Delta\theta} \to \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta c}{\Delta\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos(\theta_0)$$

(COEF. ANG. DA CURVA DO $\cos\theta$ EM $\theta = \theta_0$)

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} \to \frac{d}{d\theta}\text{sen}(\theta_0)$$

... E ALÉM DISSO COISAS COMO $\frac{\Delta s}{\Delta c}$ TAMBÉM VÃO CONVERGIR PRA UM LIMITE...

REPARE QUE DÁ PRA
APROXIMAR MUITO POR
ALTO, NO OLHÔMETRO,
QUANTO VALEM Δc, Δs,
ETC, E $\frac{\Delta c}{\Delta\theta}$, $\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$, $\frac{\Delta s}{\Delta c}$,

$\frac{\Delta c}{\Delta s}\left(= \frac{1}{\left(\frac{\Delta s}{\Delta c}\right)}\right)$, ...

E AÍ:

$$\frac{\Delta s}{\Delta c}\frac{\Delta c}{\Delta\theta} = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}$$

$$\frac{\Delta c}{\Delta\theta}\Delta\theta = \Delta c$$

GRANDE TRUQUE:
O QUE ACONTECE
QUANDO $\Delta\theta \to 0$?
AÍ, NO LIMITE,

$$\left(\lim_{\Delta\theta\to 0}\right)\frac{\Delta c}{\Delta\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos(\theta)$$

$\|$ NOTAÇÃO NOVA!

$$\frac{dc}{d\theta}$$

PRIMEIRAS DEFS:

$$\frac{dc}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta c}{\Delta\theta}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$$

E AÍ:

$$\frac{ds}{dc} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta c} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dc} = \frac{ds}{d\theta}\left(\frac{1}{\frac{d\theta}{dc}}\right)$$

TODAS ESSAS CONTAS FAZEM
SENTIDO! (TEM UNS TEOREMAS
NO CAMINHO, NÃO PREPAREI
EXERCÍCIOS AINDA, ETC...)

MAIS DEFINIÇÕES: DIFERENCIAIS!

LEMBREM QUE $\Delta\theta$, Δc, Δs
SÓ FAZEM SENTIDO QUANDO A
GENTE JÁ ESCOLHEU θ_0 E θ_1...

EM DIFERENCIAIS O $d\theta$
VAI PASSAR A SER UMA
VARIÁVEL E:

$$dc := \underbrace{\frac{dc}{d\theta}}_{\frac{d\cos\theta}{d\theta}}\underbrace{d\theta}_{\text{SEI}}$$

$$ds := \underbrace{\frac{ds}{d\theta}}_{\text{NÚMERO}}\underbrace{d\theta}_{\text{VAR}}$$

PRA QUE SERVE ISSO?
PRA UM MONTE DE
COISAS.

C2 19/ABRIL/2017

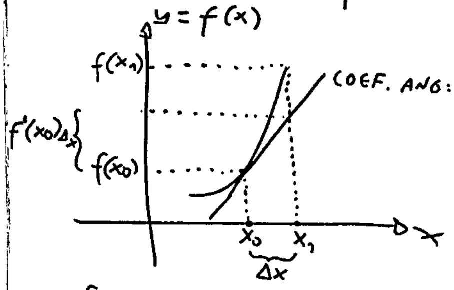
HOJE:

DIFERENCIAIS,
APROXIMAÇÕES
LINEARES,
ETC...

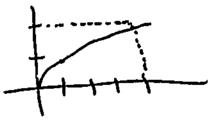
~ $\frac{du}{dx}dx = du$ (???)

APLICAÇÃO 0:
APROXIMAÇÕES
LINEARES!

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

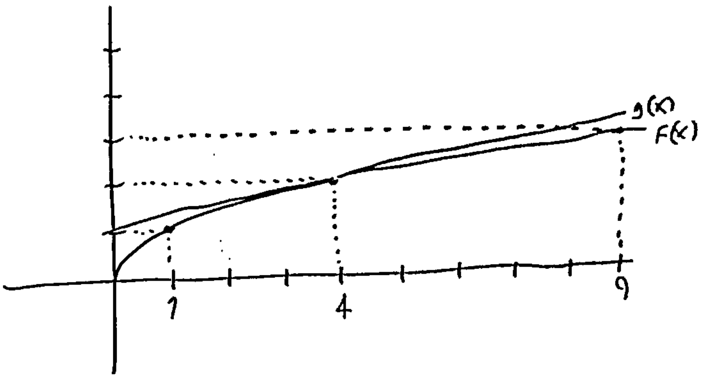


EXERCÍCIO:
SEJA $f(x)=\sqrt{x}$.



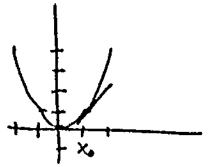
CALCULEM $f(4)$
$f'(4)$
E A EQUAÇÃO DA RETA $y=g(x)$ QUE
PASSA PELO PONTO $(4,f(4))$
COM COEF. ANG. $f'(4)$.

CALCULE $g(9)$ E $f(9)$,
$g(5)$ E $f(5)$,
$g(4.1)$ E $f(4.1)$.



$\boxed{\text{C2 24/ABRIL/2017}}$

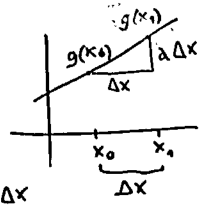
HOJE:
APROXIMAÇÕES LINEARES (DE NOVO!), DIFERENCIAIS (IDEM!), DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS E FUNÇÕES IMPLÍCITAS, ETC...



UMA APROXIMAÇÃO LINEAR DE $y=f(x)$ EM $x=x_0$ É UMA FUNÇÃO $y=g(x)=ax+b$ TAL QUE
$$f(x_0)=g(x_0)$$
E
$$f'(x_0)=g'(x_0).$$

EXERCÍCIOS:
SEJA $f(x)=x^2$.
ENCONTRE APROXIMAÇÕES LINEARES PARA f EM $x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=2$.

O GRÁFICO DA g É UMA RETA:
$$g(x)=\underbrace{a}_{\substack{\uparrow\\ \text{COEF}\\ \text{ANG}}}x+\underbrace{b}_{g(0)}$$



$$\begin{aligned}g(x_0+\Delta x)&=a(x_0+\Delta x)+b\\&=ax_0+a\Delta x+b\\&=(ax_0+b)+a\Delta x\\&=g(x_0)+a\Delta x\\&=g(x_0)+g'(x_0)\Delta x\\&=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\end{aligned}$$

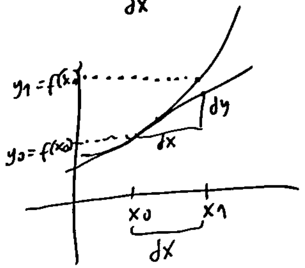
$$g(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$
$$g(x)\quad=?$$
$$g(x_1)\quad=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$$
$$g(x)\quad=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\qquad(\star)$$

USE A FÓRMULA (★) PRA CONSEGUIR APROXIMAÇÕES LINEARES DE F EM $x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=2$.

OBS:
$$\begin{aligned}g(x)&=f(x_0)+f'(x_0)x-f'(x_0)x_0\\&=\underbrace{f'(x_0)}_{a}x+\underbrace{f(x_0)-f'(x_0)x_0}_{b}\end{aligned}$$

OBS:
$$\begin{aligned}g(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x_1})&=g(x_0)+g'(x_0)\Delta x\\&=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\end{aligned}$$
$$\underbrace{\underbrace{g(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x_1})}_{y_1}-\underbrace{g(x_0)}_{y_0}}_{\Delta y}=g'(x_0)\Delta x$$

E LEMBRE QUE PRA USAR DIFERENCIAIS A GENTE VAI TRATAR dx COMO UMA VARIÁVEL E FAZER
$$dy:=f'(x_0)\,dx$$
OU
$$\begin{aligned}dy&:=f'(x)\,dx\\&=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx\\&=\frac{d\,f(x)}{dx}dx\\&=\frac{dy}{dx}dx\end{aligned}$$



O LIVRO TEM UNS EXERCÍCIOS SIMPLES SÓ PRA GENTE SE ACOSTUMAR COM ESSA NOTAÇÃO...

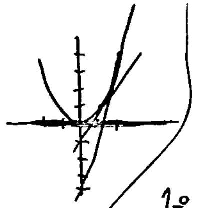
(SEWART P.187)

ENCONTRE A DIFERENCIAL DE CADA FUNÇÃO.

11a) $y=x^2\operatorname{sen}2x$
12a) $y=x/(1+2x)$
11b) $y=\sqrt{1+x^2}$

11a)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}(x^2\operatorname{sen}2x)\\&=2x\operatorname{sen}2x\\&\quad+2x^2\cos 2x\end{aligned}$$
$$dy=(2x\operatorname{sen}2x+2x^2\cos 2x)\,dx$$

APROXIMAÇÕES LINEARES:
$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^2=2x$$
EM $x_0=0$,
$$\begin{aligned}g(x)&=f(0)+f'(0)(x-0)\\&=0+0\cdot x\\&=0\end{aligned}$$
EM $x_0=1$,
$$\begin{aligned}g(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)\\&=1+2(x-1)\\&=2x+1-2\\&=2x-1\end{aligned}$$
EM $x_0=2$,
$$\begin{aligned}g(x)&=f(2)+f'(2)(x-2)\\&=4+4(x-2)\\&=4x-4\end{aligned}$$



A COISA COMEÇA A FICAR DIVERTIDA QUANDO A GENTE INTRODUZ MAIS VARIÁVEIS !!

SE $y=x^2$
$z=\operatorname{sen}y$
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{d}{dx}\operatorname{sen}y\\&=\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x^2\\&=(\cos x^2)2x\end{aligned}$$
$$\frac{dz}{dy}=\cos y\qquad\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}&=(\cos y)2x\\&=(\cos x^2)2x\end{aligned}$$
$$\longrightarrow dz=(\cos x^2)\,2x\,dx$$
$$\longrightarrow dz=\cos y\,dy$$
$$\longrightarrow dy=2x\,dx$$

OUTRO EXEMPLO:
$u=\operatorname{sen}x$
$v=x^3$
$$\frac{d}{dx}(uv)=?$$

1º JEITO:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv)&=\frac{d}{dx}((\operatorname{sen}x)x^3)\\&=(\cos x)x^3+(\operatorname{sen}x)3x^2\end{aligned}$$
$$d(uv)=(\underbrace{(\cos x)}_{\frac{du}{dx}}\underbrace{x^3}_{v}+\underbrace{(\operatorname{sen}x)}_{u}\underbrace{3x^2}_{\frac{dv}{dx}})dx.$$

NO CASO GERAL:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv)&=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\\&=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$
$$d(uv)=v\,du+u\,dv$$

...VÁRIAS DAS FÓRMULAS PRINCIPAIS DE DERIVAÇÃO VÃO TER "VERSÕES EM TERMOS DE DIFERENCIAIS"...
$$d(u^k)=ku^{k-1}du$$
$$\begin{aligned}d(u^{-1})&=-u^{-2}du\\&=-\frac{du}{u^2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}d\left(\frac{u}{v}\right)&=\frac{1}{v}du+u\,d(v^{-1})\\&=\frac{1}{v}du+u\left(-\frac{dv}{v^2}\right)\\&=\frac{v}{v^2}du-\frac{u}{v^2}dv=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{C2 24/ABRIL/2017}}$

O QUE ACONTECE SE f E g SÃO INVERSAS?

P.ex., se $f(y) = \ln y$,

$$g(x) = \exp x$$

$$f(g(x)) = \ln \exp x = x$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$= \ln'(\exp(x))\, \exp'(x)$$

$$= \ln'(\exp(x))\, \exp(x)$$

$$= 1$$

$$\ln'(\underbrace{\exp(x)}_{y}) = \frac{1}{\underbrace{\exp(x)}_{y}}$$

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

MAIS ABSTRATAMENTE,

$y = g(x)$,

$z = f(y)$,

$= x$

$(f(g(x)) = x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

JUNTANDO,

$$\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dz}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$$

EXERCÍCIO:

$y = g(x) = \text{sen } x$

$z = f(y) = \text{arcsen } y$

$z = f(g(x)) = \text{arcsen}(\text{sen } x) = x$

SERÁ QUE VOCÊS CONSEGUEM USAR ISSO PRA CALCULAR $\frac{d}{dy} \text{arcsen } y$?

$$\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\underset{\underset{\frac{d}{dy}\text{arcsen } y}{\shortparallel}}{\frac{dz}{dy}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{dx} \text{sen } x\right)^{-1}$$

$$= (\cos x)^{-1}$$

$$\frac{d}{dy} \text{arcsen } y = (\cos x)^{-1}$$ ← VARIÁVEIS DIFERENTES!!

TRUQUE (SUJO):

$$(\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2 = 1$$

$$(\cos x)^2 = 1 - (\text{sen } x)^2$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

$$\frac{d}{dy} \text{arcsen } y = \left(\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{1 - y^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

NA AULA QUE VEM VOCÊS VÃO APRENDER A APLICAR ESSE TIPO DE TRUQUE SUJO VOCÊS MESMOS!!

C2 26/ABRIL/2017

HOJE: VÁRIOS TRUQUES ENVOLVENDO DIFERENCIAIS E APROXIMAÇÕES LINEARES!

DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS VÃO SER MUITO IMPORTANTES EM CÁLCULO 2...

PRIMEIRO CASO:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad (\text{PARA } x>0)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad (\text{PARA } x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} dx = \ln|x-2| + \ln|x+3|$$

$$\overset{\shortparallel}{\int \frac{(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)} dx}$$

$$\overset{\shortparallel}{\int \frac{2x+1}{x^2+1-6} dx}$$

O "SEGUNDO CASO", NO QUAL A GENTE USA $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$, $\frac{d}{dx} \arctan x$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x$, ETC É MAIS DIFÍCIL DE EXPLICAR...

VOLTANDO...

PRECISAMOS APRENDER A DEDUZIR ESSAS COISAS NÓS MESMOS, E EU NÃO ENCONTREI EXERCÍCIOS MUITO BONS NO LIVRO, ENTÃO IMPROVISEI ALGUNS...

A AULA DE HOJE VAI SER CENTRADA EM EXERCÍCIOS.

1ª IDÉIA:

SE $f(g(x)) = h(x)$ E $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ SÃO AS APROXIMAÇÕES LINEARES DE f, g E h "NOS PONTOS CERTOS" ENTÃO $\bar{f}(\bar{g}(x)) = \bar{h}(x)$

$$\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x)) = \bar{h}(x_0+\Delta x)$$

2ª IDÉIA:

SE $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ENTÃO NÓS PODEMOS CALCULAR AS "DERIVADAS PARCIAIS" $F_x(x_0, y_0)$ E $F_y(x_0, y_0)$ E PODEMOS ADAPTAR A IDÉIA DE APROXIMAÇÃO LINEAR PARA ESTE CASO.

3ª IDÉIA:

SE $F(x, f(x)) = \text{CONSTANTE}$ E SABEMOS F, x_0 E $f(x_0)$ ENTÃO PODEMOS CALCULAR $f'(x_0)$.

EXERCÍCIOS:

DIGAMOS QUE

$$\bar{g}(x_0+\Delta x) = \underbrace{g(x_0)}_{a} + \underbrace{g'(x_0)}_{b} \Delta x$$

E QUE

$$\bar{f}(\underbrace{y_0}_{g(x_0)} + \Delta y) = \underbrace{f(y_0)}_{c} + \underbrace{f'(y_0)}_{d} \Delta y.$$

1) SE $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$, $x_0=1$ CALCULE $\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x)) = \underset{\alpha}{\_\_} + \underset{\beta}{\_\_} \Delta x$.

2) CALCULE $\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x))$ NO CASO GERAL (EM QUE $a = g(x_0)$, ETC.)

2) $$\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x)) = \bar{f}(\overbrace{g(x_0)}^{y_0} + \overbrace{g'(x_0)\Delta x}^{\Delta y})$$
$$= f(y_0) + f'(y_0) g'(x_0) \Delta x$$
$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{\alpha} + \underbrace{f'(g(x_0)) g'(x_0)}_{\beta} \Delta x$$

3) ... E AGORA DIGAMOS QUE $\bar{h}(x_0+\Delta x) = h(x_0) + h'(x_0)\Delta x$ E QUE $\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x)) = \bar{h}(x_0+\Delta x)$. QUANTO VALEM $h(x_0)$ E $h'(x_0)$?

