GA [illegible]

[illegible]

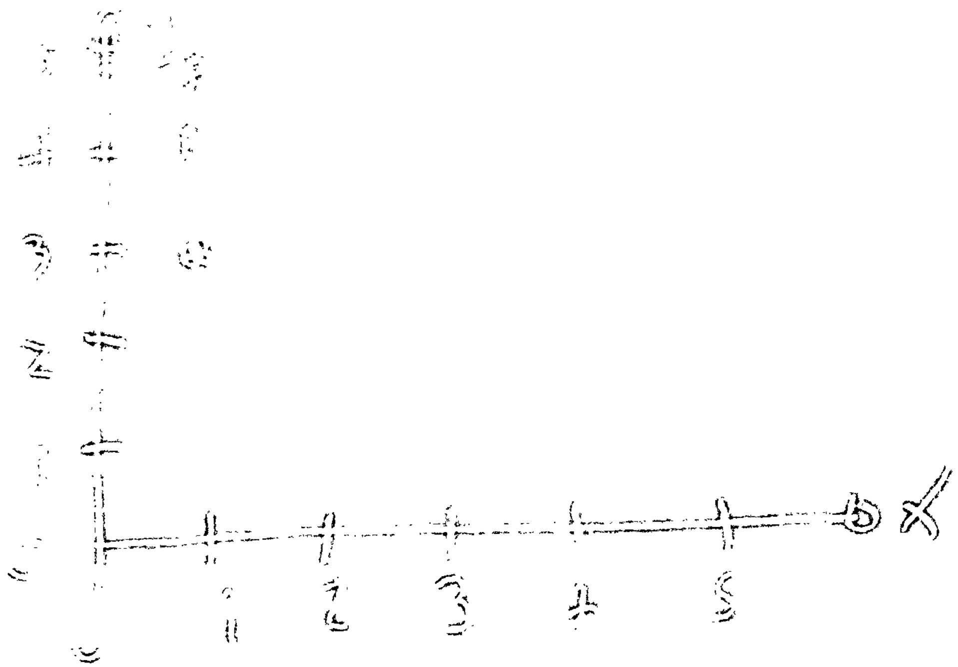
VAMOS CONSIDERAR [illegible] ALGUMAS NOÇÕES [illegible] PERTINÊNCIA CONJUNTOS

CONJUNTOS:

VAMOS COMEÇAR COM CONJUNTOS FINITOS E DEPOIS PASSAR PARA CONJUNTOS INFINITOS COMO RETAS [illegible]

2) F

F = {[illegible], 3, 4, 5}



GA 22/MAR/2017

HOJE:
- INTRODUÇÃO (DUAS FOLHAS QUE EU VOU DISTRIBUIR DAQUI A POUCO)
- CONJUNTOS.

VOCÊS JÁ VIRAM ALGUNS "TIPOS" DE OBJETOS MATEMÁTICOS - POR EXEMPLO, NÚMEROS E MATRIZES.
A GENTE VAI PRECISAR VER ALGUNS OUTROS:
- "VALORES DE VERDADE"

$$\underbrace{\underbrace{1+2}_{3} < \underbrace{3+4}_{7}}_{V} \qquad \underbrace{\underbrace{1+2}_{3} = \underbrace{3+4}_{7}}_{F}$$

- CONJUNTOS
- PONTOS E VETORES (PRÓXIMA AULA)

IMPORTANTE:
O "VALOR" DE UMA EXPRESSÃO MATEMÁTICA PODE SER ALGO QUE NÃO É UM NÚMERO!!!!!

$$(1+2<3+4) = V$$

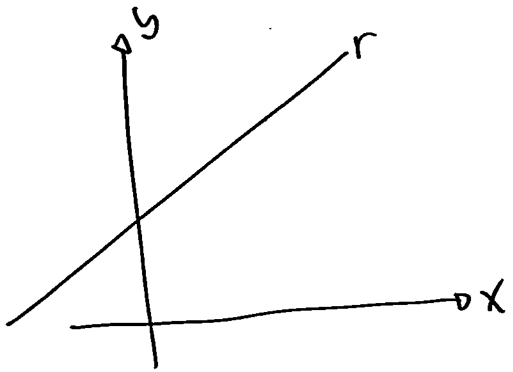
HOJE A GENTE VAI APRENDER CERTAS NOTAÇÕES PRA CONJUNTOS QUE OS LIVROS NUNCA EXPLICAM DIREITO.

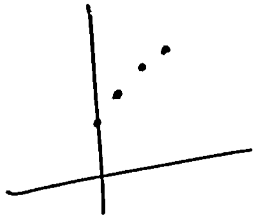
FOLHA 4: EXPLICAÇÃO (RUIM) DA NOTAÇÃO DE CONJUNTOS

FOLHA 5: EXERCÍCIOS

FOLHA 8: UM MÉTODO PRA CALCULAR CONJUNTOS

FOLHA 7: GABARITO





QUEM TERMINAR O EX. 5 DA P.6 PODE TENTAR FAZER ISSO AQUI...

REPRESENTE GRAFICAMENTE OS CONJUNTOS ABAIXO:
(OBS: VÃO SER CONJUNTOS INFINITOS, ENTÃO NÃO TEM "CALCULE"!)

$J' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$

$K' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

$L' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x/2\}$

$M' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x/2 + 1\}$

$N' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0\}$ } "RETAS DEGENERADAS"

$O' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2\}$

$P' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$ } SURPRESA!!

GA 27/mar/2017

Na aula passada nós vimos alguns "tipos" de objetos matemáticos...

- números
- valores de verdade
- matrizes
- conjuntos

Hoje nós vamos ver dois "tipos" novos, que são os que têm mais cara de GA e que aparecem mais nos livros de GA:

- pontos
- vetores

...só que hoje a gente só vai ver direito como calcular com eles — a interpretação gráfica deles vai ficar pra aula que vem!!!

Obs: A folha 11 tem exercícios parecidos com os de retas que vocês já viram...

A folha 10 tem algumas idéias completamente novas (que poucos de vocês devem ter visto no ensino médio).

A gente vai fazer alguns exercícios da 10 e depois ir pra 11.

Dicas pra p. 9:

- Usem a notação com "⌣⌣", "[regra ...]" e "= (resultado)"!

Por exemplo:

$$\underbrace{4 \cdot (\underbrace{(20,30) - (5,10)}_{\substack{[\text{regra } 3] \\ = \overrightarrow{(15,20)}}})}_{\substack{[\text{regra } 6] \\ = \overrightarrow{(60,80)}}}$$

Algumas dicas pro exercício 7 (p. 10):

Quando a gente diz:

V/F/Justifique:
( ) $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$

Essa pergunta quer dizer:
Será que $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$ é verdade sempre, isto é, para todos os valores de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$?

"$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$"

Se a gente encontrar um caso no qual $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ e $\overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$ dão resultados diferentes, a gente sabe que a resposta é "F" (falso: nem sempre...)

P. ex., se $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$,

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (2,3)+\overrightarrow{(4,5)} = (6,8)$

e $\overrightarrow{(c,d)}+(a,b) = \text{erro}$,

portanto neste caso temos $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)}+(a,b)$.

Provar que uma afirmação do exercício 7 é "F" é fácil — a justificativa é um contra-exemplo.

Provar que uma afirmação do exercício 7 é "V" é mais difícil.
(Dica: improvisem por enquanto.)

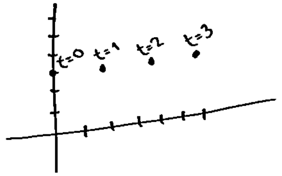
Dica pro 11:

$r_j = \{(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_g = \{(3,-1)+t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

No r_j:

t	$(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)}$
0	(0,3)
1	(2,3)
2	(4,3)
3	(6,3)



Pra casa:

Tentem terminar os exercícios 7 e 8.

Na aula que vem vamos ver:

- Como escrever as "justificativas" (demonstrações!) pro item 7,
- A interpretação gráfica de pontos e vetores
- O que cada uma das "regras" e "propriedades" sobre pontos e vetores quer dizer graficamente.

GA 29/MAR/2017

Hoje:

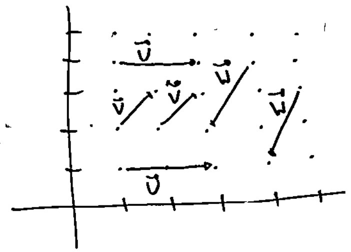
- Representação gráfica de pontos e vetores
- Um pouco sobre sistemas (lineares)
- A gente provavelmente vai deixar as técnicas pra provar propriedades pra aula que vem

Aviso: eu ainda não consegui digitar as figuras desta aula! Vou fazer no quadro!

Graficamente,

Pontos: a gente sabe o que são,

Vetores vão ser deslocamentos, ou setas (desenhadas em qualquer posição)



Por exemplo:

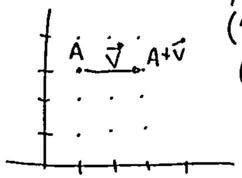
$\vec{u} = (\overrightarrow{2,0})$ ⇐ Deslocamento de 2 unidades pra direita e 0 pra cima

$\vec{v} = (\overrightarrow{1,1})$ ⇐ Deslocamento de 1 unidade pra direita e uma pra cima

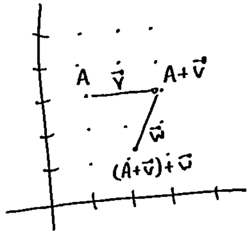
$\vec{w} = (\overrightarrow{-1,-2})$ ⇐ Deslocamento de −1 unidades pra direita (ou seja, 1 pra esquerda) e −2 unidades pra cima (ou seja, 2 pra baixo)

Truque: pra representar graficamente algo como $A + \vec{v}$ (A: ponto; $\vec{v}$: vetor), a gente vai ter uma posição preferida pro $\vec{v}$... a gente vai desenhá-lo indo de A pro $A+\vec{v}$

Exemplo: se $A = (1,3)$ então $A + \vec{v} = (1,3) + (\overrightarrow{2,0}) = (3,3)$



E $\underbrace{\underbrace{(A+\vec{v})}_{(3,3)} + \vec{w}}_{(2,1)}$, com $A = (1,3)$, $\vec{v} = (\overrightarrow{2,0})$, $\vec{w} = (\overrightarrow{-1,-2})$

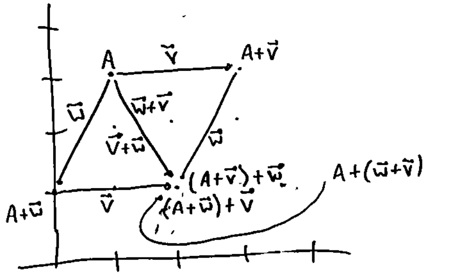


Regra do paralelogramo

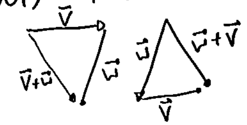
$(A+\vec{v})+\vec{w} = (A+\vec{w})+\vec{v}$

$= A + (\vec{w}+\vec{v})$ $\quad A + (\vec{w}+\vec{v})$ com $(1,3)$, $(\overrightarrow{-1,-2}) + (\overrightarrow{2,0}) = (\overrightarrow{1,-2})$

$= A + (\vec{v}+\vec{w})$ $\quad A + \underbrace{(\vec{v}+\vec{w})}_{(\overrightarrow{1,-2})}$



Essa figura é um paralelogramo com uma diagonal, e ela tem dois triângulos...



Repare que isso dá uma interpretação gráfica para $(A+\vec{v})+\vec{w} = A + (\vec{v}+\vec{w})$

$= A + (\vec{w}+\vec{v})$

$= (A+\vec{w})+\vec{v}$

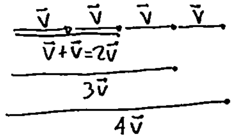
Como a gente interpreta $k \cdot \vec{v}$? (k: número; $\vec{v}$: vetor)

1º passo:

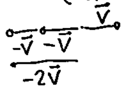
$2 \cdot \vec{v} = \vec{v}+\vec{v}$

$3 \cdot \vec{v} = \vec{v}+\vec{v}+\vec{v}$

$4 \cdot \vec{v} = \vec{v}+\vec{v}+\vec{v}+\vec{v}$

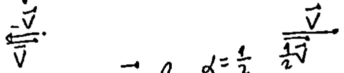


2º passo: $(-1)\cdot\vec{v} = ?$ $\quad (-2)\cdot\vec{v} = ?$



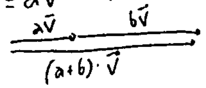
3º passo: $0 \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{0,0})$ "deslocamento parado"

$-\vec{v} + \vec{v} = 0\vec{v}$



4º passo: $\alpha\vec{v} = ?$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$

$(a+b)\cdot\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$



GA 29/MAR/2017

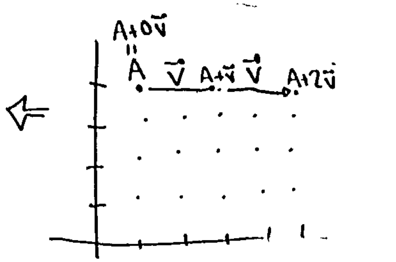
GRAFICAMENTE, O QUE É $\{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$?

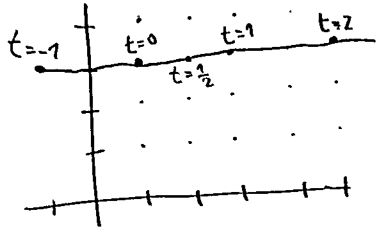
EXEMPLO:

$\{(1,3) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ⇦

$= \{(1,3) + \overrightarrow{(2t,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(1+2t, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$





EXERCÍCIO

(p. 14 DO SEMESTRE PASSADO)

FAÇA OS ITENS a, b, c DO EXERCÍCIO 14 "NO OLHÔMETRO": DESENHE TUDO, ENCONTRE t E u NO OLHO, E DEPOIS TESTEM

SE:

a) $(1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} = (0,4) + u\overrightarrow{(2,0)}$

b) $(1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} = (0,2) + u\overrightarrow{(2,3)}$

c) $(1+3t, t) = (2u, 2+3u)$

DICA PRA RESOLVER O 14d:

LEMBRE QUE A GENTE QUER ESCREVER SOLUÇÕES QUE FIQUEM MUITO LEGÍVEIS!!!!!!

A DICA É: NUMERE AS COISAS QUE VOCÊ CONCLUIR E DIGA DE ONDE VOCÊ CONCLUIU CADA UMA!

ENTÃO:

QUEREMOS

[1] $(x,y) = (0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)}$
$= (2t, 3-t)$

[2] $(x,y) = (1,0) + u\overrightarrow{(1,3)}$
$= (1+u, 3u)$

[3] $(2t, 3-t) = (1+u, 3u)$ (POR 1 E 2)

[4] $2t = 1+u$ (POR 3)

[5] $3-t = 3u$ (POR 3)

[6] $u = 2t-1$ (POR 4)

[7] $3-t = 3(2t-1)$ (POR 6)
$= 6t-3$

[8] $3+3 = 6t+t$

[9] $7t = 6$

[10] $t = \frac{6}{7}$

[11] $u = 2\frac{6}{7} - 1 = \frac{12}{7} - \frac{7}{7} = \frac{5}{7}$

[12] $x =$

GA 3/ABRIL/2017

Vamos deixar os detalhes pra fazer demonstrações passo a passo pra próxima aula... ← e resoluções de sistemas

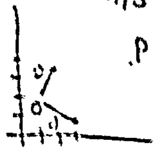
Hoje: <u>COORDENADAS</u>.

O exercício da p.16 vai ajudar vocês a visualizarem o que quer dizer $O + a\vec{u} + b\vec{v}$

"origem do sistema de coordenadas"

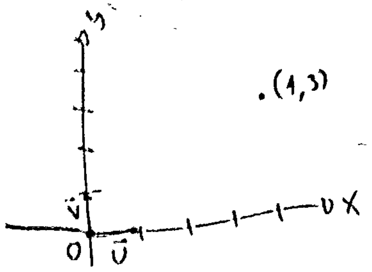
"vetores unitários (nesta sistema de coordenadas)"

Depois a gente vai ver como resolver no olhômetro problemas tipo este:



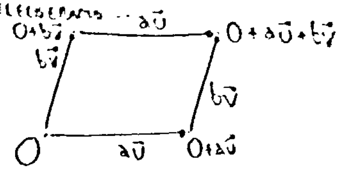
$P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$ $a=?$ $b=?$

A p.17 é sobre encontrar o a e o b <u>algebricamente</u>. Os truques pra encontrar a e b no olho eu vou mostrar no quadro.

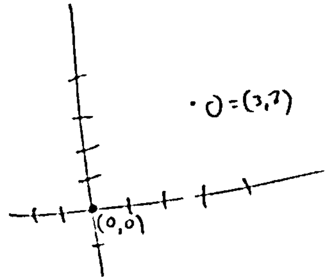


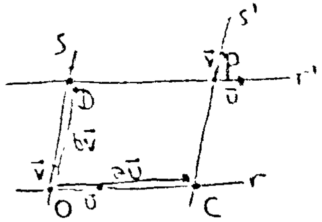
$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

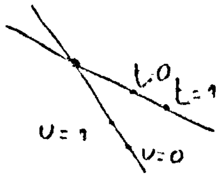
Lembrem da regra do paralelogramo



$O = (0,0)$







$r = \{O + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$

$s = \{O + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$

$r' \parallel r$

$s' \parallel s$

Exercícios:

a) Sejam:

$O = (1,1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(1,2)}$

$P = O + a\vec{u} + b\vec{v} = (1,5)$.

Representa graficamente

$r = \{O + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

$s = \{O + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$,

$r' = \{P + a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

$s' = \{P + b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$,

$C \in r \cap s'$

$D \in r' \cap s$

E encontre a e b no olho. Depois confira que os seus a e b estão certos, isto é, que $P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.

Dica:
$O + a\vec{u} = C$
$O + b\vec{v} = D$

b) Faça a mesma coisa, mas mudando o P para $P = (4,3)$.

