[illegible]

[illegible]

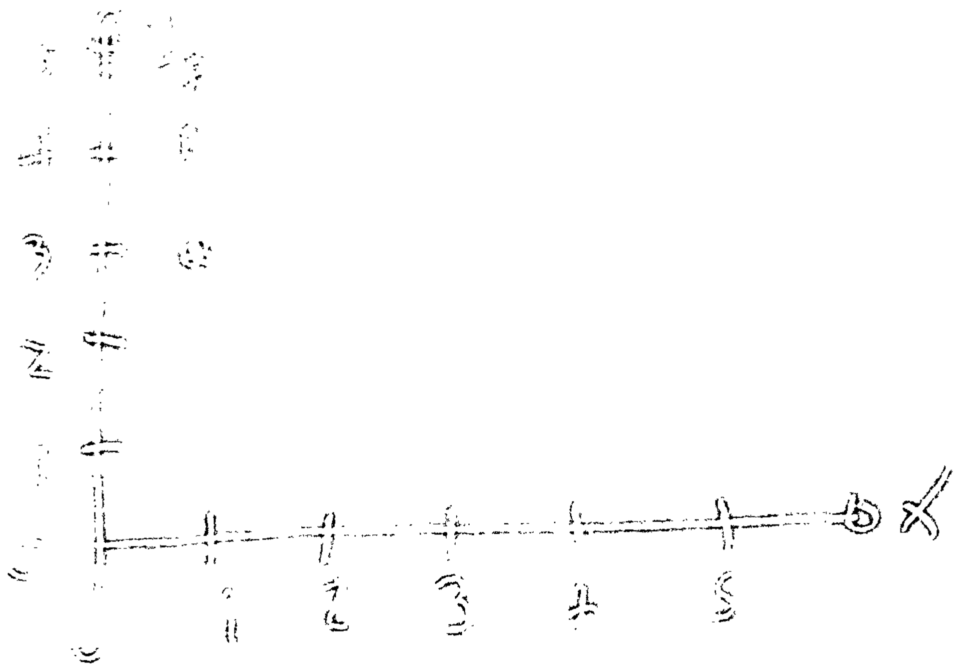
VAMOS COMEÇAR [illegible]
ALGUMAS [illegible]
[illegible] CONJUNTOS

[illegible]

VAMOS COMEÇAR COM
CONJUNTOS FINITOS
E DEPOIS [illegible]
CONJUNTOS INFINITOS
[illegible]

2 [illegible]

F = {[illegible]}



GA 22/MAR/2017

HOJE:
- INTRODUÇÃO (DUAS FOLHAS QUE EU VOU DISTRIBUIR DAQUI A POUCO)
- CONJUNTOS.

VOCÊS JÁ VIRAM ALGUNS "TIPOS" DE OBJETOS MATEMÁTICOS - POR EXEMPLO, NÚMEROS E MATRIZES.
A GENTE VAI PRECISAR VER ALGUNS OUTROS:
- "VALORES DE VERDADE"

$$\underbrace{\underbrace{1+2}_{3} < \underbrace{3+4}_{7}}_{V} \qquad \underbrace{\underbrace{1+2}_{3} = \underbrace{3+4}_{7}}_{F}$$

- CONJUNTOS
- PONTOS E VETORES (PRÓXIMA AULA)

IMPORTANTE:
O "VALOR" DE UMA EXPRESSÃO MATEMÁTICA PODE SER ALGO QUE NÃO É UM NÚMERO!!!!!

$$(1+2<3+4)=V$$

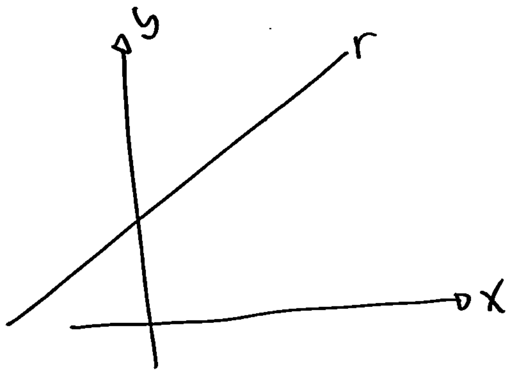
HOJE A GENTE VAI APRENDER CERTAS NOTAÇÕES PRA CONJUNTOS QUE OS LIVROS NUNCA EXPLICAM DIREITO.

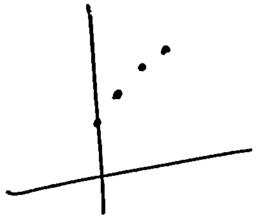
FOLHA 4: EXPLICAÇÃO (RUIM) DA NOTAÇÃO DE CONJUNTOS

FOLHA 5: EXERCÍCIOS

FOLHA 8: UM MÉTODO PRA CALCULAR CONJUNTOS

FOLHA 7: GABARITO





QUEM TERMINAR O EX. 5 DA P.6 PODE TENTAR FAZER ISSO AQUI...

REPRESENTE GRAFICAMENTE OS CONJUNTOS ABAIXO:
(OBS: VÃO SER CONJUNTOS INFINITOS, ENTÃO NÃO TEM "CALCULE"!)

$J' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x\}$

$K' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$

$L' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x/2\}$

$M' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x/2+1\}$

$N' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=0\}$ } "RETAS DEGENERADAS"

$O' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=2\}$

$P' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq y\}$ } SURPRESA!!

GA 27/mar/2017

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ALGUNS "TIPOS" DE OBJETOS MATEMÁTICOS...
- NÚMEROS
- VALORES DE VERDADE
- MATRIZES
- CONJUNTOS

HOJE NÓS VAMOS VER DOIS "TIPOS" NOVOS, QUE SÃO OS QUE TÊM MAIS CARA DE GA E QUE APARECEM MAIS NOS LIVROS DE GA:
- PONTOS
- VETORES

...SÓ QUE HOJE A GENTE SÓ VAI VER DIRETO COMO CALCULAR COM ELES — A INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DELES VAI FICAR PRA AULA QUE VEM!!!

OBS: A FOLHA 11 TEM EXERCÍCIOS PARECIDOS COM OS DE RETAS QUE VOCÊS JÁ VIRAM...

A FOLHA 10 TEM ALGUMAS IDÉIAS COMPLETAMENTE NOVAS (QUE POUCOS DE VOCÊS DEVEM TER VISTO NO ENSINO MÉDIO).

A GENTE VAI FAZER ALGUNS EXERCÍCIOS DA 10 E DEPOIS IR PRA 11.

DICAS PRA P.9:
- USEM A NOTAÇÃO COM "⌣⌣", "[REGRA ...]" E "=(RESULTADO)"!

POR EXEMPLO:

$$4 \cdot \underbrace{\left(\underbrace{(20,30) + (5,10)}_{\substack{[\text{REGRA } 3] \\ =\overrightarrow{(15,20)}}}\right)}_{\substack{[\text{REGRA } 6] \\ =\overrightarrow{(60,80)}}}$$

ALGUMAS DICAS PRO EXERCÍCIO 7 (P. 10):

QUANDO A GENTE DIZ:

V/F/JUSTIFIQUE:

( ) $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$

ESSA PERGUNTA QUER DIZER:

SERÁ QUE $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$ É VERDADE SEMPRE, ISTO É, PARA TODOS OS VALORES DE $a,b,c,d \in \mathbb{R}$?

"$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$"

SE A GENTE ENCONTRAR UM CASO NO QUAL $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ E $\overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$ DÃO RESULTADOS DIFERENTES, A GENTE SABE QUE A RESPOSTA É "F" (FALSO: NEM SEMPRE...)

P. EX., SE $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$,

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (2,3)+\overrightarrow{(4,5)} = (6,8)$

E $\overrightarrow{(c,d)}+(a,b) = \text{ERRO}$,

PORTANTO NESTE CASO TEMOS $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$.

PROVAR QUE UMA AFIRMAÇÃO DO EXERCÍCIO 7 É "F" É FÁCIL — A JUSTIFICATIVA É UM CONTRA-EXEMPLO.

PROVAR QUE UMA AFIRMAÇÃO DO EXERCÍCIO 7 É "V" É MAIS DIFÍCIL.
(DICA: IMPROVISEM POR ENQUANTO.)

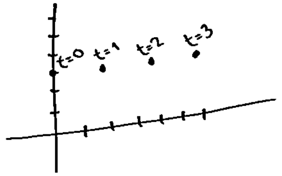
DICA PRO 11:

$r_j = \{(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_g = \{(3,-1)+t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

NO r_j:

t	$(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}$
0	(0,3)
1	(2,3)
2	(4,3)
3	(6,3)



PRA CASA:

TENTEM TERMINAR OS EXERCÍCIOS 7 E 8.

NA AULA QUE VEM VAMOS VER:
- COMO ESCREVER AS "JUSTIFICATIVAS" (DEMONSTRAÇÕES!) PRO ITEM 7,
- A INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS E VETORES
- O QUE CADA UMA DAS "REGRAS" E "PROPRIEDADES" SOBRE PONTOS E VETORES QUER DIZER GRAFICAMENTE.