DIGAMOS QUE $h(x) = f(g(x))$ SEMPRE,

E QUE
$$\bar{h}(x_0+\Delta x) = 6 + 7\Delta x,$$
$$\bar{g}(x_0+\Delta x) = 2 + 3\Delta x,$$
$$\bar{f}(\underbrace{y_0}_{g(x_0)} + \Delta y) = \gamma + \delta \Delta y.$$

4) QUANTO VALEM γ E δ?

OBS (IMPORTANTE!):

$$\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x)) = f(g(x_0)) + \underbrace{f'(g(x_0)) g'(x_0)}_{\frac{d}{dx} f(g(x_0))} \Delta x$$

$$\bar{h}(x_0+\Delta x) = h(x_0) \quad + h'(x_0) \Delta x$$

SOLUÇÃO:

$$\bar{g}(x_0+\Delta x) = \underbrace{\overbrace{g(x_0)}^{y_0}}_{2} + \underbrace{g'(x_0)}_{3} \Delta x$$

$$\bar{f}(y_0+\Delta y) = \underbrace{f(\underbrace{y_0}_{2})}_{\gamma} + \underbrace{f'(\underbrace{y_0}_{2})}_{\delta} \Delta y$$

$$\bar{h}(x_0+\Delta x) = \underbrace{h(x_0)}_{6} + \underbrace{h'(x_0)}_{7} \Delta x = \underbrace{\underbrace{f(\underbrace{\overbrace{g(x_0)}^{y_0}}_{2})}_{\gamma}}_{6} + \underbrace{\underbrace{f'(\underbrace{\overbrace{g(x_0)}^{y_0}}_{2})}_{\delta} \underbrace{g'(x_0)}_{3}}_{7} \Delta x$$

$$\gamma = 6$$
$$\delta = \frac{7}{3}$$

REPAREM QUE O QUE A GENTE ESTÁ FAZENDO É UMA VERSÃO BEM MAIS COMPLICADA – POR CAUSA DOS "x_0"S E "y_0"S DISSO AQUI:

DIGAMOS QUE
$$g(\Delta x) = 3\Delta x$$
$$f(\Delta y) = 4\Delta y$$
E
$$h(\Delta x) = \underbrace{f(\underbrace{g(\Delta x)}_{3\Delta x})}_{4 \cdot 3\Delta x} = \underbrace{\_}_{12} \Delta x$$

EXERCÍCIO (CASA!!!):

SE $h(x) = f(x)g(x)$,
$$\bar{f}(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$
$$\bar{g}(x_0+\Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x,$$
$$\bar{h}(x_0+\Delta x) = h(x_0) + h'(x_0)\Delta x,$$
QUANTO VALEM $h(x_0)$ E $h'(x_0)$?

C2 26/ABRIL/2017

HOJE: VÁRIOS TRUQUES ENVOLVENDO DIFERENCIAIS E APROXIMAÇÕES LINEARES!

DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS VÃO SER MUITO IMPORTANTES EM CÁLCULO 2...

PRIMEIRO CASO:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x \quad (\text{PARA } x>0)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \quad (\text{PARA } x\neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x-2|+\ln|x+3|$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1-6}\,dx$$

O "SEGUNDO CASO", NO QUAL A GENTE USA $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$,

$\frac{d}{dx}\arctan x$,

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x$, ETC

É MAIS DIFÍCIL DE EXPLICAR...

VOLTANDO...

PRECISAMOS APRENDER A DEDUZIR ESSAS COISAS NÓS MESMOS, E EU NÃO ENCONTREI EXERCÍCIOS MUITO BONS NO LIVRO, ENTÃO IMPROVISEI ALGUNS...

A AULA DE HOJE VAI SER CENTRADA EM EXERCÍCIOS.

1ª IDÉIA:

SE $f(g(x))=h(x)$

E $\bar{f},\bar{g},\bar{h}$ SÃO AS APROXIMAÇÕES LINEARES DE f, g E h "NOS PONTOS CERTOS"

ENTÃO $\bar{f}(\bar{g}(x))=\bar{h}(x)$

$$\bar{f}(\bar{g}(x_0+\Delta x))=\bar{h}(x_0+\Delta x)$$

2ª IDÉIA:

SE $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

ENTÃO NÓS PODEMOS CALCULAR AS "DERIVADAS PARCIAIS" $F_x(x_0,y_0)$ E $F_y(x_0,y_0)$ E PODEMOS ADAPTAR A IDÉIA DE APROXIMAÇÃO LINEAR PARA ESTE CASO.

3ª IDÉIA:

SE $F(x,f(x))=\text{CONSTANTE}$

E SABEMOS F, x_0 E $f(x_0)$

ENTÃO PODEMOS CALCULAR $f'(x_0)$.

2ª IDÉIA:

FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS.

EXEMPLOS:

- $F(x,y)=x^2+3y-20xy$
- $F(x,y)=(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$
- $F(x,y)=e^y$
- $F(x,y)=99$

AS NOTAÇÕES "F_x" E "F_y" INDICAM QUE A GENTE TÁ DERIVANDO A F NO PRIMEIRO OU NO SEGUNDO ARGUMENTO, E DEIXANDO O OUTRO CONSTANTE,

$$F_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x,y_0)-F(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$F_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x_0,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$\bar{F}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=F(x_0,y_0)+F_x(x_0,y_0)\Delta x+F_y(x_0,y_0)\Delta y$$

EXERCÍCIO:

SE $F(x,y)=x^2+3y-20xy$

E $x_0=2$,

$y_0=10$,

ENTÃO

$$\bar{F}(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\underline{\quad}+\underline{\quad}\,\Delta x+\underline{\quad}\,\Delta y$$

$$F_x(\underbrace{x_0}_{2},\underbrace{y_0}_{10})=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Big(\underbrace{F(\underbrace{x_0}_{2}+\Delta x,\underbrace{y_0}_{10})}_{\underbrace{(2+\Delta x)^2+30-20(2+\Delta x)10}_{g(\Delta x)}}-\underbrace{F(\underbrace{x_0}_{2},\underbrace{y_0}_{10})}_{\underbrace{2^2+30-20\cdot 2\cdot 10}_{g(0)}}\Big)}_{(g(\Delta x)-g(0))}\Big/\Delta x$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(g(\Delta x)-g(0))/\Delta x$$

$$=g'(0)$$

C2 3/MAIO/2017

... EU TERMINEI A AULA PASSADA MOSTRANDO QUE A GENTE PODIA CALCULAR DERIVADAS PARCIAIS "NO IMPROVISO"...

EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS:

- $F(x,y) = x^2+3y-20xy$
- $F(x,y) = (x+y) \operatorname{sen}(x-y)$
- $F(x,y) = e^y$
- $F(x,y) = 99$

E:

$$F_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$F_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0,y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

EXERCÍCIO:
SE $F(x,y) = x^2+3y-20xy$,
$x_0=2$, $y_0=10$
ENTÃO $F_x(x_0,y_0) = ?$
$F_y(x_0,y_0) = ?$

DÁ PRA CALCULAR ESSAS DERIVADAS PARCIAIS DE UM JEITO BEM MAIS RÁPIDO:

$F_x(x,y) = \frac{d}{dx}F(x,y)$ (CONSIDERE y CONSTANTE)

$F_y(x,y) = \frac{d}{dy}F(x,y)$ (CONSIDERE x CONSTANTE).

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= \frac{d}{dx}F(x,y) \\ &= \frac{d}{dx}(x^2+3y-20xy) \\ &= 2x-20y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= \frac{d}{dy}(x^2+3y-20xy) \\ &= 3-20x \end{aligned}$$

$F_x(2,10) = 2 \cdot 2 - 20 \cdot 10$

$F_y(2,10) = 3 - 20 \cdot 2$.

PREPARAÇÃO PRA DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

NA MESMA F DE ANTES,
CALCULE $\frac{d}{dx}F(x,f(x))$

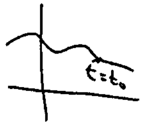
$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}(x^2+3f(x)-20xf(x)) \\ &= 2x+3f'(x)-20(f(x)+xf'(x)) \end{aligned}$$

A GENTE TAMBÉM SABE CALCULAR COISAS COMO

$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ ...

TRUQUE:

$$\left(\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))\right)[t:=t_0] = F_x(g(t_0),h(t_0))\,g'(t_0) + F_y(g(t_0),h(t_0))\,h'(t_0)$$



EXERCÍCIO:
SE $F(x,y) = x^2+3y-20xy$
CALCULE
$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) &= F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + \\ &\quad F_y(g(t),h(t))\,h'(t) = \\ &(2g(t)-20h(t))\,g'(t) + \\ &(3-20g(t))\,h'(t) \end{aligned}$$

OU: $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))g'(t) + F_y(g(t),h(t))h'(t)$

IDÉIA IMPORTANTÍSSIMA:

$(g(t),h(t))$ É UMA TRAJETÓRIA EM $\mathbb{R}^2$,

$F(x,y)$ DÁ UMA COORDENADA Z.

$F(x,y)=4$ É UMA CURVA EM $\mathbb{R}^2$ (NÃO NECESSARIAMENTE UMA FUNÇÃO)

$F(2,0) = 4$

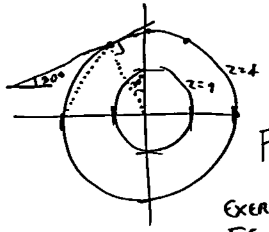
CALCULAR $\frac{d}{dx}F(x,h(x))$

$\left(= \frac{d}{dt}F(t,h(t))\right)$

NOS AJUDA A ENTENDER AS CURVAS DE NÍVEL DA F!

EXEMPLO:

$z = F(x,y) = x^2+y^2$



$F(x,y) = 1$

$F(x,y) = 4$

$F(x,h(x)) = 4$

EXERCÍCIOS:
$F(-1,y) = 4$, $y>0$.
QUEM É y?

$$\begin{aligned} F(-1,y) = (-1)^2+y^2 &= 4 \\ y^2 &= 3 \\ y &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

SE $F(x,h(x)) = 4$ SEMPRE,
ENTÃO $\frac{d}{dx}F(x,h(x)) = 0$
$\overset{\shortparallel}{}\ F_x(x,h(x)) + F_y(x,h(x))h'(x)$
E A GENTE CONSEGUE CALCULAR $h'(x)$!

EXERCÍCIO:
DIGAMOS QUE $F(x,y) = x^2+3y-20xy$
E QUE $F(x,h(x))$ É CONSTANTE,
OU SEJA, $\frac{d}{dx}F(x,h(x)) = 0$.

ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $h'(x)$ EM TERMOS DE x E $h(x)$.

INDO DIRETO PRO CASO GERAL...

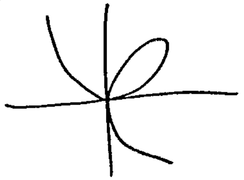
$$\begin{aligned} F_x(x,h(x)) + F_y(x,h(x))\,h'(x) &= 0 \\ F_y(x,h(x))\,h'(x) &= -F_x(x,h(x)) \\ h'(x) &= -\frac{F_x(x,h(x))}{F_y(x,h(x))} \end{aligned}$$

VOLTANDO PRO CASO PARTICULAR:

$$h'(x) = -\frac{2x-20h(x)}{3-20x}$$

PRA CASA: LEIAM A SEÇÃO 2.6 DO STEWART!

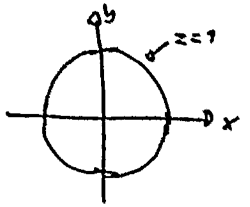
OBS: ELE USA ESTE EXEMPLO:
$x^3+y^3 = 6xy$ $\left(F(x,y) = x^3+y^3-6xy\right)$



C2 3/MAIO/2017

OS EXEMPLOS MAIS IMPORTANTES PRA GENTE VÃO SER BEM SIMPLES...

$F(x,y) = x^2 + y^2$



$x = \cos\theta$
$y = \text{sen}\,\theta$

$1^{\underline{a}}$ COISA:

SE $F(x, h(x))$ = CONSTANTE, ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $h'(x)$.

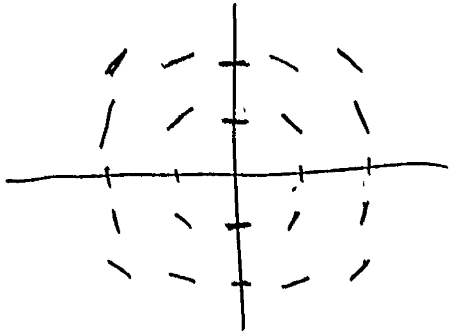
$$h'(x) = -\frac{x}{h(x)}$$

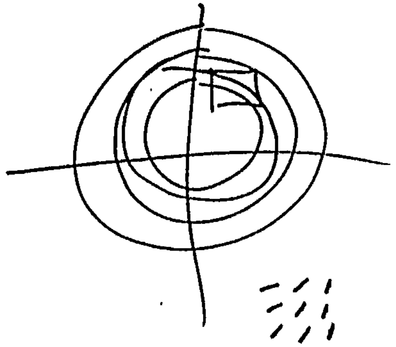
E REPARE QUE A GENTE PODE USAR ISSO PRA FAZER UM DIAGRAMA QUE NOS ENSINA UM POUCO SOBRE COMO SÃO AS CURVAS DE NÍVEL...

EXERCÍCIO: CALCULEM $h'(x)$
PARA $x = -2, -1, 0, 1, 2$
E $h(x) = -2, -1, 0, 1, 2$
E REPRESENTEM ISSO GRAFICAMENTE

$$h'(x) = -\frac{x}{h(x)}$$

2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
1	2	1	0	-1	-2
0	☹	☹	☹	☹	☹
-1	-2	-1	0	1	2
-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
h(x) / x	-2	-1	0	1	2





NOS EXEMPLOS MAIS IMPORTANTES A GENTE VAI TER:

θ (ÂNGULO)
$c = \cos\theta$
$s = \text{sen}\,\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

⇧ AQUI TÁ TUDO EM FUNÇÃO DE θ...

ALTERNATIVAS:

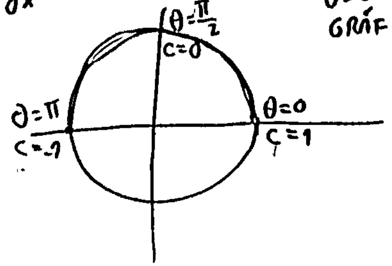
$\theta = \text{arccos}\ c$
$\theta = \text{arccos}\ s$
$c = \sqrt{1-s^2}$
$s = \sqrt{1-c^2}$

NOTE QUE

$$\text{arccos}\ \underbrace{\cos\ \theta}_{c} = \theta \quad \underbrace{\text{(PRA ALGUNS "}\theta\text{"S)}}_{\text{COMO ASSIM?}}$$

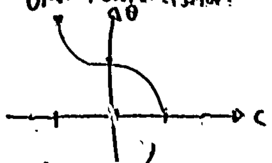
$\cos\ \text{arccos}\ c = c$

ISSO NOS PERMITE DESCOBRIR
$\frac{d}{dc}\text{arccos}\ c$
$\left(\frac{d}{dx}\text{arccos}\ x\right)$...



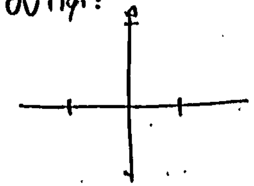
$\theta = \text{arcos}\ c$
GRÁFICO?

UMA POSSIBILIDADE:



(BOM)

OUTRA:



A GENTE VIU UM BOCADO SOBRE DIFERENCIAIS ("d"s), DERIVAÇÃO IMPLÍCITA...

$$\frac{d}{d\theta}(\text{arccos}\ \cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\theta = 1$$

$$\frac{d}{dc}(\cos\ \text{arccos}\ c) = \frac{d}{dc}c = 1$$

SERÁ QUE VOCÊS CONSEGUEM USAR ISSO PRA ENCONTRAR UMA FÓRMULA PARA
$\frac{d}{dc}\text{arccos}\ c$?

