04) $2.(3+4)+5.6 = 2.(3+4)+30$

$$
\begin{aligned}
&= 2.3+2.4+5.6\\
&= 6+2.4+5.6\\
&= 6+8+5.6\\
&= 6+8+30\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= 2.7+30\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
2.(3+4)+5.6 \arrow[r] \arrow[d] & 2.(3+4)+30 \arrow[d] & \\
2.7+5.6 \arrow[r] \arrow[d] & 2.7+30 \arrow[d] & \\
14+5.6 \arrow[r] & 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&2.(3+4)+5.6\\
&= 2.7+5.6\\
&= 14+5.6\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
2.(3+4)+5.6 \arrow[d] & & & \\
2.3+2.4+5.6 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 2.3+2.4+30 \arrow[dr] & & \\
6+2.4+5.6 \arrow[d] & 2.3+8+5.6 \arrow[r] \arrow[dl] & 2.3+8+30 \arrow[d] & \\
6+8+5.6 \arrow[rr] \arrow[d] & & 6+8+30 \arrow[r] \arrow[d] & 6+38 \arrow[d] \\
14+5.6 \arrow[rr] & & 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}
$$

a) $2\cdot(3+4)+5\cdot6 = 2\cdot(3+4)+30$

$$
\begin{aligned}
&= 2(7)+30\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= 2\cdot(7)+5\cdot6\\
&= 14+5\cdot6\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\underbrace{2\cdot\underbrace{(3+4)}_{7}}_{14}+\underbrace{5\cdot6}_{30}}_{44}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 6+2(4)+5\cdot6\\
&= 6+8+5\cdot6\\
&= 6+8+30\\
&= 14+30\\
&= 44
\end{aligned}
$$

$\rightarrow D$

$\downarrow E$

$$
\begin{tikzcd}
2\cdot(3+4)+5\cdot6 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot(3+4)+30 \arrow[d] & \\
2(7)+5\cdot6 \arrow[r] & 2(7)+30 \arrow[d] & \\
& 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
2+3+4 \arrow[r] \arrow[d] & 2+7 \arrow[d] \\
5+4 \arrow[r] & 9
\end{tikzcd}$$

---

$$\begin{tikzcd}
(2+3)+(4+5) \arrow[r] \arrow[d] & (2+3)+9 \arrow[d] \\
5+(4+5) \arrow[r] \arrow[d] & 5+9 \arrow[d] \\
5+5 \arrow[r] & 14
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 2+3+4+5 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
5+4+5 \arrow[d] \arrow[dr] & 2+7+5 \arrow[dl] \arrow[dr] & 2+3+9 \arrow[dl] \arrow[d] \\
9+5 \arrow[dr] & 5+9 \arrow[d] & 2+12 \arrow[dl] \\
 & 14 &
\end{tikzcd}$$

$2+3+4+5$

NOTAÇÃO PARA SUBSTITUIÇÃO (SIMULTÂNEA):

$$((\underbrace{x}_{y+1}+\underbrace{y}_{z\cdot 3})\cdot \underbrace{z}_{x-1})\begin{bmatrix}x:=y+1\\ y:=z\cdot 3\\ z:=x-1\end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$((y+1)+(z\cdot 3))\cdot(x-1)$$

$$(\lambda x.\,expr)\,val$$
$$\downarrow$$
$$expr[x:=val]$$
$$\downarrow$$
$$\dots$$

1.4 b) $\lambda x.uxy$

HIPÓTESES:

$\lambda x.uxy = ((\lambda x.u)x)(y)$ NÃO, PORQUE $\lambda x.PQ = \lambda x.(PQ)$

$\lambda x.uxy = \lambda x.((ux)(y))$ SIM

$\lambda x.uxy = (\lambda x.u(x))(y)$ NÃO

$\lambda x.uxy = \lambda x.(u(x(y)))$ NÃO, PORQUE $MNP = (MN)P$

1.28:

a) $(\lambda x.xy)(\lambda u.vuu)$
$$\downarrow$$
$(vuu)y$

EXERCÍCIO 1.4:

OBS: $fabc = ((fa)b)c$
$= ((f(a))(b))(c)$

1.4

a) $xyz(yx)$

$((x(y))z)(yx)$

$xyz(yx)$

(VER "NOTATION 1.3", p.4)

a) $A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (2,3) \\ (1,4), (2,4) \end{matrix} \right\}$

b) $A \to D$ $\left\{ \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,10) \end{matrix} \right\} \right\}$

c) $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(1,3)}}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(1,3)}}_{3})}_{30})}_{(1,30)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,3)}}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,3)}}_{3})}_{30})}_{(2,30)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,4)}}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,4)}}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,4)}}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,4)}}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$