Obs: Dica pra quem estiver com muita dúvida no exercício: comece calculando e representando graficamente

$\{(1,1) + t\cdot\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \{0,1,2,3\}\}$,

$\{a \in \{0,1,2,3\};\ (1,1) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

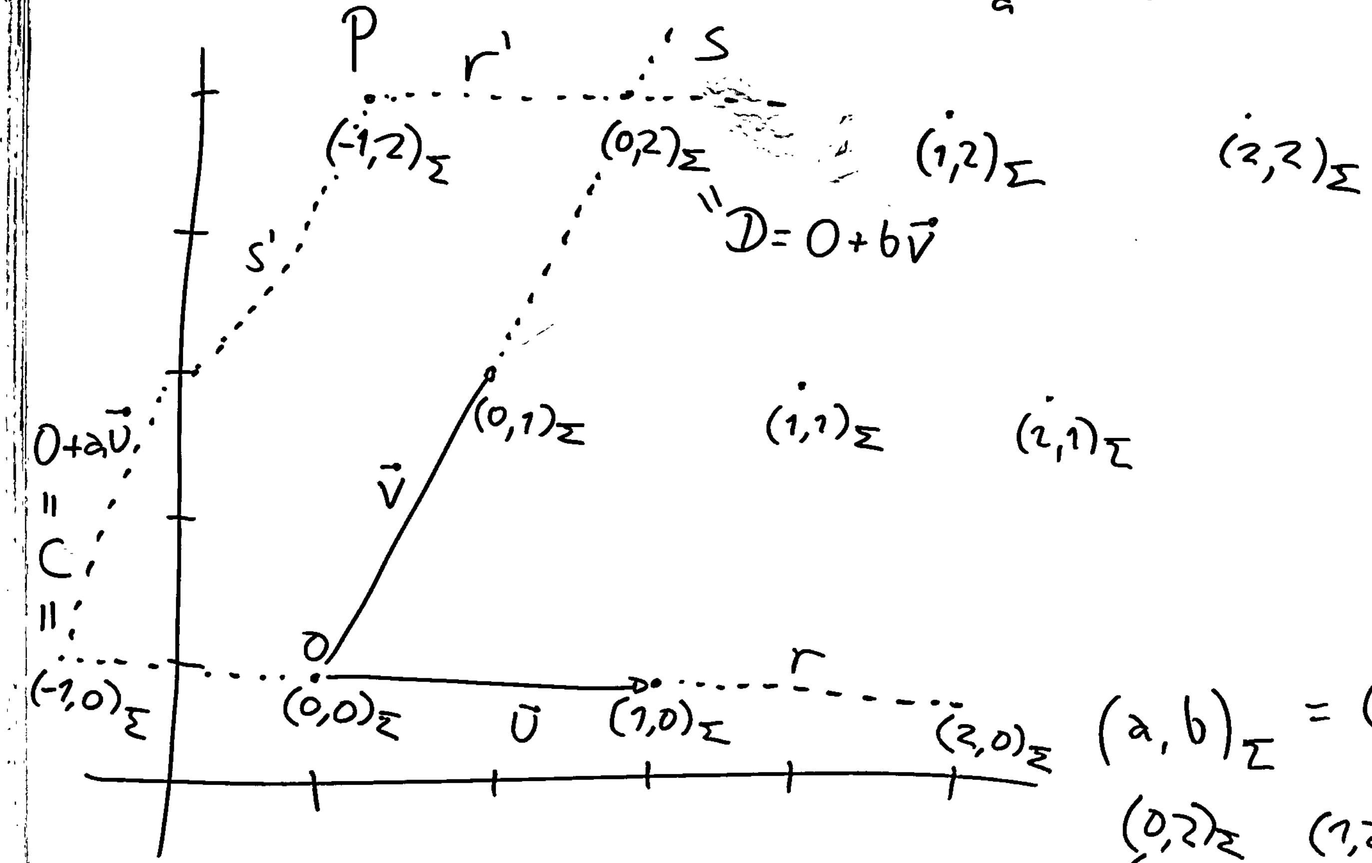
$\{a \in \mathbb{R};\ (1,1) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

$\{a \in \{0,1,2,3\};\ (1,5) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

$\{a \in \mathbb{R};\ (1,5) + a\overrightarrow{(2,0)}\}$

GA 3/ABRIL/2017

$$P = (-1,2)_\Sigma$$
$$= O + \underbrace{(-1)}_{a}\vec{u} + \underbrace{2}_{b}\vec{v}$$



$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

$(0,2)_\Sigma$ $(1,2)_\Sigma$ $(2,2)_\Sigma$

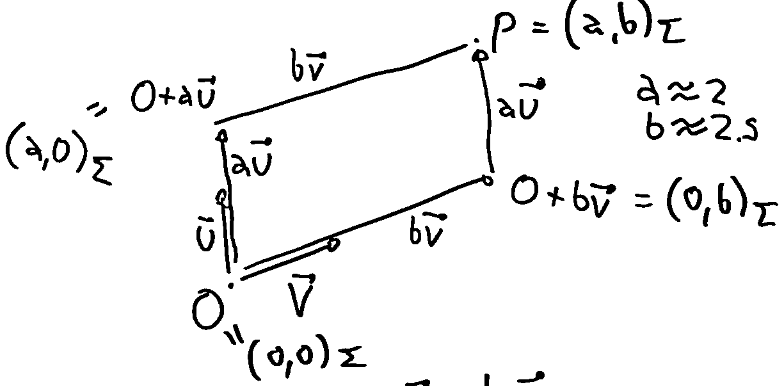
$(0,1)_\Sigma$ $(1,1)_\Sigma$ $(2,1)_\Sigma$

$(0,0)_\Sigma$ $(1,0)_\Sigma$ $(2,0)_\Sigma$

GA 5/ABRIL/2017

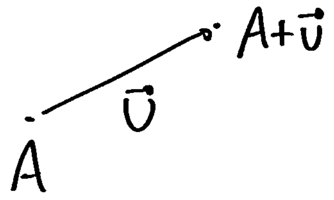
AVISO: EU ACABEI DE FAZER AS FOLHAS 17 E 18 - ELAS PODEM TER ERROS DE DIGITAÇÃO!

ELAS SÃO PRA TODO MUNDO APRENDER A RESOLVER MUITO BEM PROBLEMAS COMO ESSE AQUI:



$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

LEMBREM QUE A GENTE REPRESENTA GRAFICAMENTE $A+\vec{u}$ COMO:



AVISO

TEM UM ERRO DE DIGITAÇÃO NA 3b! AS RETAS SÃO

$r = \dots$ $\quad s = \dots$

$r' = \dots$ $\quad s' = \dots$

$r'' = \dots$ $\quad s'' = \dots$

$$\boxed{\text{TERMINEM EM CASA!}}$$

AULA QUE VEM:

VAMOS USAR O QUE VIMOS HOJE PRA ENTENDER

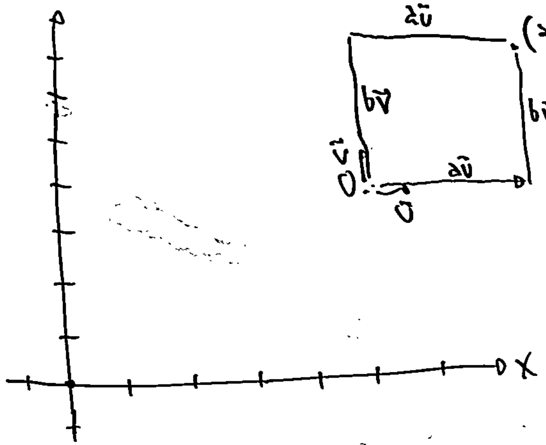
1) COMO USAR VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS AO MESMO TEMPO, E
2) PROJEÇÕES ORTOGONAIS.

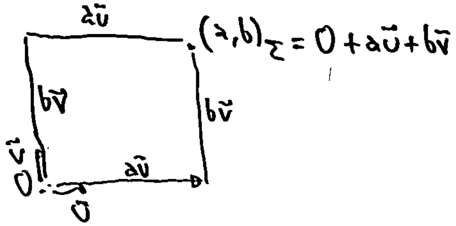
GA 12/ABRIL/2014

Nas últimas aulas a gente viu, com detalhes, como visualizar
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$
e como resolver no olho problemas tipo
$O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$...

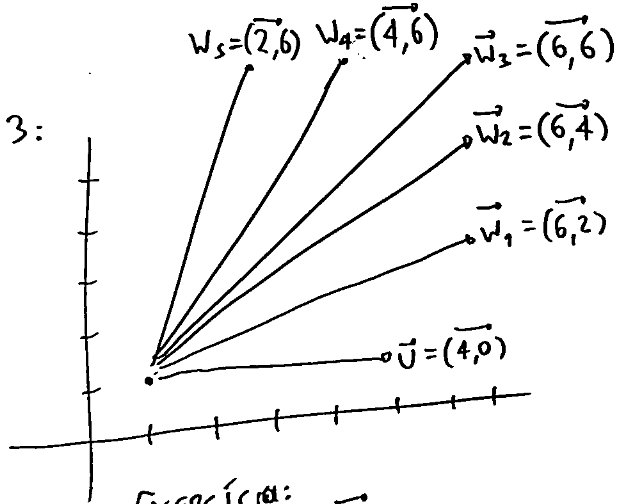
A gente viu por alto como resolver algebricamente problemas tipo
$(a,b)_\Sigma = (x,y)$
desconhecidos / conhecidos.

Vamos rever os problemas tipo $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$, ← coordenadas
e o próximo passo é a gente aprender a decompor um vetor $\vec{w}$ em $a\vec{u} + \vec{v}$ com $\vec{v} \perp \vec{u}$ (projeções ortogonais – $a\vec{u} = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$)





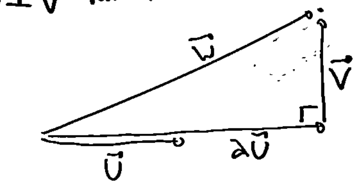
P.23:



Exercício: encontre $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_1$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_2$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_3$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_4$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_5$, $Pr_{\vec{u}}\vec{w}_6$

Projeções ortogonais

Def (visual): $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = a\vec{u}$,
onde a é o valor que faz: $\vec{u} \perp \vec{v}$ na figura abaixo:



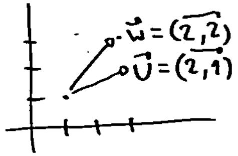
$\vec{u} \perp \vec{v}$ é o mesmo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,

$\Leftrightarrow$ $a\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$
$\vec{v} = \vec{w} - a\vec{u}$

⇐ Dicas:
1) Chute valores de a, faça a figura, calcule $\vec{v}$, e teste se $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Próximo assunto:

Como calcular $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ nos casos em que o olhômetro não resolve?
P.ex.,



GA /ABRIL/2017

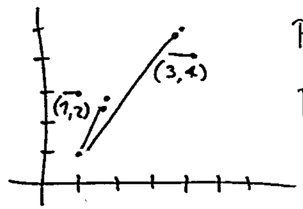
Hoje:

Projeções!

- Como calculá-las nos casos em que o olhômetro não dá conta
- Aplicações (folha sobre "Construções")

Mas antes:

Notações para retas!

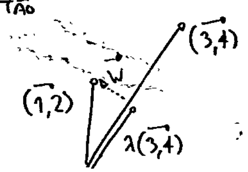


$Pr_{\overrightarrow{(3,4)}}\overrightarrow{(1,2)} = \underset{?}{\_}\,\overrightarrow{(3,4)}$

$Pr_{\overrightarrow{(1,2)}}\overrightarrow{(3,4)} = \underset{?}{\_}\,\overrightarrow{(1,2)}$

Se $Pr_{\overrightarrow{(3,4)}}\overrightarrow{(1,2)} = \lambda\overrightarrow{(3,4)}$,

então



$\lambda\overrightarrow{(3,4)} + \vec{w} = \overrightarrow{(1,2)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(1,2)} - \lambda\overrightarrow{(3,4)}$

$= \overrightarrow{(1-3\lambda, 2-4\lambda)}$

$\vec{w} \perp \overrightarrow{(3,4)} \Rightarrow \overrightarrow{(1-3\lambda, 2-4\lambda)} \cdot \overrightarrow{(3,4)} = 0$

$\Rightarrow 3(1-3\lambda) + 4(2-4\lambda) = 0$

$\Rightarrow 3 - 9\lambda + 8 - 16\lambda = 0$

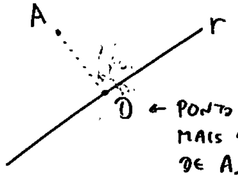
$\Rightarrow 11 = 25\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{11}{25}$

Folha 24: Exercícios 18a, 18b, 18c, 18d, 18i, 18e (opcional; correção: não é "retas da P.9", é "retas da P.12").

OBS. IMPORTANTE: No exercício 18i da folha 24 você vai desenhar 6 retas.

P.25 ("Construções")



D ← ponto de r mais próximo de A.

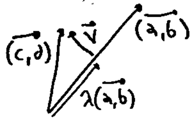
Exercícios:

19a (dá os valores de todos os pontos)

19b ("você escolhe B e C")

Tem um erro de digitação na construção (6)! Era pra ser "$D = B + Pr_{\vec{u}}\vec{v}$", mas nas folhas de vocês está "$D = Pr_{\vec{u}}\vec{v}$"!

$Pr_{\overrightarrow{(a,b)}}\overrightarrow{(c,d)} = \lambda\overrightarrow{(a,b)}$



$\lambda\overrightarrow{(a,b)} + \vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)} - \lambda\overrightarrow{(a,b)}$

$= \overrightarrow{(c-\lambda a, d-\lambda b)}$

$\vec{v} \perp \overrightarrow{(a,b)} \Rightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{(a,b)} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{(c-\lambda a, d-\lambda b)} \cdot \overrightarrow{(a,b)} = 0$

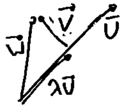
$\Rightarrow a(c-\lambda a) + b(d-\lambda b) = 0$

$\Rightarrow ac + bd - \lambda a^2 - \lambda b^2 = 0$

$ac + bd = \lambda(a^2+b^2)$

$\frac{ac+bd}{a^2+b^2} = \lambda$

$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \lambda\vec{u}$



$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

$\vec{v} = \vec{w} - \lambda\vec{u}$

$\vec{v} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

$\Rightarrow (\vec{w} - \lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$

$\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} - \lambda\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$

$\underbrace{\vec{w}\cdot\vec{u}}_{\text{num}} = \lambda\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{\text{num}}$

$\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \lambda \Rightarrow Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

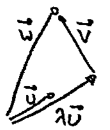
GA 19/ABRIL/2017

NA ÚLTIMA AULA NÓS VIMOS VÁRIAS CONSTRUÇÕES DIFERENTES QUE DAVAM O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE UM PONTO A DADO...

E VIMOS QUE DÁ PRA CALCULAR A PROJEÇÃO ASSIM:

$$\Pr_{\vec{u}} \vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

VAMOS COMEÇAR REVENDO A DEDUÇÃO DISSO.



$\vec{u}$ E $\vec{w}$ SÃO DADOS. SABEMOS QUE:

$\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

E $\vec{u}\perp\vec{v}$.

ENTÃO:

$$\vec{v}=\vec{w}-\lambda\vec{u}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$
$$\vec{u}\cdot(\vec{w}-\lambda\vec{u})=0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{w}-\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}=0$$
$$\lambda=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$
$$\Pr_{\vec{u}}\vec{w}=\lambda\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

PRIMEIRA COISA MUITO IMPORTANTE:

ESSA DEDUÇÃO QUE NÓS FIZEMOS DEVE FUNCIONAR PARA TODOS OS VETORES $\vec{u}$ E $\vec{w}$ (EXCETO QUANDO $\vec{u}=\overrightarrow{(0,0)}$) E O $\Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ OBTIDO DESTA FORMA DEVE DAR O MESMO QUE O OBTIDO PELO OLHÔMETRO...

ALÉM DISSO TEMOS UM OUTRO MODO DE CHECAR SE REALMENTE OBTIVEMOS O $\Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ CERTO — ELE DEVE OBEDECER $\vec{u}\perp\vec{v}$, I.E., $\vec{u}\perp\vec{w}-\lambda\vec{u}$.

EXERCÍCIOS:

① SEJA $\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$

E $\vec{w}_1=\overrightarrow{(4,2)}$,
$\vec{w}_2=\overrightarrow{(1,3)}$,
$\vec{w}_3=\overrightarrow{(1,0)}$.

EM CADA UM DESSES CASOS CALCULE $\Pr_{\vec{u}}\vec{w}_i$ E VERIFIQUE SE O SEU RESULTADO ESTÁ CERTO.

② PORQUE NÃO PODEMOS FAZER ESTES CANCELAMENTOS?

$$\frac{\cancel{\vec{u}}\cdot\vec{w}}{\cancel{\vec{u}}\cdot\vec{u}}\vec{u}=\frac{\vec{w}}{\cancel{\vec{u}}}\cancel{\vec{u}}=\vec{w}\,?$$

DISCUTA COM OS SEUS COLEGAS E PROCURE CASOS EM QUE $\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$, $\frac{\vec{w}}{\vec{u}}\vec{u}$ E $\vec{w}$ DÃO RESULTADOS DIFERENTES.

OBS: SE $\vec{u}=\overrightarrow{(1,2)}$ E $\vec{w}=\overrightarrow{(3,4)}$,

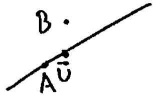
$\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}=\overrightarrow{(\frac{11}{5},\frac{22}{5})}$ $\qquad$ $\vec{u}\cdot\vec{w}=11$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=5$

$\frac{\vec{w}}{\vec{u}}\vec{u}=$

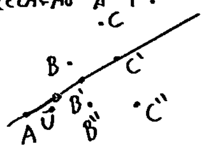
$\vec{w}=\overrightarrow{(3,4)}$

UMA APLICAÇÃO DO "Pr" QUE APARECE BASTANTE NAS LISTAS DA ANA ISABEL É ESSA AQUI:

SEJAM $r: A+t\vec{u}$, E B E C DOIS PONTOS DE $\mathbb{R}^2$:



SEJAM B' E C' OS PONTOS DE r MAIS PRÓXIMOS DE B E C, RESPECTIVAMENTE, E B'' E C'' OS PONTOS SIMÉTRICOS A B E C COM RELAÇÃO A r:



COMO A GENTE CALCULA B'' E C''?

EXERCÍCIOS:

③ SEJAM $r: y=3$,
$B=(2,2)$,
$C=(4,1)$.
ENCONTRE B', C', B'', C'' NO OLHÔMETRO.

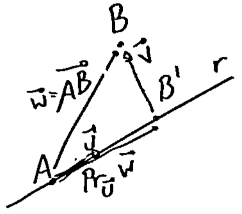
④ IDEM, MAS COM $r: y=3-x$.

⑤ IDEM, MAS COM $r: y=\frac{x}{2}-1$.