PRA CASA:
LEIAM A P.388 DO STEWART - LÁ TEM UMA SOLUÇÃO (TALVEZ PARCIAL)

C2 /maio/2017

HOJE: FRAÇÕES PARCIAIS!
(A GENTE VAI DAR UMA PAUSA NAS DIFERENCIAIS POR ENQUANTO)

LEMBRE QUE:

$$\ln(\exp x) = x$$

$$\exp(\ln x) = x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(\exp x) = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{\ln'(\exp x)\exp' x}$$

$$\frac{d}{dx}\exp(\ln x) = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\exp'(\ln x)\ln' x = \exp(\ln x)\ln' x = x \ln' x$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

LEMBRE QUE $\ln x$
SÓ TÁ DEFINIDO PRA $x>0$...
E $\ln|x|$?

SEJA $f(x) = \ln|x|$

$$= \begin{cases} \ln x & \text{QUANDO } x>0 \\ \ln -x & \text{QUANDO } x<0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\ln \underbrace{-x}_{u} = ? \quad \text{OOPS!!}$$

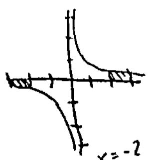
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x \quad \text{PRA } x>0$$

P.EX:

$$\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=4} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{x=1/2}^{x=4}$$

$$\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}dx = ? = \ln\Big|_{x=-3}^{x=-2} = \underbrace{\underbrace{\ln(-2)}_{\text{ERRO}} - \underbrace{\ln(-3)}_{\text{ERRO}}}_{\text{ERRO}}$$

$\shortparallel$



$$\text{IDÉIA} = \int_{x=-3}^{x=-2}\frac{1}{x}dx = \pm\int_{x=2}^{x=3}\frac{1}{x}dx \ldots$$

SUGESTÃO: FAÇAM A SUBSTITUIÇÃO $u=-x$.

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{-u}(-1)du \quad \begin{bmatrix} x=-u \\ u=-x \\ dx=-du \\ du=-dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{u}du$$

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}dx = \int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{-u}(-1)du$$

$$= -\int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{-u}du$$

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{-x}dx = \int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{u}(-1)du$$

$$= -\int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{u}du$$

$$= -\left(\ln u\right)\Big|_{u=-a}^{u=-b}$$

$$= -\left(\ln -x\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

EXERCÍCIO:
CALCULEM:

a) $\int_{x=1}^{x=e}\frac{1}{x}dx = ?$

b) $\int_{x=1}^{x=e^2}\frac{1}{x}dx = ?$

c) $\int_{x=-e}^{x=-1}\frac{1}{x}dx = ?$

d) $\int_{x=-e^2}^{x=-1}\frac{1}{x}dx = ?$

DICA (PRO CASO GERAL):
FAZER PRIMEIRO
CASOS PARTICULARES E
GENERALIZAR.

c) $$\int_{x=-e}^{x=-1}\frac{1}{x}dx = -\int_{x=-e}^{x=-1}\frac{1}{-x}dx$$

$$= -\int_{u=e}^{u=1}\frac{1}{u}(-1)du$$

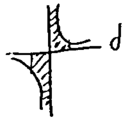
$$= \int_{u=e}^{u=1}\frac{1}{u}du$$

$$= \ln u\Big|_{u=e}^{u=1}$$

$$= (\ln 1) - (\ln e)$$

$$= 0 - 1$$

$$= -1$$

OPS: $\int$  $dx = -\infty + \infty$
$= \text{INDEFINIDO/ERRO}$

⇧
"INTEGRAL IMPRÓPRIA" - VAMOS VER DEPOIS

CASO GERAL:
SE $a,b<0$,

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}dx = -\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{-x}dx$$

$$= -\int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{u}(-1)du$$

$$= \int_{u=-a}^{u=-b}\frac{1}{u}du$$

$$= \ln u\Big|_{u=-a}^{u=-b} = \ln -x\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= (\ln -b) - (\ln -a)$$

NOTAÇÃO CURTA
(FICA MEIO MISTERIOSO...):

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln -x$$

NO CASO EM QUE
$a,b>0$,

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= (\ln b) - (\ln a)$$

NOTAÇÃO CURTA:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

A GENTE PODE COMBINAR
AS DUAS FÓRMULAS:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

(QUANDO OS LIMITES DE
INTEGRAÇÃO SÃO OU AMBOS
POSITIVOS OU AMBOS
NEGATIVOS...
SE O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO
CONTÉM O 0 ⇒ INTEGRAL IMPRÓPRIA )

C2 /MAIO/2017

HOJE: FRAÇÕES PARCIAIS!
(A GENTE VAI DAR UMA
PAUSA NAS DIFERENCIAIS
POR ENQUANTO)

FÓRMULA:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

VALE EM INTERVALOS
DE INTEGRAÇÃO
QUE NÃO CONTÊM O 0.

$$\int \frac{1}{x+3}dx = ? \quad = \ln|x+3|$$

$$\int 1/\underbrace{(x+3)}_{u}\ \underbrace{dx}_{du} =$$

$$\begin{bmatrix} u=x+3 \\ x=u-3 \\ dx=du \\ du=dx \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{1}{u}du =$$

$$\ln|u| =$$

$$\ln|x+3|$$

"ISTO VALE PARA QUALQUER
VALOR DE 3 (C. TOMEI)"

$$\int \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}dx = \ln|x-2|+\ln|x+3|$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{x+3}{(x-2)(x+3)}+\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}dx$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)}dx$$

$$= \int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx$$

$$\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{a}{x+b}dx = a\ln|x+b|$$

$$\int \frac{x}{x+a}dx = \int \frac{x+a}{x+a}+\frac{-a}{x+a}dx$$

$$= \int 1+\frac{-a}{x+a}dx$$

$$= \int 1\,dx + -a\int \frac{1}{x+a}dx$$

$$= x - a\ln|x+a|$$

EXERCÍCIO:

$$\int \frac{ax+b}{x+c}dx = ?$$

DOIS JEITOS:

$$\int \frac{ax+b}{x+c}dx = \int \frac{(ax+ac)+(b-ac)}{x+c}dx$$

$$= \int a + \frac{b-ac}{x+c}dx$$

$$= \int a\,dx + (b-ac)\int \frac{1}{x+c}dx$$

$$= ax + (b-ac)\ln|x+c|$$

SEGUNDO JEITO:

$$\int \frac{ax+b}{x+c}dx =$$

$$\begin{bmatrix} u=x+c \\ x=u-c \\ dx=du \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{a(u-c)+b}{u}du =$$

$$\int \frac{au+(b-ac)}{u}du =$$

$$\int \frac{au}{u}du + \int \frac{b-ac}{u}du =$$

$$\int a\,du + (b-ac)\int u\,dx =$$

$$au + (b-ac)\ln|u| =$$

$$a(x+c) + (b-ac)\ln|x+c| =$$

$$ax + \underbrace{ac}_{\text{constante}} + (b-ac)\ln|x+c|$$

E ISTO?

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x}dx = ?$$

$$\parallel$$

$$\int ax+b+\frac{c}{x}dx = a\frac{x^2}{2}+bx+c\ln|x|$$

E ISTO?

$$\int \frac{1}{x^2}dx = ?$$

$$\parallel$$

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1}$$

OBS:

$$\int x^k dx = \begin{cases} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & \text{QUANDO } k \neq -1 \\ \ln|x| & \text{QUANDO } k = 1 \end{cases}$$

E ISTO?

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2}dx =$$

$$\int ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}dx =$$

$$a\frac{x^2}{2}+bx+c\ln|x|+d\frac{x^{-1}}{-1}$$

VOLTANDO...

$$\int \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx + B\int \frac{1}{x-b}dx$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b|$$

$$\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}dx = ?$$

COMO A GENTE RESOLVE ISSO?
TEM UM JEITO MAIS ÓBVIO (AGORA)
E UM TRUQUE NADA ÓBVIO (PRÓXIMA AULA)
QUE SIMPLIFICA AS CONTAS...

$$\text{SE } \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5} = \frac{cx+d}{(x-2)(x+5)}$$

E (EXERCÍCIOS):

a) $A=3$, $B=4$, $c=?$, $d=?$

b) $A=?$, $B=?$, $c=1$, $d=-2$

c) $A=?$, $B=?$, $c=1$, $d=5$

d) $A=?$, $B=?$, $c=3$, $d=4$

$$\int \frac{3x+4}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{10/7}{x-2}+\frac{11/7}{x+5}dx$$

$$= \frac{10}{7}\ln|x-2| + \frac{11}{7}\ln|x+5)$$

C2 17/MAIO/2017

...NO FINAL DA AULA PASSADA A GENTE VIU QUE O JEITO DE INTEGRAL ALGO COMO

$$\int \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{fx^2+gx+h}\,dx$$

PASSAVA POR REDUZIR O GRAU DO POLINÔMIO DO NUMERADOR, TRANSFORMANDO ISTO EM:

$$\int jx^2+kx+l+\frac{mx+n}{fx^2+gx+h}\,dx \ldots$$

HOJE VAMOS APRENDER UNS TRUQUES QUE VÃO NOS PERMITIR FAZER CONTAS COMO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE POLINÔMIOS (COM RESTO!) BEM RAPIDO.

TRUQUE:
NOSSOS POLINÔMIOS SÃO EM X, E: $4x^3 + \underset{0x^2}{\uparrow}\; 9x + 10 =$

$$\boxed{4|0|9|10} =$$
$$\underset{x^3}{\uparrow}\;\underset{x^2}{\uparrow}\;\underset{x}{\uparrow}\;\underset{x^0}{\uparrow}$$

$$\boxed{\;|4|\;|9|10}$$

SOMA DE POLINÔMIOS:

$$\begin{array}{r} \boxed{3|5|7} \\ + \boxed{-2|\;|10|1} \\ \hline \boxed{-2|3|15|8} \end{array}$$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS É COMO MULTIPLICAÇÃO DE NUMEROS DE VÁRIOS DÍGITOS MAS SEM "VAI UM"...

$$x \cdot (3x^2+4x+5)$$
$$= 3x^3+4x^2+5x$$
$$\boxed{1|0} \cdot \boxed{3|4|5}$$
$$= \boxed{3|4|5|0}$$

$$10x^2 \cdot (3x^2+4x+5)$$
$$= 30x^4+40x^3+50x^2$$
$$\boxed{10|\;|\;} \cdot \boxed{3|4|5}$$
$$= \boxed{30|40|50|\;|\;}$$

$$(x^2+10x+2)\cdot(3x^2+4x+5) =$$
$$2\cdot(3x^2+4x+5)$$
$$+10x\cdot(3x^2+4x+5)$$
$$+x^2\cdot(3x^2+4s+5) =$$

$$\boxed{2}\cdot\boxed{3|4|5}$$
$$+\boxed{10|\;}\cdot\boxed{3|4|5}$$
$$+\boxed{1|\;|\;}\cdot\boxed{3|4|5} =$$

$$\begin{array}{r} \boxed{6|8|10} \\ + \boxed{30|40|50|\;} \\ + \boxed{3|4|5|\;|\;} \\ \hline \boxed{3|34|51|58|10} \end{array}$$

OU, DEIXANDO MAIS PARECIDO COM A MULTIPLICAÇÃO USUAL,

$$\begin{array}{r} \boxed{3|4|5} \\ \cdot\;\boxed{1|10|2} \\ \hline \boxed{6|8|10} \\ \boxed{30|40|50} \\ \boxed{3|4|5} \\ \hline \boxed{3|34|51|58|10} \end{array}$$

EXERCÍCIO:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\boxed{1|2}\cdot\boxed{1|-5}}_{\boxed{1|-3|-10}}\cdot\boxed{1|3}}_{\boxed{1|0|-19|-30}}\cdot\boxed{1|0}}_{\boxed{1|0|-19|-30|0}}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{1|-3|-10} \\ \times\;\boxed{1|3} \\ \hline \boxed{3|-9|-30} \\ \boxed{1|-3|-10} \\ \hline \boxed{1|0|-19|-30} \end{array}$$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

$$f(x) = \boxed{1|2|3|4|5} \;\Big|\; \boxed{1|0|-2} = g(x)$$
$$- \boxed{1|0|-2} \qquad\qquad \boxed{1|2|5} = h(x)$$
$$\boxed{2|5|4|5}$$
$$- \boxed{2|0|-4}$$
$$\boxed{5|8|5}$$
$$- \boxed{5|0|-10}$$
$$\boxed{8|15} = r(x)$$

$$\frac{f(x)-r(x)}{g(x)} = h(x)$$
$$f(x)-r(x) = h(x)g(x)$$
$$f(x) = g(x)h(x)+r(x) \leftarrow ?$$

COMO FATORAR ALGUNS POLINÔMIOS NO OLHO?

TRUQUE: CHUTE FATORES COMO $x+a$, ONDE $a \in \mathbb{Z}$ ☺

REPARE:

$$\boxed{1|a}\cdot\boxed{1|b}\cdot\boxed{1|c}\cdot\boxed{1|d} =$$
$$\boxed{1|?|?|?|\underset{abcd}{\uparrow}}$$

P. EX:

$$\boxed{1|2}\cdot\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|3} = \boxed{1|2|-9|-18}$$

COMO É QUE A GENTE TESTA SE O NOSSO CHUTE TÁ BOM?

$$\boxed{1|2|-9|-18} \;\Big|\; \boxed{1|2}$$
$$-\boxed{1|2} \qquad\qquad \boxed{1|0|-9}$$
$$-\boxed{0}$$
$$\boxed{0|0}$$
$$\boxed{-9}$$
$$-\boxed{-9|-18}$$
$$\boxed{0}$$ ☺☺☺

$$\boxed{1|2|-9|-18} \;\Big|\; \boxed{1|-2}$$
$$-\boxed{1|-2} \qquad\qquad \boxed{1|4|-1}$$
$$\boxed{4}$$
$$-\boxed{4|-8}$$
$$\boxed{-1}$$
$$-\boxed{-1|2}$$
$$\boxed{-20}$$ ☹☹☹

⇦

EXERCÍCIO:
TENTEM FATORAR $\boxed{1|2|-5|-6}$.

CHUTE: $\boxed{1|2}$ ☹ ⇝ $\boxed{1|-2}$

$$\boxed{1|2|-5|-6}$$
$$= \boxed{1|-2}$$
$$+ \boxed{4|-8}$$
$$+ \boxed{3|-6}$$ ☺

QUOCIENTE: $\boxed{1|4|3}$

C2 17/MAIO/2017

... AGORA A GENTE JÁ TEM PRÁTICA SUFICIENTE PRA FAZER CONTAS COMO ESTA MAIS OU MENOS RÁPIDO...

$$\frac{2}{\boxed{1|-2}} + \frac{4}{\boxed{1|3}} - \frac{5}{\boxed{1|1}} =$$

$$\frac{\overbrace{2\cdot\boxed{1|3}\cdot\boxed{1|1}}^{\boxed{2|8|6}} + \overbrace{4\cdot\boxed{1|-2}\,\boxed{1|1}}^{\boxed{4|-4|4}} + \overbrace{5\cdot\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|3}}^{\boxed{5|5|-30}}}{\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|3}\cdot\boxed{1|1}} =$$

$$\begin{array}{r} \boxed{2|8|6} \\ +\ \boxed{4|-4|4} \\ +\ \boxed{5|5|-3\!\!\!\;} \\ \hline \boxed{11|9|-20} \end{array}$$

$$\frac{\boxed{11|9|-20}}{\boxed{1|2|-5|-6}}$$

MORAL: A GENTE JÁ SABE CONFERIR CONTAS TIPO $\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} = \frac{\boxed{||}}{\boxed{|||}}$

MAIS OU MENOS RÁPIDO !!

MORAL 2:

$$\frac{A}{\boxed{1|-2}} + \frac{B}{\boxed{1|3}} + \frac{C}{\boxed{1|1}} =$$

$$\frac{A\boxed{2|8|6} + B\boxed{4|-4|4} + C\boxed{5|5|-3}}{\boxed{1|2|-5|-6}} =$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c|c|c} 2A+ & 8A+ & 6A+ \\ 4B+ & 4B+ & 4B- \\ 5C & 5C & 30C \end{array}}}{\boxed{1|2|-5|-6}} = \frac{\boxed{9|42|200}}{\boxed{1|2|-5|-6}}$$

SISTEMA FÁCIL DE RESOLVER

MORAL 2: DÁ PRA EXPRESSAR PROBLEMAS DESTE TIPO COMO SISTEMAS RÁPIDO...

MAS RESOLVER O SISTEMA DÁ UM TRABALHÃO !!