$D \times C = \left\{ \begin{matrix} (10,30), (20,30) \\ (10,40), (20,40) \end{matrix} \right\}$

d)

e) V

f) $p=(2,3)$ $\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,3)}}_{2})}_{30}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,3)}}_{3})}_{30})}_{(30,30)}$

g) $\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(1,3)}}_{1})}_{10}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(1,3)}}_{3})}_{30})}_{(10,30)}$ ✓

$\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi p}_{2})}_{20}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(20,30)}$

$\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:A})}_{:D}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:B})}_{:C})}_{:D\times C}$

a) $A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (1,4) \\ (2,3), (2,4) \end{matrix} \right\}$

$A=(1,2)$

$B=(3,4)$

b) $A \to D = \left\{ \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,20) \end{matrix} \right\} \right\}$

$D=(10,20)$

c) Para $p:(2,3)$

$\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(2,30)}$

Para $p:(2,4)$

$\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$

$P: A \times B$

Para $p:(1,3)$

$\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(1,30)}$

$f: \left\{ \begin{matrix} (3,30) \\ (4,40) \end{matrix} \right\}$

Para $p:(1,4)$

$\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{4})}_{40})}_{(1,40)}$.

$\boxed{\text{LA 11/ABRIL/2017}}$

a) $$\underbrace{\Big(\underbrace{\lambda p}_{:A\times C} : A\times C\ .\ \underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{f}_{:A\to B}(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{:A\times C}}_{:A})}_{:B},\ \underbrace{\pi'\underbrace{p}_{:A\times C}}_{:C}\Big)}_{B\times C}\Big)}_{A\times C\to B\times C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p:A\times C}{\pi p:A}\quad f:A\to B}{f(\pi p):B}\qquad \dfrac{p:A\times C}{\pi' p:C}}{\dfrac{(f(\pi p),\pi' p):B\times C}{(\lambda p:A\times C\ .\ (f(\pi p),\pi' p)):A\times C\to B\times C}}$$

LA 11/ABRIL/2017

b) $\lambda \underbrace{q}_{:B\times C} : B\times C \,.\, \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{h}_{:B\to(C\to D)}(\underbrace{\pi q}_{:B\times C})}_{:B}}_{:C\to D}\,(\underbrace{\pi' q}_{:B\times C})}_{:D}$

$$\underbrace{\lambda q : B\times C \,.\, (h(\pi q))(\pi' q)}_{B\times C\to D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q : B\times C}{(\pi q) : B} \quad h : B\to(C\to D)}{(h(\pi q)) : C\to D} \quad \dfrac{q : B\times C}{(\pi' q) : C}}{(h(\pi q))(\pi' q) : D}}{\lambda q : B\times C \,.\, (h(\pi q))(\pi' q) : B\times C\to D}$$

c) $\lambda \underbrace{b}_{:B} : B \,.\, \lambda \underbrace{c}_{:C} : C \,.\, \underbrace{\underbrace{g}_{B\times C\to D}(\underbrace{\underbrace{b}_{:B},\underbrace{c}_{:C}}_{:B\times C})}_{:D}$

$$:C\to D$$

$$:B\to(C\to D)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b : B \quad c : C}{g : B\times C\to D \quad (b,c) : B\times C}}{g(b,c) : D}}{\lambda c : C \,.\, g(b,c) : C\to D}}{\lambda b : B \,.\, \lambda c : C \,.\, g(b,c) : B\to(C\to D)}$$

d) $\lambda \underbrace{\varphi}_{:C\to D} : C\to D \,.\, \lambda \underbrace{c}_{:C} : C \,.\, \underbrace{\underbrace{k}_{D\to E}(\underbrace{\underbrace{\varphi}_{:C\to D}\underbrace{c}_{:C}}_{:D})}_{:E}$

$$:C\to E$$

$$(C\to D)\to(C\to E)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{c : C \quad \varphi : C\to D}{\varphi c : D} \quad k : D\to E}{k(\varphi c) : E}}{\lambda c : C \,.\, k(\varphi c) : C\to E}}{\lambda \varphi : C\to D \,.\, \lambda c : C \,.\, k(\varphi c) : (C\to D)\to(C\to E)}$$

$\boxed{\text{LA 11/ABRIL/2017}}$

ÁRVORES EM $ND_{\to}$ SÃO CHAMADAS DE "DEDUÇÕES" (OU "DERIVAÇÕES").