GA 29/MAR/2017

Hoje:

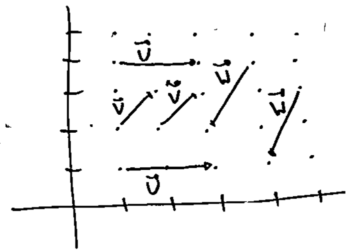
- Representação gráfica de pontos e vetores
- Um pouco sobre sistemas (lineares)
- A gente provavelmente vai deixar as técnicas pra provar propriedades pra aula que vem

Aviso: eu ainda não consegui digitar as figuras desta aula! Vou fazer no quadro!

Graficamente,

Pontos a gente sabe o que são,

Vetores vão ser deslocamentos, ou setas (desenhadas em qualquer posição)



Por exemplo:

$\vec{u} = (\overrightarrow{2,0})$ ⇐ deslocamento de 2 unidades pra direita e 0 pra cima

$\vec{v} = (\overrightarrow{1,1})$ ⇐ deslocamento de 1 unidade pra direita e uma pra cima

$\vec{w} = (\overrightarrow{-1,-2})$ ⇐ deslocamento de −1 unidades pra direita (ou seja, 1 pra esquerda) e −2 unidades pra cima (ou seja, 2 pra baixo)

Truque: pra representar graficamente algo como

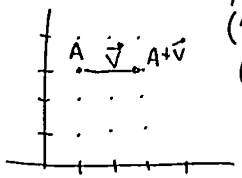
$A + \vec{v}$

ponto — vetor

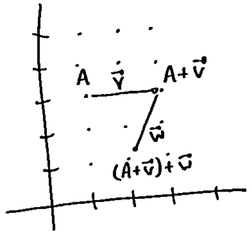
a gente vai ter uma posição preferida pro $\vec{v}$... a gente vai desenhá-lo indo de A pro $A+\vec{v}$

Exemplo: se $A = (1,3)$ então

$A + \vec{v} = (1,3) + (\overrightarrow{2,0}) = (3,3)$



E $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{A}_{(1,3)} + \underbrace{\vec{v}}_{(\overrightarrow{2,0})})}_{(3,3)} + \underbrace{\vec{w}}_{(\overrightarrow{-1,-2})}}_{(2,1)}$



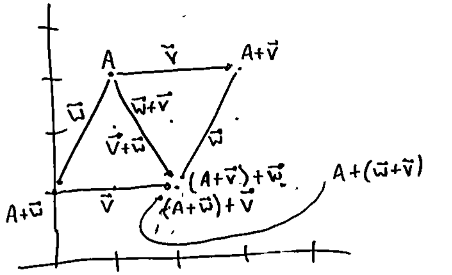
Regra do paralelogramo

$(A+\vec{v})+\vec{w} = (A+\vec{w})+\vec{v}$

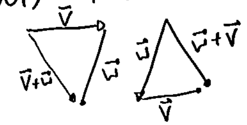
$= A + (\vec{w}+\vec{v})$ $\quad A + (\underbrace{\vec{w}}_{(\overrightarrow{-1,-2})} + \underbrace{\vec{v}}_{(\overrightarrow{2,0})})$, $A = (1,3)$, $\underbrace{\quad}_{(\overrightarrow{1,-2})}$

$= A + (\vec{v}+\vec{w})$

$A + \underbrace{(\vec{v}+\vec{w})}_{(\overrightarrow{1,-2})}$



Essa figura é um paralelogramo com uma diagonal, e ela tem dois triângulos...



Repare que isso dá uma interpretação gráfica para $(A+\vec{v})+\vec{w} = A + (\vec{v}+\vec{w})$

$= A + (\vec{w}+\vec{v})$

$= (A+\vec{w})+\vec{v}$

Como a gente interpreta $k \cdot \vec{v}$?

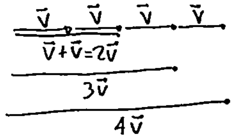
número — vetor

1º passo:

$2 \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$

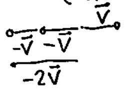
$3 \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$

$4 \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$



2º passo:

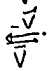
$(-1) \cdot \vec{v} = ?$ $\quad (-2) \cdot \vec{v} = ?$



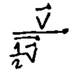
3º passo:

$0 \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{0,0})$ "deslocamento parado"

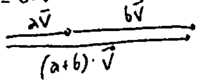
$-\vec{v} + \vec{v} = 0\vec{v}$



4º passo: $\alpha \vec{v} = ?$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$



$(a+b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$



GA 29/mar/2017

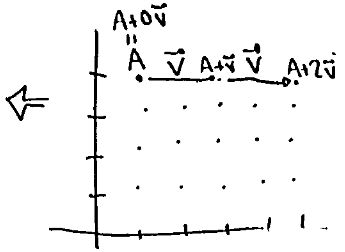
Graficamente, o que é
$\{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$?

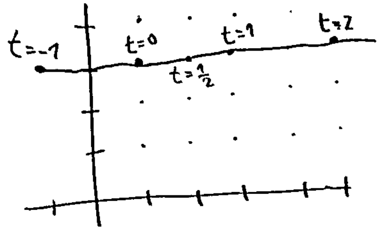
Exemplo:

$\{(1,3) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(1,3) + \overrightarrow{(2t,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(1+2t, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$





Exercício
(p.14 do semestre passado)

Faça os itens a, b, c do exercício 14 "no olhômetro": desenhe tudo, encontre t e u no olho, e depois testem se:

a) $(1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} = (0,4) + \vec{u}\overrightarrow{(2,0)}$

b) $(1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} = (0,2) + u\overrightarrow{(2,3)}$

c) $(1+3t, t) = (2u, 2+3u)$

Dica pra resolver o 14d:

<u>Lembre que a gente quer escrever soluções que fiquem muito legíveis!!!!!!</u>

A dica é: numere as coisas que você concluir e diga de onde você concluiu cada uma!

Então:

Queremos

[1] $(x,y) = (0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)}$
$= (2t, 3-t)$

[2] $(x,y) = (1,0) + u\overrightarrow{(1,3)}$
$= (1+u, 3u)$

[3] $(2t, 3-t) = (1+u, 3u)$ (por 1 e 2)

[4] $2t = 1+u$ (por 3)

[5] $3-t = 3u$ (por 3)

[6] $u = 2t-1$ (por 4)

[7] $3-t = 3(2t-1)$ (por 6)
$= 6t-3$

[8] $3+3 = 6t+t$

[9] $7t = 6$

[10] $t = \frac{6}{7}$

[11] $u = 2\frac{6}{7} - 1 = \frac{12}{7} - \frac{7}{7} = \frac{5}{7}$

[12] $x =$

GA 3/abril/2017

Vamos deixar os truques pra fazer demonstrações (e resoluções de sistemas) passo a passo pra próxima aula...

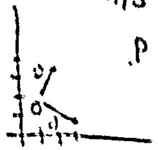
Hoje: Coordenadas.

O exercício da p.16 vai ajudar vocês a visualizarem o que quer dizer $O + a\vec{u} + b\vec{v}$

"origem do sistema de coordenadas"

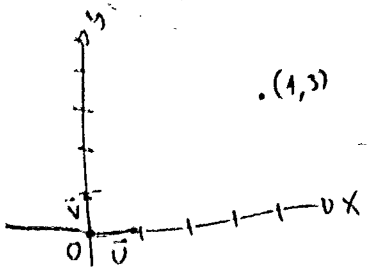
"vetores unitários (neste sistema de coordenadas)"

Depois a gente vai ver como resolver no olhômetro problemas tipo este:



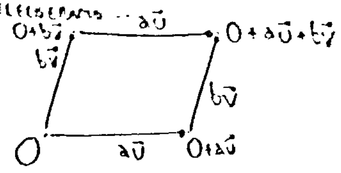
$P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$ $\quad a = ?$ $\quad b = ?$

A p.17 é sobre encontrar o a e o b algebricamente. Os truques pra encontrar a e b no olho eu vou mostrar no quadro.

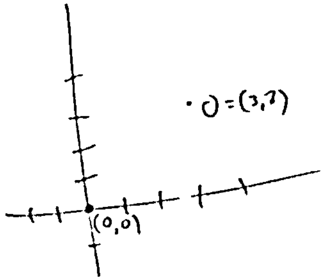


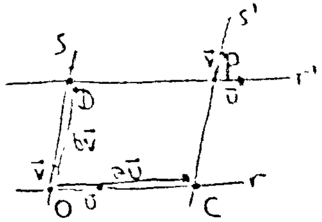
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$

Lembrem da regra do paralelogramo



$O = (0,0)$



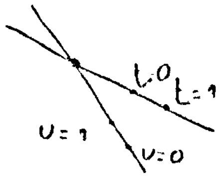


$r = \{O + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$

$s = \{O + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$

$r' \parallel r$

$s' \parallel s$



Exercícios:

a) Sejam:

$O = (1,1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$

$P = O + a\vec{u} + b\vec{v} = (1,5)$.