MORAL 3:

$$\frac{\boxed{1|0|0|0|0|0}}{\boxed{1|2|-5|-6}} = \boxed{||} + \frac{\boxed{||}}{\boxed{1|2|-5|-6}}$$

ISTO TAMBÉM É FÁCIL DE RESOLVER (DIVISÃO COM RESTO).

PRÓXIMA TÉCNICA: "MÉTODO DE HEAVISIDE"

DIGAMOS QUE QUEREMOS RESOLVER

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+1} = \frac{9x^2+42x+200}{(x-2)(x+3)(x+1)}$$

CASO MAIS GERAL:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \leftarrow \text{GRAU 2}$$

TRUQUE:

$$\lim_{x\to a} (x-a)\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}\right) = \lim_{x\to a} (x-a)\,\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\lim_{x\to a}\left(A + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}\right) \qquad \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$A \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$\boxed{\text{C2 22/maio/2017}}$

HOJE: MÉTODO DE HEAVISIDE PRA FRAÇÕES PARCIAIS; O QUE ACONTECE QUANDO O DENOMINADOR TEM FATORES REPETIDOS OU FATORES COMO x^2+1 $(=(x+i)(x-i)$; E <u>TALVEZ</u> UMA INTRODUÇÃO A SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

VAMOS COMEÇAR COM UM CASO FÁCIL DE TESTAR (UM NO QUAL A GENTE JÁ SABE AS RESPOSTAS).

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+2} + \frac{6}{x-3} = \frac{p(x)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$p(x)$ É UM POLINÔMIO DE 2º GRAU... QUAL?

$p(x) = ax^2+bx+c$

$$f(x) = \frac{4(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} + \frac{5(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} + \frac{6(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{4\,\boxed{1}\boxed{-1}\boxed{-6} + 5\,\boxed{1}\boxed{-4}\boxed{3} + 6\,\boxed{1}\boxed{1}\boxed{-2}}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

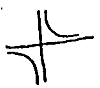
$$= \frac{\boxed{15}\boxed{-18}\boxed{-21}}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{4}\boxed{-4}\boxed{-24} \\ +\ \boxed{5}\boxed{-20}\boxed{15} \\ +\ \boxed{6}\boxed{6}\boxed{-12} \\ \hline \boxed{15}\boxed{-18}\boxed{-21} \end{array}$$

$$g(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

COMO A GENTE PODE "EXTRAIR" O A DESSA FUNÇÃO? QUE CARA ELA TEM?

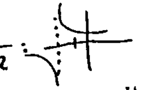
$\frac{1}{x}$:



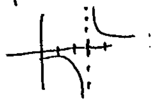
$\frac{1}{x-1}$:

$\frac{-2}{x-1}$:

$\frac{1}{x+2}$:

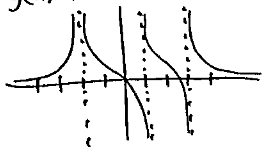


$\frac{1}{x-3}$:

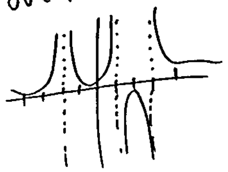


$g(x)$ TEM ASSÍNTOTAS (E NÃO ESTÁ DEFINIDA) EM $x=1$, $x=-2$, $x=3$

$g(x)$ PODE SER ASSIM:



OU (?):



A GENTE NÃO CONSEGUE CALCULAR $g(1)$, $g(-2)$, $g(3)$...

MAS PODEMOS CALCULAR

$(x-1)\,g(x) = ?$ (QUANDO $x=1$!!! NÃO !! ESQUECI!)

$(x-1)\,g(x) =$ OK <u>PERTO</u> DE $x=1$, MAS $x \neq 1$...

$\lim\limits_{x\to1} (x-1)\,g(x)$ OK !!

EXEMPLO:

$$\lim_{x\to1} (x-1)\,g(x) = \qquad \begin{pmatrix}\text{QUANDO} \\ A=42, \\ B=99, \\ C=200\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to1} (x-1)\left(\frac{42}{x-1} + \frac{99}{x+2} + \frac{200}{x-3}\right) =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}42}{\cancel{x-1}}\right)}_{42} + \underbrace{\left(\lim_{x\to1} \frac{(x-1)99}{x+2}\right)}_{0} + \underbrace{\left(\lim_{x\to1} \frac{(x-1)200}{x-3}\right)}_{0} = 42!$$

CASO GERAL:

$$\lim_{x\to1} (x-1)g(x) = A$$

$$\lim_{x\to-2} (x+2)g(x) = B$$

$$\lim_{x\to3} (x-3)g(x) = C$$

SE $g(x) = f(x) = \frac{15x^2-18x-21}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

(ESQUEÇA OU TAPE O LADO ESQUERDO DO QUADRO, NO QUAL $A=4$, $B=5$, $C=6$)

ENTÃO TEMOS ESTE PROBLEMA:

$$g(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{15x^2-18x-21}{(x-1)(x+2)(x-3)} = f(x)$$

QUEM SÃO A, B, C?

TRUQUE (HEAVISIDE)

$$\lim_{x\to1} (x-1)\,g(x) = \lim_{x\to1} (x-1)\,f(x) = A$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x\to1} \cancel{(x-1)} \frac{15x^2-18x-21}{\cancel{(x-1)}(x+2)(x-3)}$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x\to1} \frac{15x^2-18x-21}{(x+2)(x-3)}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{15\cdot1^2-18\cdot1-21}{(1+2)(1-3)}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{15-18-21}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4$$

EXERCÍCIO:

CALCULE PELO MÉTODO DE HEAVISIDE O A E O B EM:

a) $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

b) $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$

VERIFICANDO:

a) $-\frac{1}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{x-3} =$

$$\frac{-\frac{1}{5}(x-3) + \frac{1}{5}(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{0x + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$$

b) $\frac{2}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{x-3}$

$$= \frac{\frac{2}{5}(x-3) + \frac{3}{5}(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\right)}{(x+2)(x-3)}$$

$\boxed{\text{C2 22/MAIO/2017}}$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-3)}dx = \int -\frac{1}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{x-3}dx = -\frac{1}{5}\ln|x+2| + \frac{1}{5}\ln|x-3|$$

$$\int \frac{x}{(x+2)(x-3)}dx = \int \frac{2}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{x-3}dx = \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{5}\ln|x-3|$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)(x-3)}dx =$$ (USE DIVISÃO COM RESTO - FAÇA EM CASA)

$$\int \frac{42x^2+99x+200}{(x+2)(x-3)}dx =$$ ☺

O QUE ACONTECE NO CASO DE FATORES REPETIDOS?

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{(x+2)(x-3)(x-3)}dx = ?$$

HEAVISIDE NÃO VAI FUNCIONAR, E O QUE A GENTE CONSEGUE É:

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x+2)(x-3)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du \qquad \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \\ dx = du \end{bmatrix}$$

$$= \int u^{-2}du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1}$$

$$= \frac{(x-3)^{-1}}{-1}$$

$$= -\frac{1}{x-3}$$

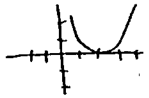
SABEMOS QUE:

$$(x^4+ax^3+bx^2+cx+d) =$$
$$(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)$$

ONDE e, f, g, h SÃO AS RAÍZES DO POLINÔMIO ORIGINAL...

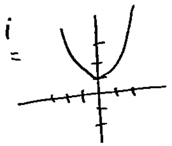
MAS ELAS PODEM SER REPETIDAS...

$$(x-2)(x-2) = x^2-4x+4 =$$



E, PIOR AINDA, ELAS PODEM SER COMPLEXAS!

$$(x+i)(x-i) = x^2 + \cancel{ix} - \cancel{ix} - i \cdot i$$
$$= x^2+1 =$$



A GENTE ACHAVA QUE A GENTE IA SABER INTEGRAR TODO QUOCIENTE DE POLINÔMIOS...

MAS:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \int \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}dx$$
$$= A\ln|x+i| + B\ln|x-i| \ldots$$

A GENTE JÁ VIU QUE PROGRAMAS DE COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA (MAPLE) ÀS VEZES RETORNAM COISAS ASSIM, MAS... ☹

O TRUQUE QUE VAI NOS PERMITIR CALCULAR

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx$$ E OUTRAS

É SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA...

VAMOS TER QUE COMEÇAR DERIVANDO arcsen x,
arccos x,
arctan x...

COM UMA NOTAÇÃO ELEMENTAR:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}\operatorname{sen} x = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\parallel$$
$$\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}' x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} x = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\parallel$$
$$(\operatorname{sen}'\operatorname{arcsen} x)\operatorname{arcsen}' x \qquad = \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}' x$$
$$\parallel$$
$$\underbrace{(\cos \underbrace{\operatorname{arcsen} x}_{\theta})}_{\parallel}\operatorname{arcsen}' x \qquad =$$
$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-(\underbrace{\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} x}_{x})^2} = \sqrt{1-x^2}$$

TRUQUE: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$
$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$

ENTÃO $\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}' x = 1$

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos\arccos x = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\parallel$$
$$(\cos'\arccos x)\arccos' x$$
$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'\arccos x}$$
$$= \frac{1}{-\operatorname{sen}\arccos x}$$
$$= \ldots$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

INTRODUÇÃO A SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = ?$$

SE $x = \cos\theta$...

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos\theta$$
$$= \operatorname{sen}\theta$$
$$dx = \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\int \cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\underbrace{dx}_{?} =$$

$$\int \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,\underbrace{dx}_{?} =$$

$$\int \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

C2 22/MAIO/2017

UM TRUQUE PRELIMINAR:

A GENTE SABE INTEGRAR ALGUMAS COISAS TIPO

$$\int (\text{sen}\,\theta)^a (\cos\,\theta)^b d\theta \ldots$$

VARIÁVEIS NOVAS:

$s = \text{sen}\,\theta,$

$c = \cos\,\theta.$

$$\frac{ds}{d\theta} = c \Rightarrow ds = c\,d\theta$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -s \Rightarrow dc = -s\,d\theta$$

$$\int s^3 c^5 d\theta =$$

(NESTE CONTEXTO $s = \text{sen}\,\theta$, $c = \cos\,\theta$)

$$\int s^3 c^4 c\,d\theta =$$

$$\int s^3 c^2 c^2 \underbrace{c\,d\theta} =$$

$$\int s^3(1-s^2)(1-s^2)\,ds =$$

$$\int \overbrace{\text{sen}^3\theta \cos^5\theta}^{f(\theta)}\, d\theta =$$

$$\int \text{sen}^3\theta \cos^2\theta \cos^2\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$\int \underbrace{\text{sen}^3\theta}_{s^3}(1-\underbrace{\text{sen}^2\theta}_{s^2})(1-\underbrace{\text{sen}^2\theta}_{s^2})\underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{ds} =$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int s^3(1-s^2)(1-s^2)\,ds =$$

$$\int s^3(1-2s^2+s^4)\,ds =$$

$$\int s^3 - 2s^5 + s^7\, ds =$$

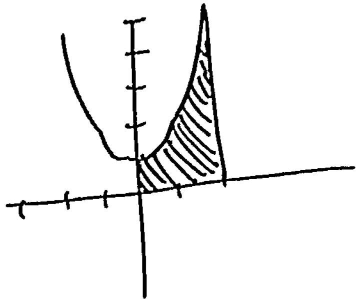
$$\frac{s^4}{4} - 2\frac{s^6}{6} + \frac{s^8}{8} =$$

$$\underbrace{\frac{\text{sen}^4\theta}{4} - 2\frac{\text{sen}^6\theta}{6} - \frac{\text{sen}^8\theta}{8}}_{F(\theta)}$$

(JURO PRA VOCÊS QUE $\frac{d}{d\theta}F(\theta) = f(\theta)$)

NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VER COMO CALCULAR ALGUMAS COISAS POR SUBST. TRIG. E $\int \text{sen}^a\theta \cos^b\theta\, d\theta$.

... E EM ALGUM MOMENTO A GENTE VAI CONSEGUIR ISTO: $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$



$$= \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

C2 24/MAIO/2017

HOJE:

- REVISÃO DA TÉCNICA PARA $\int (\text{sen}\,\theta)^a (\cos\theta)^b \, d\theta$
- ALGUNS PRIMEIROS CASOS DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA (TALVEZ AO CONTRÁRIO)

DUAS VERSÕES:

$$\begin{bmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \Leftarrow \end{bmatrix} \quad Ⓢ$$

$$\begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta \\ dc = -\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ -dc = \text{sen}\,\theta\, d\theta \Leftarrow \end{bmatrix} \quad Ⓒ$$

EXERCÍCIOS:

a) $\int \text{sen}\,\theta \cos\theta \, d\theta = ?$ (USE Ⓢ)

a') $\int \text{sen}\,\theta \cos\theta \, d\theta = ?$ (USE Ⓒ)

b) $\int (\text{sen}\,\theta)^3 (\cos\theta)^3 \, d\theta = ?$ (USE Ⓢ)

b') $\int (\text{sen}\,\theta)^3 (\cos\theta)^3 \, d\theta = ?$ (USE Ⓒ)

c) $\int (\text{sen}\,\theta)^2 (\cos\theta)^3 \, d\theta = ?$ (TESTE Ⓢ E Ⓒ - SÓ UM DELES VAI FUNCIONAR)

IDÉIA: A GENTE SABE INTEGRAR

$$\int (\text{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta \, d\theta$$

QUANDO: $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$
E UM DOS DOIS É ÍMPAR.

DÁ PRA FAZER ALGUMAS OUTRAS COISAS COM ESSE MÉTODO...

$$\int \frac{1}{s+4} \, ds = \ln|s+4| = \ln|(\text{sen}\,\theta) + 4|$$

$$\|$$

$$\int \frac{1}{(\text{sen}\,\theta)+4} \cos\theta \, d\theta$$

OBS: E SE α E β SÃO PARES?

$$\int (\text{sen}\,\theta)^2 (\cos\theta)^4 \, d\theta = ?$$

... AÍ O MELHOR É A GENTE USAR UMA OUTRA TÉCNICA, BASEADA NISTO:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

(OBS: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$)

VOLTANDO PRA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA... (CASO DO COS)

$$\int c\sqrt{1-c^2}\, dc = \int x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\| \quad \begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta \\ dc = -\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ \sqrt{1-c^2} = \text{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\int \underbrace{c}_{\cos\theta} \underbrace{\sqrt{1-c^2}}_{\text{sen}\,\theta} \underbrace{dc}_{-\text{sen}\,\theta\, d\theta}$$

$$\|$$

$$-\int \cos\theta \, \text{sen}^2\theta \, d\theta$$

OPS: ME DISTRAÍ, O MELHOR É A GENTE USAR s E NÃO c...

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int s\sqrt{1-s^2}\, ds$$
$$= \int \text{sen}\,\theta \cos\theta (\cos\theta\, d\theta)$$

SUBSTITUIÇÃO: $\begin{bmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \theta = \text{arcsen}\, s \end{bmatrix}$

VAMOS TENTAR ALGO MAIS GERAL:

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^{\,\beta} dx = ?$$

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta} ds = \int (\text{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1} d\theta$$

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,-1} ds = \int (\text{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-1+1} d\theta$$

$$= \int (\text{sen}\,\theta)^\alpha \, d\theta$$

(SE α FOR ÍMPAR) ⇒ ☺

$$\int s\sqrt{1-s^2}^{\,-1} ds = \int \text{sen}\,\theta\, d\theta = -\cos\theta = -\cos(\text{arcsen}\, s)$$

$$\int s^3 \sqrt{1-s^2}^{\,-1} ds =$$

C2 31/MAIO/2017

HOJE: OUTRAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS!

LEMBRE QUE

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=s \\ dx=ds \end{bmatrix}$$

$$\int \underbrace{s}_{\operatorname{sen}\theta}\underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos\theta}\underbrace{ds}_{\cos\theta\, d\theta} = \begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

...

E LEMBRE QUE EU AVISEI QUE A GENTE IA VER ALGUNS TRUQUES COM AS VARIÁVEIS c, s, θ, t, z,

$c=\cos\theta$,

$s=\operatorname{sen}\theta$,

$t=\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{s}{c}$

$z=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{c}$

SABEMOS QUE $c^2+s^2=1$.