TODA VEZ QUE TEMOS UMA INTRODUÇÃO SEGUIDA DE UMA ELIMINAÇÃO NÓS PODEMOS "REDUZIR" A DEDUÇÃO.

$$(A)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \qquad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}\&I}{Q}\&E_1 \qquad Q\to S}{S}{\to}E \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \qquad Q\to S}{S}{\to}E \quad (A')$$

$$(B)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \qquad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}}{R}\&E_2 \qquad R\to S}{S}{\to}E \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E \qquad R\to S}{S}{\to}E \quad (B')$$

EXERCÍCIO 2:
REESCREVA AS ÁRVORES (A), (A'), (B), (B') INCLUINDO "$\vdash$"s.

$$\dfrac{P\vdash P \qquad P\to Q\vdash P\to Q}{P,\ P\to Q\vdash Q}$$

EXERCÍCIOS:
1) ESCREVA A ÁRVORE (B')
2) REESCREVA ELAS COMO ÁRVORES DE TIPOS EM $\lambda$-CÁLCULO. EX:

$$(A'')\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{app} \qquad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{app}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}\pi \qquad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}\text{app}$$

$$\Uparrow$$

$$h(\pi\underbrace{(fa,ga)}_{fa}):D \quad \rightsquigarrow \quad h(fa):D$$

$$(A''')\quad \dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B} \qquad h:B\to D}{h(f(a)):D}$$

$$\Uparrow$$

$$h(fa):D$$

$$(B'')\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{APP} \qquad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}\pi' \qquad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}\text{APP}$$

$$h(\pi'\underbrace{(fa,ga)}_{ga}):D \quad \rightsquigarrow \quad h(ga):D$$

$$(B''')\quad \dfrac{\dfrac{a:A \quad g:A\to C}{ga:C} \qquad h:C\to D}{h(g(a)):D}$$

$$h(ga):D$$

$\boxed{\text{LA 11/ABRIL/2017}}$

ÁRVORES EM $ND_{\&\to}$ SÃO CHAMADAS DE "DEDUÇÕES" (OU "DERIVAÇÕES").

TODA VEZ QUE TEMOS UMA INTRODUÇÃO SEGUIDA DE UMA ELIMINAÇÃO NÓS PODEMOS "REDUZIR" A DEDUÇÃO.

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E}}{Q\&R}{\scriptstyle \&I}}{Q}{\scriptstyle \&E_1} \quad Q\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \quad Q\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \quad (A')$$

(B)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E}}{Q\&R}}{R}{\scriptstyle \&E_2} \quad R\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E} \quad R\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \quad (B')$$

EXERCÍCIO 2:
REESCREVA AS ÁRVORES (A), (A'), (B), (B') INCLUINDO "$\vdash$"s.

$$\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P, P\to Q\vdash Q}$$

EXERCÍCIOS:

1) ESCREVA A ÁRVORE (B')
2) REESCREVA ELAS COMO ÁRVORES DE TIPOS EM $\lambda$-CÁLCULO. EX:

(A'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{\scriptstyle app} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{\scriptstyle app}}{(f(a),g(a)):B\times C}{\scriptstyle pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}{\scriptstyle \pi} \quad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}{\scriptstyle app} \rightsquigarrow h(fa):D$$

$$h(\underbrace{\pi(fa,ga)}_{fa}):D$$

(B')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{\scriptstyle APP} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{\scriptstyle APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}{\scriptstyle PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}{\scriptstyle \pi'} \quad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}{\scriptstyle APP} \rightsquigarrow$$

$$h(\underbrace{\pi'(fa,ga)}_{ga}):D$$

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad \dfrac{P\vdash P \quad P\to R\vdash P\to R}{P,P\to R\vdash R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q\&R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q} \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,P\to R,Q\to S\vdash S}$$

(A')
$$\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,Q\to S\vdash S}$$

LA 11/ABRIL/2017

Árvores em $ND_{\to}$ são chamadas de "deduções" (ou "derivações").

Toda vez que temos uma introdução seguida de uma eliminação nós podemos "reduzir" a dedução.

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \qquad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E}}{Q\&R}{\scriptstyle \&I}}{Q}{\scriptstyle \&E_1} \qquad Q\to S}{S}{\scriptstyle \to E}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \qquad Q\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \ \text{(A')}$$

(B)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\scriptstyle \to E} \qquad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E}}{Q\&R}}{R}{\scriptstyle \&E_2} \qquad R\to S}{S}{\scriptstyle \to E}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\scriptstyle \to E} \qquad R\to S}{S}{\scriptstyle \to E} \ \text{(B')}$$

Exercício 2:
Reescreva as árvores (A), (A'), (B), (B') incluindo "⊢"s.

$$\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,\ P\to Q\vdash Q}$$

Exercícios:
1) Escreva a árvore (B')
2) Reescreva elas como árvores de tipos em λ-cálculo. Ex:

(A'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{\scriptstyle app} \qquad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{\scriptstyle app}}{(f(a),g(a)):B\times C}{\scriptstyle pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}{\scriptstyle \pi} \qquad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}{\scriptstyle app}$$

$$h(\pi(\underbrace{fa,ga}_{fa})):D \rightsquigarrow h(fa):D$$

(B'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{\scriptstyle APP} \qquad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{\scriptstyle APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}{\scriptstyle PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}{\scriptstyle \pi'} \qquad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}{\scriptstyle APP}$$

$$h(\pi'(\underbrace{fa,ga}_{ga})):D \rightsquigarrow$$

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \qquad \dfrac{P\vdash P \quad P\to R\vdash P\to R}{P,P\to R\vdash R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q\&R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q} \qquad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,P\to R,Q\to S\vdash S}$$

(A')
$$\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \qquad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,Q\to S\vdash S}$$

**LA 18/ABRIL/2017**

## SLOGAN:

Quase todas as operações que a gente vai precisar correspondem a derivações em dedução natural "traduzidas"!

$$\dfrac{\dfrac{[p:A\times B]}{:A} \qquad \dfrac{\dfrac{[p:A\times B]^1}{:B} \quad f:B\to C}{:C}}{\dfrac{:A\times C}{:A\times B\to A\times C}\,1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\&Q]^1}{P}\&E_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[P\&Q]^1}{Q}\&E_2 \quad Q\to R}{R}\to E}{P\&R}\&I}{P\&Q\to P\&R}\to I;1 \qquad \dfrac{P\&Q \quad Q\to R}{\overline{P\&R}}$$

"⊢":

$$\dfrac{Q\to R,\ P\&Q\vdash P\&R}{Q\to R\vdash P\&Q\to P\&R}$$

A figura da p.8 vira isso aqui, se a gente traduz ela pra notação lógica:

$$\begin{tikzcd}
P\&R \arrow[d] & P \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \\
Q\&R \arrow[d] & Q \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \\
S \arrow[d] \arrow[r, mapsto] & R\to S \arrow[d] \\
T \arrow[r, mapsto] & R\to T
\end{tikzcd}$$

$$\dfrac{P\to Q}{\overline{P\&R\to Q\&R}} = ?_a \qquad \dfrac{Q\to(R\to S)}{\overline{Q\&R\to S}} = ?_b \qquad \dfrac{Q\&R\to S}{\overline{Q\to(R\to S)}} = ?_c \qquad \dfrac{S\to T}{\overline{(R\to S)\to(R\to T)}} = ?_d$$

a) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\&R]^1}{P}\&E_1 \quad P\to Q}{Q}\to E \qquad \dfrac{[P\&R]^1}{R}\&E_2}{Q\&R}\&I}{P\&R\to Q\&R}\to I;1$$

b) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q\&R]^1}{R}\&E_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[Q\&R]^1}{Q}\&E_1 \quad Q\to(R\to S)}{R\to S}\to E}{S}\to E}{Q\&R\to S}\to I;1$$

c) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^1 \quad [R]^2}{Q\&R}\&I \quad Q\&R\to S}{S}\to E}{R\to S}\to I;2}{Q\to(R\to S)}\to I;1$$

d) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[R]^1 \quad [R\to S]^2}{S}\to E \quad S\to T}{T}\to E}{R\to T}\to I;1}{(R\to S)\to(R\to T)}\to I;2$$

## TRUQUES:

(1) Uma "derivação normal" não tem &I seguido de &E e nem →I seguido de →E

(2) Princípio da subfórmula: numa "derivação normal" de $\dfrac{P\&Q \quad Q\to R}{\overline{P\&R}}$ as "fórmulas" que aparecem nos nós da árvore são só estas aqui:

$$\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q} \qquad \underbrace{Q}_{Q}\to\underbrace{R}_{R} \qquad \underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q}$$

E nesta: $\dfrac{Q\to R}{\overline{P\&Q\to P\&R}}$

$$\underbrace{Q}_{Q}\to\underbrace{R}_{R} \qquad \underbrace{P\&Q}_{\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q}}\to\underbrace{P\&R}_{\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{R}_{R}}$$

## OUTRO DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Q & Q\&R \arrow[l] \arrow[r] & R
\end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} P \arrow[d, mapsto] \\ P\&Q \end{tikzcd} \rightleftarrows \left(\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Q & & R \end{tikzcd}\right)$$

$$\Rightarrow Q \leftarrow Q\&R \to R$$

$$\dfrac{P\to Q\&R}{\overline{P\to Q}} = ?_e \qquad \dfrac{P\to Q\&R}{\overline{P\to R}} = ?_f \qquad \dfrac{P\to Q \quad P\to R}{\overline{P\to Q\&R}} = ?_g \qquad \dfrac{}{\overline{Q\&R\to Q}} = ?_h \qquad \dfrac{}{\overline{Q\&R\to R}} = ?_i$$