Represente graficamente

$r = \{O + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

$s = \{O + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$,

$r' = \{P + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

$s' = \{P + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$,

$C \in r \cap s'$

$D \in r' \cap s$

E encontre a e b no olho. Depois confira que os seus a e b estão certos, isto é, que $P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.

Dica:

$O + a\vec{u} = C$

$O + b\vec{v} = D$

b) Faça a mesma coisa, mas mudando o P para $P = (4,3)$.

Obs: Dica pra quem estiver com muita dúvida no exercício: comece calculando e representando graficamente

$\{(1,1) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \{0,1,2,3\}\}$,

$\{a \in \{0,1,2,3\};\ (1,1) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

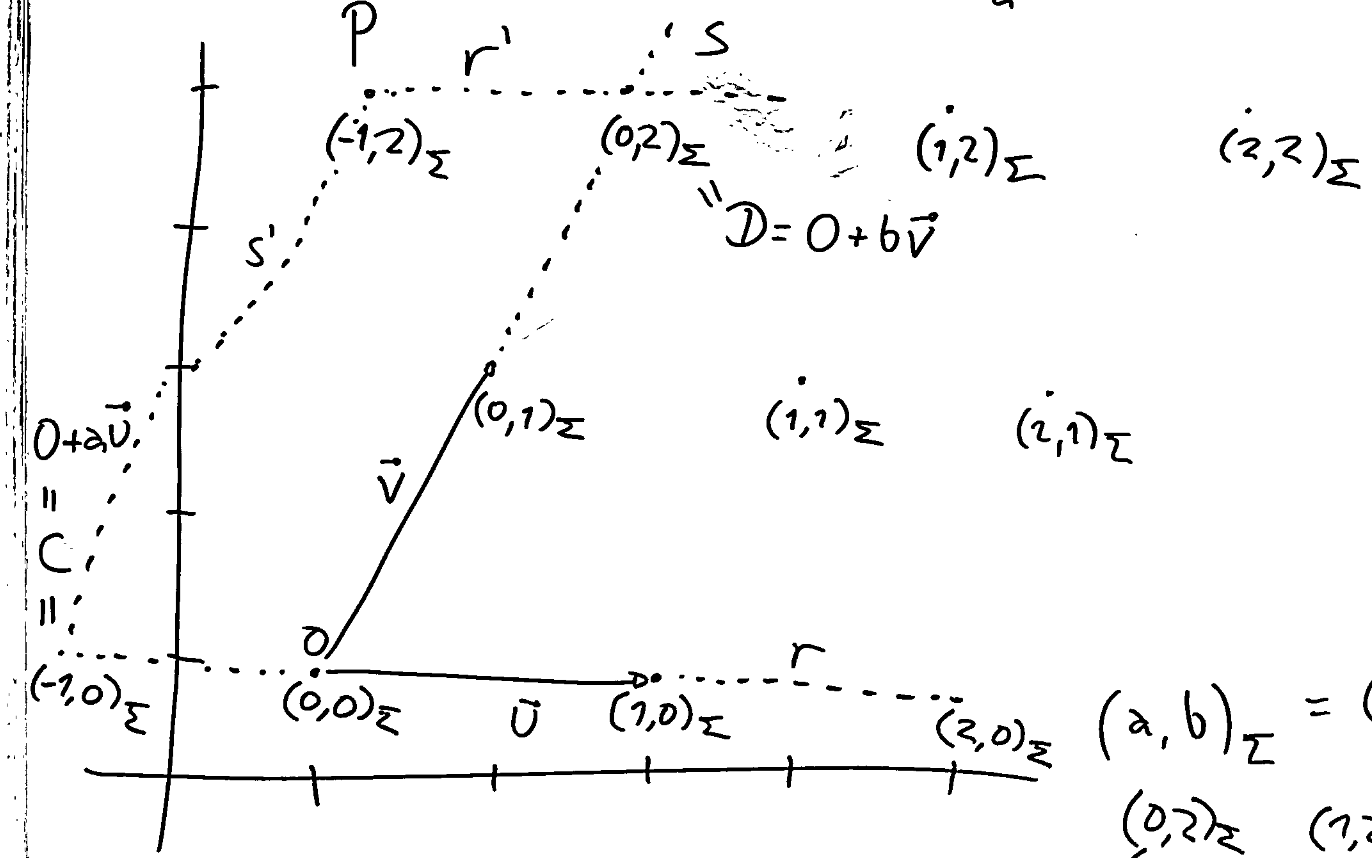
$\{a \in \mathbb{R};\ (1,1) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

$\{a \in \{0,1,2,3\};\ (1,5) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

$\{a \in \mathbb{R};\ (1,5) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

$\boxed{\text{GA 3/APRIL/2017}}$

$$P = (-1,2)_\Sigma = O + \underbrace{(-1)}_{a}\vec{u} + \underbrace{2}_{b}\vec{v}$$



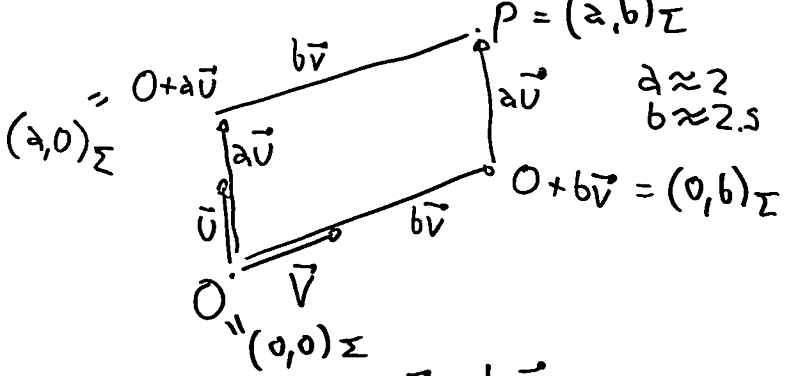
$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

$(0,2)_\Sigma$	$(1,2)_\Sigma$	$(2,2)_\Sigma$
$(0,1)_\Sigma$	$(1,1)_\Sigma$	$(2,1)_\Sigma$
$(0,0)_\Sigma$	$(1,0)_\Sigma$	$(2,0)_\Sigma$

$\boxed{\text{GA 5/ABRIL/2017}}$

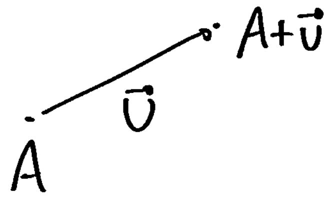
AVISO: EU ACABEI DE FAZER AS FOLHAS 17 E 18 - ELAS PODEM TER ERROS DE DIGITAÇÃO!

ELAS SÃO PRA TODO MUNDO APRENDER A RESOLVER MUITO BEM PROBLEMAS COMO ESSE AQUI:



$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

LEMBREM QUE A GENTE REPRESENTA GRAFICAMENTE $A+\vec{u}$ COMO:



AVISO

TEM UM ERRO DE DIGITAÇÃO NA 3b! AS RETAS SÃO

$r = \dots$ $\quad s = \dots$

$r' = \dots$ $\quad s' = \dots$

$r'' = \dots$ $\quad s'' = \dots$

$\boxed{\text{TERMINEM EM CASA!}}$

AULA QUE VEM:

VAMOS USAR O QUE VIMOS HOJE PRA ENTENDER

1) COMO USAR VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS AO MESMO TEMPO, E
2) PROJEÇÕES ORTOGONAIS.

GA 12/ABRIL/2014

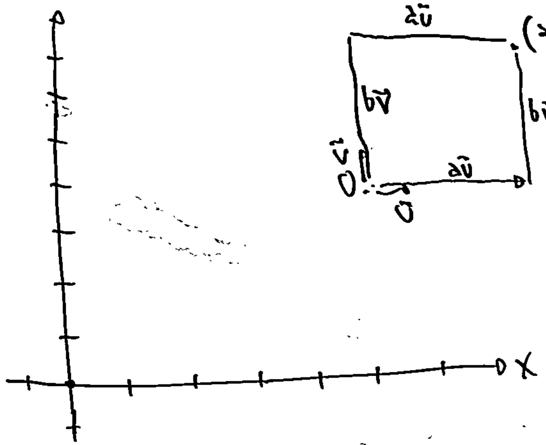
NAS ÚLTIMAS AULAS A GENTE VIU, COM DETALHES, COMO VISUALIZAR $(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$ E COMO RESOLVER NO OLHO PROBLEMAS TIPO $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$...