(OBS: EU ME DISTRAÍ QUANDO ESCOLHI OS PONTOS PRO ⑤... O PONTO (4,1) É FÁCIL DEMAIS, ENTÃO ACRESCENTE $D=(2,1)$ E $E=(4,-2)$ E ENCONTRE D', E', D'', E'').

O OBJETIVO DO EXERCÍCIO ⑤ É VOCÊS TENTAREM ENCONTRAR VOCÊS MESMOS AS FÓRMULAS PRA CALCULAR P' E P'' PARA QUALQUER PONTO P... LEMBRE QUE NAS FOLHAS 17 E 18 A GENTE VIU EXERCÍCIOS DE DESENHAR COISAS SEM COORDENADAS, E NAS FOLHAS 1 E 2 EU DEI DICAS SOBRE COMO APRENDER A DEFINIR OBJETOS...

VOCÊS PODEM COMEÇAR COM ALGO COMO:



SABEMOS: $A, \vec{u}, B$

SEJAM:

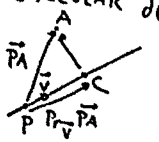
$r: A+t\vec{u}$
$\vec{w}=\overrightarrow{AB}=B-A$
$B'=A+\Pr_{\vec{u}}\vec{w}$
$\vec{v}=\overrightarrow{B'B}$

GA 24/ABRIL/2017

NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VER UM MONTE DE COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES...

MAS NESTA NÓS VAMOS VER MAIS UMA FÓRMULA, E UMA "DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DELA":

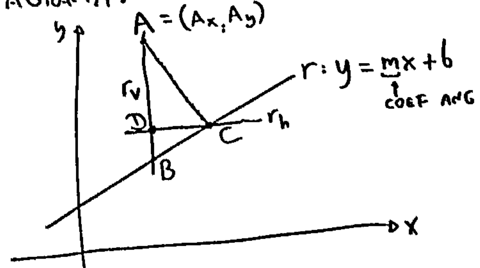
REPARE QUE SE $A \in \mathbb{R}^2$ E $r = \{P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ENTÃO NÓS PODEMOS USAR O "Pr" PRA CALCULAR $d(A,r)$...



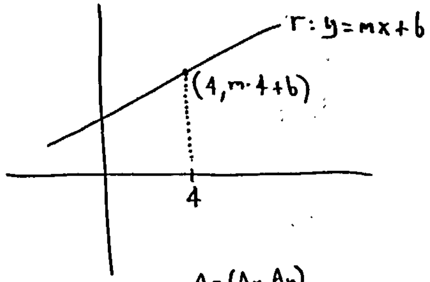
$d(A,r) =$
$d(A,C) =$
$\|\vec{CA}\| =$
$\|Pr_{\vec{v}}\vec{PA} - \vec{PA}\|$

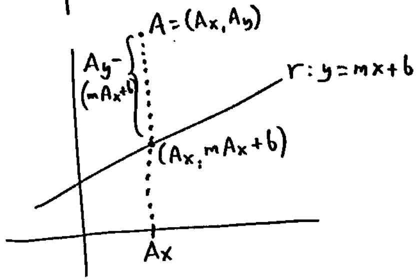
AVISO:
QUASE TODO MUNDO TENTA DECORAR A FÓRMULA DE $d(A,r)$ E QUASE TODO APLICA ELA ERRADO.

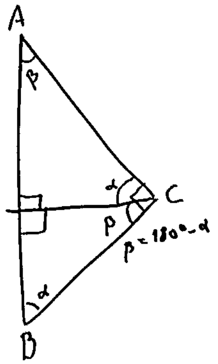
DIAGRAMA:



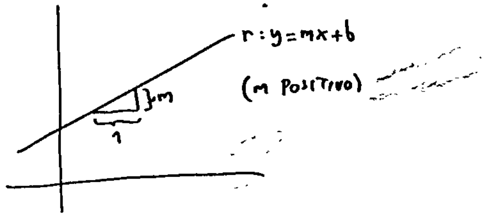
TRUQUE: $d(A,B)$ É FÁCIL DE CALCULAR, E $d(A,C)$ É $\dfrac{d(A,B)}{\sqrt{1+m^2}}$

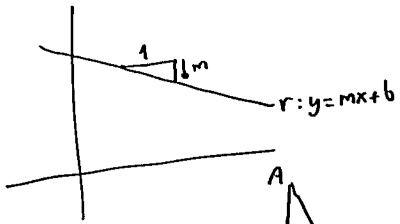


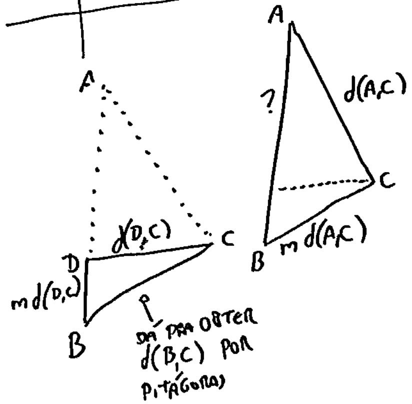




MAIS UM TRUQUE:
COEFICIENTE ANGULAR!

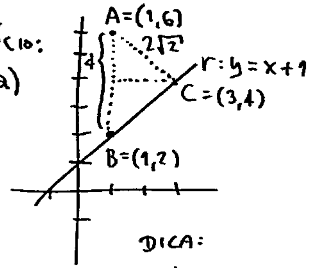




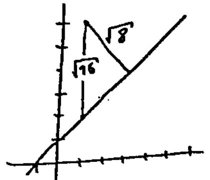


COMO LEMBRAR DESSA FÓRMULA?
TRUQUE: LEMBRE DE CASOS FÁCEIS — OS CASOS MAIS FÁCEIS SÃO OS COM $m=1$, $m=2$, $m=0$.

EXERCÍCIO:
a)



DICA:



$$d(A,B) = \sqrt{d(A,C)^2 + (m\, d(A,C))^2}$$
$$= \sqrt{d(A,C)^2 + m^2 d(A,C)^2}$$
$$= \sqrt{(1+m^2)\, d(A,C)^2}$$
$$= \sqrt{1+m^2}\; d(A,C)$$
$$d(A,C) = d(A,B)/\sqrt{1+m^2}$$

USE RAÍZES QUADRADAS EM TODO LUGAR...

$\sqrt{8} = \sqrt{16}/\sqrt{2}$
$= \sqrt{16}/\sqrt{1+1^2}$ COEF ANG

OBS: ALGUNS EXERCÍCIOS SAÍRAM COM ERROS DE DIGITAÇÃO...
CORREÇÕES:
c) $A = (3,2)$
f) $r: y = 2x$
g) $r: y = -2x$
h) $r: y = 3$

GA 24/ABRIL/2017

NA AULA QUE VEM A GENTE VAI VER UM MONTE DE COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES...

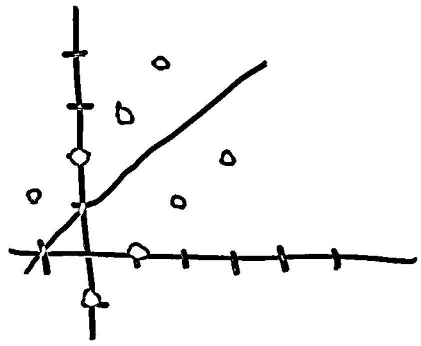
SEJA $r: y = x + 1$.

COMO A GENTE ENCONTRA TODOS OS PONTOS QUE ESTÃO A UMA DETERMINADA DISTÂNCIA DE r?

POR EXEMPLO, SEJA

$$S = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, r) = \sqrt{2}\}.$$

ESTES SÃO ALGUNS PONTOS DE S:



ELES ESTÃO EM DUAS RETAS PARALELAS A r.

EXERCÍCIO:
ENCONTRE AS EQUAÇÕES DESSAS DUAS RETAS NO OLHO.

(VAMOS VER UMA SOLUÇÃO "ALGÉBRICA" PRA ISSO NA AULA QUE VEM.)

GA 26/ABRIL/2017

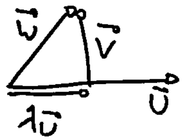
HOJE:

COISAS SOBRE DEMONSTRAÇÕES!

A GENTE VIU, HÁ MUITAS AULAS ATRÁS, PROBLEMAS DE V/F/JUSTIFIQUE E "PROPRIEDADES" DAS OPERAÇÕES SOBRE PONTOS E VETORES QUE A GENTE QUERIA VERIFICAR SE VALIAM SEMPRE OU NÃO...

HOJE VAMOS VER MAIS ALGUNS TRUQUES PRA DEMONSTRAÇÕES.

LEMBRE QUE:



SE $w = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ E $\vec{u} \perp \vec{v}$

ENTÃO $\lambda = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ...

"SE"

VOCÊ SABE DEMONSTRAR ISSO VOCÊ MESMO?

① PROBLEMAS:

V/F/JUSTIFIQUE:

a) ( ) $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

b) ( ) $Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

c) ( ) $Pr_{\vec{u}}\vec{w} = Pr_{\vec{w}}\vec{u}$

d) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

e) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = |k|\,Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

f) ( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

g) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k(Pr_{\vec{u}}\vec{w})$

h) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = |k|(Pr_{\vec{u}}\vec{w})$

i) ( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

j) ( ) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

k) ( ) $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

l) ( ) $\|k\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

m) ( ) SE $a\vec{u} = b\vec{u}$ ENTÃO $a = b$

② DEMONSTRE (ESTES SÃO MAIS DIFÍCEIS, MAS BEM IMPORTANTES):

SE $\vec{u} \perp \vec{v}$ E $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO NÃO-NULOS ENTÃO:

a) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{v}) = \vec{0}$

b) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{u}) = k\vec{u}$

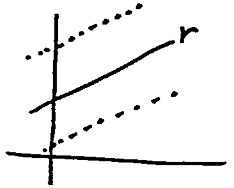
c) $Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) + Pr_{\vec{v}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}+b\vec{v}$

GA 3/maio/2017

Na aula passada nós vimos como calcular $d(P,r)$...
Mas digamos que temos uma reta r e queremos encontrar todos os pontos que estão à distância 5 dela... ou seja,

$$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,r)=5\}.$$

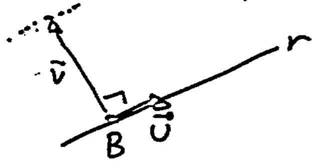
Como podemos fazer isso? Repare que S é a união de duas retas:

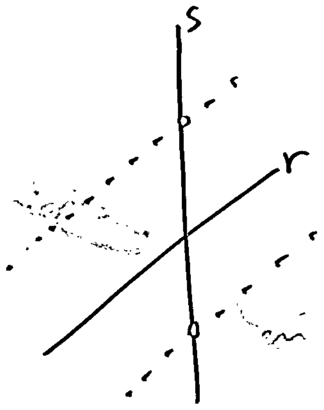


Temos dois jeitos fáceis:

1) $$S=\left\{A\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{|mA_x+b-A_y|}{\sqrt{m^2+1}}=5\right\}$$
$$=\left\{A\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{mA_x+b-A_y}{\sqrt{m^2+1}}=5\right\}$$
$$\cup\left\{A\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{mA_x+b-A_y}{\sqrt{m^2+1}}=-5\right\}$$

2) Se $r: B+t\vec{u}$
e $\vec{v}\perp\vec{u}$, $\|\vec{v}\|=5$, então...





OBS: $r: y=mx+b$

$$\overbrace{(\overrightarrow{-6,0})}^{6}$$
$$\underset{\sim}{-2}\quad \underset{\sim}{3}\quad \underset{\sim}{0}$$

25c) $\|K\cdot(\overrightarrow{a,b})\| = \dots$
$= \dots$
$= \dots$
$= \dots$
$=$
$$= \underbrace{\underbrace{K}_{-2}\cdot\underbrace{\|(\overrightarrow{3,0})\|}_{3}}_{-6}$$

Aviso:
Semana que vem eu não vou dar aula!
(vou estar num congresso)

Exercícios (que não estão nas folhas):

Sejam $r:(0,0)+t(\overrightarrow{4,3})$,
$B=(0,0)$,
$\vec{u}=(\overrightarrow{4,3})$.

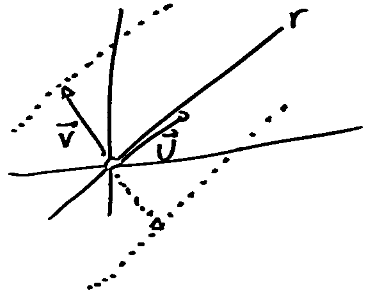
a) Encontre um vetor não-nulo ortogonal a $\vec{u}$.

b) Unitarize o vetor que você encontrou.

c) Encontre um vetor $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u}$ tal que $\|\vec{v}\|=5$.

d) Dê parametrizações para as duas retas de
$$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,r)=5\}.$$

Idéia:

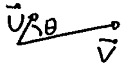


GA /maio/2017

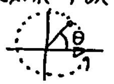
A papelaria tava fechada - hoje não tem folhas impressas!

Hoje: Ângulos!!!

Motivação: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \underbrace{\cos\theta}_{???}$



Vamos começar por um caso
(1) simples -



(2) Ângulos simples,
(3) E uma aplicação disso: desenhar círculos (que a gente vai ver direito daqui a pouco) e elipses (que a gente vai ver direito depois da P1).

Graus e radianos

$0° = 0$ (rads)

$90° = \frac{\pi}{2}$

$180° = \pi$

etc...

$180° = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$

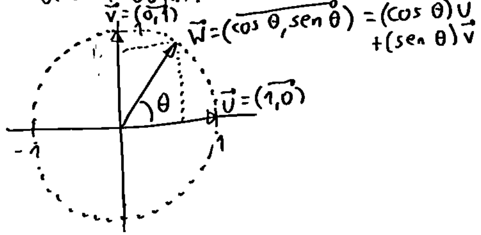
$234° = 234 \cdot \frac{\pi}{180}$

Os ângulos mais fáceis são $0°, 90°, 180°$, etc.

Depois: $45°, 135°$, etc

Depois: $30°, 60°, 120°$, etc

Uma figura:



Exercícios:

(a) Represente graficamente:

$A_\theta = (0,0) + \cos\theta\,(\overrightarrow{1,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,1})$

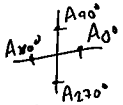
para $\theta = 0°, 90°, 180°, 270°$;

idem para:

(b) $B_\theta = (2,2) + \cos\theta\,(\overrightarrow{1,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,1})$

(c) $C_\theta = (2,2) + \cos\theta\,(\overrightarrow{2,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,2})$

(d) $D_\theta = (\overrightarrow{0,2}) + \cos\theta\,(\overrightarrow{4,0}) + \operatorname{sen}\theta\,(\overrightarrow{0,2})$



Um truque pra rodar vetores:

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de mesmo comprimento e ortogonais então

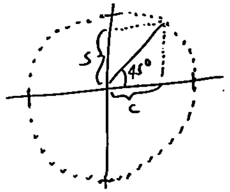
$\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

é o "vetor $\vec{u}$ rodado θ"

p.ex.: 45°...

Como lembrar o sen e cos dos ângulos "menos fáceis" como 45°, 30°, 60°?

Eu nunca lembro... o truque pra descobrir cos θ e sen θ nestes casos é fazer desenhos e resolver uma equação simples... p.ex:

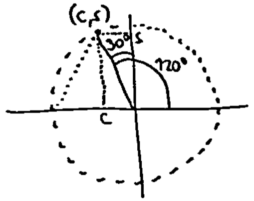


Neste caso temos $c = s$, $c > 0$, $s > 0$, $c^2 + s^2 = 1$

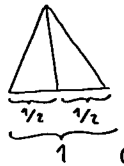
$\Rightarrow c^2 + c^2 = 1$

$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Aqui aparece um triângulo equilátero:



$c = -\frac{1}{2}$

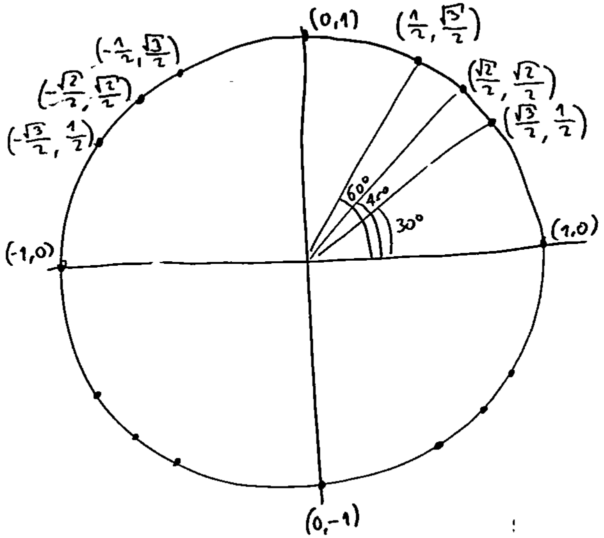
$s > 0$

$c^2 + s^2 = 1$

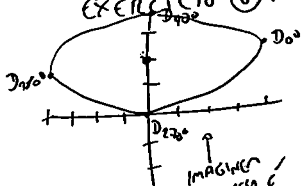
Quanto vale s?

Dá pra fazer a mesma coisa para:

θ	cos θ	sen θ
0°	1	0
30°	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
90°	0	1
120°		
135°		
150°		
180°		
210°		
225°		
240°		
270°		
300°		
315°		
330°		
360°		



Exercício (d):



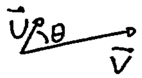
Imagine que isso é uma elipse toda certinha

GA /maio/2017

A PAPELARIA TAVA FECHADA – HOJE NÃO TEM FOLHAS IMPRESSAS!

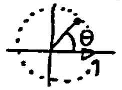
HOJE: ÂNGULOS!!!

MOTIVAÇÃO: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\underbrace{\cos\theta}_{???}$



VAMOS COMEÇAR POR UM CASO

① SIMPLES –



② ÂNGULOS SIMPLES,

③ E UMA APLICAÇÃO DISSO: DESENHAR CÍRCULOS (QUE A GENTE VAI VER DIREITO DAQUI A POUCO) E ELIPSES (QUE A GENTE VAI VER DIREITO DEPOIS DA P1).

COMO OBTER UM VETOR QUE FAÇA UM ÂNGULO θ COM $\vec{u}$?