## Regras de DN que nós vimos até agora:

$$\dfrac{P \quad Q}{P\&Q}\&I \qquad \dfrac{P\&Q}{P}\&E_1 \qquad \dfrac{P\&Q}{Q}\&E_2$$

$$\dfrac{\begin{matrix}P \ [Q]^1\\ \vdots \\ R\end{matrix}}{Q\to R}\to I;1 \qquad \dfrac{Q \quad Q\to R}{R}\to E$$

Regras novas:

$$\dfrac{P}{P\vee Q}\vee I_1 \qquad \dfrac{Q}{P\vee Q}\vee I_2 \qquad \dfrac{Q\vee R \quad \begin{matrix}P\ [Q]^1\\ \vdots\\ S\end{matrix} \quad \begin{matrix}P\ [R]^1\\ \vdots\\ S\end{matrix}}{S}\vee E;1 \Rightarrow \dfrac{P,Q\vdash S \quad P,R\vdash S}{P,Q\vee R\vdash S}$$

$$\dfrac{}{\top}\top I \qquad \dfrac{\bot}{P}\bot E$$

E o "não"?

$$\neg P := P\to\bot$$

$$\underbrace{\neg\neg P}_{\underbrace{P\to\bot}_{(P\to\bot)\to\bot}} = (P\to\bot)\to\bot$$

Fato: em DN dá pra provar $P\to\neg\neg P$ mas não $\neg\neg P\to P$... porquê

$$\dfrac{P}{\neg\neg P} \Rightarrow \dfrac{P}{(P\to\bot)\to\bot} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{P \quad [P\to\bot]^1}{\bot}\to E}{(P\to\bot)\to\bot}\to I;1$$

Quando a gente "traduzir" isso pra λ-cálculo vamos ter:

$P\vee Q \Rightarrow A+B$ ("+" é união disjunta!)

$\top \Rightarrow$ um conjunto com um elemento

$\bot \Rightarrow$ o conjunto vazio.

## Lambda

A named function: $g(a) = a \cdot a + 4$
An unnamed function: $\lambda a.\, a \cdot a + 4$
Let $h = \lambda a.\, a \cdot a + 4$.
Then:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
g(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & g(5) \arrow[ddd] \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& (2+3)\cdot 5+4 \arrow[dr] & \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[rr] & & 5\cdot 5+4 \arrow[d] \\
& & 25+4 \arrow[d] \\
& & 29
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
h(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & h(5) \arrow[d] \\
(\lambda a.\, a\cdot a+4)(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & (\lambda a.\, a\cdot a+4)(5) \arrow[ddd] \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& (2+3)\cdot 5+4 \arrow[dr] & \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[rr] & & 5\cdot 5+4 \arrow[d] \\
& & 25+4 \arrow[d] \\
& & 29
\end{tikzcd}
$$

$(a \cdot a + 4)[a := 5]$

The usual notation for defining functions is like this:

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\
 & n & \mapsto & 2+\sqrt{n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\text{(name)}: & \text{(domain)} & \to & \text{(codomain)} \\
 & \text{(variable)} & \mapsto & \text{(expression)}
\end{array}
$$

It creates *named* functions
(with domains and codomains).

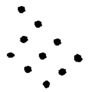
The usual notation for creating named functions
without specifying their domains and codomains
is just $f(n) = 2 + \sqrt{n}$.
Note that this is:

$$
\begin{array}{cccc}
f & (n) & = & 2+\sqrt{n} \\
\text{(name)} & (\text{(variable)}) & = & \text{(expression)}
\end{array}
$$

LA 25/ABRIL/2017

NO FINAL DA AULA
EU CONTEI PRA VOCÊS
QUE A LÓGICA QUE
NÓS ESTAMOS VENDO
PROVA
$P \to \neg\neg P$
MAS NÃO
$\neg\neg P \to P$...
HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR
A VER UMA FERRAMENTA
PRA ENTENDER ESSA
LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

B =  ⇐ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} & (-1,5) & & & \\ & & (0,4) & & \\ & (-1,3) & & (1,3) & \\ (-2,2) & & (0,2) & & (2,2) \\ & (-1,1) & & (1,1) & \\ & & (0,0) & & \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$$

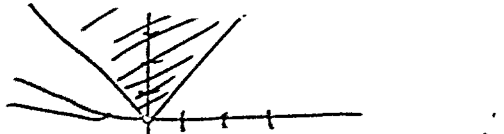
EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0 \rangle = (-2,2)$
$\langle 2,1 \rangle = (-1,3)$
$\langle 3,3 \rangle = (0,6)$