A GENTE VIU POR ALTO COMO RESOLVER ALGEBRICAMENTE PROBLEMAS TIPO

$(a,b)_\Sigma = (x,y)$

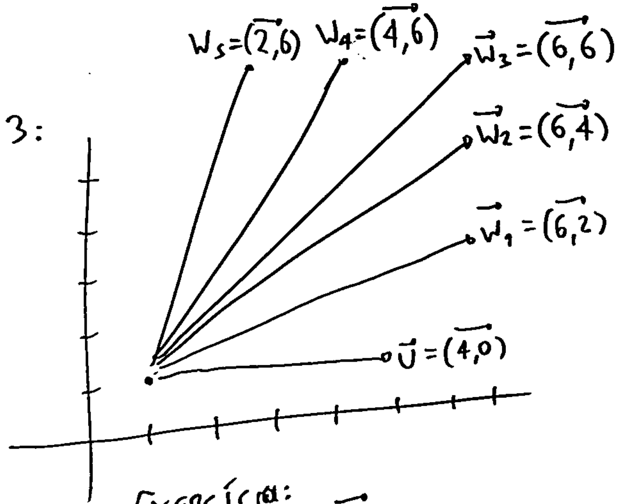
DESCONHECIDOS. CONHECIDOS

VAMOS REVER OS PROBLEMAS TIPO $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$, ← COORDENADAS E O PRÓXIMO PASSO É A GENTE APRENDER A DECOMPOR UM VETOR $\vec{w}$ EM $a\vec{u} + \vec{v}$ COM $\vec{v} \perp \vec{u}$ (PROJEÇÕES ORTOGONAIS – $a\vec{u} = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$)



$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$

P.23:

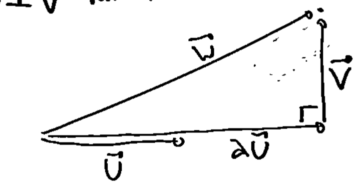


EXERCÍCIO: ENCONTRE $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_1$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_2$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_3$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_4$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_5$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_6$

PROJEÇÕES ORTOGONAIS

DEF (VISUAL): $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = a\vec{u}$,

ONDE a É O VALOR QUE FAZ: $\vec{u} \perp \vec{v}$ NA FIGURA ABAIXO:



$\vec{u} \perp \vec{v}$ É O MESMO QUE $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,

$a\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

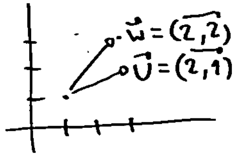
$\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w} - a\vec{u}$

⇐ DICAS:

1) CHUTE VALORES DE a, FAÇA A FIGURA, CALCULE $\vec{v}$, E TESTE SE $\vec{u} \perp \vec{v}$.

PRÓXIMO ASSUNTO:

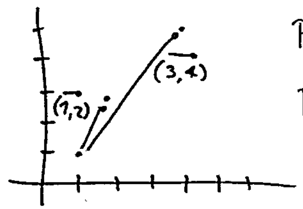
COMO CALCULAR $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ NOS CASOS EM QUE O OLHÔMETRO NÃO RESOLVE? P.EX.,



GA /ABRIL/2017

Hoje:
Projeções!
- Como calculá-las nos casos em que o olhômetro não dá conta
- Aplicações (folha sobre "construções")

Mas antes:
Notações para retas!



$Pr_{\overrightarrow{(3,4)}}\overrightarrow{(1,2)} = \_\,\overrightarrow{(3,4)}$?

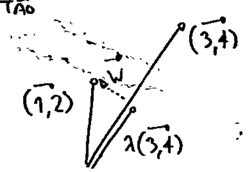
$Pr_{\overrightarrow{(1,2)}}\overrightarrow{(3,4)} = \_\,\overrightarrow{(1,2)}$?

Folha 24:
Exercícios 18a, 18b, 18c, 18d, 18i, 18e (opcional; correção: não é "Retas da P.9", é "Retas da P.12").

OBS. IMPORTANTE: No exercício 18i da folha 24 você vai desenhar 6 retas.

Se $Pr_{\overrightarrow{(3,4)}}\overrightarrow{(1,2)} = \lambda\overrightarrow{(3,4)}$,

então



$\lambda\overrightarrow{(3,4)} + \vec{w} = \overrightarrow{(1,2)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(1,2)} - \lambda\overrightarrow{(3,4)}$

$= \overrightarrow{(1-3\lambda, 2-4\lambda)}$

$\vec{w} \perp \overrightarrow{(3,4)} \Rightarrow \overrightarrow{(1-3\lambda, 2-4\lambda)}\cdot\overrightarrow{(3,4)} = 0$

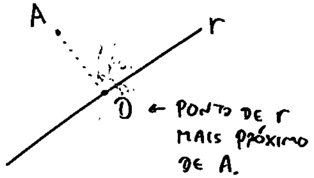
$\Rightarrow 3(1-3\lambda) + 4(2-4\lambda) = 0$

$\Rightarrow 3 - 9\lambda + 8 - 16\lambda = 0$

$\Rightarrow 11 = 25\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{11}{25}$

P.25 ("Construções")



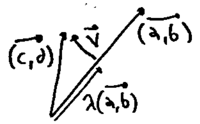
Exercícios:

19a (dá os valores de todos os pontos)

19b ("você escolhe B e C")

Tem um erro de digitação na construção (b)! Era pra ser "$D = B + Pr_{\vec{u}}\vec{v}$", mas nas folhas de vocês está "$D = Pr_{\vec{u}}\vec{v}$"!

$Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(c,d)} = \lambda\overrightarrow{(a,b)}$



$\lambda\overrightarrow{(a,b)} + \vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)} - \lambda\overrightarrow{(a,b)}$

$= \overrightarrow{(c-\lambda a, d-\lambda b)}$

$\vec{v} \perp \overrightarrow{(a,b)} \Rightarrow \vec{v}\cdot\overrightarrow{(a,b)} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{(c-\lambda a, d-\lambda b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)} = 0$

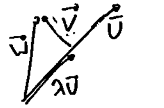
$\Rightarrow a(c-\lambda a) + b(d-\lambda b) = 0$

$\Rightarrow ac + bd - \lambda a^2 - \lambda b^2 = 0$

$ac + bd = \lambda(a^2+b^2)$

$\frac{ac+bd}{a^2+b^2} = \lambda$

$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \lambda\vec{u}$



$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

$\vec{v} = \vec{w} - \lambda\vec{u}$

$\vec{v}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = 0$

$\Rightarrow (\vec{w} - \lambda\vec{u})\cdot\vec{u} = 0$

$\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} - \lambda\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$

$\underbrace{\vec{w}\cdot\vec{u}}_{\text{num}} = \lambda\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{\text{num}}$

$\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

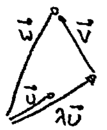
GA 19/ABRIL/2017

NA ÚLTIMA AULA NÓS VIMOS VÁRIAS CONSTRUÇÕES DIFERENTES QUE DAVAM O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE UM PONTO A DADO...

E VIMOS QUE DÁ PRA CALCULAR A PROJEÇÃO ASSIM:

$$Pr_{\vec u}\vec w = \frac{\vec u\cdot\vec w}{\vec u\cdot\vec u}\vec u$$

VAMOS COMEÇAR REVENDO A DEDUÇÃO DISSO.



$\vec u$ E $\vec w$ SÃO DADOS. SABEMOS QUE:
$\lambda\vec u+\vec v=\vec w$
E $\vec u\perp\vec v$.

ENTÃO:

$\vec v = \vec w-\lambda\vec u$

$\vec u\cdot\vec v=0$

$\vec u\cdot(\vec w-\lambda\vec u)=0$

$\vec u\cdot\vec w-\lambda\vec u\cdot\vec u=0$

$\lambda=\frac{\vec u\cdot\vec w}{\vec u\cdot\vec u}$

$Pr_{\vec u}\vec w=\lambda\vec u=\frac{\vec u\cdot\vec w}{\vec u\cdot\vec u}\vec u$

PRIMEIRA COISA MUITO IMPORTANTE:

ESSA DEDUÇÃO QUE NÓS FIZEMOS DEVE FUNCIONAR PARA TODOS OS VETORES $\vec u$ E $\vec w$ (EXCETO QUANDO $\vec u=\overrightarrow{(0,0)}$) E O $Pr_{\vec u}\vec w$ OBTIDO DESTA FORMA DEVE DAR O MESMO QUE O OBTIDO PELO OLHÔMETRO...

ALÉM DISSO TEMOS UM OUTRO MODO DE CHECAR SE REALMENTE OBTIVEMOS O $Pr_{\vec u}\vec w$ CERTO — ELE DEVE OBEDECER $\vec u\perp\vec v$, I.E., $\vec u\perp\vec w-\lambda\vec u$.

EXERCÍCIOS:

1) SEJA $\vec u=\overrightarrow{(2,1)}$ E $\vec w_1=\overrightarrow{(4,2)}$, $\vec w_2=\overrightarrow{(1,3)}$, $\vec w_3=\overrightarrow{(1,0)}$.
EM CADA UM DESSES CASOS CALCULE $Pr_{\vec u}\vec w_i$ E VERIFIQUE SE O SEU RESULTADO ESTÁ CERTO.