$t^2=\frac{s^2}{c^2}$

$z^2=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$

$c^2+s^2=1 \Rightarrow c=\sqrt{1-s^2}$

$s=\sqrt{1-c^2}$

$z^2=1+t^2 \Rightarrow z=\sqrt{1+t^2}$

$t^2=z^2-1 \Rightarrow t=\sqrt{z^2-1}$

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=t \\ dx=dt \end{bmatrix}$$

$$\int \underbrace{t}_{\tan\theta}\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\sec\theta}\underbrace{dt}_{?} = \begin{bmatrix} t=\tan\theta \\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta \\ dt=? \end{bmatrix}$$

⇑ EM BREVE!

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{bmatrix} x=z \\ dx=dz \end{bmatrix}$$

$$\int \underbrace{z}_{\sec\theta}\underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{\tan\theta}\underbrace{dz}_{?} = \begin{bmatrix} z=\sec\theta \\ \sqrt{z^2+1}=\tan\theta \\ dz=? \end{bmatrix}$$

$\frac{dz}{d\theta}=?$ $\quad \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta}=$

$$\frac{d}{dx}f(x)^K = Kf(x)^{K-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta}=\frac{0\cos\theta-1(-\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta)^2}=\frac{s}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{s}{c}=\boxed{\begin{matrix}\frac{dz}{d\theta}\\ \| \\ zt\end{matrix}}$$

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c}=\frac{s'c-sc'}{c^2}=\frac{c^2-s(-s)}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{1}{c}=z^2$$

ENTÃO:

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{dz}{d\theta}=zt \\ dz=zt\,d\theta\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{dt}{d\theta}=z^2 \\ dt=z^2\,d\theta\end{matrix}}$$

VAMOS VER SE A GENTE CONSEGUE RESOLVER

$$\int \underbrace{t}_{\tan\theta}\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\sec\theta}\underbrace{dt}_{\sec^2\theta\, d\theta} = \begin{bmatrix} t=\tan\theta \\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta \\ dt=\sec^2\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

(ABREVIANDO...)

$\int t\,z\,z^2\,d\theta =$

$\int \frac{s}{c}\frac{1}{c^3}\,d\theta =$

$\int \frac{s}{c^4}\,d\theta =$

$\int s\,c^{-4}\,d\theta =$

$\int c^{-4}\,s\,d\theta =$

(OU SEM ABREVIAR...)

$\int \tan\theta\sec^3\theta\,d\theta =$

$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta =$

$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta =$

$\int \operatorname{sen}\theta\cos^{-4}\theta\,d\theta =$

$$\int \cos^{-4}\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} c=\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta=1-c^2 \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta=(-1)\,dc \end{bmatrix}$$

$\int c^{-4}(-1)\,dc =$

$-\int c^{-4}\,dc =$

$-\frac{c^{-3}}{-3} =$

$\frac{c^{-3}}{3} = \frac{(\cos\theta)^{-3}}{3}$

$= \frac{(\cos\arctan t)^{-3}}{3}$

$\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3}$

E ISTO AQUI?

$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$

$$\int \underbrace{\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{z}{}^{-2}}_{z^{-2}}\underbrace{dt}_{z^2 d\theta} = \begin{bmatrix} t=\tan\theta \\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta=z \\ dt=\sec^2\theta\, d\theta=z^2\,d\theta \\ \theta=\arctan t \end{bmatrix}$$

$\int d\theta = \theta = \arctan t$

TUDO INDICA QUE

$$\int \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{f(t)}\,dt = \underbrace{\arctan t}_{F(t)}\ldots$$

COMO A GENTE CONFERE ISTO? SERÁ QUE $F'(t)=f(t)$?

LEMBRANDO O MODO DE DERIVAR FUNÇÕES INVERSAS...

SE $g(h(x))=x$ ENTÃO

$$\frac{d}{dx}g(h(x))=\frac{d}{dx}x=1$$

$$\|$$

$$g'(h(x))h'(x)$$

$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$ $\quad (\star)$

SE $g(x)=\tan x$

$h(x)=\arctan x$

ENTÃO $(\star)$ VIRA...

$$\arctan'(x)=\frac{1}{\tan'(\arctan x)}$$

$$\arctan'(t)=\frac{1}{\underbrace{\tan'}_{\sec^2}(\underbrace{\arctan t}_{\theta})}$$

$$=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{1+t^2}$$

TEM EXERCÍCIOS BONS NA P.507 DO STEWART, E EXERCÍCIOS NÃO TÃO BONS NA P.60 DO LIVRO DA CRISTIANE HERNANDEZ.

DICA: CADA UM DESSES EXERCÍCIOS PODE SER TRANSFORMADO NUMA VERSÃO MAIS SIMPLES "TROCAR AS CONSTANTES POR 1"

STEWART, P.507,

1-3.1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

1-3.1') $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

2') $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

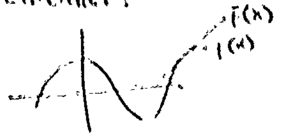
3') $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

[C2 3/[illegible]/[illegible]]

Hoje:
Como é que a gente calcula
$\int (\cos\theta)^4 d\theta$?

Aliás, quais são as identidades trigonométricas que nos ajudam a calcular isso?
O melhor modo de lembrar muitas identidades trigonométricas de uma vez só é usando:
1) série de Taylor
2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Idéia motivadora...
Nós vimos aproximações lineares:



Agora vamos ver aproximações por polinômios de qualquer grau, mas em $x=0$ (pras contas ficarem mais fáceis).

Exercício:
Calculem $(f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f''''(0), f'''''(0), \ldots)$
para:
a) $f(x) = e^x$ $= (1,1,1,1,1,1,\ldots)$
b) $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ $= (0,1,0,-1,0,1,0,-1,\ldots)$
c) $f(x) = \cos x$ $= (1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots)$
d) $f(x) = e^{2x}$ $= (1,2,4,8,16,32,\ldots)$
e) $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ $= (a, b, 2c, 6d, 24e, 0, 0, \ldots)$

Sugestão: faça uma tabela!
$f(x) = e^{2x}$ $f(0) = 1$
$f'(x) = 2e^{2x}$ $f'(0) = 2$
$f''(x) = 4e^{2x}$ $f''(0) = 4$
$f'''(x) = 8e^{2x}$ $f'''(0) = 8$
$f''''(x) = 16e^{2x}$ $f''''(0) = 16$

Notação (temporária):
$f(x) \overset{4}{=} g(x)$ ("coincidem até grau 4")
quando:
$f(0) = g(0)$,
$f'(0) = g'(0)$,
$f''(0) = g''(0)$,
$f'''(0) = g'''(0)$,
$f''''(0) = g''''(0)$
(Similar para $f(x) \overset{0}{=} g(x)$, $f(x) \overset{1}{=} g(x)$, $f(x) \overset{2}{=} g(x)$, ...)

Vamos pôr o item (e) numa forma um pouco melhor:
e') $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_4x^4$
$\Rightarrow (a_0, a_1, 2a_2, 6a_3, 24a_4, 0, 0, \ldots)$
$(0!a_0, 1!a_1, 2!a_2, 3!a_3, 4!a_4, \ldots)$

Como é que a gente faz $f(x)$ (do item (e)) obedecer isto?
a') $f(x) \overset{4}{\approx} e^x$ $\Rightarrow f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
b') $f(x) \overset{4}{\approx} \mathrm{sen}\,x$ $\Rightarrow f(x) = 0 + -\frac{x^2}{2} + + \frac{x^4}{24}$
c') $f(x) \overset{4}{\approx} \cos x$
d') $f(x) \overset{4}{\approx} e^{2x}$

Fórmula geral:
$$g(x) \overset{4}{\approx} g(0) + g'(0)x + g''(0)\frac{x^2}{2} + g'''(0)\frac{x^3}{6} + g''''(0)\frac{x^4}{24}$$
$$g(x) \overset{n}{\approx} \sum_{j=0}^{n} g^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$
$$g(x) \overset{2}{\approx} \sum_{j=0}^{2} g^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$
$$= g^{(0)}(0)\frac{x^0}{0!} + g^{(1)}(0)\frac{x^1}{1!} + g^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!}$$

Essa idéia nos permite obter aproximações polinomiais para uma função $f(x)$ (ou $g(x)$) qualquer...
(Stewart: p. 189 (introdução)
p. 777 (a série)).

A gente vai simplesmente acreditar que aumentando o k (o número de termos, e o grau do polinômio) a gente obtém aproximações cada vez melhores.

Exemplo:
$$\exp(x) \overset{k}{\approx} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\exp^{(j)}(0)}_{1} \frac{x^j}{j!}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Def (temp):
$$\exp_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Então:
$\exp_0(x) = \frac{x^0}{0!}$
$\exp_1(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!}$
$\exp_2(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}$
Idem para $\mathrm{sen}_k(x)$, $\cos_k(x)$.

Teoremão (não vou demonstrar):
Pra $\exp(x)$, $\mathrm{sen}\,x$, $\cos x$ (que têm "raio de convergência infinito") as aproximações se tornam cada vez melhores à medida que a gente aumenta o k, e:
$$\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \exp_k(x)$$
$$\mathrm{sen}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{sen}_k(x)$$
$$\cos(x) = \lim_{k\to\infty} \cos_k(x)$$

OBS: Se vocês precisarem calcular aproximações para $\exp(x)$, $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$ etc numa prova na mão (porque a calculadora quebrou) usem essas aproximações polinomiais

C2 5/JUNHO/2017

AGORA A GENTE SABE QUE

$$\exp(x) = \lim_{K\to\infty} \sum_{j=0}^{K} \exp^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$

MAIS TARDE VOCÊS VÃO APRENDER A LIDAR COM SOMATÓRIOS INFINITOS, E AÍ:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \exp^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$

VAMOS FAZER O SEGUINTE.
VAMOS REDEFINIR O exp —
A PARTIR DE AGORA,
E ATÉ O FIM DESTE ASSUNTO,

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \exp^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$

IDEM PRA sen(x) E cos(x).

AGORA DÁ PRA GENTE CALCULAR COISAS COMO exp(i)!

$$\exp(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\exp^{(j)}(0)}_{1}\frac{i^j}{j!}$$

$$= \frac{i^0}{0!} + \frac{i^1}{1!} + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \frac{i^4}{4!} + \dots$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{i}{1!} + \frac{-1}{2!} + \frac{-i}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{i}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 \quad - \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{24} \quad - \frac{1}{720} \dots\right)$$

$$+ \left(\frac{i}{1} \quad - \frac{i}{6} \quad + \frac{i}{120} \quad \dots\right)$$

Se θ é um número REAL qualquer,

$$\exp(i\theta) = \left(1 \quad - \frac{\theta^2}{2} \quad + \frac{\theta^4}{24} \quad - \frac{\theta^6}{720} \dots\right)$$

$$+ \left(i\theta \quad - i\frac{\theta^3}{6} \quad + i\frac{\theta^5}{120} \quad \dots\right)$$

$$= \left(1 \quad - \frac{\theta^2}{2} \quad + \frac{\theta^4}{24} \quad - \frac{\theta^6}{720} \dots\right)$$

$$+ i\left(\theta \quad - \frac{\theta^3}{6} \quad + \frac{\theta^5}{120} \quad - \dots\right)$$

EXERCÍCIO MUITO^3 IMPORTANTE:

$\cos(\theta) =$

$\text{sen}(\theta) =$

ESSE EXERCÍCIO É TÃO IMPORTANTE QUE EU VOU FAZER ELE NO QUADRO MAS RECOMENDO MUITO QUE VOCÊS REFAÇAM ELE EM CASA...

$$\cos(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \cos^{(j)}(0)\frac{\theta^j}{j!}$$

$$= \underbrace{\cos^{(0)}(0)}_{1}\frac{\theta^0}{0!} + \underbrace{\cos^{(1)}(0)}_{0}\frac{\theta^1}{1!} + \underbrace{\cos^{(2)}(0)}_{-1}\frac{\theta^2}{2!} + \underbrace{\cos^{(3)}(0)}_{0}\frac{\theta^3}{3!} + \underbrace{\cos^{(4)}(0)}_{1}\frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 \quad - \frac{\theta^2}{2} \quad + \frac{\theta^4}{24} \quad + \dots\right)$$

SE VOCÊS FIZEREM A MESMA COISA PRA sen θ (FAÇAM AGORA!) VOCÊS VÃO VER QUE

sen θ

MORAL: PARA QUALQUER θ REAL
TEMOS: $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.

EXEMPLOS: $\exp(i\cdot 42) = \cos 42 + i\,\text{sen}\,42$.

$\exp(i\cdot\frac{1}{3}) = \cos\frac{1}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{1}{3}$,

$\exp(i\cdot\pi) = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi$.

E SE $a \in \mathbb{R}$ ENTÃO:

$\exp(ia) = \cos a + i\,\text{sen}\,a$

$\exp(i\cdot(-a)) = \cos(-a) + i\,\text{sen}(-a)$

$= \cos a - i\,\text{sen}\,a$

$\exp(i\cdot 4a) = \cos 4a + i\,\text{sen}\,4a$.

TEOREMÃO (NÃO VOU DEMONSTRAR. ACREDITEM EM MIM):

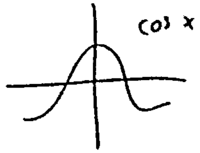
SABEMOS QUE $e^{a+b} = e^a e^b$ PARA $a, b \in \mathbb{R}$...

O TEOREMÃO DIZ QUE $e^{a+b} = e^a e^b$ PARA $a, b \in \mathbb{C}$.

APLICAÇÕES:

$$e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta} = e^a(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$e^{i(2\theta)} = e^{i\theta}e^{i\theta} = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2$$



cos x ("FUNÇÃO PAR")
cos x = cos −x

sen x ("FUNÇÃO ÍMPAR")
sen −x = −sen x

$\boxed{\text{C2 5/JUNHO/2017}}$

LEMBREM:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(2+3i)+(4+5i)=$$

$$6+8i$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$(2+3i)(4+5i)=$$

$$2\cdot4+\underbrace{2.5i+3i\cdot4}_{(2\cdot5+3\cdot4)i}+\underbrace{3i\cdot5i}_{-(3\cdot5)}=$$

$$(2\cdot4-3\cdot5)+(2\cdot5+3\cdot4)i$$

$$e^{i(2\theta)}=(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$$=((\cos\theta)^2-(\mathrm{sen}\,\theta)^2)+(2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)i$$

$$e^{i(2\theta)}=(\cos 2\theta)+i(\mathrm{sen}\,2\theta)$$

... DAÍ A GENTE VAI CONCLUIR (NA PRÓXIMA AULA) QUE

$$\cos 2\theta=(\cos\theta)^2-(\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta=2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

... E A GENTE VAI MELHORAR E GENERALIZAR ESSE MÉTODO E ELE VAI NOS DAR

- MONTES DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
- JEITOS DE CONVERTER COISAS COMO $(\cos\theta)^\alpha(\mathrm{sen}\,\theta)^\beta$ EM COISAS QUE A GENTE SABE INTEGRAR
- E RÁPIDO!

$\boxed{\text{C2 7/JUN/2017}}$

NA AULA PASSADA
NÓS VIMOS QUE:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \qquad E = c + is$

$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta$

$\quad = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \qquad E^{-1} = c - is$

$e^{a+b} = e^a e^b \quad \forall a,b \in \mathbb{C}$

ENTÃO:

$e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$

$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} \quad = E^{-1}$

(EXPONENCIAIS DE NÚMEROS
COMPLEXOS TAMBÉM VÃO
SER MUITO ÚTEIS PRA EDOs)

LEMBREM QUE:

$C = \cos\theta$
$S = \text{sen}\,\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

E EU GOSTO DESSA AQUI
TAMBÉM:

$E = e^{i\theta}$

REPARE QUE:

$E + E^{-1} = (c+is)$
$\qquad + (c-is)$
$\qquad = 2c$

$\boxed{\frac{E+E^{-1}}{2} = c}$

$E - E^{-1} = (c+is)$
$\qquad - (c-is)$
$\qquad = 2is$

$\boxed{\frac{E-E^{-1}}{2i} = s}$

E ISTO VALE PARA TODO θ...