$\langle 0,3 \rangle = (3,3)$
$\langle 1,1 \rangle = (0,2)$
$\langle 2,2 \rangle = (0,4)$
$\langle 2,0 \rangle = (-2,2)$

EXERCÍCIOS:
REPRESENTEM,
USANDO A NOTAÇÃO
POSICIONAL DA P.1:

a) $\lambda lr{:}B.\,l$
b) $\lambda lr{:}B.\,r$
c) $\lambda lr{:}B.\,(l \leq 1)$
d) $\lambda lr{:}B.\,(r \geq 1)$
e) $\lambda lr{:}B.\,lr \leq 11$
f) $\lambda lr{:}B.\,lr \,\&\, 12$
g) $\lambda lr{:}B.\,\mathrm{valid}(\langle l+1, r \rangle)$
h) $\lambda lr{:}B.\,lr \text{ leftof } 11$
i) $\lambda lr{:}B.\,lr \text{ leftof } 12$
j) $\lambda lr{:}B.\,lr \text{ above } 11$



$lr = \langle l,r \rangle = (0,0) + l\,\underbrace{(-1,1)}_{l} + r\,\underbrace{(1,1)}_{r}$

"angle brackets"

a) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & 2 & & 1 & \\ 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

b) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & 1 & & 2 & \\ 0 & & 1 & & 2 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

c) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array} \right\}$

d) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

e) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array} \right\}$

f) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 12 & & & \\ & & 12 & & \\ & 11 & & 12 & \\ 10 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$

g) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array} \right\}$

h) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

i) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

j) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\}$

LA 25/ABRIL/2017

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

$\neg\neg P \to P$...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

$B = $ ⋰⋱ ⟸ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

$= \{(-1,5),\ (0,4),\ (-1,3),\ (1,3),\ (-2,2),\ (0,2),\ (2,2),\ (-1,1),\ (1,1),\ (0,0)\}$

$= \{32,\ 22,\ 21,\ 12,\ 20,\ 11,\ 02,\ 10,\ 01,\ 00\}$

EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

$\langle 2,1\rangle = (-1,3)$

$\langle 3,3\rangle = (0,6)$

$\langle 0,3\rangle = (3,3)$

$\langle 1,1\rangle = (0,2)$

$\langle 2,2\rangle = (0,4)$

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

MAIS EXERCÍCIOS:

k) $\lambda \ell r{:}B.\ \mathrm{ne}(\ell r)$

l) $\lambda \ell r{:}B.\ \mathrm{nw}(\ell r)$

m) $20 \to 11 = 12$

n) $02 \to 11 = 21$

o) $22 \to 11 = 11$

p) $00 \to 11 = 32$

k) $\{32,\ 22,\ 22,\ 12,\ 22,\ 12,\ 02,\ 12,\ 02,\ 02\}$

Se $a=0$ e $b=0$,

```
ne(00) := if valid(01)
          then ne(01)
          else 00
          end
```

l) $\{32,\ 32,\ 21,\ 32,\ 20,\ 21,\ 32,\ 20,\ 21,\ 20\}$

a) $\{3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\}$

b) $\{2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0\}$

c) $\{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\}$

d) $\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\}$

e) $\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1\}$

f) $\{12,\ 12,\ 11,\ 12,\ 10,\ 11,\ 02,\ 10,\ 01,\ 00\}$

g) $\{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\}$

h) $\{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\}$

i) $\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\}$

j) $\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$

$\boxed{\text{LA } 25/\text{ABRIL}/2017}$

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

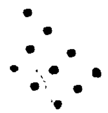
$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

$\neg\neg P \to P$ ...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

$B =$  ⇐ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

$= \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & (-1,5) & & & \\ & & & (0,4) & & \\ & & (-1,3) & & (1,3) & \\ (-2,2) & & (0,2) & & & (2,2) \\ & (-1,1) & & & (1,1) & \\ & & (0,0) & & & \end{array} \right\}$