2) PORQUE NÃO PODEMOS FAZER ESTES CANCELAMENTOS?

$$\frac{\cancel{\vec u}\cdot\vec w}{\cancel{\vec u}\cdot\vec u}\vec u=\frac{\vec w}{\cancel{\vec u}}\cancel{\vec u}=\vec w\,?$$

DISCUTA COM OS SEUS COLEGAS E PROCURE CASOS EM QUE $\frac{\vec u\cdot\vec w}{\vec u\cdot\vec u}\vec u$, $\frac{\vec w}{\vec u}\vec u$ E $\vec w$ DÃO RESULTADOS DIFERENTES.

OBS: SE $\vec u=\overrightarrow{(1,2)}$ E $\vec w=\overrightarrow{(3,4)}$,

$\frac{\vec u\cdot\vec w}{\vec u\cdot\vec u}\vec u=\overrightarrow{(\frac{11}{5},\frac{22}{5})}$ $\vec u\cdot\vec w=11$

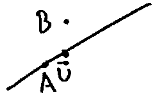
$\vec u\cdot\vec u=5$

$\frac{\vec w}{\vec u}\vec u=$

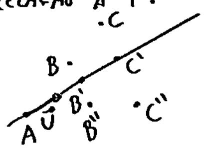
$\vec w=\overrightarrow{(3,4)}$

UMA APLICAÇÃO DO "Pr" QUE APARECE BASTANTE NAS LISTAS DA ANA ISABEL É ESSA AQUI:

SEJAM r: $A+t\vec u$, E B E C DOIS PONTOS DE $\mathbb{R}^2$:



SEJAM B' E C' OS PONTOS DE r MAIS PRÓXIMOS DE B E C, RESPECTIVAMENTE, E B'' E C'' OS PONTOS SIMÉTRICOS A B E C COM RELAÇÃO A r:



COMO A GENTE CALCULA B'' E C''?

EXERCÍCIOS:

3) SEJAM r: y=3,
B=(2,2),
C=(4,1).
ENCONTRE B', C', B'', C'' NO OLHÔMETRO.

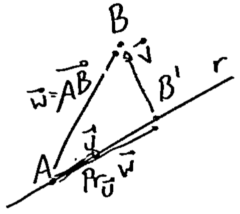
4) IDEM, MAS COM r: y=3−x.

5) IDEM, MAS COM r: $y=\frac{x}{2}-1$.

(OBS: EU ME DISTRAÍ QUANDO ESCOLHI OS PONTOS PRO 5... O PONTO (4,1) É FÁCIL DEMAIS, ENTÃO ACRESCENTE D=(2,1) E E=(4,−2) E ENCONTRE D', E', D'', E'').

O OBJETIVO DO EXERCÍCIO 5 É VOCÊS TENTAREM ENCONTRAR VOCÊS MESMOS AS FÓRMULAS PRA CALCULAR P' E P'' PARA QUALQUER PONTO P... LEMBRE QUE NAS FOLHAS 17 E 18 A GENTE VIU EXERCÍCIOS DE DESENHAR COISAS SEM COORDENADAS, E NAS FOLHAS 1 E 2 EU DEI DICAS SOBRE COMO APRENDER A DEFINIR OBJETOS...

VOCÊS PODEM COMEÇAR COM ALGO COMO:



SABEMOS: A, $\vec u$, B

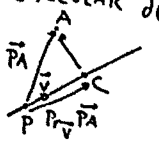
SEJAM:
r: $A+t\vec u$
$\vec w=\overrightarrow{AB}=B-A$
$B'=A+Pr_{\vec u}\vec w$
$\vec v=\overrightarrow{B'B}$

GA 24/ABRIL/2017

NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VER UM MONTE DE COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES...

MAS NESTA NÓS VAMOS VER MAIS UMA FÓRMULA, E UMA "DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DELA":

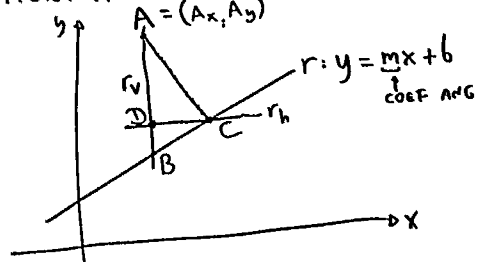
REPARE QUE SE $A \in \mathbb{R}^2$ E $r = \{P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ENTÃO NÓS PODEMOS USAR O "Pr" PRA CALCULAR $d(A,r)$...



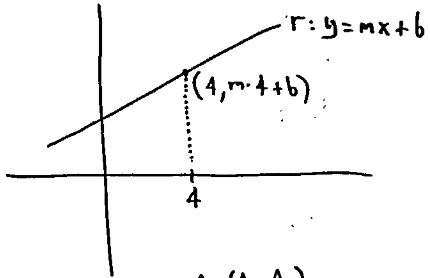
$d(A,r) =$
$d(A,C) =$
$\|\vec{CA}\| =$
$\|Pr_{\vec{v}}\vec{PA} - \vec{PA}\|$

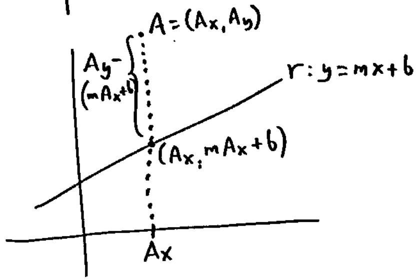
AVISO:
QUASE TODO MUNDO TENTA DECORAR A FÓRMULA DE $d(A,r)$ E QUASE TODO APLICA ELA ERRADO.

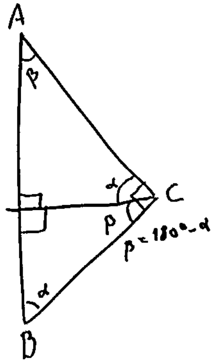
DIAGRAMA:



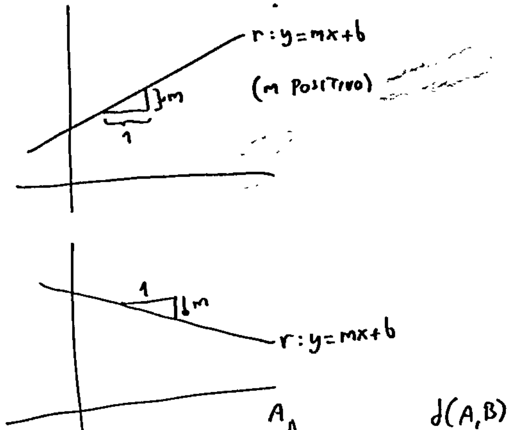
TRUQUE: $d(A,B)$ É FÁCIL DE CALCULAR, E $d(A,C)$ É $\dfrac{d(A,B)}{\sqrt{1+m^2}}$

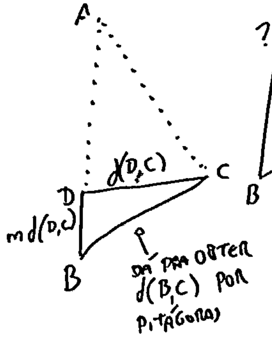


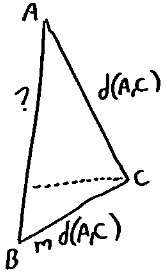




MAIS UM TRUQUE: COEFICIENTE ANGULAR!





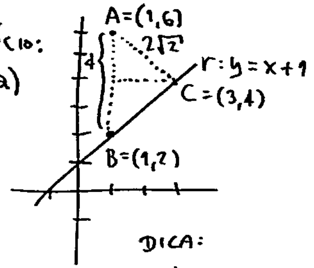


$$d(A,B) = \sqrt{d(A,C)^2 + (m\,d(A,C))^2}$$
$$= \sqrt{d(A,C)^2 + m^2\,d(A,C)^2}$$
$$= \sqrt{(1+m^2)\,d(A,C)^2}$$
$$= \sqrt{1+m^2}\;d(A,C)$$

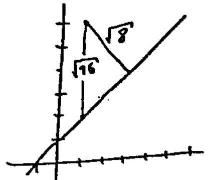
$$d(A,C) = d(A,B)/\sqrt{1+m^2}$$

COMO LEMBRAR DESSA FÓRMULA?
TRUQUE: LEMBRE DE CASOS FÁCEIS — OS CASOS MAIS FÁCEIS SÃO OS COM $m=1$, $m=2$, $m=0$.

EXERCÍCIO:
a)



DICA:



USE RAÍZES QUADRADAS EM TODO LUGAR...