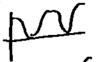
$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{e^{i42\theta} + e^{-i42\theta}}{2} = \cos 42\theta$

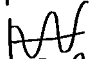
$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \text{sen}\,\theta \Rightarrow \frac{e^{i42\theta} - e^{-i42\theta}}{2i} = \text{sen}\,42\theta$

... E ISTO VAI NOS AJUDAR
A ENCONTRAR IDENTIDADES
TRIGONOMÉTRICAS!

$(\cos\theta)^2 = C^2$
$= \left(\frac{1}{2}(E+E^{-1})\right)^2$
$= \frac{1}{4}(E^2 + 2\underbrace{EE^{-1}}_{1} + (E^{-1})^2)$
$= \frac{1}{4}(E^2 + 2 + E^{-2})$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}(E^2 + E^{-2}) + \frac{2}{4}$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$

$\cos\theta =$ 

$(\cos\theta)^2 =$ 

$\cos 2\theta =$ 

$\cos 2\theta + 1 =$ 

$\frac{\cos 2\theta + 1}{2} =$ 

$(\text{sen}\,\theta)^2 = S^2$
$= \left(\frac{E - E^{-1}}{2i}\right)^2$
$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2 (E - E^{-1})^2$
$= \left(\frac{1}{-4}\right)(E^2 - 2EE^{-1} + (E^{-1})^2)$
$= \frac{1}{-4}(E^2 - 2 + E^{-2})$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{E^2 + E^{-2}}{2}\right)$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta)$

... COM ESSE MÉTODO
VOCÊS CONSEGUEM
"SIMPLIFICAR" EXPRESSÕES
(DO TIPO $(\cos\theta)^\alpha(\text{sen}\,\theta)^\beta$...
NO SENTIDO DE TRANSFORMÁ-LAS
EM EXPRESSÕES FÁCEIS DE
INTEGRAR.

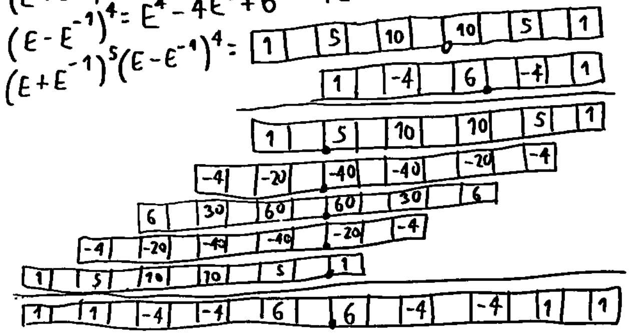
LEMBREM QUE:

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(E+E^{-1})^5 = E^5 + 5E^3 + 10E + 10E^{-1} + 5E^{-3} + E^{-5}$

$(E-E^{-1})^4 = E^4 - 4E^2 + 6 - 4E^{-2} + E^{-4}$

$(E+E^{-1})^5(E-E^{-1})^4 =$



1 5 10 10 5 1
1 -4 6 -4 1

1 5 10 10 5 1
-4 -20 -40 -40 -20 -4
6 30 60 60 30 6
-4 -20 -40 -40 -20 -4
1 5 10 10 5 1

1 1 -4 -4 6 6 -4 -4 1 1

$= E^9 + E^7 - 4E^5 - 4E^3 + 6E + 6E^{-1} - 4E^{-3} - 4E^{-5} + E^{-7} + E^{-9}$

AGORA A GENTE JÁ SABE
INTEGRAR COISAS COMO

ⓐ $\int (\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta = ?$

ⓑ $\int \cos\theta\ \text{sen}\,\theta\, d\theta = ?$

ⓒ $\int (\cos\theta)^2 (\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta = ?$

POR ESSE MÉTODO!
REPARE QUE O ⓑ A GENTE
TAMBÉM SABE FAZER PELAS
SUBSTITUIÇÕES (C) E (S), E
DÁ PRA COMPARAR OS
RESULTADOS DOS DOIS MÉTODOS...

ⓐ $\int (\text{sen}\,\theta)^2 d\theta =$
$\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta =$
$\int \frac{1}{2} d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta =$
$\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right) =$
$\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta$

EXERCÍCIO PRA AGORA: ⓐ.
PRA CASA: ⓑ E ⓒ, E
TESTE SEUS RESULTADOS
$\left(\int f(\theta)\, d\theta = F(\theta) \Rightarrow F'(\theta) = f(\theta)\right)$

C2 14/JUN/2017

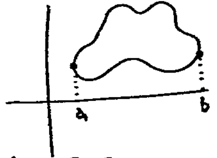
AVISO: NA SEGUNDA 19/JUN EU NÃO VOU DAR AULA - TENHO UMA CONSULTA MÉDICA NO RIO...

HOJE: ALGUMAS APLICAÇÕES TRADICIONAIS DA INTEGRAL:

- MEDIR ÁREAS (ISSO A GENTE MEIO QUE JÁ VIU),
- MEDIR VOLUMES EM GERAL,
- MEDIR VOLUMES DE SÓLIDOS DE ROTAÇÃO,
- MEDIR ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS 3D (MAIS DIFÍCIL).

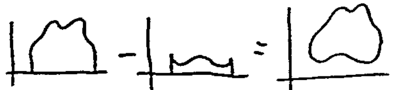
ÁREAS:

PRA MEDIR A ÁREA DE UMA FIGURA COMO



A GENTE TEM QUE ENCONTRAR UMA FUNÇÃO CUJO GRÁFICO SEJA A PARTE DE CIMA DO CONTORNO E OUTRA CUJO GRÁFICO SEJA A PARTE DE BAIXO...

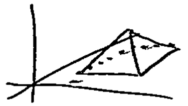
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx =$$



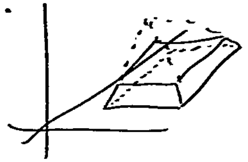
SE A FIGURA TIVER BURACOS A GENTE FAZ ISTO ("TIRAR OS BURACOS"):

COMO MEDIR VOLUMES?

EXEMPLO: PIRÂMIDE.



IDÉIA: PRA CADA Z A GENTE DEVE SER CAPAZ DE CALCULAR A ÁREA DE UM CORTE DA PIRÂMIDE NAQUELE Z...



MAIS SIMPLES:

BASE DA PIRÂMIDE:

VÉRTICES: (0,1,0), (1,1,0), (0,0,0), (1,0,0).

TOPO: (0,0,1).

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE OS VÉRTICES DO CORTE DA PIRÂMIDE EM $z=1/2$.

b) IDEM PRA $z=1/4$

c) IDEM PRA $z=3/4$

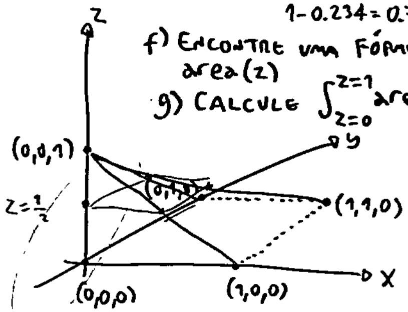
d) ENCONTRE A ÁREA DESSE CORTE PARA $z=0$, $z=1/4$, $z=1/2$, $z=3/4$, $z=1$.

e) QUAL É A ÁREA DESSE CORTE QUANDO $z=0.234$?

$1-0.234=0.766$

f) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $area(z)$

g) CALCULE $\int_{z=0}^{z=1} area(z)\,dz$.



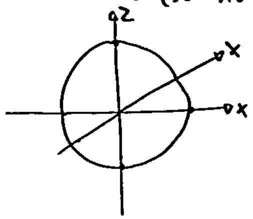
$$\int_{z=0}^{z=1} (1-z)^2 dz = \int_{z=0}^{z=1} 1-2z+z^2 dz$$

$$= \left(z-z^2+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=0}^{z=1}$$

$$= \left(1-1^2+\frac{1^3}{3}\right)-\left(0-0^2+\frac{0^3}{3}\right)$$

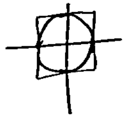
$$= \frac{1}{3}$$

O PRÓXIMO EXEMPLO MUITO IMPORTANTE É USAR ISTO PRA CALCULAR O VOLUME DA ESFERA. (DE RAIO 1).

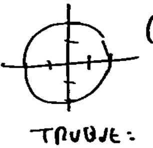


ANTES:

CALCULE A ÁREA DE:

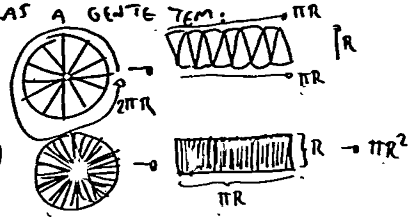


(CÍRCULO DE RAIO 1)



(CÍRCULO DE RAIO 2)

TRUQUE: SE A GENTE DIVIDIR O CÍRCULO EM MUITAS FATIAS DE PIZZA IGUAIS E REARRANJAR ELAS A GENTE TEM:

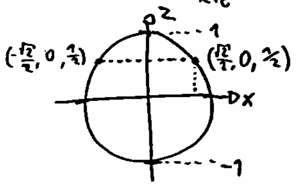


OS CORTES VÃO SER CÍRCULOS...

RAIO (z) = ?

↑

RAIO DO CORTE



RAIO (1) = 0

RAIO (0) = 1

RAIO (-1) = 0

RAIO (1/2) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RAIO (z) = ?

$x^2+y^2+z^2=1$

SE $y=0$,

$x^2+0^2+z^2=1$

$z=\frac{1}{42} \Rightarrow x=\sqrt{1-(\frac{1}{42})^2}$

$raio(z) = \sqrt{1-z^2}$

UM CÍRCULO DE RAIO 1/3 TEM ÁREA: $\pi/9$

" " " " x TEM ÁREA: πx^2

$area(z) = \pi(1-z^2)$

VOLUME DA RAIO 1:

$$\int_{z=-1}^{z=1} area(z)\,dz =$$

$$\int_{z=-1}^{z=1} \pi(1-z^2)\,dz = \pi\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=-1}^{z=1}$$

$$= \pi\left(1-\frac{1^3}{3}\right) - \pi\left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \pi\,\frac{2}{3} \quad - \pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi\frac{2}{3} \quad - \pi\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \pi\frac{2}{3}+\pi\frac{2}{3}$$

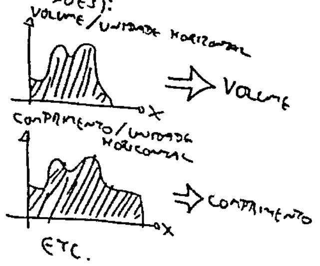
$$= \frac{4}{3}\pi$$

$\boxed{\text{C2 21/JUN/2017}}$

HOJE: ALGUMAS APLICAÇÕES-PADRÃO DA INTEGRAL, E <u>TALVEZ</u> UMA INTRODUÇÃO A EDOS.

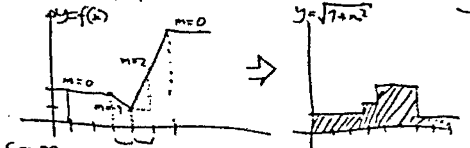
PRECISAMOS MARCAR A P1! ELA VAI SER SOBRE TUDO QUE A GENTE VIU DE INTEGRAIS.

TODAS AS APLICAÇÕES DA INTEGRAL PODEM SER VISTAS COMO APLICAÇÕES DESTA IDÉIA AQUI (COM VARIAÇÕES):



ETC.

POR EXEMPLO, DIGAMOS QUE QUEREMOS CALCULAR O COMPRIMENTO DESTA CURVA:



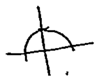
COMPRIMENTO:

$$\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+m^2}\,dx=\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

EXEMPLOS

a) (TALVEZ AS CONTAS SEJAM DIFÍCEIS):

$f(x)=\sqrt{1-x^2}=$



$$\int_{x=-1}^{x=1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\ ?\ \Leftarrow\pi$$

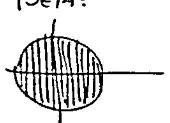
$f'(x)=\ ?$

$\frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2}=\ ?$

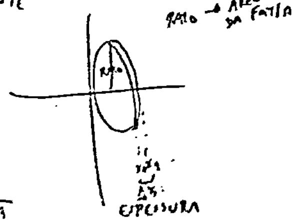
(DEPOIS A GENTE RESOLVE)

b) COMO CALCULAR O VOLUME DA ESFERA?

IDÉIA:

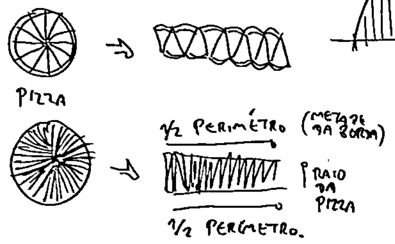


FATIAR A ESFERA EM FATIAS MUITO FINAS, QUASE CILÍNDRICAS (DISCOS) E O VOLUME DE CADA UMA VAI SER APROXIMADAMENTE



UM CÍRCULO DE RAIO R TEM ÁREA .... ? ⇐ πR^2.

TRUQUE CLÁSSICO:



UMA PIZZA DE RAIO R TEM PERÍMETRO $2\pi R$...

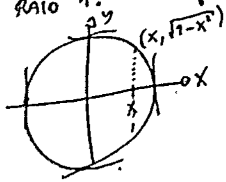
1/2 PERÍMETRO =

$1/2\cdot 2\pi R=$

πR

ÁREA: $R\cdot\pi R=\pi R^2$

VOLUME DA ESFERA DE RAIO 1:

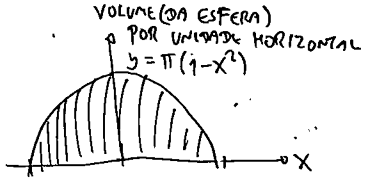


RAIO DA FATIA

ÁREA DA FATIA:

$\pi\sqrt{1-x^2}^{\,2}$

$=\pi(1-x^2)$



VOLUME DA ESFERA:

$$\int_{x=-1}^{x=1}\pi(1-x^2)\,dx=\ \dots$$

$$=\frac{4}{3}\pi$$

INTRODUÇÃO ÀS EDOs

(EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS, ONDE O "ORDINÁRIAS" SIGNIFICA "TEM UMA VARIÁVEL SÓ").

LEMBREM, DE OUTROS TIPOS DE EQUAÇÕES...

$x+2=10$

$2x+3=20$

$2x+3=\frac{x}{5}$

$x^2-2x+6=0$

$f'(x)=\cos 3x$

$\frac{d}{dx}f(x)$

$\frac{d}{dx}f(x)-f(x)=6$

$\frac{d}{dx}f(x)-6\times f(x)=42$

...DA MESMA FORMA QUE VIMOS VÁRIAS TÉCNICAS DIFERENTES PRA RESOLVER INTEGRAIS A GENTE VAI VER VÁRIAS TÉCNICAS PRA EDOS...

TÉCNICA 0:

CHUTAR E TESTAR.

DIGAMOS QUE A NOSSA EDO SEJA ESTA:

$$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0\quad(\star).$$

TESTEM SE ESTAS "f(x)"s DAQUI SÃO SOLUÇÕES DA $(\star)$:

a) x

b) 0 SIM

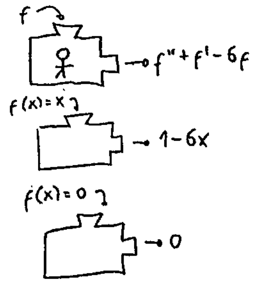
c) e^{2x}

d) e^{3x}

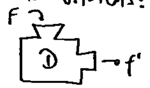
e) e^{-2x}

f) e^{-3x}

REPARE QUE A GENTE TEM:



DÁ PRA DECOMPOR ESSA MÁQUINA EM SUB-MÁQUINAS MAIS BÁSICAS:



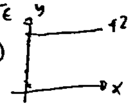
$Df=f'$

$D(Df)=D(f')=f''$

NOTAÇÃO NOVA: FUNÇÕES SEM "(x)".

A GENTE VAI COMEÇAR A DISTINGUIR <u>NÚMEROS</u> DE <u>FUNÇÕES</u> ...

POR EXEMPLO, 42 ← NÚMERO VAI SER DIFERENTE DE $f(x)=42$ ⇒



QUANDO A GENTE DIZ, P.EX,

$f(x)=10x+3$,

A GENTE TÁ CRIANDO UMA FUNÇÃO <u>COM NOME</u> ("f").

EM MD UMA FUNÇÃO "É" UM CONJUNTO DE PARES.