$= \left\{ \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$

EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0 \rangle = (-2,2)$

$\langle 2,1 \rangle = (-1,3)$

$\langle 3,3 \rangle = (0,6)$

$\langle 0,3 \rangle = (3,3)$

$\langle 1,1 \rangle = (0,2)$

$\langle 2,2 \rangle = (0,4)$

$\langle 2,0 \rangle = (-2,2)$

MAIS EXERCÍCIOS:

k) $\lambda lr{:}B.\ ne(lr)$

l) $\lambda lr{:}B.\ nw(lr)$

m) $20 \to 11 = 12$

n) $02 \to 11 = 21$

o) $22 \to 11 = 11$

p) $00 \to 11 = 32$

q) $\lambda lr{:}B.\ \underbrace{\neg lr}_{lr \to 00}$

r) $\lambda lr{:}B.\ \neg(\neg lr)$

s) $\lambda lr{:}B.\ lr = \neg\neg lr$

q) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 00 & & & \\ & & 00 & & \\ & 00 & & 00 & \\ 02 & & 00 & & 20 \\ & 02 & & 20 & \\ & & 32 & & \end{array} \right\}$

r) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 32 & & \\ & 32 & & 32 & \\ 20 & & 32 & & 02 \\ & 20 & & 02 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$

s) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \right\}$

SE $P = 10$ E $Q = 01$,

$$\underbrace{\underbrace{\neg(\underbrace{\underbrace{P}_{10} \,\&\, \underbrace{Q}_{01}}_{00})}_{32} \to \underbrace{(\underbrace{\neg \underbrace{P}_{10}}_{02} \vee \underbrace{\neg \underbrace{Q}_{01}}_{20})}_{22}}_{22}$$

$\boxed{\text{LA 25/ABRIL/2017}}$

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

$\neg\neg P \to P$ ...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

$$B = \begin{array}{ccccccc} & & & 32 & & & \\ & & 21 & & 22 & & \\ & 20 & & 11 & & 12 & \\ & & 10 & & 01 & & 02 \\ & & & 00 & & & \end{array}$$

DE ONDE VÊM ESSAS DEFINIÇÕES PARA $ab \& cd$, $ab \vee cd$, $ab \to cd$?

LEMBREM QUE:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ B & B \times C \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times B \arrow[d, "h^\flat"', "g"] \\ C \end{tikzcd} \leftrightarrows \begin{tikzcd} A \arrow[d, "h", "g^\sharp"'] \\ B \to C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & A+B \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

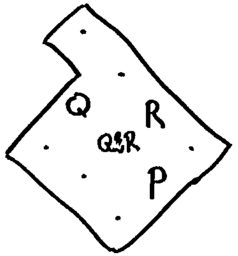
$\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ TEM 27 ELEMENTOS
$\{1,2,3\} \to \{4\}$ TEM 1 ELEMENTO
$\{1,2,3\} \to \{\}$ TEM 0 ELEMENTOS

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d] \\ T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Q & Q\&R \arrow[l] \arrow[r] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P\&Q \arrow[d] \\ R \end{tikzcd} \leftrightarrows \begin{tikzcd} P \arrow[d] \\ Q \to R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[dr] & P \vee Q \arrow[d] & Q \arrow[l] \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$01 \to 12$ TEM 1 ELEMENTO (PORQUE $01 \leq 12$)

$20 \to 11$ TEM 0 ELEMENTOS (PORQUE $20 \not\leq 11$)

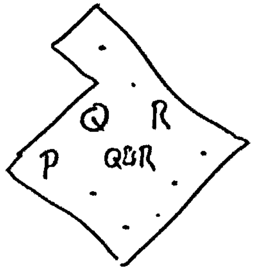



EXISTE UMA "FUNÇÃO" $P \to Q$? SIM
$P \to R$? SIM
$P \to Q\&R$? SIM
$Q\&R \to Q$? SIM
$Q\&R \to R$? SIM

$Q\&R = 11$

$$\begin{tikzcd} & 10 \arrow[dl, "sim"'] \arrow[d, "sim"] \arrow[dr, "sim"] & \\ 21 & 21\&12 \arrow[l, "sim"] \arrow[r, "sim"'] & 12 \end{tikzcd}$$
$21\&12 = 11$

OUTRO CASO:




$$\begin{tikzcd} & 20 \arrow[dl, "sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, "não"] & \\ 21 & 21\&12 \arrow[l, "sim"] \arrow[r, "sim"'] & 12 \end{tikzcd}$$
$21\&12 = 11$

# LA 2/maio/2017

Alguns anéis familiares:

$$\mathbb{Z}_6 = (\underset{\substack{\uparrow \\ R}}{\{0,1,2,3,4,5\}},\ 0,\ 1,\ +_{mod\ 6},\ -_{mod\ 6},\ \cdot_{mod\ 6})$$

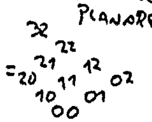
$$(-_{mod\ 6})(1) = 5$$

$$\underbrace{1 +_{mod\ 6} \underbrace{(-_{mod\ 6})(1)}_{5}} = 0$$

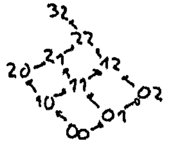
[Lemos o Awodey das págs 3 a 8]