$\sqrt{8} = \sqrt{16}/\sqrt{2}$
$= \sqrt{16}/\sqrt{1+1^2}$ (COEF ANG)

OBS: ALGUNS EXERCÍCIOS SAÍRAM COM ERROS DE DIGITAÇÃO... CORREÇÕES:
c) $A = (3,2)$
f) $r: y = 2x$
g) $r: y = -2x$
h) $r: y = 3$

GA 24/ABRIL/2017

NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VER UM MONTE DE COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES...

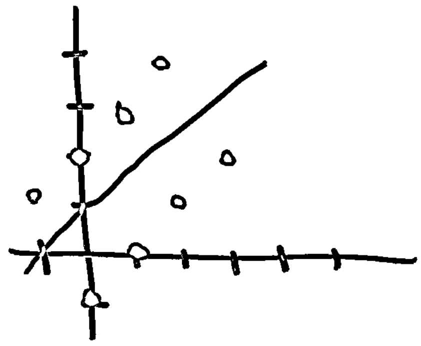
SEJA $r: y = x + 1$.

COMO A GENTE ENCONTRA TODOS OS PONTOS QUE ESTÃO A UMA DETERMINADA DISTÂNCIA DE r?

POR EXEMPLO, SEJA

$$S = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,r) = \sqrt{2}\}.$$

ESTES SÃO ALGUNS PONTOS DE S:



ELES ESTÃO EM DUAS RETAS PARALELAS A r.

EXERCÍCIO:
ENCONTRE AS EQUAÇÕES DESSAS DUAS RETAS NO OLHO.

(VAMOS VER UMA SOLUÇÃO "ALGÉBRICA" PRA ISSO NA AULA QUE VEM.)

$\boxed{\text{GA 26/ABRIL/2017}}$

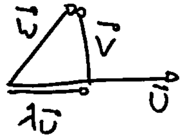
HOJE:

COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES!

A GENTE VIU, HÁ MUITAS AULAS ATRÁS, PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE E "PROPRIEDADES" DAS OPERAÇÕES SOBRE PONTOS E VETORES QUE A GENTE QUERIA VERIFICAR SE VALIAM SEMPRE OU NÃO...

HOJE VAMOS VER MAIS ALGUNS TRUQUES PRA DEMONSTRAÇÕES.

LEMBRE QUE:



SE $w = \lambda\vec{u} + \vec{v}$
E $\vec{u} \perp \vec{v}$

ENTÃO $\lambda = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ...

$\boxed{\text{"SE"}}$

VOCÊ SABE DEMONSTRAR ISSO VOCÊ MESMO?

① PROBLEMAS:

V/F/JUSTIFIQUE:

a) ( ) $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

b) ( ) $Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

c) ( ) $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = Pr_{\vec{w}}\vec{u}$

d) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

e) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = |k|\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

f) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

g) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k(Pr_{\vec{u}}\vec{w})$

h) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = |k|(Pr_{\vec{u}}\vec{w})$

i) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

j) ( ) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

k) ( ) $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$

l) ( ) $\|k\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

m) ( ) SE $a\vec{u} = b\vec{u}$ ENTÃO $a = b$

② DEMONSTRE (ESTES SÃO MAIS DIFÍCEIS, MAS BEM IMPORTANTES):

SE $\vec{u} \perp \vec{v}$ E $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO NÃO-NULOS ENTÃO:

a) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{v}) = \vec{0}$

b) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{u}) = k\vec{u}$

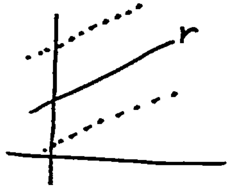
c) $Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) + Pr_{\vec{v}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}+b\vec{v}$

GA 3/MAIO/2017

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO CALCULAR $d(P,r)$...
MAS DIGAMOS QUE TEMOS UMA RETA r E QUEREMOS ENCONTRAR TODOS OS PONTOS QUE ESTÃO À DISTÂNCIA 5 DELA... OU SEJA,

$$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,r)=5\}.$$

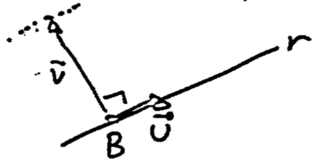
COMO PODEMOS FAZER ISSO?
REPARE QUE S É A UNIÃO DE DUAS RETAS:

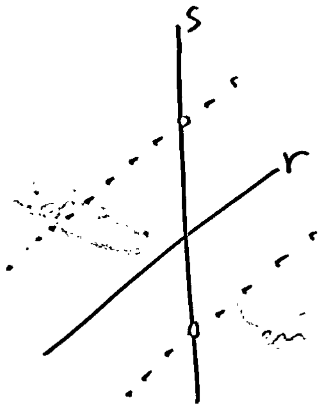


TEMOS DOIS JEITOS FÁCEIS:

1) $S=\left\{A\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{|mA_x+b-A_y|}{\sqrt{m^2+1}}=5\right\}$
$=\left\{A\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{mA_x+b-A_y}{\sqrt{m^2+1}}=5\right\}$
$\cup\left\{A\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{mA_x+b-A_y}{\sqrt{m^2+1}}=-5\right\}$

2) SE $r: B+t\vec{u}$ E $\vec{v}\perp\vec{u}$, $\|\vec{v}\|=5$, ENTÃO...





OBS: $r: y=mx+b$

AVISO:
SEMANA QUE VEM EU NÃO VOU DAR AULA!
(VOU ESTAR NUM CONGRESSO)

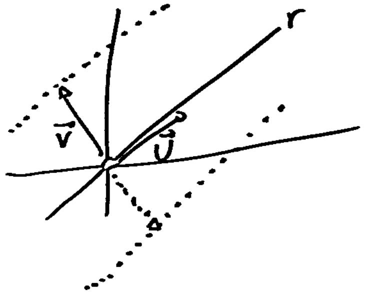
$$25c)\quad \overbrace{\Big\|\overbrace{\overset{-2}{K}\cdot(\overset{3}{a},\overset{0}{b})}^{(-6,0)}\Big\|}^{6} = \ldots$$
$= \ldots$
$= \ldots$
$= \ldots$
$=$
$$= \underbrace{\underbrace{K}_{-2}\cdot\underbrace{\|(3,0)\|}_{3}}_{-6}$$

EXERCÍCIOS (QUE NÃO ESTÃO NAS FOLHAS):

SEJAM $r:(0,0)+t\overrightarrow{(4,3)}$,
$B=(0,0)$,
$\vec{u}=\overrightarrow{(4,3)}$.

a) ENCONTRE UM VETOR NÃO-NULO ORTOGONAL A $\vec{u}$.
b) UNITARIZE O VETOR QUE VOCÊ ENCONTROU.
c) ENCONTRE UM VETOR $\vec{v}$ ORTOGONAL A $\vec{u}$ TAL QUE $\|\vec{v}\|=5$.
d) DÊ PARAMETRIZAÇÕES PARA AS DUAS RETAS DE
$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,r)=5\}$.

IDÉIA:

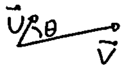


GA /maio/2017

A PAPELARIA TAVA FECHADA - HOJE NÃO TEM FOLHAS IMPRESSAS!

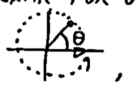
HOJE: ÂNGULOS!!!

MOTIVAÇÃO: $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\underbrace{\cos\theta}_{???}$



VAMOS COMEÇAR POR UM CASO

① SIMPLES -



② ÂNGULOS SIMPLES,

③ E UMA APLICAÇÃO DISSO: DESENHAR CÍRCULOS (QUE A GENTE VAI VER DIREITO DAQUI A POUCO) E ELIPSES (QUE A GENTE VAI VER DIREITO DEPOIS DA P1).

GRAUS E RADIANOS

$0° = 0$ (RADS)

$90° = \frac{\pi}{2}$

$180° = \pi$

ETC...

$180° = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$

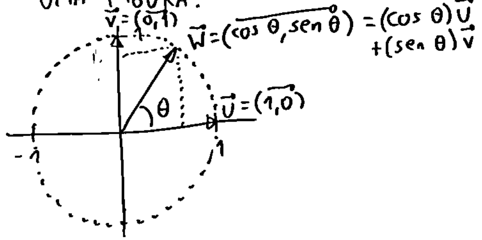
$234° = 234 \cdot \frac{\pi}{180}$

OS ÂNGULOS MAIS FÁCEIS SÃO 0°, 90°, 180°, ETC.

DEPOIS: 45°, 135°, ETC

DEPOIS: 30°, 60°, 120°, ETC

UMA FIGURA:



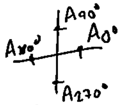
EXERCÍCIOS:

ⓐ REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$A_\theta = (0,0) + \cos\theta\,(\overrightarrow{1,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,1})$

PARA $\theta = 0°, 90°, 180°, 270°$;

IDEM PARA:



ⓑ $B_\theta = (2,2) + \cos\theta\,(\overrightarrow{1,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,1})$

ⓒ $C_\theta = (2,2) + \cos\theta\,(\overrightarrow{2,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,2})$

ⓓ $D_\theta = (0,2) + \cos\theta\,(\overrightarrow{4,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,2})$

UM TRUQUE PRA RODAR VETORES:

SE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO VETORES DE MESMO COMPRIMENTO E ORTOGONAIS ENTÃO

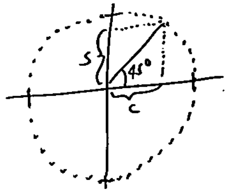
$\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

É O "VETOR $\vec{u}$ RODADO θ"

P.EX.: 45°...