(OBS: OS LIVROS NÃO COSTUMAM EXPLICAR ESSE TRUQUE)

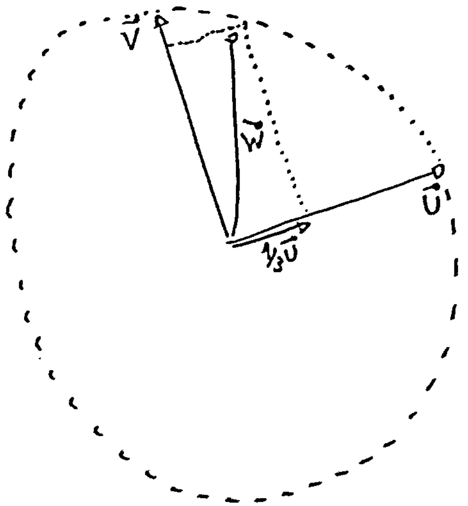
SEJA $\vec{v}$ UM VETOR DE MESMO COMPRIMENTO QUE $\vec{u}$ E ORTOGONAL A $\vec{u}$.

QUEREMOS

$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$

E DIGAMOS QUE A GENTE SABE $\cos\theta$ – POR EXEMPLO, $\cos\theta = \frac{1}{3}$...

ENTÃO:



EXERCÍCIO:

SEJA $\vec{u} = \overrightarrow{(5,2)}$

E $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,5)}$.

TEMOS $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ E $\vec{u}\perp\vec{v}$.

<u>DESENHE</u> VETORES "$\vec{w}$"s QUE FAÇAM UM ÂNGULO θ COM $\vec{u}$ E TAIS QUE $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$ E:

a) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ (DICA: DESENHE $\frac{4}{5}\vec{u}$ E O CÍRCULO)

b) $\cos\theta = \frac{3}{5}$

c) $\cos\theta = \frac{2}{5}$

d) $\cos\theta = \frac{1}{5}$

e) $\cos\theta = 0$

f) $\cos\theta = -\frac{1}{5}$

E SE $\vec{v} = \overrightarrow{(2,-5)}$?

g) $\cos\theta = \frac{4}{5}$

h) $\cos\theta = \frac{3}{5}$

i) $\cos\theta = \frac{2}{5}$

j) $\cos\theta = \frac{1}{5}$

k) $\cos\theta = 0$

l) $\cos\theta = -\frac{1}{5}$

EXERCÍCIOS:

m) <u>DEMONSTRE</u> QUE SE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ E $\vec{u}\perp\vec{v}$ ENTÃO $\Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}$.

n) <u>DEMONSTRE</u> QUE SE $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ E $\vec{u}\perp\vec{v}$ ENTÃO $\Pr_{\vec{u}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = a\vec{u}$

NA PRÓXIMA AULA UMA DAS COISAS QUE A GENTE VAI VER É COMO COMPARAR ÂNGULOS.

DÊEM UMA OLHADA NA FÓRMULA

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

(EM LIVROS, INTERNET, ETC) PRA SE PREPARAREM!

GA 17/maio/2017

Hoje: Ângulos (cont).

1) arccos
2) tan
3) arctan
4) comparar ângulos
5) transferir ângulos

① Se $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

então $45° = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$...

Mas isso não vale sempre — repare:

$\cos 0° = 1$

$\cos 360° = 1$

$0° = \arccos 1$

$360° = \arccos 1$

$\arccos 1 = ???$

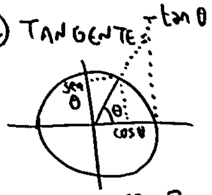
Queremos que o arccos seja uma função, então...

Truque:

$\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x$

Isto vale se e só se $0° \leq \theta \leq 180°$.

② Tangente

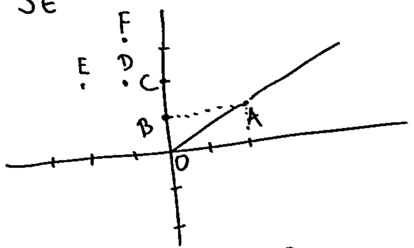


$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ (para todo θ)

③ $\tan\theta = t \iff \theta = \arctan t$

Isto vale se e só se $-90° < \theta < 90°$.

④ Se



Você deve ser capaz de calcular

b) $\cos(\text{ang } A\hat{O}B)$,

c) $\cos(\text{ang } A\hat{O}C)$,

d) $\cos(\text{ang } A\hat{O}D)$,

e) $\cos(\text{ang } A\hat{O}E)$,

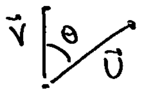
f) $\cos(\text{ang } A\hat{O}F)$

g) Você consegue pôr estes ângulos em ordem, do menor (mais agudo) para o maior (mais obtuso)?

Dica: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos\theta$

$= \cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v}))$



Exemplo:

$\cos(\text{ang } A\hat{O}B) = ?$

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (2,1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (0,1)$

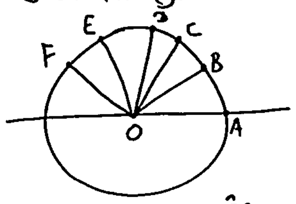
$\text{ang}(A\hat{O}B) = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$

$\cos(\text{ang}(A\hat{O}B)) = \cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v}))$

$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

$= \ldots$

Dica pra (g):



$A\hat{O}B$: mais agudo

$\cos A\hat{O}B$: mais próximo de 1

$A\hat{O}F$: menos agudo/ mais obtuso

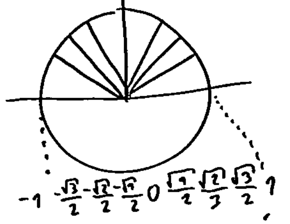
$\cos A\hat{O}F$: mais próximo de -1

Na aula passada nós vimos que ângulos como

$0°$, $30°, 45°, 60°$,

$90°$, $120, 135°, 150°$, etc

são mais "fáceis" — a gente sabe o cos e o sen deles...



... a gente também gosta de

$\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta =$

Como "transferir" ângulos?

Vamos começar com alguns problemas mais concretos.

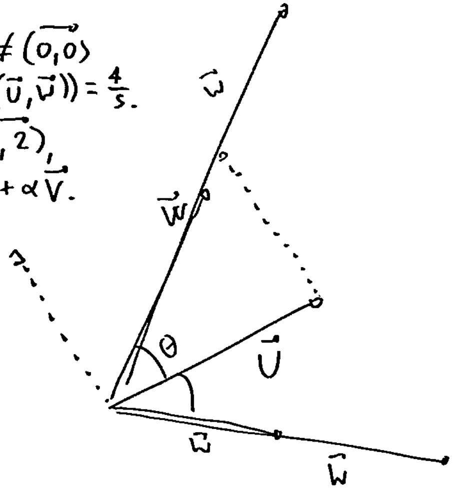
a) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$.

Encontre algum $\vec{w} \neq \overrightarrow{(0,0)}$ tal que $\cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{w})) = \frac{4}{5}$.

Dica: sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$,

$\vec{w} = \vec{u} + \alpha\vec{v}$.

Encontre α.



$\frac{4}{5} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\|}$

Dica pra casa:
revejam a folha 27.

Dicas pra agora:

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v}) = ?$

$\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\| = ?$

GA 22/maio/2017

No final da aula passada nós vimos um problema que era assim:

Seja $\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$.
Encontre algum $\vec{w}\neq\overrightarrow{(0,0)}$ tal que $\cos ang(\vec{u},\vec{w})=\frac{4}{5}$.
Dica: sejam $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,2)}$ e $\vec{w}=\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

Solução:

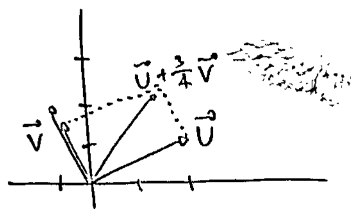
$$\frac{4}{5} = \cos ang(\vec{u},\vec{w}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}+\alpha\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}+\alpha\cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}}{\|\vec{u}\|\sqrt{(\vec{u}+\alpha\vec{v})\cdot(\vec{u}+\alpha\vec{v})}}$$

$$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+\cancel{2\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}}+\alpha^2\vec{v}\cdot\vec{v}}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\cdot\vec{u}\|\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+\alpha^2\vec{v}\cdot\vec{v}}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5+\alpha^2\cdot 5}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5(1+\alpha^2)}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{5}}\cancel{\sqrt{5}}\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$
$$\frac{5}{4}=\sqrt{1+\alpha^2}$$
$$\frac{25}{16}=1+\alpha^2$$
$$\frac{25-16}{16}=\alpha^2$$
$$\frac{9}{16}$$
$$\boxed{\alpha=\frac{3}{4}}$$

...Então $\vec{w}=\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}$:



...Na verdade eu ia usar esse problema pra mostrar que alguns problemas envolvendo ângulos a gente resolve mais facilmente usando tangentes do que cossenos, mas pensem nisso em casa e a gente vê na próxima aula.

(vamos deixar algumas coisas de ângulos pra depois)

Hoje: Círculos! (e um pouco de elipses)

Aviso: Dá pra terminar a matéria da P1 em mais 3 aulas —
24/maio, (4ª)
29/maio, (2ª)
31/maio. (4ª)

A P1 pode ser em qualquer aula depois disso — escolham um bom dia.
Proposta: 7/junho.

A gente viu que isto aqui parece ser um círculo:

$$\{(0,2)+\cos\theta\,\overrightarrow{(2,0)}+\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{(0,2)} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$$

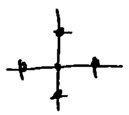
O pontos mais fáceis de calcular são os com $\theta=0°$, $\theta=90°$, $\theta=180°$, $\theta=270°$.

Equação do círculo

Isto aqui é o nosso círculo preferido:

$$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$(0,1)\in C_1$
$(-1,0)\in C_1$
$(1,0)\in C_1$
$(0,-1)\in C_1$ ⇒



Um outro círculo:

$$C_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y-4}{2}\right)^2=1\right\}$$

Como é que a gente encontra os "pontos mais fáceis" de C_2?

Truque:
$$\underbrace{x^2}_{1}+\underbrace{y^2}_{0}=1 \Rightarrow y=0,\ x=\pm1 \Rightarrow (-1,0)\in C_1,\ (1,0)\in C_1$$
$$\underbrace{x^2}_{0}+\underbrace{y^2}_{1} \Rightarrow x=0,\ y=\pm1 \Rightarrow (0,1)\in C_1,\ (0,-1)\in C_1$$

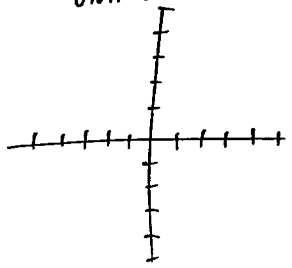
$$\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{1}-3}_{-2}/2}_{-1}\big)^2}_{1}+\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{4}-4}_{0}/2}_{0}\big)^2}_{0}=1 \Rightarrow x=1,\ y=4 \Rightarrow (1,4)$$

$$\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{?}-3}_{?}/2}_{1}\big)^2}_{1}+\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{?}-4}_{?}/2}_{?}\big)^2}_{0}=1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{}-3}_{}/2}_{}\big)^2}_{0}+\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{}-4}_{}/2}_{1}\big)^2}_{1}=1$$

$$\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{}-3}_{}/2}_{}\big)^2}_{0}+\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{}-4}_{}/2}_{-1}\big)^2}_{1}=1$$

Represente graficamente o C_2:



GA 22/maio/2017

Repare que dá pra fazer algo bem parecido quando a gente tem algo como "5^2" no lugar do 1...

$$\underbrace{(x-3)^2}_{\underbrace{-5}_{5^2}} + \underbrace{(y-4)^2}_{\underbrace{0}_{0^2}} = 5^2$$

Represente graficamente:

$C_3: (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

$C_4: (x+2)^2+(y-3)^2=4^2$

← e diga o centro e o raio de C_3 e C_4.

Lembre que é bem fácil testar os seus pontos... Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa:

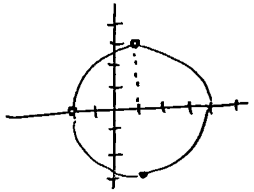
a) $(2,3) \in \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=2^2\}$

b) $(2,1) \in \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=2^2\}$

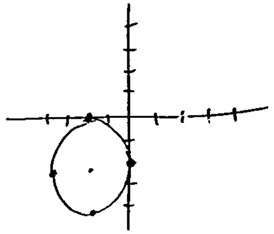
Esse mesmo método — o dos "pontos óbvios" — vai servir pra parábolas e hipérboles depois com pequenas modificações...

Repara que agora você deve saber fazer a "outra direção" também...

Encontre a equação dos seguintes círculos e teste-a:



$(1,3)\in C_5$
$(-2,0)\in C_5$
$(4,0)\in C_5$
$(1,-3)\in C_5$



$(-2,0)\in C_6$
$(-4,-2)\in C_6$
$(0,-2)\in C_6$
$(-2,-4)\in C_6$

Encontre os "pontos óbvios" de:

$E_1: (x/3)^2+(y/4)^2=1^2$

$E_2: (x-2)^2+(y/4)^2=1^2$

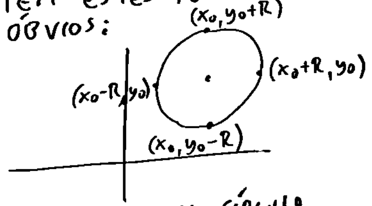
$E_3: ((x-2)/3)^2+(y/4)^2=1^2$

e esboce as elipses.

Um truque muito importante:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$$

tem estes pontos óbvios:

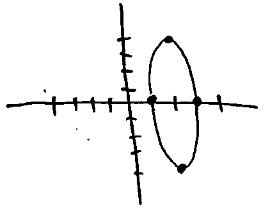


O centro desse círculo é (x_0,y_0) e o raio dele é R.

$$E_2: (x-2)^2 + (y/4)^2 = 1^2$$

x: 2, 0, 0; y: 4, -1, 1

(3,0)
(1,0)
(2,4)
(2,-4)



GA 24/maio/2017

HOJE: DÚVIDAS!

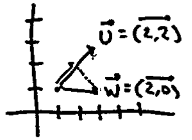
$$Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w})$$
$$\parallel$$
$$\frac{(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$$
$$\parallel$$
$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$$
$$\parallel$$
$$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}+\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\cdot\vec{u}$$

$$Pr_{\vec{u}}\vec{v}+Pr_{\vec{u}}\vec{w}$$
$$\parallel$$
$$\frac{(\vec{v}\cdot\vec{u})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}+\frac{(\vec{w}\cdot\vec{u})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$$
$$\frac{\vec{u}\,[(\vec{v}\cdot\vec{u})+(\vec{w}\cdot\vec{u})]}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$
$$\frac{\vec{u}\,[\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w})]}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

$$\frac{234+567}{89}=\frac{234}{89}+\frac{567}{89}$$

$$Pr_{\vec{u}}\vec{v}+Pr_{\vec{u}}\vec{w}=$$

EXEMPLO:



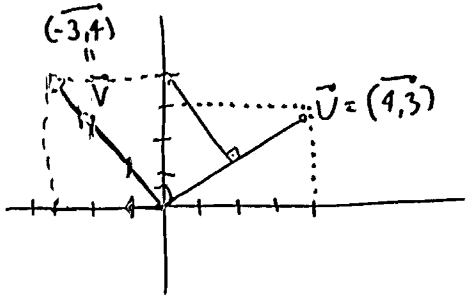
$Pr_{\vec{w}}\vec{u}=(2,0)$

$Pr_{\vec{u}}\vec{w}=(1,1)$

Se $\vec{u}=(\overrightarrow{1,2})$ e $\vec{v}=(\overrightarrow{3,4})$,

$\vec{v}\cdot\vec{u}=11$

$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}}=\frac{11}{(\overrightarrow{1,2})}=$



$(4,3)\cdot($

$(-5,5)\cdot(4,5)=-20+20=0$

$(-3,4)$

$(-c,d)\cdot(4,3)$

$-4c+3d=0$

$-3,4$

$\vec{v}(-3,4)\cdot\lambda=(1,0)$

$(-3\lambda,4\lambda)=(1,0)$

$$(2+3)\cdot(4+5)=(2+3)\cdot 9$$
$$5\cdot(4+5)=5\cdot 9$$

$\frac{-3}{1}=-3$

$2\cdot(\overrightarrow{3,4})=(\overrightarrow{6,8})$ (por 6)

$(\overrightarrow{2,3})\cdot 4=(\overrightarrow{8,12})$

$\parallel$ ERRO

NÃO !!

$\vec{u}\perp\vec{v}$?

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$?

$\|\vec{u}\|=5$

$\|\vec{v}\|=5$

$\|2\vec{v}\|=\|(\overrightarrow{-6,8})\|=10$

$\|3\vec{v}\|=\|(\overrightarrow{-9,12})\|=15$

$\|4\vec{v}\|=\quad=20$

$\|-1\vec{v}\|=\quad 5$

$\|k\cdot\vec{v}\|=|k|\cdot\|\vec{v}\|$

$\|k\cdot\vec{v}\|=1$

$\parallel$

$|k|\cdot\|\vec{v}\|$

$\parallel$

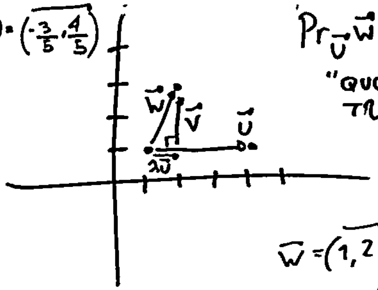
$|k|\cdot 5$

$K=\pm\frac{1}{5}$

$K\cdot\vec{v}=-\frac{1}{5}(\overrightarrow{-3,4})=(\overrightarrow{\tfrac{3}{5},\tfrac{-4}{5}})$

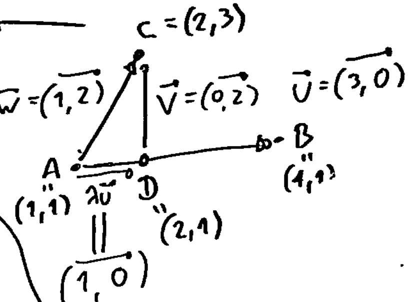
$K\cdot\vec{v}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{-3,4})=\left(\overrightarrow{-\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}}\right)$

$$C_2:\ ((x-3)/2)^2+((y-4)/2)^2=1$$



$Pr_{\vec{u}}\vec{w}=\lambda\vec{u}$

"QUE COMPLETA O TRIÂNGULO RETÂNGULO"



$$\frac{5+(-2\alpha+2\alpha)}{\sqrt{5}\cdot(\overrightarrow{2-\alpha,1+2\alpha})}\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{5}\cdot(\overrightarrow{2-\alpha,1+2\alpha})}=\frac{4}{5}$$

$\parallel$ ERRO

$\frac{2}{(\overrightarrow{3,4})}$

$(\overrightarrow{1,2})\cdot(\overrightarrow{3,4})=$

GA 24/maio/2017

HOJE: DÚVIDAS!

$Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w})$

$//$

$\frac{(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$

$\|$

$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$

$\|$

$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}+\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\cdot\vec{u}$

$\frac{234+567}{89} = \frac{234}{89}+\frac{567}{89}$

$Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

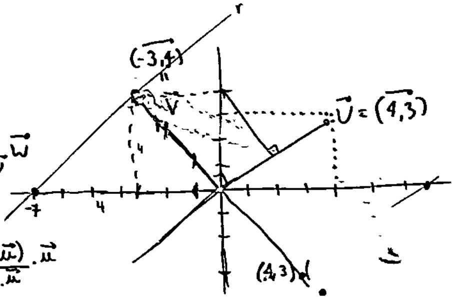
$\|$

$\frac{(\vec{v}\cdot\vec{u})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{(\vec{w}\cdot\vec{u})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}$

$\frac{\vec{u}[(\vec{v}\cdot\vec{u})+(\vec{w}\cdot\vec{u})]}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\frac{\vec{u}[\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})]}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w} =$



$(-5,5)\cdot(4,3) = -20+20=0$

$(-3,4)$

$(-c,d)\cdot(4,3)$

$-4c+3d=0$

$-3,4$

$\vec{v}(-3,4)\cdot\lambda=(1,0)$

$(-3\lambda,4\lambda)=(1,0)$

$y=ax+b$

$y= \cdot \quad \cdot$

$r: \{ t \in \mathbb{R} \mid (-3,4)+t(\vec{4,3}) \}$

$r: \{(-3,4)+t(\vec{4,3}) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$r': \{(4,-3)+t(\vec{4,3}) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$\vec{u}\perp\vec{v}$?

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$?

$\|\vec{u}\|=5$

$\|\vec{v}\|=5$

$\|2\vec{v}\| = \|(\vec{-6,8})\| = 10$

$\|3\vec{v}\| = \|(\vec{-9,12})\| = 15$

$\|4\vec{v}\| = \quad = 20$

$\|-1\vec{v}\| = \quad 5$

$\|k\cdot\vec{v}\| = |k|\cdot\|\vec{v}\|$

$\vec{v} =$

$\|k\cdot\vec{v}\|=1$

$\|$

$|k|\cdot\|\vec{v}\|$

$\|$

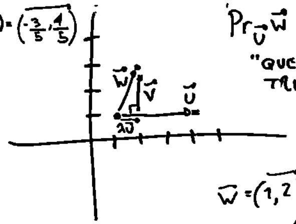
$|k|\cdot 5$

$k=\pm\frac{1}{5}$

$k\cdot\vec{v} = -\frac{1}{5}(\vec{-3,4}) = (\vec{\tfrac{3}{5},\tfrac{-4}{5}})$

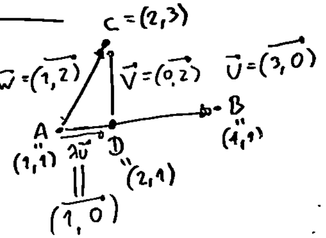
$k\cdot\vec{v} = \frac{1}{5}(\vec{-3,4}) = \left(\vec{-\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}}\right)$

$C_2: ((x-3)/2)^2 + ((y-4)/2)^2 = 1$



$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \lambda\vec{u}$

"QUE COMPLETA O TRIÂNGULO RETÂNGULO"



$(3,2) \; = (0,4)$

$(0,4) \; = (0,4)$

$(5,4) \; = (4,0)$

$(-1,4) \; = (-4,0)$

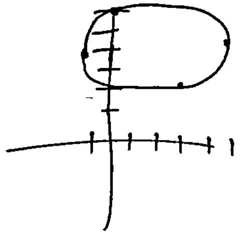
$\underbrace{\underbrace{(x-3)^2}_{0} + \underbrace{(y-4)^2}_{1} = 1^2}_{(3,5)}$

$\underbrace{\underbrace{}_{1} \quad \underbrace{}_{0}}_{4,4}$

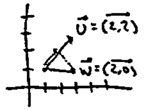
$\underbrace{\underbrace{-1} \quad \underbrace{0}}_{(2,4)}$

$\underbrace{\underbrace{0} \quad \underbrace{-1}}_{(3,3)}$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$



Exemplo:



$Pr_{\vec{w}}\vec{u} = (\vec{2,0})$

$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = (\vec{1,1})$

Se $\vec{u}=(\vec{1,2})$ e $\vec{v}=(\vec{3,4})$,

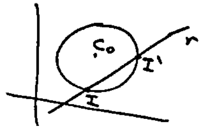
$\vec{v}\cdot\vec{u} = 11$

$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}} = \frac{11}{(\vec{1,2})} =$

GA 29/maio/2017

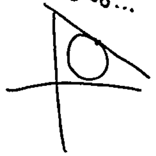
Hoje:
Interseção de círculo e reta e interseção de dois círculos (truques algébricos!)

Seja C um círculo de centro C_0 e raio R, r uma reta, e I e I' os dois pontos de $C \cap r$:



Repare que às vezes $C \cap r = \emptyset$,

e às vezes $C \cap r$ vai ter um ponto só...



Exercício:

(1) Escolha I, I', r, C tais que I e I' tenham coordenadas inteiras. Faça isto várias vezes. ← e dê as equações de C e r.

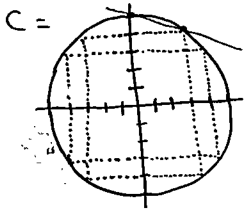
(2) Consiga soluções pro item anterior nas quais a reta r não seja nem horizontal, nem vertical, nem tenha coef. angular ± 1.

(0) (Pra quem estiver com dificuldade no (1)) Desenhe vários círculos tais que seus centros tenham coordenadas inteiras e seus raios sejam inteiros e dê a equação de cada um deles. Além disso represente graficamente cada círculo e os pontos dele que têm coordenadas inteiras.

(0') Quando $R = 5$ o seu círculo deve ter 12 pontos com coordenadas inteiras!

Seja $C: x^2 + y^2 = 5^2$.

$C =$



Seja $r: y = -\frac{1}{3}x + 5$.

Quem são $I, I' \in C \cap r$?

$I = (0,5)$
$I' = (3,4)$

Truque algébrico pra encontrar $I, I' \in C \cap r$:

- se $(x,y) \in C$ e $(x,y) \in r$

então $x^2 + y^2 = 25$ e $y = -\frac{1}{3}x + 5$

$\Rightarrow x^2 + (-\frac{1}{3}x + 5)^2 = 25$

e a gente pode resolver isto por Bháskara...

Vamos obter dois valores pra x, e pra cada um deles vamos encontrar o y correspondente usando $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

Soluções: $x = 0$ e $x = 3$.

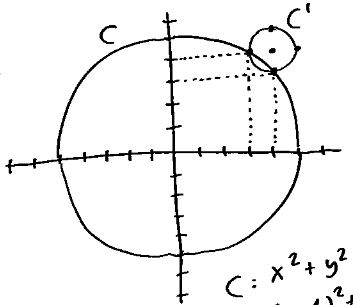
$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}0 + 5 = 5 \Rightarrow (0,5)$

$x = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}3 + 5 = 4 \Rightarrow (3,4)$

Tem alguns exercícios sobre interseção de círculo e reta nas listas da Ana Isabel (pra quem quiser treinar).

E como obter a interseção de dois círculos?

Vou começar com um caso concreto onde as contas são fáceis...



$C_0 = (0,0)$
$R = 5$
$C_0' = (4,4)$
$R' = 1$

$C: x^2 + y^2 = 25$
$C': (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$ ⇐ (★)

ou: $C: x^2 + y^2 - 25 = 0$
$C': x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 1$ ⇐ (★★)
$C': x^2 + y^2 + 31 - 8x - 8y = 0$

Se $(x,y) \in C \cap C'$ então (x,y) obedece (★), (★★),

(★) − (★★): $(\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 25) - (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 31 - 8x - 8y) = 0$ (★★★)

Reescrevendo (★★★):

$-25 - 31 + 8x + 8y = 0$
$-56 + 8x + 8y = 0$
$8x + 8y = 56$
$x + y = 7$
$y = 7 - x$ (★★★★)

Os pontos $I, I' \in C \cap C'$ obedecem a equação (★★★★), que é uma equação de uma reta ("r").

Então podemos tentar calcular $C \cap C'$ calculando $C \cap r$ ou $C' \cap r$...

sabemos calcular — sabemos calcular

As listas da Ana Isabel também têm alguns exercícios de interseção de dois círculos...

Às vezes esses problemas vão estar disfarçados.

P. ex.: (Resolva desenhando tudo, chutando pontos e testando-os)

Encontre os pontos tais que $d(P,(0,0)) = 3$ e $d(P,(4,0)) = 5$.

Dica:
$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(0,0)) = 3\}$,
$C' = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(4,0)) = 5\}$.

Próxima aula (31/maio)
Tangência e dúvidas

Outra aula (5/junho):
?

Outra (7/junho):
P1!

GA 31/maio/2017

Hoje:

- Tangência
- "Completar quadrados"
- Dúvidas!

Uma equação de cônica é uma equação desta forma:

$$ax^2+bx+c+dxy+ey+fy^2=0$$

Uma cônica é um conjunto da forma

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bx+c+dxy+ey+fy^2=0\}.$$

Exercício: Converta as equações abaixo para equações de cônicas:

a) $(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$

b) $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y+4}{8}\right)^2=1$

c) $y=2x+3$

d) $2x+3y=6$

e) $y=x^2$

(Quem são a,b,c,d,e,f em cada caso?)

Os livros e as listas da Ana Isabel estão cheios de problemas nos quais círculos são dados em formas como esta aqui:

$$C: x^2+2x-99-6y+y^2=0$$

Converta a equação acima para uma na forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Obs: um polinômio em x é uma soma finita de termos tipo a_ix^i, onde $i\in\mathbb{N}$.

Exemplo: $\underbrace{99x^{200}}_{a_{200}x^{200}}+\underbrace{42x^3}_{a_3x^3}\underbrace{-1x^0}_{a_0x^0}$

Se a gente sabe os "a_i"s a gente sabe o polinômio.

Exemplo: $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_3=-1$, $a_5=99$ (todos os outros "a_i"s são 0):

Polinômio:

$$\underbrace{\underbrace{a_0}_{2}\underbrace{x^0}_{1}}_{2}+\underbrace{\underbrace{a_1}_{3}\underbrace{x^1}_{x}}_{+3x}+\underbrace{\underbrace{a_2}_{4}x^2}_{+4x^2}+\underbrace{\underbrace{a_3}_{-1}x^3}_{-x^3}+\underbrace{\underbrace{a_4}_{0}x^4}+\underbrace{\underbrace{a_5}_{99}x^6}_{+99x^6}+\underbrace{a_6}_{0}x^6+\dots$$

$$=2+3x+4x^2-x^3+99x^6$$

Um polinômio em x e y é uma soma finita

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}x^iy^j$$

Se $a_{00}=2$, $a_{01}=3$, $a_{02}=0$, $a_{03}=4$, $a_{10}=5$, $a_{11}=6$, $a_{20}=7$, $a_{32}=8$

Então o polinômio é:

$$\underbrace{a_{00}}_{2}\underbrace{x^0y^0}_{1}+\underbrace{a_{01}}_{3}x^0\underbrace{y^1}_{y}+\underbrace{a_{02}}_{0}x^0y^2+\underbrace{a_{03}}_{4}x^0y^3+$$

$$\underbrace{a_{10}}_{5}\underbrace{x^1y^0}_{x}+\underbrace{a_{11}x^1y^1}_{6xy}+\underbrace{a_{12}}_{0}x^1y^2+$$

$$\underbrace{a_{20}x^2y^0}_{7x^2}+$$

$$+\underbrace{a_{32}x^3y^2}_{8x^3y^2}$$

Dêem uma olhada no Problema 22 da Lista 3 da Ana Isabel quando puderem...

22') Represente graficamente:

a) $x^2+y^2-11=0$

b) $x^2+y^2-x+3y-2=0$

c) $x^2+y^2-6y=0$

d) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

Tangência

23') Dê a equação de um círculo com $C_0=(4,1)$ que seja tangente à reta $y=3$.

Desenhe um círculo com centro em $(4,1)$ que seja tangente à reta $y=3$.

23'') Idem, mas tangente à reta $y=x-1$.

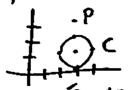
27') Seja $C: x^2+y^2=5^2$. Dê a equação da reta tangente a C nos pontos:

a) $(0,5)$

b) $(5,0)$

c) $(4,3)$

(A) Sejam:



Desenhe dois círculos centrados em P que são tangentes a C.

(B) Sejam $A=(-5,0)$, $B=(5,0)$, C um círculo centrado em B com raio R. Para cada um dos valores de R abaixo desenhe:

- uma reta r que passe por A e seja tangente a C,
- o ponto $D\in r\cap C$,
- uma reta s que passa por B e D

e diga o ângulo entre r e s.

a) $R=1$

b) $R=2$

c) $R=3$

d) $R=4$

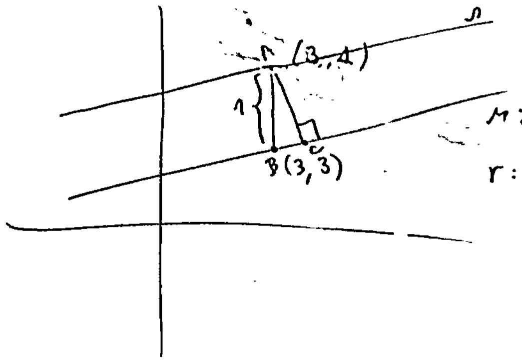
e) $R=5$

f) $R=6$

GA 5/JUNHO/2017

HOJE:
- DÚVIDAS
- INTRODUÇÃO A CÔNICAS

A P1 É NA AULA QUE VEM!



$s: y = 3 + \frac{x}{3}$

$d(r, s) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$r: \frac{x}{3} + 2$

$r: y = 2 + \frac{x}{3}$

$$d(A, C) = \frac{d(A, B)}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{7}}{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{10}{3}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

DECOREM!

$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0$

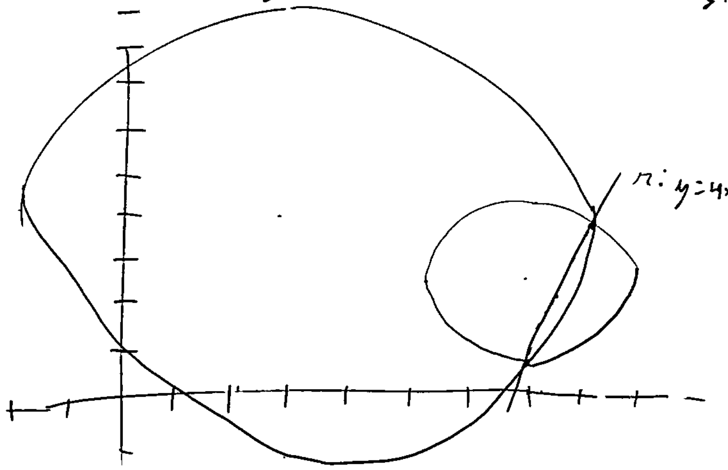
$* \quad x^2 + y^2 - 14x - 6y + 54 = 0$

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 25 = 0$

$** \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

$*** = * - **$

$\hookrightarrow -8x + 2y + 54 = 0$



$r: y = 4x - 27$

$x^2 + (4x - 27)^2 - 6x - 8(4x - 27) = 0$

$x^2 + 6x + 16x^2$

276

GA 3/junho/2017

Hoje:
- Dúvidas
- Introdução a cônicas

A P1 é na aula que vem!

Nosso círculo preferido:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$C: x^2+y^2=1$

Nossas cônicas preferidas:

$E: x^2+y^2-1=0$ $(x^2+y^2=1)$

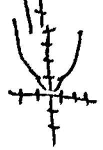
$H: xy-1=0$ $(xy=1,\ y=\frac{1}{x})$

$P: y-x^2=0$ $(y=x^2)$

A gente sabe desenhá-las:

E = 

H = 

P = 

Todas elas têm "pontos óbvios".

Em H:

x	y
1	1
2	1/2
1/2	2
-1	-1
-2	-1/2
-1/2	-2

Em P:

x	y
0	0
1	1
2	4
-1	1
-2	4

Nossa cônicas preferida em outras coordenadas:

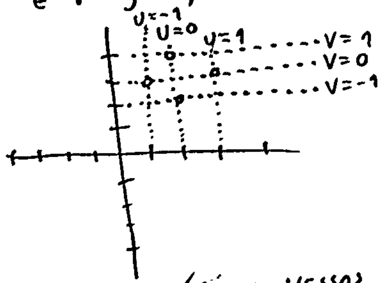
$E': u^2+v^2-1=0$

$H': uv-1=0$

$P: v-u^2=0$

Exemplos:

① Se $u=x-2$ e $v=y-3$,



Pontos óbvios nessas novas coordenadas:

$E': \underbrace{u^2}_{\underbrace{1}_{1}}+\underbrace{v^2}_{\underbrace{0}_{0}}=1$ (...)

$\underbrace{u^2}_{\underbrace{-1}_{1}}+\underbrace{v^2}_{\underbrace{0}_{0}}=1$

Pontos óbvios:

$(u,v)=(1,0)$,
$(u,v)=(-1,0)$,
$(u,v)=(0,1)$,
$(u,v)=(0,-1)$

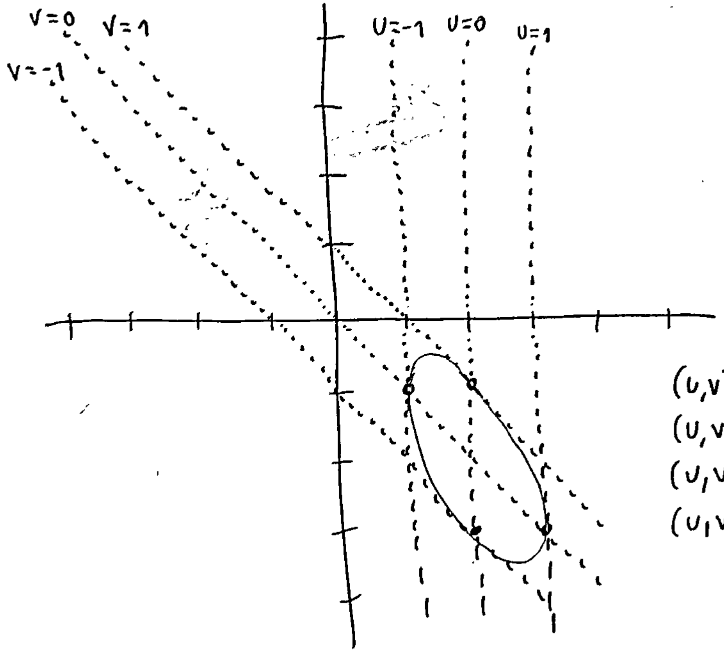
② $u=x-2$ e $v=x+y$.