42 É UM NÚMERO,

$f(x)=42\ \Rightarrow f=\{(x,42)\,|\,x\in\mathbb{R})$

UM TRUQUE PREPARATÓRIO:

SE $f(x)=10x+3$

$$\begin{tikzcd}
f(4+5) \arrow[r] \arrow[d] & f(9) \arrow[d] \\
10(4+5)+3 \arrow[r] & 10\cdot 9+3 \arrow[d] \\
 & 90+3 \arrow[d] \\
 & 93
\end{tikzcd}$$

$f(x)=10x+3$

$f=\lambda x.\,10x+3$

$$\begin{tikzcd}
f(9) \arrow[d] \\
(\lambda x.\,10x+3)(9) \arrow[d] \\
(10x+3)[x:=9] \arrow[d] \\
10\cdot 9+3 \arrow[d] \\
90+3 \arrow[d] \\
93
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{C2 26/JUN/2017}}$

A gente viu — nas folhas da optativa de λ-cálculo — algumas idéias de λ-cálculo tipado e não-tipado...

Voltando para Cálculo 2...

$f(x) = x^3$

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$

Em λ-calculo o nome da variável não importa muito...

$(\lambda x. x^3)(10) = 10^3 = 1000$

$(\lambda y. y^3)(10) = 10^3 = 1000$

$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$

$\frac{d}{dx} (\lambda y\ y^3)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\lambda y. y^3)(x+\varepsilon) - (\lambda y. y^3)(x)}{\varepsilon}$

$\frac{d}{dx} f(4) = ?$

$\frac{d}{dx} (\lambda y. y^3)(4) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\lambda y. y^3)(4+\varepsilon) - (\lambda y. y^3)(4)}{\varepsilon}$

Como é que a gente define $\frac{d}{dx} g$ para uma g qualquer?

$\left(\frac{d}{dx} g\right)(4) =$!! (faz sentido)

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{d}{dx}}_{:(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} \underbrace{g}_{:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\right)}_{:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$$

Def: $\frac{d}{dx} := \lambda g{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}. \frac{d}{dx} g(x)$!!

$= \lambda g{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}. \lambda x{:}\mathbb{R}. \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon}$

Melhor:

$$\mathbb{D} = \lambda g{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}. \lambda x{:}\mathbb{R}. \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon}}_{\text{"}\frac{d}{dx} g(x)\text{"}}$$

$(\lambda x. x^2+4)(10) =$

Seja $g = (\lambda x. x^2+4)$.

$\mathbb{D} g$ vai ser g'.

$g' = (\lambda x. 2x)$

$\mathbb{D} g = (\lambda x. 2x)$

$\mathbb{D}(\lambda x. x^2+4) = (\lambda x. 2x)$

$\mathbb{D}(\lambda x. \operatorname{sen} x) = (\lambda x. \cos x)$

$\mathbb{D}(\lambda x. \operatorname{sen} 42x) = (\lambda x. 42 \cos 42x)$

Repare que:

$\frac{d}{dx} 99 = 0$

mas $\mathbb{D}(0) = $ erro

porque $0 : \mathbb{R}$

e o $\mathbb{D} : (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$...

Conserto:

$\underbrace{(\lambda x{:}\mathbb{R}. 99)}_{:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(4) = 99$

$\mathbb{D}(\lambda x{:}\mathbb{R}. 99) = (\lambda x{:}\mathbb{R}. 0)$

(mas eu em geral não tou escrevendo os ":ℝ"s).

Exercícios:

$\mathbb{D}(\lambda x. e^{2x}) =$

$\mathbb{D}(\lambda x. e^{3x}) =$

$\mathbb{D}(\lambda x. 4e^{3x}) =$

Lembre (qdz, talvez você já tenha visto isto em Álgebra Linear) que funções são parecidas com vetores...

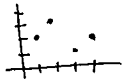
$\vec{v} = \overrightarrow{(2,3,1,2)}$

$\vec{v}_1 = 2$

$\vec{v}_2 = 3$

$\vec{v}_3 = 1$

$\vec{v}_4 = 2$

$\vec{v} =$ 

$10\vec{v} = \overrightarrow{(20,30,10,20)}$

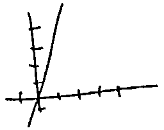
$f = (\lambda x. 10x)$

$f(1) = 10$

$f(2) = 20$

$f(3) = 30$

$f(4) = 40$

$f =$ 

...mas f está definida para todo número real...

$42 f(x) = 42 \cdot 10 \cdot x$

$42 f = (\lambda x. 420x)$

Em 42f temos:

$\underbrace{42}_{(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})} \underbrace{f}_{:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$

Lembre que:

$\frac{d}{dx}(2f(x) + 3g(x)) =$

$2\frac{d}{dx} f(x) + 3\frac{d}{dx} g(x)$

$\int_{x=2}^{x=6} 2f(x) + 3g(x)\,dx =$

$2\int_{x=2}^{x=6} f(x)\,dx + 3\int_{x=2}^{x=6} g(x)\,dx$

Lembre (qdz, talvez você já tenha visto isto em Álgebra Linear...)

$\mathbb{D}(2f + 3g) = 2\mathbb{D}f + 3\mathbb{D}g$

é algo parecido pra integrais...

Fato(s):

- O espaço das funções de ℝ em ℝ é um espaço vetorial de dimensão infinita
- Idem pras funções deriváveis
- $\mathbb{D}$ é uma transformação linear.

Repare

$\mathbb{D}(\lambda x. e^{2x}) = (\lambda x. 2e^{2x})$

$= 2(\lambda x. e^{2x})$

Isto é como

$M\vec{v} = 2\vec{v}$...

este $\vec{v}$ é um autovetor de M associado ao autovalor 2.

$\mathbb{D}(\lambda x. e^{3x}) = 3(\lambda x. e^{3x})$

(idem, autovalor 3).

Exercício:

$\mathbb{D}(\lambda x. ae^{bx} + ce^{dx}) =$

C2 26/JUN/2017

CONSIDERE ESTA EDO:

$$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0 \qquad (\star)$$

UMA SOLUÇÃO PRA ELA
TEM QUE SER 0 EM TODO x...

$f' = Df$

$f'' = D(Df) = D^2 f = (DD)f$

$f''(x)+f'(x)-6f(x) =$

$(DDf)(x)+(Df)(x)+(-6f)(x) =$

$(DDf+Df-6f)(x) = 0$

QUEREMOS

$(DDf+Df-6f) = \lambda x.0$

$(DD+D-6)f = \lambda x.0$

$\parallel$

$(D+3)(D-2)f$

$\alpha^2+\alpha-6 = (\alpha+3)(\alpha-2)$

DÁ PRA VER QUE

$(D+3)(D-2)f = (DD+D-6)f\cdots$

$(D+3)((D-2)f) =$

$(D+3)(Df-2f) =$

$D(Df-2f)+3(Df-2f) =$

$DDf - D(2f)+3Df-6f =$

$DDf-2Df+3Df-6f =$

$DDf+Df-6f = (DD+D-6)f$

E REPARE QUE
É FÁCIL ENCONTRAR
SOLUÇÕES DE:

a) $(D-2)f=0$

$f'-2f=0$

$f'=2f$

A SOLUÇÃO "BÁSICA"
DISSO É DA FORMA
e^{ax} ...

QUE VALORES DE a
OBEDECEM

$D(\lambda x.e^{ax}) = 2(\lambda x.e^{ax})$?

$a=2$ (E SÓ).

FATO:

(FÁCIL): TODAS AS FUNÇÕES
DA FORMA $f(x)=ke^{2x}$
SÃO SOLUÇÕES DE
$(D-2)f=2f$.

(DIFÍCIL): NÃO HÁ OUTRAS
SOLUÇÕES.

OPS:

$(D-2)f=(\lambda x.0) \Rightarrow f=ke^{2x}$
PRA ALGUM k.

b) $(D+3)f=(\lambda x.0)$

$\Rightarrow f = ke^{-3x}$

FATOS:

(FÁCIL): AS SOLUÇÕES DE
$(D-2)f=0$ SÃO SOLUÇÕES
DE $(D+3)(D-2)f=0$

$\parallel$

$(DD+D-6)f$

$\parallel$

$f''+f'-6f$;

AS SOLUÇÕES DE $(D+3)f$
TAMBÉM...

$f''+f'-6f=0$

$\parallel$

$(DD+D-6)f$

$//$ $\qquad$ $\backslash\backslash$

$(D+3)(D-2)f \qquad (D-2)(D+3)f$

ESTAMOS PENSANDO EM
$D+3$ E $D-2$ COMO
MATRIZES, E NEM
SEMPRE MATRIZES
COMUTAM ($AB=BA$ NÃO
VALE SEMPRE) MAS
$(D+3)$ E $(D-2)$
COMUTAM.

MAIS FATOS:

(FÁCIL) COMBINAÇÕES LINEARES
DE e^{2x} E e^{-3x}
TAMBÉM SÃO SOLUÇÕES
DE $(\star)$...

(DIFÍCIL) NÃO HÁ OUTRAS
SOLUÇÕES.

ACABAMOS DE VER
COMO ENCONTRAR
TODAS AS SOLUÇÕES
DE ALGO COMO
$(D+3)(D-2)f=0$...

ELAS SÃO DA FORMA

$f = ae^{-3x}+be^{2x}$

COMO É QUE A
GENTE ENCONTRA
A ÚNICA SOLUÇÃO
DE $(\star)$ QUE
OBEDECE $f(0)=4$
$f'(0)=5$?

RESPOSTA:
AJUSTANDO O a E O b ☺.

C2 28/JUN/2017

HOJE: MAIS SOBRE EQUAÇÕES DA FORMA $f''+af'+bf=0$!

LEMBRE QUE A GENTE SABE FATORAR

$f''+af'+bf=0$, I.E,

$(D^2+aD+b)f=0$,

EM

$(D+\alpha)(D+\beta)f=0$, (☆),

E AÍ A GENTE SABE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE (☆), QUE VÃO SER $f_1=e^{-\alpha x}$

E $f_2=e^{-\beta x}$,

E A GENTE SABE QUE AS SOLUÇÕES DE (☆) VÃO SER EXATAMENTE AS COMBINAÇÕES LINEARES DE f_1 E f_2...

EXERCÍCIOS:

a) ENCONTRE UMA EDO DA FORMA (☆) QUE TENHA ESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS: $f_1=e^{3x}$

E $f_2=e^{-4x}$

b) VERIFIQUE.

c) QUE NEM O (a), MAS COM ESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS:

$f_1=e^{ix}$,

$f_2=e^{-ix}$.

d) SEJAM (☆☆) A EDO QUE VOCÊ ENCONTROU NO ITEM (c) E

$f_3=\cos x$,

$f_4=\operatorname{sen} x$.

VERIFIQUE QUE f_3 E f_4 SÃO SOLUÇÕES DE (☆☆).

e) LEMBRE QUE

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$; (□)

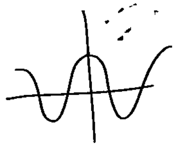
EXPRESSE f_1 E f_2 COMO COMBINAÇÕES LINEARES DE f_3 E f_4.

f) EXPRESSE f_3 E f_4 COMO COMBINAÇÕES LINEARES DE f_1 E f_2.

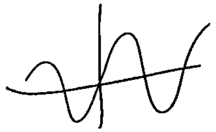
DICAS:

$$(\square)[\theta:=-\theta] \Rightarrow \underbrace{e^{-i\theta}}_{f_2}=\cos -\theta+i\operatorname{sen}-\theta = \underbrace{\cos\theta}_{f_3} - i\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{f_4}$$

$\cos -\theta = \cos\theta$



$\operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$



$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$$

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\operatorname{sen}\theta$$

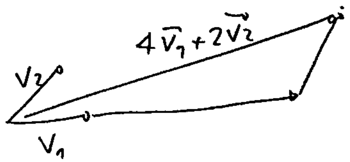
$$e^{ix}+e^{-ix}=2\underbrace{\cos x}_{f_3} \quad (I)$$

$$\underbrace{e^{ix}}_{f_1}-\underbrace{e^{-ix}}_{f_2}=2i\underbrace{\operatorname{sen} x}_{f_4} \quad (II)$$

$$\underbrace{\cos x}_{f_3}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{f_1+f_2}{2}$$

$$f_3=\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2$$

$$f_4=\frac{1}{2i}f_1-\frac{1}{2i}f_2$$



C2 [illegible]

Lembre que as soluções básicas de $(D-a)(D-b)f=0$

$$\left.\begin{array}{l}(D-a)(D-b)f=0\\ \quad \| \\ (D^2-(a+b)D+ab)f \\ \quad \| \\ f''-(a+b)f'+ab=0\end{array}\right\}(\star)$$

são e^{ax} e e^{bx}, e as outras soluções são combinações lineares destas...

Encontre uma EDO da forma $(\star)$ que tenha as soluções abaixo e teste o seu resultado.

a) $f_1=e^{4x}$, $f_2=e^{2x}$ $\Rightarrow f''-6f'+8f=0$

b) $f_1=e^{ix}$, $f_2=e^{-ix}$ $\Rightarrow f''+f=0$

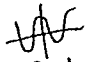
Obs: Se uma f é solução de uma determinada EDO da forma $(\star)$ então: Seja $g(x)=f(x+99)$; g também é solução da $(\star)$.

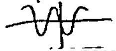
$f=$ 

$g=$ 

Exemplos: $e^{4(x+5)}$ é solução da (a)

$e^{i(x+\frac{\pi}{2})}$ é solução da (b).

$\cos x$ é solução da (b) 

$\cos(x+\frac{\pi}{99})$ é solução da (b). 

...E recomendo estas fórmulas aqui, que eu acho que a gente vai usar muitas de vezes.

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta \quad ①$$

Repare que se substituímos $[\theta:=-\theta]$ em ① temos:

$$e^{-i\theta}=(\cos-\theta)+i(\text{sen}-\theta)$$
$$=\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta \quad ②$$

Exercício: calcule $e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ e $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ e use os seus resultados para encontrar fórmulas deste tipo:

$$\cos\theta=\ldots=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad ③$$
$$\text{sen}\,\theta=\ldots=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \quad ④$$

Todas as soluções de (b) são combinações lineares de

- e^{ix}, e^{-ix}
- $\cos x$, $\text{sen}\,x$

Então $\cos(x+\frac{\pi}{99})$ é combinação linear de $\cos x$ e $\text{sen}\,x$!

Como?

Seja $f=\alpha\cos x+\beta\,\text{sen}\,x$

Então $f'(x)=-\alpha\,\text{sen}\,x+\beta\cos x$

$f(0)=\alpha$

$f'(0)=\beta$

Seja $g(x)=\cos(x+\frac{\pi}{99})$.

Então $g(0)=\cos(\frac{\pi}{99})$, $\Leftarrow \alpha$

$g'(x)=-\text{sen}(x+\frac{\pi}{99})$

$g'(0)=-\text{sen}(\frac{\pi}{99}) \Leftarrow \beta$

... Então $\cos(\frac{\pi}{99})\cos x-\text{sen}(\frac{\pi}{99})\,\text{sen}\,x=\cos(x+\frac{\pi}{99})$

...Talvez seja melhor a gente começar por algo mais simples, em que tudo é real.

Considere esta EDO:

$$f''+3f'-10f=0 \quad (\star\star).$$
$$\|$$
$$(D^2+3D-10)f$$
$$\|$$
$$(D+5)(D-2)f.$$

Ela tem soluções básicas $f_1=e^{2x}$, $f_2=e^{-5x}$.

Digamos que $f=af_1+bf_2$.

Calcule $f(0)$ e $f'(0)$, e encontre a e b tais que:

a) $f(0)=1$ e $f'(0)=0$

b) $f(0)=0$ e $f'(0)=1$

c) $f(0)=42$ e $f'(0)=99$.