COMO LEMBRAR O SEN E COS DOS ÂNGULOS "MENOS FÁCEIS" COMO 45°, 30°, 60°?

EU NUNCA LEMBRO... O TRUQUE PRA DESCOBRIR COS θ E SEN θ NESTES CASOS É FAZER DESENHOS E RESOLVER UMA EQUAÇÃO SIMPLES... P.EX:



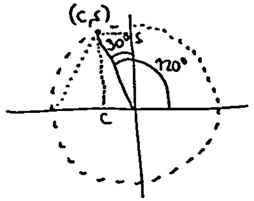
NESTE CASO TEMOS $c = s$,

$c > 0,\ s > 0,\ c^2 + s^2 = 1$

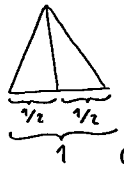
$\Rightarrow c^2 + c^2 = 1$

$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow c^2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



AQUI APARECE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO:



$c = -\frac{1}{2}$

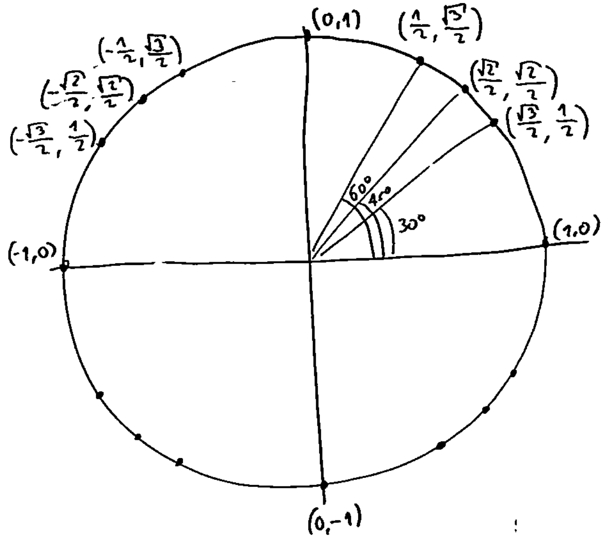
$s > 0$

$c^2 + s^2 = 1$

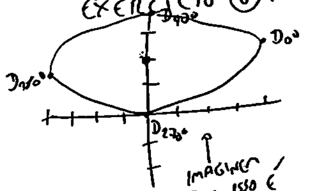
QUANTO VALE S?

DÁ PRA FAZER A MESMA COISA PARA:

θ	cos θ	sen θ
0°	1	0
30°	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
90°	0	1
120°		
135°		
150°		
180°		
210°		
225°		
240°		
270°		
300°		
315°		
330°		
360°		



EXERCÍCIO ⓓ:



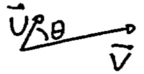
IMAGINEM QUE ISSO É UMA ELIPSE TODA CERTINHA

GA /maio/2017

A papelaria tava fechada – hoje não tem folhas impressas!

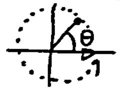
Hoje: Ângulos!!!

Motivasão: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\underbrace{\cos\theta}_{???}$



Vamos começar por um caso

① simples –



② Ângulos simples,

③ e uma aplicasão disso: desenhar círculos (que a gente vai ver direito daqui a pouco) e elipses (que a gente vai ver direito depois da P1).

Como obter um vetor que faça um ângulo θ com $\vec{u}$?

(Obs: os livros não costumam explicar esse truque)

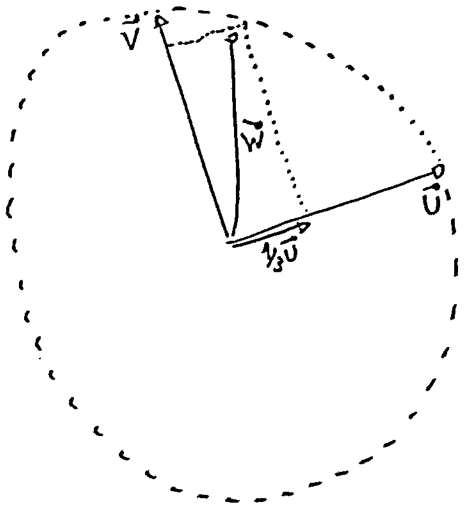
Seja $\vec{v}$ um vetor de mesmo comprimento que $\vec{u}$ e ortogonal a $\vec{u}$.

Queremos

$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

e digamos que a gente sabe $\cos\theta$ – por exemplo, $\cos\theta = \frac{1}{3}$...

Então:



Exercício:

Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(5,2)}$

e $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,5)}$.

Temos $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Desenhe vetores "$\vec{w}$"s que façam um ângulo θ com $\vec{u}$ e tais que $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$ e:

a) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ (Dica: desenhe $\frac{4}{5}\vec{u}$ e o círculo)

b) $\cos\theta = \frac{3}{5}$

c) $\cos\theta = \frac{2}{5}$

d) $\cos\theta = \frac{1}{5}$

e) $\cos\theta = 0$

f) $\cos\theta = -\frac{1}{5}$

E se $\vec{v} = \overrightarrow{(2,-5)}$?

g) $\cos\theta = \frac{4}{5}$

h) $\cos\theta = \frac{3}{5}$

i) $\cos\theta = \frac{2}{5}$

j) $\cos\theta = \frac{1}{5}$

k) $\cos\theta = 0$

l) $\cos\theta = -\frac{1}{5}$

Exercícios:

m) Demonstre que se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}$.

n) Demonstre que se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}$

Na próxima aula uma das coisas que a gente vai ver é como comparar ângulos.

Dêem uma olhada na fórmula

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

(em livros, internet, etc) pra se prepararem!

GA 17/maio/2017

Hoje: Ângulos (cont).

1) arccos
2) tan
3) arctan
4) comparar ângulos
5) transferir ângulos

① Se $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

então $45° = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$...

Mas isso não vale sempre — repare:

$\cos 0° = 1$

$\cos 360° = 1$

$0° = \arccos 1$

$360° = \arccos 1$

$\arccos 1 = ???$

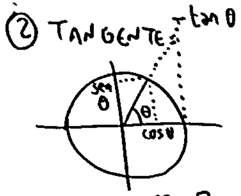
Queremos que o arccos seja uma função, então...

Truque:

$\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x$

Isto vale se e só se $0° \leq \theta \leq 180°$.

② Tangente

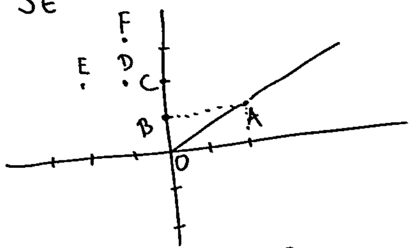


$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ (para todo θ)

③ $\boxed{\tan\theta = t \iff \theta = \arctan t}$

Isto vale se e só se $-90° < \theta < 90°$.

④ Se



Você deve ser capaz de calcular

b) $\cos(\text{ang } A\hat{O}B)$,

c) $\cos(\text{ang } A\hat{O}C)$,

d) $\cos(\text{ang } A\hat{O}D)$,

e) $\cos(\text{ang } A\hat{O}E)$,

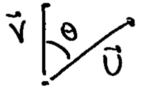
f) $\cos(\text{ang } A\hat{O}F)$

g) Você consegue pôr estes ângulos em ordem, do menor (mais agudo) para o maior (mais obtuso)?

Dica: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos\theta$

$= \cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v}))$



Exemplo:

$\cos(\text{ang } A\hat{O}B) = ?$

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{(2,1)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{(0,1)}$

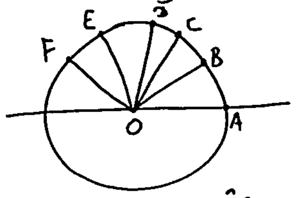
$\text{ang}(A\hat{O}B) = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$

$\cos(\text{ang}(A\hat{O}B)) = \cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v}))$

$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

$= \ldots$

Dica pra (g):



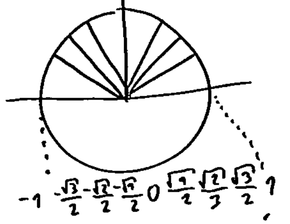
$A\hat{O}B$: mais agudo

$\cos A\hat{O}B$: mais próximo de 1

$A\hat{O}F$: menos agudo/mais obtuso

$\cos A\hat{O}F$: mais próximo de −1

Na aula passada nós vimos que ângulos como $0°$, $30°, 45°, 60°$, $90°$, $120, 135°, 150°$, etc são mais "fáceis" — a gente sabe o cos e o sen deles...