Exercício:

a) Represente graficamente as retas $u=0$, $u=1$, $u=-1$, $v=0$, $v=1$, $v=-1$.

b) Use estas retas pra desenhar os quatro pontos óbvios da elipse $E': u^2+v^2=1$

c) Calcule no olhômetro as coordenadas (x,y) destes quatro pontos.



$(u,v)=(1,0)$ $(x,y)=(3,-3)$

$(u,v)=(-1,0)$ $(x,y)=(1,-1)$

$(u,v)=(0,1)$ $(x,y)=(2,-1)$

$(u,v)=(0,-1)$ $(x,y)=(2,-3)$

INÍCIO: 14:24
TÉRMINO: 16:24

SÃO 16:00.

SESSÃO DE DISCUSSÃO:
15:24 – 15:29

ERROS DE DIGITAÇÃO:

3b) $\partial(r,s) = s(r,s') = 2$
$\Rightarrow \partial(r,s) = \partial(r,s') = 2$

PARALELAS $\in r$
$\Rightarrow$ PARALELAS A r

5) QUE PASSA POR I E i'
$\Rightarrow$ QUE PASSA POR I E I'

GA 12/JUN/2017

Hoje:

- Mais sobre cônicas tortas
- Polinômios
- Cônicas degeneradas

Na aula de 5/junho eu defini as nossas cônicas tortas preferidas:

E': $u^2+v^2-1=0$ $\quad (u^2+v^2=1)$,

H': $uv-1=0$ $\quad (uv=1,\ v=\frac{1}{u})$,

P': $v-u^2=0$ $\quad (v=u^2)$,

onde u e v são as coordenadas novas, que vão mudar em cada contexto...

A gente viu este exemplo aqui:

$u=x-2$
$v=x+y$

O truque é que se a gente trasa as retas $u=0$, $u=1$, $u=-1$, $v=0$, $v=1$, $v=-1$, aí fica fácil marcar no plano os pontos mais óbvios de E', H', P'.

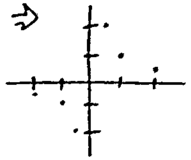
Exercício:
Marque em $\mathbb{R}^2$ os 4 pontos mais óbvios de E', os 6 pontos mais óbvios de H', e os 5 pontos mais óbvios de P'.

$y=\frac{1}{x}$

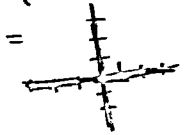
$\Rightarrow$

x	y
-2	$-1/2$
-1	-1
$-1/2$	-2
0	∞ ou !!
$1/2$	2
1	1
2	$1/2$

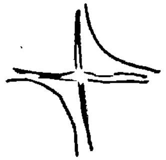
$\Rightarrow$



$H_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$ =



Repare:



$u^2+v^2=1$

$(x-2)^2+(x+y)^2=1$

$(2-2)^2+(2+y)^2=1$

$0^2+y^2+4y+4=1$

$y^2+4y+3=0$

$y=-1$

$y=-3$

$u=x-2$

$0=x-2$

$x=2$

$\Big\}$ $v=$

Queremos encontrar quatro pontos que obedeçam isto:

$u^2+v^2=1$.

Idéia:

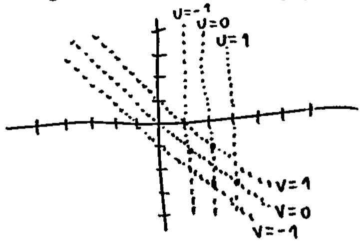
$(u,v)=(1,0)$, $\Rightarrow (x,y)=(3,-3)$

$(u,v)=(-1,0)$, $\Rightarrow (x,y)=(1,-1)$

$(u,v)=(0,1)$, $\Rightarrow (x,y)=(2,-1)$

$(u,v)=(0,-1)$ $\Rightarrow (x,y)=(2,-3)$

Graficamente: como $u=x-2$ e $v=x+y$,



Obs: dá pra encontrar x e y resolvendo um sistema! P.ex.: se $u=-1$ e $v=0$ então $-1=x-2$ e $0=x+y$, então:

Queremos encontrar seis pontos que obedeçam isto:

$uv=1$.

Idéia:

$(u,v)=(-2,-1/2)$

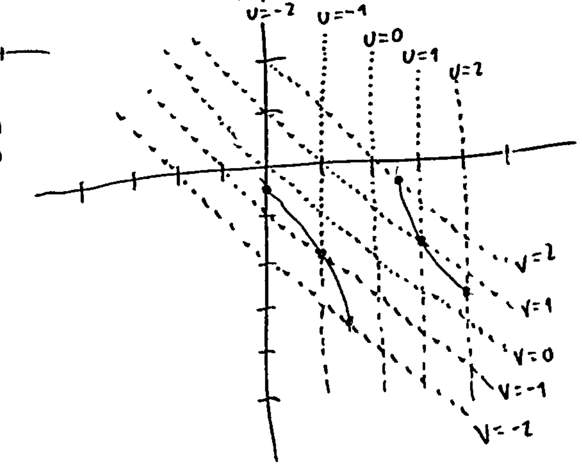
$(u,v)=(-1,-1)$

$(u,v)=(-1/2,-2)$

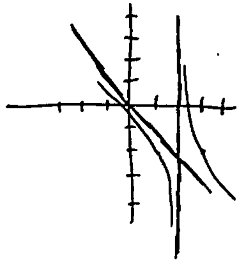
$(u,v)=(1/2,2)$

$(u,v)=(1,1)$

$(u,v)=(2,1/2)$



Uma idéia auxiliar pra hipérboles: desenhar $uv=0$.



GA 14/JUN/2017

HOJE: UM MÉTODO VISUAL PRA GENTE ENTENDER CÔNICAS TORTAS...

SE ALGUÉM QUISER ENTENDER A VERSÃO ALGÉBRICA DESSE MÉTODO VEJA A FOLHA 20.

EU NÃO RECOMENDO QUE VOCÊS TENTEM RESOLVER OS PROBLEMAS DE HOJE POR CONTAS AO INVÉS DE GRÁFICOS E OLHÔMETRO.

QUEM NÃO APRENDER O MÉTODO VISUAL PROVAVELMENTE VAI SE FERRAR NA P2 MAS AÍ NÃO É PROBLEMA MEU.

OBS: TODOS OS LIVROS QUE TRATAM DE CÔNICAS USAM MUITO ESSAS COORDENADAS AQUI PRA HIPÉRBOLES:

$u = x + \frac{y}{a}$

$v = x - \frac{y}{a}$,

E

$u = y + \frac{x}{a}$,

$v = y - \frac{x}{a}$

LEMBREM QUE:

$E: x^2+y^2-1=0 \quad (x^2+y^2=1)$

$H: xy-1=0 \quad (xy=1 \sim y=\frac{1}{x})$

$P: x^2-y=0 \quad (y=x^2)$

E (NOVIDADE):

$H_0: xy=0$

$H_K: xy-K=0$

VERSÕES TORTAS:

$E': u^2+v^2-1=0 \quad (u^2+v^2=1)$

$H': uv-1=0 \quad (uv=1)$

$P': u^2-v=0 \quad (v=u^2)$

$H'_K: uv-k=0 \quad (uv=k)$

REPARE QUE ESTES "PONTOS ÓBVIOS" DE E, H, P,

EM E:

$(x,y)=(-1,0)$

$(x,y)=(1,0)$

$(x,y)=(0,1)$

$(x,y)=(0,-1)$

EM H:

$(x,y)=(-2,-\frac{1}{2})$,

$(x,y)=(-1,-1)$,

$(x,y)=(-\frac{1}{2},-2)$,

$(x,y)=(\frac{1}{2},2)$

$(x,y)=(1,1)$,

$(x,y)=(2,\frac{1}{2})$

... CORRESPONDEM A ESTES "PONTOS ÓBVIOS" DE E', H', P':

EM E':

$(u,v)=(-1,0)$,

$(u,v)=(1,0)$,

$(u,v)=(0,1)$,

$(u,v)=(0,-1)$

EM H':

$(u,v)=(-2,-\frac{1}{2})$,

$(u,v)=(-1,-1)$,

$(u,v)=(-\frac{1}{2},-2)$,

$(u,v)=(\frac{1}{2},2)$,

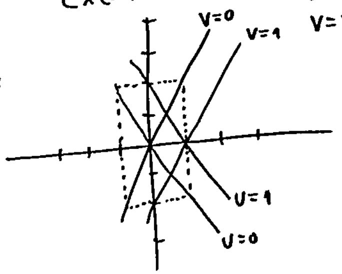
$(u,v)=(1,1)$,

$(u,v)=(2,\frac{1}{2})$.

TRUQUE:

DESENHE AS RETAS $u=0$, $u=1$, $v=0$, $v=1$ (ELAS VÃO DEPENDER DO SISTEMA DE COORDENADAS EM QUE VOCÊ ESTÁ!), DEPOIS DESENHE $u=-1$, $v=-1$, E OUTRAS SE NECESSÁRIO. USE ESTAS RETAS PRA ENCONTRAR OS "PONTOS ÓBVIOS" DE E', H', P'.

EXEMPLO:



$u = x + \frac{y}{2}$

$v = x - \frac{y}{2}$

MAIS TRUQUES:

1) A "HIPÉRBOLE DEGENERADA" $xy=0$ É A UNIÃO DAS RETAS $x=0$ E $y=0$.

2) A HIPÉRBOLE DEGENERADA $H_0: xy=0$ DÁ AS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE $H: xy=1$.

3) PRA GENTE REPRESENTAR GRAFICAMENTE UM CONJUNTO COMO

$S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y+\frac{x}{3})(y-\frac{x}{3})=1\}$

A GENTE PODE INVENTAR COORDENADAS u E v QUE NOS AJUDEM:

$S: \underbrace{(y+\frac{x}{3})}_{u}\underbrace{(y-\frac{x}{3})}_{v}=1$

E USAR O MÉTODO ANTERIOR PRA ENCONTRAR OS PONTOS ÓBVIOS DE $uv=1$. EXERCÍCIO.

OBS: OS EXERCÍCIOS DA LISTA 5 DA ANA ISABEL SÓ USAM x E y — VOCÊ VAI TER QUE ENCONTRAR AS COORDENADAS u E v VOCÊ MESMO.

PRÓXIMOS PASSOS:

POLINÔMIOS...

UM POLINÔMIO DE GRAU 3 EM x E y É UMA EXPRESSÃO DA FORMA

$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}x^iy^j \quad (\star)$

ONDE $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

EXEMPLO:

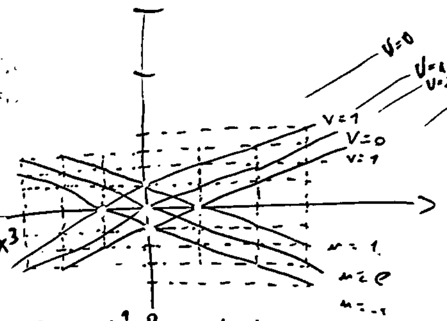
$1+2x+3x^2+x^3 + 5y^2x^3$

$(\star) = a_{00}x^0y^0 + a_{10}x^1y^0 + \dots$ (1,0)

$+ a_{01}x^0y^1 + a_{11}x^1y^1 + \dots$

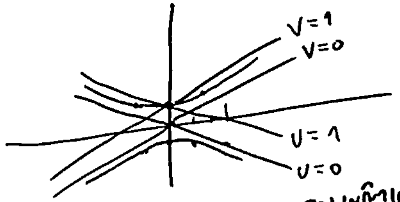
$+ \dots$

$+ a_{03}x^0y^3 + \dots$



$v = y - \frac{x}{3}$

$u = y + \frac{x}{3}$



COISAS COMO $(y+\frac{x}{3})(y-\frac{x}{3})-1$ SÃO POLINÔMIOS DE GRAU 2 "DISFARÇADOS"...

$y^2 - \frac{x^2}{9} - 1 = 0$

GA 21/JUNHO/2017

HOJE:
CÔNICAS ↔ POLINÔMIOS!

LEMBREM QUE UM POLINÔMIO DE 2º GRAU EM X E Y É UMA EXPRESSÃO

$P(x,y) = a_{00}x^0y^0 + a_{10}x^1y^0 + a_{20}x^2y^0 + a_{01}x^0y^1 + a_{11}x^1y^1 + a_{21}x^2y^1 + a_{02}x^0y^2 + a_{12}x^1y^2 + a_{22}x^2y^2$,

ONDE CADA a_{ij} É UM NÚMERO...

ISTO PROÍBE QUE A GENTE FAÇA, POR EXEMPLO, $a_{22} = x^3$.

VÁRIAS EXPRESSÕES QUE A GENTE USA SÃO EQUIVALENTES A POLINÔMIOS — P.EX.:

$F(x,y) = (x+y)^2 - x^2$.

CÔNICAS SÃO COISAS MENOS GERAIS QUE POLINÔMIOS:

$G(x,y) = ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2$

REPARE QUE A GENTE JÁ SABE REPRESENTAR GRAFICAMENTE VÁRIOS CONJUNTOS DA FORMA $G(x,y) = 0$, ONDE $G(x,y)$ É UMA CÔNICA...

MAS A GENTE AINDA NÃO VIU TODOS OS CASOS! VIMOS
- ELIPSES,
- HIPÉRBOLES,
- PARÁBOLAS,

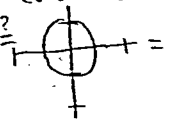
MAS E ESTES CASOS AQUI?

a) $2x + 3y - 1 = 0$
b) $0x + 0y = 0$
c) $0x + 0y - 4 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
f) $(x-2)(x-2) = 0$
g) $(x-2)(y-3) = 0$

$S_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y - 1 = 0\}$

DICA:
CHUTEM E TESTEM.

POR EXEMPLO, ESCREVA ALGO COMO ISTO:

$S_d \overset{?}{=}$  $= S_d'$

O "?" É MUITO IMPORTANTE

UM NOME PRO CONJUNTO QUE VOCÊ DESENHOU; VEJA AS FOLHAS 1 E 2!

$(1,0) \in S_d'$ (PELO GRÁFICO)

MAS $(1,0) \notin S_d$ (PORQUE $1^2 + 0^2 = 0$ É FALSO)

ENTÃO $S_d \neq S_d'$.

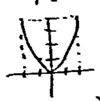
OBS: NOS LIVROS O TERMO "CÔNICA" É AMBÍGUO... ELE PODE QUERER DIZER TANTO O POLINÔMIO
$ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2$
QUANTO O CONJUNTO
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2\}$.

VAMOS FAZER DIAGRAMAS PARECIDOS COM ESTE VÁRIAS VEZES:

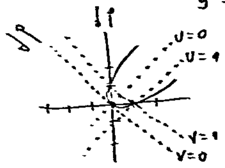
(EXPRESSÃO EQUIVALENTE A CÔNICA) ⇄ (CÔNICA)
⇅
(REPRESENTAÇÃO GRÁFICA)

POR EXEMPLO:

$y = x^2 \rightleftharpoons x^2 - y = 0$



$\underbrace{(x+y)}_{V} = \underbrace{(x-y)^2}_{U} \rightleftharpoons -x^2 + x + 0 + 2xy + y - y^2 = 0$

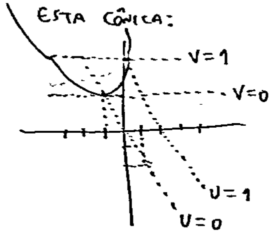


$(x+y) - (x-y)^2 = 0$

$(x+y) - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$

$-x^2 + x + 0 + 2xy + y - y^2 = 0$

EXERCÍCIO:
ENCONTRE UMA EQUAÇÃO PARA ESTA CÔNICA:



$V = \frac{y-2}{2}$

$U = \frac{2x+y}{4}$

E TESTE A SUA EQUAÇÃO, DA SEGUINTE FORMA: ENCONTRE TRÊS PONTOS DESSA PARÁBOLA TORTA E VERIFIQUE QUE ELES OBEDECEM A SUA EQUAÇÃO.

TEOREMÃO (NÃO VOU DEMONSTRAR):

O CONJUNTO-SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DESTA FORMA,

$ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2 = 0$

É SEMPRE OU:
1) UMA RETA
2) DUAS RETAS (PARALELAS OU NÃO)
3) O CONJUNTO VAZIO
4) UM PONTO
5) $\mathbb{R}^2$

} CÔNICAS DEGENERADAS

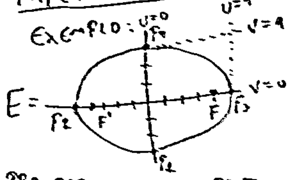
6) UMA ELIPSE $U^2 + V^2 = 1$
7) UMA PARÁBOLA $V = U^2$
8) UMA HIPÉRBOLE $UV = 1$

} NÃO-DEGENERADAS

ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE ELIPSES, HIPÉRBOLES E PARÁBOLAS

EXEMPLO:

$U = x/5$
$V = y/3$

$E =$ 

$E: U^2 + V^2 = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

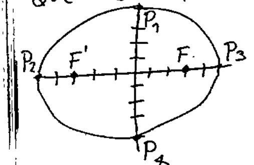
PRA CADA UM DESTES PONTOS, CALCULE:

P	d(P,F)	d(P,F')	d(P,F)+d(P,F')
$P_1 = (0,3)$	5	5	10
$P_2 = (-5,0)$			
$P_3 =$			
$P_4 =$			

GA 26/JUN/2017

HOJE: A CONTA MAIS DIFÍCIL DO CURSO (E COMO EVITÁ-LA)!

NO FIM DA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE NESTA FIGURA



TEMOS $d(P,F)+d(P,F')=10$
PARA $P=P_1$,
$P=P_2$,
$P=P_3$,
$P=P_4$.