$f(0)=ae^{2\cdot0}+be^{-5\cdot0}=a+b$

$f'(x)=2ae^{2x}-5be^{-5x}$

$f'(0)=2ae^{2\cdot0}-5be^{-5\cdot0}=2a-5b$

a) Queremos $a+b=1$ e $2a-5b=0$, ou, equivalentemente, $\begin{pmatrix}1&1\\2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/7\\2/7\end{pmatrix}$$

b) Queremos $a+b=0$ e $2a-5b=1$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/7\\-1/7\end{pmatrix}.$$

c) $\begin{pmatrix}1&1\\2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42\\99\end{pmatrix}=42\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+99\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/7&1/7\\2/7&-1/7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}42\\99\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/7&1/7\\2/7&-1/7\end{pmatrix}\left(42\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+99\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$=42\begin{pmatrix}5/7\\2/7\end{pmatrix}+99\begin{pmatrix}1/7\\-1/7\end{pmatrix}$$

Obs: Se $M\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

e $M\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Então $M\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42\\99\end{pmatrix}$

Lembre que $M(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha M\vec{u}+\beta M\vec{v}$

Portanto $M\left(\alpha\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right)=\alpha\underbrace{M\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+\beta\underbrace{M\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

e $M\left(42\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+99\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}42\\99\end{pmatrix}$

Dica pra casa:

Quase todas P2s, VRs e VSs dos meus semestres anteriores de C2 têm problemas bem parecidos com esses, que na verdade são exercícios de álgebra linear disfarçados.

Vale a pena treinar fazê-los.

O caso mais importante pra física é o caso com soluções <u>reais</u> são da forma $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\,\text{sen}\,bx$, onde $a\leq0$.

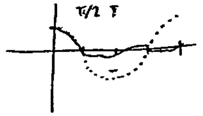
a controla a taxa de decrescimento, b controla velocidade de oscilação

Exercício: Represente graficamente $e^{ax}\cos bx$ para $a=-1$, $b=1$...

Dica: comece com $b=0,\frac{\pi}{2},\pi,3\frac{\pi}{2}$, e esboce o resto.

Dica: $e^{-\frac{\pi}{2}}\approx e^{-1.5}\approx0.2$

x	e^{-x}	$\cos x$	$e^{-x}\cos x$
0	1	1	1
$\pi/2$	0.2	0	0
π	0.04	-1	-0.04
$3\pi/2$	0.008	0	0
2π	0.0016	1	0.0016



C2 3/JUL/2017

LEMBRE QUE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE

$$\left.\begin{array}{c} (D-a)(D-b)f=0 \\ \shortparallel \\ (D^2-(a+b)D+ab)f \\ \shortparallel \\ f''-(a+b)f'+ab=0 \end{array}\right\}(\star)$$

SÃO e^{ax} E e^{bx}, E AS OUTRAS SOLUÇÕES SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DESTAS...

COMO É QUE A GENTE ENCONTRA UMA EDO DA FORMA $(\star)$ CUJAS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS SEJAM $f_1=e^{-2x}\cos 3x$ E $f_2=e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$?

$$\begin{aligned} f_1+if_2 &= e^{-2x}\cos 3x + e^{-2x}(i\operatorname{sen} 3x) \\ &= e^{-2x}(\cos 3x + i\operatorname{sen} 3x) \\ &= e^{-2x}e^{i3x} \\ &= e^{-2x+3ix} \\ &= e^{(-2+3i)x} \end{aligned}$$

⇐ UMA DAS SOLUÇÕES BÁSICAS COMPLEXAS; $a=-2+3i$

$(\ldots)\quad e^{(-2-3i)x}$ ⇐ OUTRA SOLUÇÃO BÁSICA COMPLEXA; $b=-2-3i$

O QUE ACONTECE SE A GENTE PEGA A FÓRMULA $(\star)$ E FAZ $a=(-2+3i)$ E $b=(-2-3i)$?

$$\begin{array}{c} (D-(-2+3i))(D-(-2-3i))f=0 \\ \shortparallel \\ (D^2-((-2+3i)+(-2-3i))D+(-2+3i)(-2-3i))f \\ \shortparallel \\ (D^2+4D+11)f \\ \shortparallel \\ f''+4f'+11f \end{array}$$

C2 10/jul./2017

Hoje e na aula que vem nós vamos ver mais dois tipos de EDOs fáceis de resolver...
"EDOs com variáveis separáveis" e
"EDOs exatas"...

Vou usar vários truques pra acelerar...

Truque (vale pra muitos tipos de EDOs): comece pelo meio.

Variáveis separáveis

Uma EDO com V.S.s é uma que é desta forma:

$$g(x)\,dx = h(y)\,dy \qquad (☆)$$

$$\Rightarrow g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$$

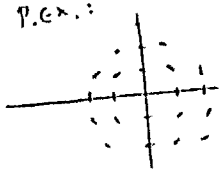
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad (☆☆)$$

Uma solução pra (☆) é uma f tal que $y=f(x)$ obedece (☆☆) (e (☆)).

Outro jeito:

Digamos que temos
$G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
e queremos resolver
$f'(x) = G(x, f(x))$

A gente já viu campos de direções...
p.ex.:



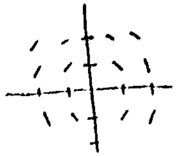
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

Mini-revisão de campos de direções

Meu exemplo preferido:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (☆☆☆)$$

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	1	0
1	1	-1
2	1	-2
-1	1	1
-2	1	2
	2	0
0	2	-½
1	2	-1
2	2	½
-1	2	1
-2	2	
	-1	0
0	-1	1
1	-1	2
2	-1	-1
-1	-1	-2
-2		



Soluções:
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$,
$f(x) = \sqrt{4-x^2}$
$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \pm\sqrt{a-x^2}$ (caso geral)
isto obedece
$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$

Dá pra traduzir (☆☆☆) para:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{G(x,y)} = G(x, f(x))$$

e para: $\frac{dy}{dx} = \underbrace{(-x)}_{g(x)} \Big/ \underbrace{y}_{h(y)}$

Voltando pro caso geral, (☆)...

Se $g(x)\,dx = h(y)\,dy$
então: $\int g(x)\,dx = \int h(y)\,dy$

Na verdade,

$$\int g(x)\,dx + C_1 = \int h(y)\,dy + C_2$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C \qquad (\Delta)$$

Vamos ver um caso particular...
Se $g(x) = -x$
e $h(y) = y$,

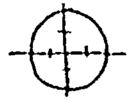
$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$\int y\,dy \qquad \int -x\,dx + C$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$\frac{y^2}{2} \qquad -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$$

Pra cada C isto me dá uma solução... p.ex., C=2

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

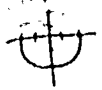
$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$



$\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$

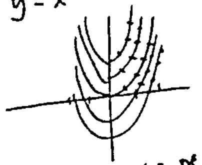
$\Rightarrow y^2 = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = -\sqrt{4-x^2} \Rightarrow$



Obs: o Stewart tem bastante material sobre V.S.s (com figuras!) na seção 9.3.

Um exemplo do Stewart:
As curvas de nível de $y - x^2$ são:



Nessas curvas de nível a gente tem $y = x^2 + C$
$\frac{dy}{dx} = 2x$

Como é que a gente procura curvas que sejam sempre ortogonais a estas?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x} \qquad (□)$$

$$(□) \Rightarrow dy = -\frac{1}{2x}\,dx$$

$$\int dy = \int -\frac{1}{2x}\,dx + C$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$y \qquad -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + C$$
$$\parallel$$
$$-\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

As soluções de $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x}$,
ou seja, de $f'(x) = -\frac{1}{2x}$,
são as curvas da forma
$y = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$,
ou seja, $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$
(cada valor de C nos dá uma curva, i.e., uma solução, diferente...)

....

(Esquece que a gente usou o G.)

$$g(x)\,dx = h(y)\,dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$
$$\Downarrow$$
$$\int g(x)\,dx = \int h(y)\,dy$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$G(x) \qquad H(y)$$
$$G(x) = H(y) + C$$
$$G(x) - H(y) = C$$

... ou seja, estamos procurando as curvas de nível de $G(x) - H(y)$!

C2 10/JUL/2017

VAMOS PASSAR PRA ALGO MAIS GERAL.

AS SOLUÇÕES DAS EDOS EXATAS CORRESPONDEM A CURVAS DE NÍVEL DE FUNÇÕES DO TIPO

$$F(x,y)=G(x)-H(y).$$

QUAIS DAS "F"S ABAIXO PODEM SER POSTAS NA FORMA $F(x,y)=G(x)-H(y)$?

a) $F(x,y)=x^2-y^3$ SIM: $G(x)=x^2$, $H(y)=y^3$.

b) $F(x,y)=e^x+\mathrm{sen}\,y$ SIM

c) $F(x,y)=xy$ NÃO.

AS EDOS EXATAS VÃO CORRESPONDER AO CASO GERAL, EM QUE AS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE UMA $F(x,y)$, MAS ESSA $F(x,y)$ NÃO PRECISA MAIS SER DA FORMA $F(x,y)=G(x)-H(y)$...

UMA FUNÇÃO $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ INDUZ UMA CURVA $y=f(x)$.

COMO É QUE A GENTE TESTA SE ELA É UMA CURVA DE NÍVEL DE $F(x,y)$?

IDÉIA: $\forall x$ $F(x,f(x))$ É CONSTANTE.

$$F(x_1,f(x_1))=F(x_2,f(x_2)).$$

DEF (TEMPORÁRIA):

$$g(x)=F(x,f(x)).$$

SE $g(x)$ É CONSTANTE ENTÃO $g'(x)=0$ EM TODO x...

$$\begin{array}{l}\frac{d}{dx}F(x,f(x))=0\\ \quad\shortparallel\\ F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0\end{array}$$

MUDANDO A NOTAÇÃO:

$$F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (\square)$$

$$F_x(x,y)dx+F_y(x,y)dy=0 \qquad (\square\square)$$

$$F_x dx+F_y dy=0$$

SE ALGUÉM DÁ PRA GENTE $F(x,y)$ É FÁCIL OBTER $(\square\square)$...

EXEMPLO: $F(x,y)=x^3+2x^2y+4y^4$

$F_x(x,y)=3x^2+4xy$

$F_y(x,y)=\ \ 2x^2+16y^3$

VAMOS COMEÇAR COM "F"S QUE SEJAM POLINÔMIOS E x E y.

NOTAÇÃO:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&b&c&d\\\hline e&f&g&h\\\hline i&j&k&l\\\hline\end{array}=\begin{array}{l}ax^0y^2+bx^1y^2+cx^2y^2+dx^3y^2+\\ ex^0y^1+fx^1y^1+gx^2y^1+hx^3y^1+\\ ix^0y^0+jx^1y^0+kx^2y^0+lx^3y^0\end{array}$$

O CANTO INFERIOR ESQUERDO DIZ O COEFICIENTE DO x^0y^0 $(=1)$

Ex: $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&&\\\hline &5&\\\hline &&6\\\hline\end{array}=\begin{array}{l}4y^2\\ \quad+5xy\\ \qquad+6x^2\end{array}$$

EXERCÍCIOS (SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS EM x E y):

a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&\\\hline &\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}=$

b) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&1\\\hline &&\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}=$

c) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&10\\\hline 100&1000\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}=$

EXERCÍCIOS (DERIVADAS PARCIAIS):

d) $\frac{\partial}{\partial x}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}=$

e) $\frac{\partial}{\partial y}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&6\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}=$

SEJA $H(x,y)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&b&c&d\\\hline e&f&g&h\\\hline i&j&k&l\\\hline m&n&o&p\\\hline\end{array}.$

g) $\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)=$

h) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)\right)=$

i) $\frac{\partial}{\partial y}H(x,y)=$

j) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}H(x,y)\right)=$

$\boxed{\text{C2 12/JUL/2017}}$

UM EXERCÍCIO DO FINAL
DA AULA PASSADA:

SEJA $H(x,y) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & c & d \\ \hline e & f & g & h \\ \hline i & j & k & l \\ \hline m & n & o & p \\ \hline\end{array}$

$\frac{\partial}{\partial x} cx^2y^3 = 2cxy^3$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline b & 2c & 3d \\ \hline f & 2g & 3h \\ \hline j & 2k & 3l \\ \hline n & 2o & 3p \\ \hline\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3b & 6c & 9d \\ \hline 2f & 4g & 6h \\ \hline j & 2k & 3l \\ \hline\end{array}$

CALCULE:

g) $\frac{\partial}{\partial x} H(x,y) =$

h) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} H(x,y)\right) =$

i) $\frac{\partial}{\partial y} H(x,y) =$

j) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} H(x,y)\right) =$

FATO (DE CÁLCULO 3):
SE $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É SUAVE
ENTÃO $\underset{H_{yx}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} H}} = \underset{H_{xy}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} H}}$

E ISSO VALE PRA FUNÇÕES
QUE NÃO SÃO POLINÔMIOS...

P.ex: $H(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos xy + x^2 e^{x-y}$

SÓ QUE A VAI SE CONCENTRAR
NO CASO EM QUE H É POLI.

LEMBRE QUE PRA QUALQUER
$H(x,y)$ (SUAVE)
A EDO $H_x dx + H_y dy = 0$
TEM SOLUÇÕES, QUE SÃO
EXATAMENTE AS
CURVAS DE NÍVEL DA H.

(OBS: ESTÁVAMOS USANDO
$F_x dx + F_y dy = 0$.)

MAS NEM SEMPRE DÁ
PRA ENCONTRAR UMA F...

EDO:

$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \\ \hline & \\ \hline\end{array}\, dx + \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\, dy = 0$

VAMOS TENTAR ENCONTRAR A F.

$\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \\ \hline\end{array}\, dx + \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline\end{array}\, dy = 0$

SE $F = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ ENTÃO $F_x = \begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline d \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \\ \hline\end{array} \Rightarrow b=2, d=0$

$F_y = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline\end{array} \Rightarrow a=0, b=1$!!

NEM SEMPRE UMA EDO DA FORMA $G(x,y)dx + H(x,y)dy = 0$
"VEM DE UMA F"...

COMO É QUE A GENTE <u>TESTA</u>
UMA EDO DA FORMA $G\,dx + H\,dy$
PRA VER SE EXISTE UMA F?

SE EXISTIR ESSA F VAMOS TER:

$F_x = G$,

$F_y = H$,

$F_{xy} = F_{yx}$, PORTANTO $G_y = H_x$...

FATO (CÁLCULO 3):
SE $G_y = H_x$ ENTÃO EXISTE F
TAL QUE $G = F_x$ E $H = F_y$
(DÁ PRA CALCULAR F POR
INTEGRAL POR CAMINHOS)

SE G E H SÃO POLINOMIAIS,
DÁ PRA GENTE ENCONTRAR
F (COM $F_x = G$ E $F_y = H$)
POR CHUTAR-E-TESTAR...

MÉTODO PRA RESOLVER
UMA EDO DA FORMA
$G\,dx + H\,dy = 0$ (✯) ...

① TESTE SE $G_y = H_x$.
(SE ISTO FOR VERDADE
A GENTE DIZ QUE A
EDO É "EXATA"...)
SE FOR VERDADE:

② ENCONTRE F.

③ AS SOLUÇÕES SÃO
AS CURVAS DE NÍVEL DA F.

SE NÃO FOR VERDADE... !!
(VAMOS VER O TRUQUE DAQUI A
POUCO).

EXERCÍCIO
(NA ORDEM ERRADA !!)

SEJA $F(x,y) = (y+1)^2 - x^3 + 4$

a) ENCONTRE AS CURVAS DE NÍVEL DA F
(POR EXEMPLO: $f(x) = \sqrt{x^5 - 6}$)

b) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO PRA F
QUE PASSA PELO PONTO $(x,y) = (3,4)$.

c) ENCONTRE A EDO DA FORMA $G\,dx + H\,dy = 0$
QUE TEM ESTAS SOLUÇÕES.

d) VERIFIQUE QUE ELA É EXATA.

e) FINJA QUE VOCÊ NÃO SABE QUEM É A F
E ENCONTRE-A A PARTIR DE G E H.
CONFIRA O SEU RESULTADO COM A F
ORIGINAL.

a) $C = F(x,y) = (y+1)^2 - x^3 + 4$

$(y+1)^2 = C + x^3 - 4$

$y+1 = \pm\sqrt{x^3 - 4 + C}$

$y = -1 \pm \sqrt{x^3 - 4 + C}$

$f(x) = -1 \pm \sqrt{x^3 - 4 + C}$

$F(x,y) = y^2 + 2y + 1 - x^3 + 4$

$= y^2 + 2y - x^3 + 5$

$= \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 5 & & & -1 \\ \hline\end{array}$

$F_x dx + F_y dx = 0$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & -3 \\ \hline\end{array}\, dx + \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}\, dy = 0$