... a gente também gosta de

$\cos\theta = \frac{4}{5}$,	$\text{sen}\,\theta =$
$\cos\theta = \frac{3}{5}$,	$\text{sen}\,\theta =$
$\cos\theta = -\frac{3}{5}$,	$\text{sen}\,\theta =$
$\cos\theta = -\frac{4}{5}$	$\text{sen}\,\theta =$

Como "transferir" ângulos?

Vamos começar com alguns problemas mais concretos.

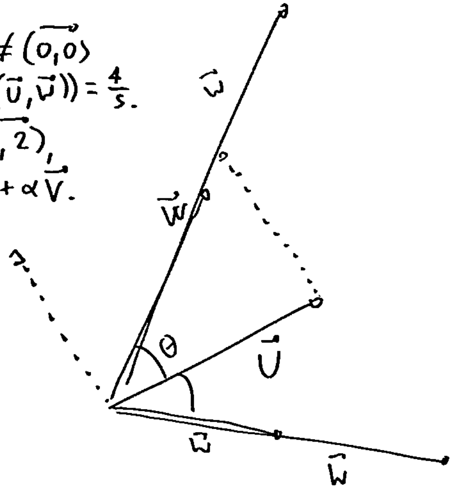
a) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$.

Encontre algum $\vec{w} \neq \overrightarrow{(0,0)}$ tal que $\cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{w})) = \frac{4}{5}$.

Dica: sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$,

$\vec{w} = \vec{u} + \alpha\vec{v}$.

Encontre α.



$$\frac{4}{5} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\|}$$

Dica pra casa: revejam a folha 27.

Dicas pra agora:

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v}) = ?$

$\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\| = ?$

$\boxed{\text{GA } 22/\text{maio}/2017}$

No final da aula passada nós vimos um problema que era assim:

Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$.
Encontre algum $\vec{w} \neq \overrightarrow{(0,0)}$ tal que $\cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{w}) = \frac{4}{3}$.
Dica: sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$ e $\vec{w} = \vec{u} + \alpha\vec{v}$.

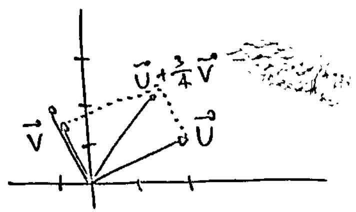
Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{5} &= \cos \operatorname{ang}(\vec{u},\vec{w}) \\
&= \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|} \\
&= \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\|} \\
&= \frac{\vec{u}\cdot\vec{u} + \cancel{\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}}}{\|\vec{u}\|\sqrt{(\vec{u}+\alpha\vec{v})(\vec{u}+\alpha\vec{v})}} \\
&= \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u} + \cancel{2\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}} + \alpha^2\vec{v}\cdot\vec{v}}} \\
&= \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\cdot\vec{u}\|\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u} + \alpha^2\vec{v}\cdot\vec{v}}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{5}\,\sqrt{5+\alpha^2\cdot 5}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{5}\,\sqrt{5(1+\alpha^2)}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{5}}\cancel{\sqrt{5}}\,\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{5} &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\
\frac{5}{4} &= \sqrt{1+\alpha^2} \\
\frac{25}{16} &= 1+\alpha^2 \\
\frac{25-16}{16} &= \alpha^2 \\
\| \\
\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

$\boxed{\alpha = \frac{3}{4}}$

...então $\vec{w} = \vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$:



...na verdade eu ia usar esse problema pra mostrar que alguns problemas envolvendo ângulos a gente resolve mais facilmente usando tangentes do que cossenos, mas pensem nisso em casa e a gente vê na próxima aula.

(vamos deixar algumas coisas de ângulos pra depois)

Hoje:
Círculos!
(e um pouco de elipses)

Aviso:
Dá pra terminar a matéria da P1 em mais 3 aulas -
24/maio, (4ª)
29/maio, (2ª)
31/maio. (4ª)
A P1 pode ser em qualquer aula depois disso - escolham um bom dia.
Proposta:
7/junho.

A gente viu que isto aqui parece ser um círculo:

$$\{(0,2) + \cos\theta\,\overrightarrow{(2,0)} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{(0,2)} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

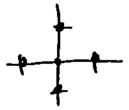
O pontos mais fáceis de calcular são os com $\theta=0°$, $\theta=90°$, $\theta=180°$, $\theta=270°$.

Equação do círculo

Isto aqui é o nosso círculo preferido:

$$C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$(0,1)\in C_1$
$(-1,0)\in C_1$
$(1,0)\in C_1$
$(0,-1)\in C_1$
$\Rightarrow$



Um outro círculo:

$$C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 1\}$$

Como é que a gente encontra os "pontos mais fáceis" de C_2?

Truque:

$\underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{y^2}_{0} = 1 \Rightarrow y=0,\ x=\pm 1 \Rightarrow \begin{matrix}(-1,0)\in C_1 \\ (1,0)\in C_1\end{matrix}$

$\underbrace{x^2}_{0} + \underbrace{y^2}_{1} \Rightarrow x=0,\ y=\pm 1 \Rightarrow \begin{matrix}(0,1)\in C_1 \\ (0,-1)\in C_1\end{matrix}$

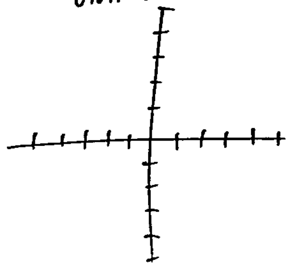
$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{x}_{1}-3}_{-2}\right)/2}_{-1}\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{y}_{4}-4}_{0}\right)/2}_{0}\right)^2}_{0} = 1 \Rightarrow x=1,\ y=4 \Rightarrow (1,4)$

$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{x}_{?}-3}_{?}\right)/2}_{1}\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{y}_{?}-4}_{?}\right)/2}_{?}\right)^2}_{0} = 1 \Rightarrow$

$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{x}_{}-3}_{}\right)/2}_{}\right)^2}_{0} + \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{y}_{}-4}_{}\right)/2}_{1}\right)^2}_{1} = 1$

$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{x}_{}-3}_{}\right)/2}_{}\right)^2}_{0} + \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{y}_{}-4}_{}\right)/2}_{-1}\right)^2}_{1} = 1$

Represente graficamente o C_2:



GA 22/maio/2017

Repare que dá pra fazer algo bem parecido quando a gente tem algo como "5^2" no lugar do 1...

$$\underbrace{\underbrace{(x-3)}_{-5}{}^2}_{5^2}+\underbrace{\underbrace{(y-4)}_{0}{}^2}_{0^2}=5^2$$

Represente graficamente:

$C_3: (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

$C_4: (x+2)^2+(y-3)^2=4^2$

← e diga o centro e o raio de C_3 e C_4.

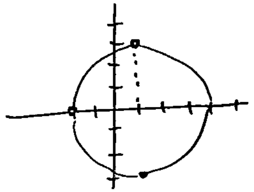
Lembre que é bem fácil testar os seus pontos... Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa:

a) $(2,3)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=2^2\}$

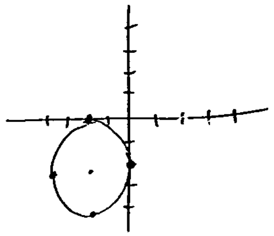
b) $(2,1)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=2^2\}$

Esse mesmo método — o dos "pontos óbvios" — vai servir pra parábolas e hipérboles depois com pequenas modificações...

Repara que agora você deve saber fazer a "outra direção" também... Encontre a equação dos seguintes círculos e teste-a:



$(1,3)\in C_5$
$(-2,0)\in C_5$
$(4,0)\in C_5$
$(1,-3)\in C_5$



$(-2,0)\in C_6$
$(-4,-2)\in C_6$
$(0,-2)\in C_6$
$(-2,-4)\in C_6$

Encontre os "pontos óbvios" de:

$E_1: (x/3)^2+(y/4)^2=1^2$

$E_2: (x-2)^2+(y/4)^2=1^2$

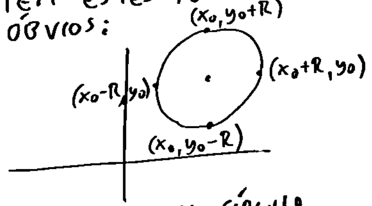
$E_3: ((x-2)/3)^2+(y/4)^2=1^2$

e esboce as elipses.

Um truque muito importante:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$$

tem estes pontos óbvios:



O centro desse círculo é (x_0,y_0) e o raio dele é R.

$$E_2: \underbrace{\underbrace{(\underbrace{x}_{2}-2)}_{0}{}^2}_{0}+\underbrace{\underbrace{(\underbrace{y}_{4}/4)}_{=1}{}^2}_{1}=1^2$$

$(3,0)$
$(1,0)$
$(2,4)$
$(2,-4)$