NÓS JÁ VIMOS COMO RESOLVER ALGUNS PROBLEMAS ENVOLVENDO DISTÂNCIAS... EM TODOS OS CASOS A GENTE ELEVAVA AS COISAS AO QUADRADO PRA SE LIVRAR DAS "$\sqrt{\ }$"S.

SEJA $S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,\underset{(3,0)}{\underset{\shortparallel}{F}})+d(P,\underset{(-3,0)}{\underset{\shortparallel}{F'}})=10\}$

TRUQUE: (OBS: $A\geq 0, B\geq 0$)

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$$
$$\Rightarrow (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2=C^2$$
$$\sqrt{A}^2+2\sqrt{A}\sqrt{B}+\sqrt{B}^2=C^2$$
$$A+2\sqrt{AB}+B=C^2$$
$$2\sqrt{AB}=C^2-A-B$$
$$\Rightarrow (2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$$
$$4AB = C^2(C^2-A-B) - A(C^2-A-B) - B(C^2-A-B)$$
$$= C^4-AC^2-BC^2 - AC^2+A^2+AB - BC^2+AB+B^2$$
$$= C^4-2AC^2-2BC^2+A^2+2AB+B^2$$
$$0 = C^4-2AC^2-2BC^2+A^2-2AB+B^2$$
$$= C^2(C^2-2A-2B)+(A-B)^2$$

CASO PARTICULAR:

$$d((x,y),(3,0))+d((x,y),(-3,0))=10$$
$$\underbrace{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}_{A}+\underbrace{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}_{B}=\underbrace{10}_{C}$$
$$\Rightarrow 0=C^2(C^2-2A-2B)+(A-B)^2$$

(OBS: $A=x^2-6x+9+y^2$
$B=x^2+6x+9+y^2$
$A+B=2x^2+18+2y^2$
$A-B=-12x$)

$$\Rightarrow 0=C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2$$
$$=10^2(10^2-2(2x^2+18+2y^2))+(-12x)^2$$
$$=10000-200(2x^2+18+2y^2)+144x^2$$
$$= -400x^2 -400y^2+144x^2 +10000 -3600$$
$$0 = -256x^2-400y^2+6400$$
$$256x^2+400y^2=6400$$
$$16x^2+25y^2=400$$
$$x^2+\frac{25}{16}y^2=25$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$
$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$$

ESSE TRUQUE FUNCIONA PARA QUAISQUER $F,F'\in\mathbb{R}^2$ E QUALQUER $k\in\mathbb{R}$...
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),F)+d((x,y),F')=k\}$
SEMPRE DÁ UMA ELIPSE!

TRUQUE (VARIAÇÃO): (OBS: $A,B\geq 0$)

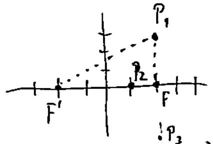
$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$$
$$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=C^2$$
$$A-2\sqrt{AB}+B=C^2$$
$$-2\sqrt{AB}=C^2-A-B$$
$$\Rightarrow (-2\sqrt{AB})^2=(C^2-A-B)^2$$
$$4AB=(C^2-A-B)^2$$

OLHA:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{A}-\sqrt{B}=C\\ \Rightarrow 0=C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2\end{array}}$$

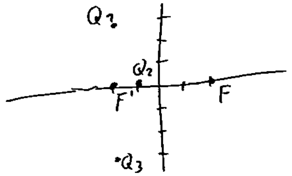
(MESMA EQUAÇÃO QUE A ANTERIOR!)

CASO PARTICULAR:



$d(P_1,F')-d(P_1,F)=2$
$d(P_2,F')-d(P_2,F)=2$
$d(P_3,F')-d(P_3,F)=2$ $P_3=(2,-3)$

AGORA CALCULEM $d(Q,F')-d(Q,F)$
PARA $Q=Q_1=(-2,3)$,
$Q=Q_2=(-1,0)$,
$Q=Q_3=(-2,-3)$...

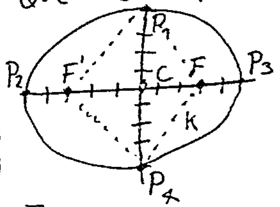


ESTE TRUQUE FUNCIONA PARA QUAISQUER $F,F'\in\mathbb{R}^2$ E $k\in\mathbb{R}$...
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),F')-d((x,y),F)=k\}$
DÁ UM DOS RAMOS DE UMA HIPÉRBOLE, E
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),F')-d((x,y),F)=\pm k\}$
DÁ UMA HIPÉRBOLE.

$\boxed{\text{GA 26/jun/2017}}$

Hoje: a conta mais difícil do curso (e como evitá-la)!

No fim da aula passada nós vimos que nesta figura



Temos $d(P,F)+d(P,F')=10$ para $P=P_1$, $P=P_2$, $P=P_3$, $P=P_4$.

$$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)+d(P,F')=2k\}$$

Como evitar essas contas complicadas?

A gente já sabe que S é uma elipse...

Se a gente encontrar os 4 "pontos óbvios" dessa elipse a gente consegue descobrir o centro dela, esboçá-la, e obter a equação dela...

Repare que $d(P_1,F)=d(P_1,F')=k$

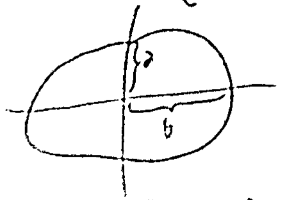
e $d(P_4,F)=d(P_4,F')=k$

$$\underbrace{d(P_2,F)}_{=\,d(P_3,F')}+d(P_2,F')=2k$$

$d(P_3,F')+d(F',P_2)=$

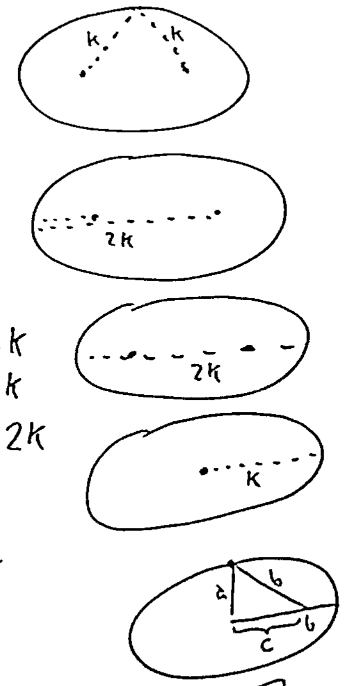
$d(P_3,P_2)$.

Uma elipse não tem um "raio" como um círculo... mas ela tem um "raio menor", a, e um "raio maior", b...



No exemplo, $a=4$ e $b=5$.

Como é que a gente encontra os focos da elipse e o k?

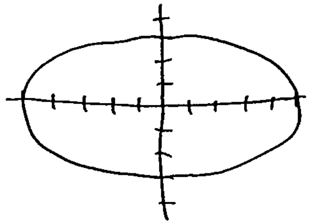


$c=\sqrt{b^2-a^2}$

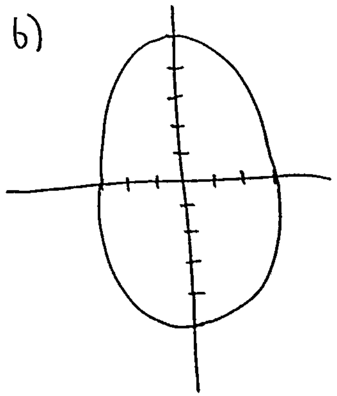
Exercícios:

1. Encontre os focos e o k destas elipses:

a)



b)

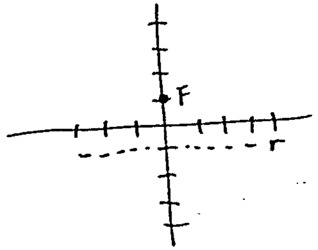


2. Represente graficamente as seguintes elipses degeneradas:

a) $d(P,(0,0))+d(P,(0,0))=10$

b) $d(P,(5,0))+d(P,(-5,0))=10$

Agora sejam:

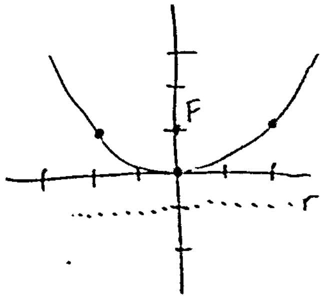


$r: y=-1$

$F=(0,1)$

$$S=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,F)=d(P,r)\}$$

Três pontos óbvios de S:



S vai ser uma parábola!!!

GA 28/JUN/2017

HOJE: ÚLTIMAS COISAS SOBRE CÔNICAS; PONTOS E VETORES EM $\mathbb{R}^3$.

NO FINAL DA AULA PASSADA EU DISSE QUE

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x,y),(0,1)) = d((x,y), r)\}$ $r: y=-1$

É UMA PARÁBOLA. QUAL?

LEMBRE QUE AS PARÁBOLAS MAIS SIMPLES SÃO AS DA FORMA $y = ax^2$.

$$d((x,y),(0,1))^2 = d((x,y),r)^2$$

$$x^2+(y-1)^2 \qquad (y+1)^2$$

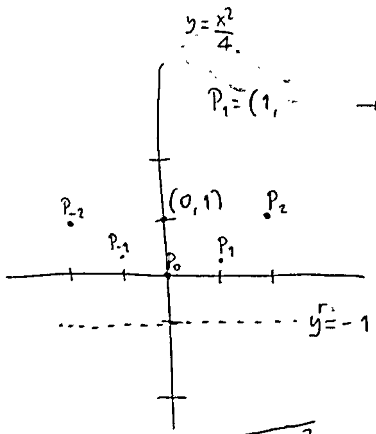
$$x^2+y^2-2y+1 \qquad y^2+2y+1$$

$$x^2-4y=0$$

$$x^2=4y$$

$$y=\frac{x^2}{4}$$

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$



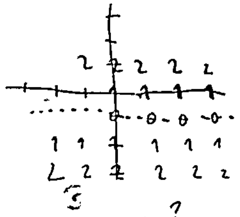
$$d((x,y),(0,1)) = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$d((x,y),(0,1))^2 = x^2+(y-1)^2$$

$$d((x,y),r) = \sqrt{(y+1)^2}$$

$$d((x,y),r)^2 = (y+1)^2$$

$$F(x,y) = d((x,y),r)$$



x	y	$F(x,y)$
0	0	

$$F(x,y) \overset{?}{=} x+y$$

$$F(x,y) \overset{?}{=} y+1 \quad \text{(FALHA PARA } y=-2\text{)}$$

$$F(x,y) \overset{?}{=} (y+1)^2$$

$$F(x,y) \overset{?}{=} \sqrt{y+1}$$

$$F(x,y) = |y+1|$$

$$F(x,y) = \sqrt{(y+1)^2}$$

DÁ PRA FAZER TRUQUES PARECIDOS PRA CONVERTER EQUAÇÕES DA FORMA

$$d(P,F) = \alpha\, d(P,r)$$

OU

$$d(P,F) = \beta\, d(P,F')$$

EM CÔNICAS.

<u>UM TRUQUE IMPORTANTE</u>

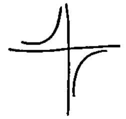
LEMBRE QUE UMA CÔNICA É O CONJUNTO-SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DA FORMA

$$ax^2+bx+c+dxy+ey+fy^2=0\ldots$$

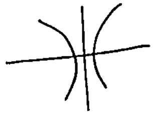
DÁ PRA DETERMINAR SE ESSE CONJUNTO É UMA: ELIPSE, HIPÉRBOLE OU PARÁBOLA (TALVEZ DEGENERADOS) OLHANDO SÓ PRA $ax^2+dxy+fy^2$.

LEMBREM QUE AS ELIPSES QUE A GENTE VIU (COM UM EIXO HORIZONTAL E UM VERTICAL) TÊM $a>0$, $d=0$, $f>0$...

E A GENTE VIU DOIS TIPOS DE HIPÉRBOLES:



$xy=1 \Rightarrow a=0,\ d=1,\ f=0$



$(\alpha x+\beta y)(\alpha x-\beta y)=1$

$\Rightarrow a>0,\ d=0,\ f<0$.

<u>TRUQUE:</u>

LEMBREM DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU...

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$\Delta>0 \Rightarrow$ 2 SOLUÇÕES DIFERENTES (REAIS)

$\Delta=0 \Rightarrow$ 2 SOLUÇÕES IGUAIS

$\Delta<0 \Rightarrow$ 0 SOLUÇÕES REAIS

SE A GENTE FIZER ALGO PARECIDO AQUI,

$$ax^2+dxy+fy^2=0$$

$$\Delta = d^2-4af$$

$\Delta>0 \Rightarrow$ 2 SOLUÇÕES DIFERENTES PRA x (REAIS) $\Rightarrow$ HIPÉRBOLE

$\Delta=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ PARÁBOLA

$\Delta<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ELIPSE

(TRUQUE: PENSE EM $y=1$)

(OBS: PODEM SER DEGENERADAS).

SUGESTÃO: PROCUREM NAS LISTAS DA ANA ISABEL OS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM DETERMINAR SE UMA CÔNICA É HIPÉRBOLE, ELIPSE OU PARÁBOLA.

GA 28/JUN/2017

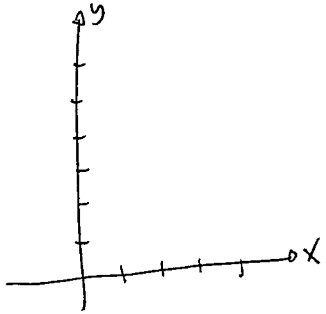
Hoje: últimas coisas sobre cônicas; pontos e vetores em $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3$

Aviso: A gente não vai representar coisas em 3D usando os métodos de GD porque não dá tempo.

Na P2 vocês não vão ter que desenhar coisas em $\mathbb{R}^3$, mas vocês vão precisar saber visualizar $\mathbb{R}^3$ bem...

$\mathbb{R}^3$:



Pontos e vetores em $\mathbb{R}^3$:

$(2,3,4)$ é um ponto em $\mathbb{R}^3$

$\overrightarrow{(5,6,7)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$.

E todas as operações que a gente aprendeu com vetores continuam valendo...

(Exceção: a idéia de "rodar um vetor 90°" $(3,1) \mapsto (-1,3)$ não vai funcionar em $\mathbb{R}^3$)

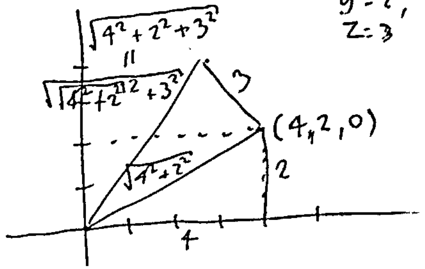
Em particular:

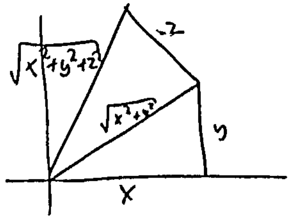
$$d((a,b,c),(d,e,f)) = \|\overrightarrow{(a,b,c)(d,e,f)}\| = \|\overrightarrow{(d-a,e-b,f-c)}\| = \sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}$$

$$d((0,0,0),(x,y,z)) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Porque é que isso dá a distância?

P.ex: $x=4$, $y=2$, $z=3$





$\overrightarrow{(a,b,c)} \perp \overrightarrow{(d,e,f)}$ se e só se $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = 0$

Retas em $\mathbb{R}^3$

Idéia: a reta que passa por A e B é:

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Exercício: Visualize as retas abaixo e confira com os seus colegas (teste se o seu modo de explicar e gesticular funciona!)

$r_a = \{(2,1,0) + t\overrightarrow{(0,3,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_b = \{(1,1,0) + t\overrightarrow{(0,0,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_c = \{(0,2,2) + t\overrightarrow{(1,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_d = \{(0,2,2) + t\overrightarrow{(1,-1,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Planos em $\mathbb{R}^3$

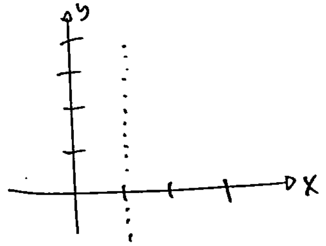
Em $\mathbb{R}^2$ retas tinham equações...

Em $\mathbb{R}^3$ um conjunto desta forma

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$$

é um plano.

$\pi_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$



$\pi_b: y = 2$

$\pi_c: z = 3$

$\pi_a \cap \pi_b$ é uma reta. Qual?

E $\pi_a \cap \pi_c$?

E $\pi_b \cap \pi_c$?

GA 3/JUL/2017

ANTES DA GENTE (RE)VER COM DETALHES A PARTE MAIS FÁCIL DA MATÉRIA DE $\mathbb{R}^3$ — PONTOS E RETAS — DEIXA EU FAZER UMA INTRODUÇÃO À PARTE QUE ENVOLVE UMA OPERAÇÃO BIZZARRA — O "PRODUTO CRUZADO" OU "PRODUTO VETORIAL", $\times$ — E ÀS APLICAÇÕES DELE.

A GENTE VAI PRIMEIRO APRENDER A CALCULAR E A VISUALIZAR O "$\times$" NOS CASOS MUITO FÁCEIS E NOS CASOS FÁCEIS.

IDÉIAS PRINCIPAIS:

$\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)}$
$\vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)}$
$\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ | $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ | $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ | $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

ORDEM "NATURAL": $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ EM ORDEM, TALVEZ RODADOS

"ORDEM INVERSA"

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$
$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$
$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

ESSE PRODUTO É DISTRIBUTIVO —

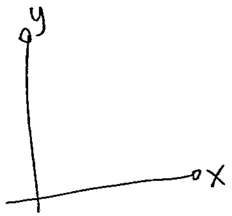
$(\vec{u} + \vec{u}') \times (\vec{v} + \vec{v}') =$
$\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}' +$
$\vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u}' \times \vec{v}'$

É ANTI-COMUTATIVO:

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

E TAMBÉM:

$(a\vec{u}) \times (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \times \vec{v})$



EXERCÍCIOS:

a) $\underbrace{\overrightarrow{(4,0,0)}}_{4\vec{i}} \times \underbrace{\overrightarrow{(0,3,0)}}_{3\vec{j}} = 4 \cdot 3\,(\vec{i} \times \vec{j}) = 12\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,12)}$

b) $\overrightarrow{(0,2,0)} \times \overrightarrow{(0,0,-5)} = \overrightarrow{(-10,0,0)}$

c) $\overrightarrow{(0,0,5)} \times \overrightarrow{(0,3,0)} = (5 \cdot 3)(\vec{k} \times \vec{j}) = 15(-\vec{i}) = -15\vec{i} = \overrightarrow{(-15,0,0)}$

d) $\overrightarrow{(0,0,5)} \times \overrightarrow{(4,0,0)} =$

e) $\overrightarrow{(0,0,5)} \times \overrightarrow{(0,0,4)} =$

NOS PRÓXIMOS EXERCÍCIOS VOCÊ VAI PRECISAR USAR A DISTRIBUTIVIDADE...

f) $\overrightarrow{(4,0,0)} \times \overrightarrow{(0,3,2)} =$
$4\vec{i} \times (3\vec{j} + 2\vec{k}) =$
$(4 \cdot 3)(\vec{i} \times \vec{j}) + (4 \cdot 2)(\vec{i} \times \vec{k}) =$

g) $\overrightarrow{(0,2,0)} \times \overrightarrow{(3,0,4)} =$

h) $\overrightarrow{(0,2,0)} \times \overrightarrow{(3,4,0)} =$

TODOS OS TRUQUES PRA CALCULAR $\vec{u} \times \vec{v}$ RÁPIDO SE BASEIAM NESTA IDÉIA AQUI:

$\overrightarrow{(a,b,c)}$
$\times \overrightarrow{(d,e,f)} =$
$(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$
$\times (d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}) =$
$bf\vec{i} + cd\vec{j} + ae\vec{k}$
$- ce\vec{i} - af\vec{j} - bd\vec{k} =$
$(bf-ce)\vec{i} + (cd-af)\vec{j} + (ae-bd)\vec{k} =$
$\overrightarrow{(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}$

$\vec{u} \times \vec{v} =$
$\overrightarrow{(u_1, u_2, u_3)} \times$
$\overrightarrow{(v_1, v_2, v_3)} =$
$\overrightarrow{(u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)}$

MÃO DIREITA:

TEOREMA:

$\vec{u} \times \vec{v}$ É SEMPRE UM VETOR (NOME: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$)

ORTOGONAL A $\vec{u}$ E $\vec{v}$ ($\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$), } DIREÇÃO

COM $\|\vec{w}\|$ = ÁREA DO PARALELOGRAMO FORMADO POR $\vec{u}$ E $\vec{v}$, } COMPRIMENTO

E O SENTIDO DE $\vec{w}$ É ESTE AQUI: } SENTIDO

OBS. EM QUASE TODAS AS APLICAÇÕES (FOLHA 34) A DIREÇÃO E O COMPRIMENTO SÃO IMPORTANTES MAS O SENTIDO NÃO.

AGORA DEIXA EU EXPLICAR PORQUE ESSE TEOREMA É VERDADE...

REVISÃO DE DETERMINANTES:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$ (ÁREA)

$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 \\ -u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 \end{matrix}$ (VOLUME)

$\| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \|$ ⇦ NOTAÇÃO NOVA: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} -\vec{u}- \\ -\vec{v}- \\ -\vec{w}- \end{pmatrix}$

GRANDE TRUQUE:

$\vec{u} \times \vec{v}$ PODE SER ENTENDIDO COMO "UM PEDAÇO (DA CONTA) DO DETERMINANTE" —

$\| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \| = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)} \cdot \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}$

$=$

GA 3/JUL/2017

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE DO DETERMINANTE

Em $\mathbb{R}^2$:

$$\left|[\vec{u},\vec{v}]\right| = \left|[\vec{u},\vec{v}+\vec{u}]\right|$$

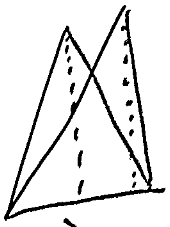
$$\left|[\vec{u},\vec{v}]\right| = \left|[\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}]\right|$$

$$\left|[\vec{u},\vec{v}]\right| = \left|[u+b\vec{v},\vec{v}]\right|$$

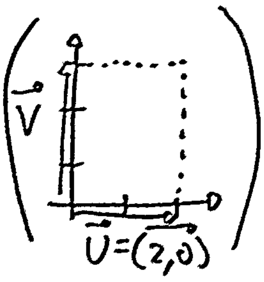
EXERCÍCIO: VISUALIZE ISTO (DESENHE OS PARALELOGRAMOS!) NOS SEGUINTES CASOS:

a) $\vec{u}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,3)}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$

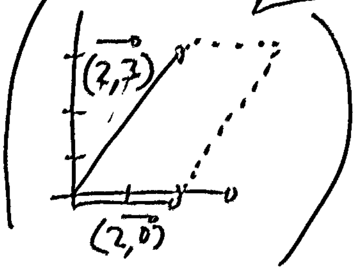
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$



ÁREA



= ÁREA

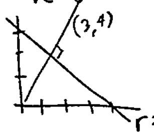


GA 10/jul/2017

Plano pra aula de hoje e pra de quarta: vamos nos concentrar nos métodos da p.34... vamos tentar fingir que o resto (p.ex., como encontrar dois pontos diferentes na interseção de dois planos) é "óbvio" e a gente vai deixar pra discutir isso em detalhes nas aulas extras.

Algumas coisas básicas

"Vetor normal":



$r: \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}-1=0$

$(\frac{1}{4},\frac{1}{3})\cdot(x,y)=1$

$3x+4y=12$

$(3,4)\cdot(x,y)=12$

"vetores normais" à reta (perpendicular!!)

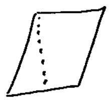
Não esqueçam de devolver a prova — quem não devolver fica com zero !!

Vetor normal em $\mathbb{R}^3$

Seja $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{ax+by+cz=d}_{(a,b,c)\cdot(x,y,z)}\}$

"vetor normal" — perpendicular ao plano π.

Quase todos os métodos da p.34 são baseados na gente construir "cubos tortos" e descobrir a "altura" desses cubos da mesma forma que a gente podia medir alturas de triângulos...



Área do triângulo = $\frac{1}{2}$ base · altura

Área de um paralelogramo = base · altura

Cubos tortos: "altura" = $\frac{\text{volume}}{\text{área da base}}$.

$\boxed{\text{Grande truque pra estudar \& entender os métodos da p.34: Comece com um caso particular simples e vá complicando ele} \uparrow \text{entortar}}$

P.34:

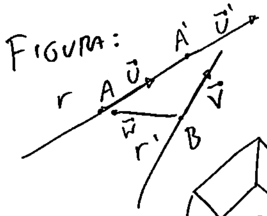
Método 4:

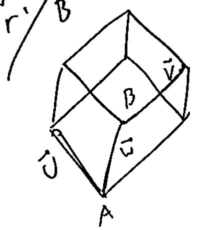
Digamos que $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\} = \{A'+t\vec{u}' \mid t\in\mathbb{R}\}$

$r'=\{B+t'\vec{v} \mid t'\in\mathbb{R}\}$

e $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$

Figura:





Exemplos:

① $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $B=(0,0,2)$, $\vec{v}=(0,3,0)$

② $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $B=(0,0,2)$, $\vec{v}=(2,3,0)$

③ $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,1,0)$, $\vec{v}=(1,0,2)$

$\vec{w}=(0,0,2)$

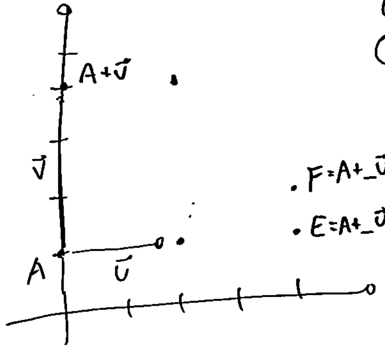
Método 5:

Exemplos:

① $A=(0,1,0)$, $B=(2,1,0)$, $C=(0,4,0)$, $D=(0,1,5)$

② $A=(0,1,0)$, $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$

③ $A=(0,1,0)$, $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(3,1,2)$



Método 6:

Sejam

$r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$r'=\{B+t'\vec{v} \mid t'\in\mathbb{R}\}$

$B=A+\vec{w}$, i.e., $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$.

$d(r,r')=?$

$\pi=\{A+t\vec{u}+t'\vec{v} \mid t,t'\in\mathbb{R}\}$

$\pi'=\{B+t\vec{u}+t'\vec{v} \mid t,t'\in\mathbb{R}\}$

$d(\pi,\pi')=?$

$\boxed{\text{Em que pontos } r \text{ e } r' \text{ são mais próximas?}}$

Exemplos:

① $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $B=(0,0,2)$, $\vec{v}=(0,3,0)$, $\vec{w}=(0,-1,2)$

· $F=A+\_\vec{u}+\_\vec{v}$

· $E=A+\_\vec{u}+\_\vec{v}$

t	t'	$A+t\vec{u}+t'\vec{v}$
0	0	(0,1,0)
1	0	(2,1,0)
0	1	(0,4,0)
1	1	(2,4,0)

② $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $B=(1,3,0)$, $\vec{v}=(0,3,0)$

③ $A=(0,1,0)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $B=(1,0,3)$, $\vec{v}=(0,3,0)$

GA 11/Jul/2017

Problema: (aula de dúvidas)

Represente graficamente a parábola

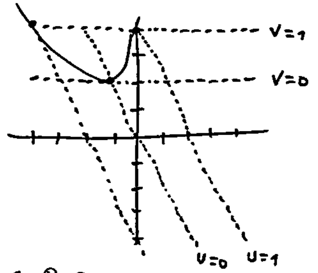
$V = U^2$,

onde $U = \frac{2x+y}{4}$

e $V = \frac{y-2}{2}$.

OBS: A parábola é

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\frac{y-2}{2}}_{V} = \Big(\underbrace{\frac{2x+y}{4}}_{U}\Big)^2 \right\}.$$



... e represente graficamente

$$S' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \Big(\underbrace{\frac{y-2}{2}}_{V}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{2x+y}{4}}_{U}\Big)^2 = 1 \right\}$$

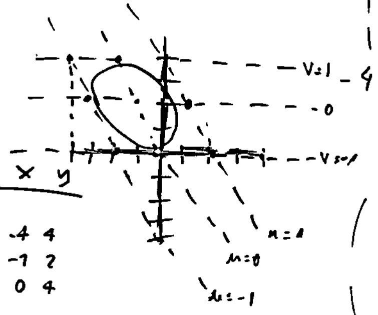
e $$S'' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \Big(\underbrace{\frac{y-2}{2}}_{V}\Big)\Big(\underbrace{\frac{2x+y}{4}}_{U}\Big) = 1 \right\}$$

$u^2+v^2=0$	$x^2+y^2=0$
$u^2+v^2=1$	$x^2+y^2=1$
$u^2+v^2=4$	$x^2+y^2=4$

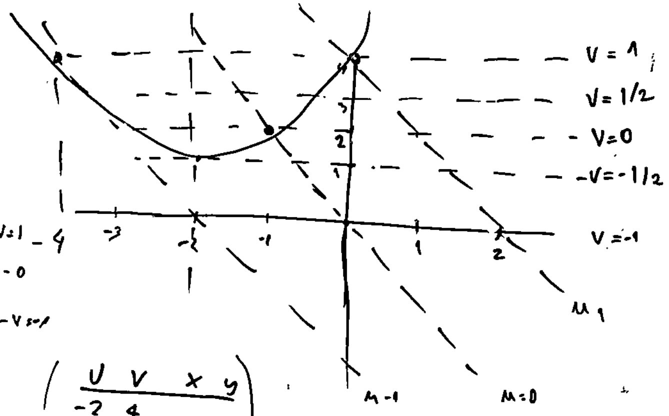
$xy=0$	$uv=0$
$xy=1$	$uv=1$
$xy=2$	$uv=2$

$$(\underbrace{x+y}_{U}) \cdot (\underbrace{2+y}_{V}) = 0$$

U	V	x	y
-2	4		
-1	1	-4	4
0	0	-1	2
1	1	0	4
2	4		

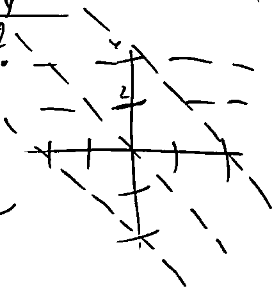


U	V	x	y
-2	4		
-1	1	-4	4
0	0		
1	1	-1	2
2	4	0	4



u	v	x	y
1	0	1	2
0	1	2	4
-1	0	-3	2
0	-1	-2	4

u	v	x	y
-1/2	-2		
1	1		
1/2	2		



Correto

OK!

$$(\overrightarrow{a,b,c}) \cdot (\overrightarrow{x,y,z}) + d = 2x + 3y + 4z + 5$$

$a=2$
$b=3$
$c=4$

Encontre a,b,c,d,e,f tais que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix} \quad (*)$$

seja equivalente a

$$U = \frac{2x+y}{4} = \frac{2}{4}x + \frac{1}{4}y + 0 \quad (**)$$

e $$V = \frac{y-2}{2} = 0x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{2} \quad (***)$$

$a = \frac{1}{2}$
$b = \frac{1}{4}$
$c = 0$
$d = \frac{1}{2}$
$e = 0$
$f = -1$

$$\begin{pmatrix} u-e \\ v-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u-e \\ v-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot5-3\cdot4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$u = \frac{2x+y}{4}$

$v = \frac{y-2}{2}$

$v=1$ e $u=1$

$(x,y)=(0,2)$

GA 12/Jul/2017

Importante:

Lembrem que

$\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = \underbrace{ax+by+cz}_{\text{um "escalar"}}$

e

$\overrightarrow{(a,b,c)} \times \overrightarrow{(x,y,z)} = \underbrace{\overrightarrow{(bz-cy,\ cx-az,\ ay-bx)}}_{\text{um vetor}}$

São operações completamente diferentes! A $\vec{u}\cdot\vec{v}$ serve pra calcular normas, testar ortogonalidade, medir ângulos e calcular $Pr_{\vec{u}}\vec{v}$, e a $\vec{u}\times\vec{v}$ serve pras coisas que a gente começou a ver na aula passada.

Algumas idéias importantes que não estão na folha 34:

a) Se π é um plano com vetor normal $\vec{n}$ e $A,B \in \pi$, então $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$;

b) Se $A,B,C \in \pi$ então $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é <u>um</u> vetor normal a π;

c) Se π tem vetor normal $\vec{n}$ e π' tem vetor normal $\vec{n}'$ então $\vec{n}\times\vec{n}'$ é um vetor diretor para $r = \pi \cap \pi'$!

Exerc:

Encontre um vetor normal a cada um dos seguintes planos:

$\pi_a:\ x+y+z=3$

$\pi_b:\ 2x+3y+4z=1$

$\pi_c:\ x-4=0$

Obs: Se $\pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)} = d\}$ então $\overrightarrow{(a,b,c)}$ é um vetor normal a π.

Exercício:

Dê uma parametrização para $r = \pi \cap \pi'$, onde $\pi:\ x+y+z=3$ e $\pi':\ 2x+3y+4z=1$.

(Tem dois jeitos de resolver isto... quais?)

Extra: Expresse a reta r na forma $\{(x,\ ax+b,\ cx+d) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Outra idéia importante que não está na p.34:

Se π tem vetor normal $\vec{n}$ e π' tem vetor normal $\vec{n}'$ então o ângulo entre π e π' é o ângulo entre $\vec{n}$ e $\vec{n}'$.

A P2 de 2016.2 tem várias questões muito boas - acho que vale a pena vôces fazerem ela em casa pra treinar.

A questão 4 dela pode ser usada pra gente treinar o último método que ficou faltando da folha 34...

(4) Sejam $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(1,1,0)$, $D=(1,0,1)$, $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$, $r'=\{C+t'\vec{v} \mid t'\in\mathbb{R}\}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,1,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(0,-1,1)}$

$\vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(1,1,1)}$

$\vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(0,0,1)}$? ⇦ não!

$\vec{w} =$

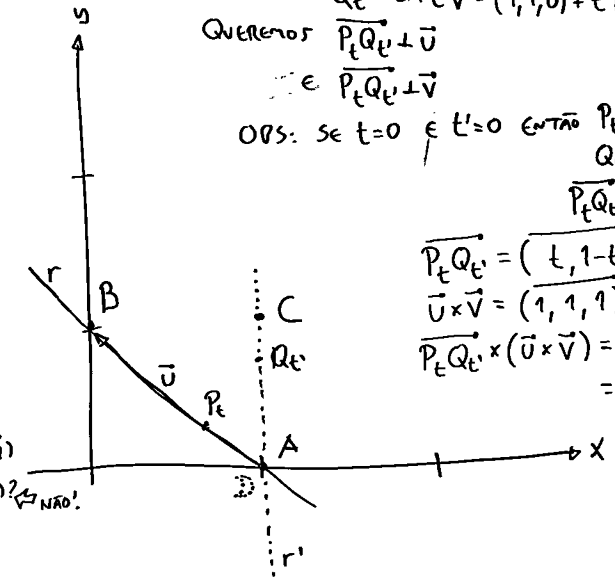
$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$:)

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 1$:(

(a) Demonstre (algebricamente!) que r e r' são reversas, ou, equivalentemente, que A,B,C,D não são coplanares.

(b) Calcule $d(r,r')$.

(c) Digamos que s passa por r e por r', sejam $I \in r \cap s$, $I' \in r' \cap s$, e $s \perp r$ e $s \perp r'$. Encontre as coordenadas de I e I'.



Truque: $P_t = A + t\vec{u} = (1,0,0) + t\overrightarrow{(-1,1,0)} = (1-t,t,0)$

$Q_{t'} = C + t'\vec{v} = (1,1,0) + t'\overrightarrow{(0,-1,1)} = (1,1-t',t')$

Queremos $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} \perp \vec{u}$ e $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} \perp \vec{v}$

⇦ Truque: Queremos $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} \parallel \vec{u}\times\vec{v}$, ou: $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{0}$

Obs: Se $t=0$ e $t'=0$ então $P_t = A = (1,0,0)$, $Q_{t'} = C = (1,1,0)$, $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} = \overrightarrow{(0,1,0)}$ ... :(

$\overrightarrow{P_tQ_{t'}} = \overrightarrow{(t,\ 1-t-t',\ t')}$

$\vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(1,1,1)}$

$\overrightarrow{P_tQ_{t'}} \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(1-t-t'-t',\ t'-t,\ t-(1-t-t'))}$

$= \overrightarrow{(1-t-2t',\ t'-t,\ -1+2t+t')}$

$t'-t=0 \Rightarrow t=t'$

$1-t-2t'=0 \Rightarrow 1-3t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow t'=\frac{1}{3}$

$P_t = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

$Q_{t'} = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$\overrightarrow{P_tQ_{t'}} = \overrightarrow{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})}$