As nossas categorias preferidas (por enquanto!) vão ser coisas bem concretas:

- Set
- ZHAs (as álgebras de Heyting planares da aula passada)

$B =$ 

$\mathbf{B}$ ($B$ como categoria):



$$\mathbf{B} = (\underset{\substack{\shortparallel \\ B}}{\mathbf{B}_0}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}}, \circ_{\mathbf{B}})$$

(10 elementos)

Um truque pra entender o Hom:

$f: A \to B$ é "formalizado" como

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(P,Q) = \begin{cases} \{(P,Q)\} & \text{se } P \leq_B Q, \\ \emptyset & \text{se } P \not\leq_B Q. \end{cases}$$

Exemplos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(11,22) = \{(11,22)\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(22,22) = \{(22,22)\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(11,02) = \{\}$$

Composição:

$$\begin{tikzcd} 00 \arrow[r, "{(00,12)}"] \arrow[rr, bend right, "{(00,32)}"'] & 12 \arrow[r, "{(12,32)}"] & 32 \end{tikzcd}$$

(não tem muita escolha)

$$12 \xrightarrow{id_{12}} 12 \qquad id_{12} = (12,12)$$

Que que a gente pode provar numa categoria qualquer?

Muito pouca coisa...

1) Se $A \xrightarrow{g} B$ tem inversa à esquerda e à direita elas são iguais.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_B"'] & A \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "id_A"] & \\ & B \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

$id_B = g \circ f = f;g$

$$f;g = id_B$$

$$g;h = id_A$$

$$f;(g;h) = f;id_A = f$$

$$\shortparallel$$

$$(f;g);h = id_B;h = h$$

2) Um diagrama "comuta" se (definição informal!) para cada dois objetos X e Y dele todos os jeitos de obter uma seta de X pra Y compondo setas do diagrama dão o mesmo resultado.

Isto aqui comuta?

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, "{\substack{1\mapsto3 \\ 2\mapsto4}}"] \arrow[d, "{\substack{1\mapsto5 \\ 2\mapsto6}}"'] & \{3,4\} \arrow[d, "{\substack{3\mapsto7 \\ 4\mapsto7}}"] \\ \{5,6\} \arrow[r, "{\substack{5\mapsto7 \\ 6\mapsto8}}"'] & \{7,8\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f;h"] \arrow[r, shift right, "g;k"'] & D \end{tikzcd} \qquad f;h \neq g;k\ldots$$

Não!

Teorema: num diagrama planar em que cada célula tem exatamente uma "fonte" e um "ralo", se cada célula comuta então o diagrama todo comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] & C \arrow[d, "e"] \\ D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F \end{tikzcd}$$

Sabemos que $a;d = c;f$ e $b;e = d;g$

Então:

$$\begin{aligned} a;b;e &= a;(b;e) \\ &= a;(d;g) \\ &= (a;d);g \\ &= (c;f);g \\ &= c;f;g \end{aligned}$$

Reparem que o 1 e o 2 precisam que a gente esteja numa categoria, não numa proto-categoria...

Uma coisa muito legal que os livros não contam é que todos os teoremas bacanas de categorias podem ser entendidos primeiro em proto-categorias...

**LA 2/maio/2017**

Alguns anéis familiares:

$$\mathbb{Z}_6 = (\{0,1,2,3,4,5\},\ 0,\ 1,\ +_{\mathrm{mod}\,6},\ -_{\mathrm{mod}\,6},\ \cdot_{\mathrm{mod}\,6})$$

R

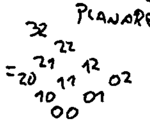
$$(-_{\mathrm{mod}\,6})(1) = 5$$

$$\underbrace{1 +_{\mathrm{mod}\,6} \underbrace{(-_{\mathrm{mod}\,6})(1)}_{5}} = 0$$

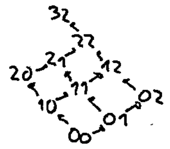
[Lemos o Awodey das págs 3 a 8]

As nossas categorias preferidas (por enquanto!) vão ser coisas bem concretas:

- Set
- ZHAs (as álgebras de Heyting planares da aula passada)

$B =$ 

$\mathbf{B}$ ($B$ como categoria):



$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_0, \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}}, \circ_{\mathbf{B}})$$

$\mathbf{B}_0 = B$ (10 elementos)

Idéia:

"Categorias" são sem graça,
"Categorias com" são legais.

Primeiro exemplo:
Categorias com produtos.
(Proto-categorias com produtos).

Exemplo: (exemplo: &)

$$(\mathbf{B}_0, \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}, \mathrm{id}_{\mathbf{B}}, \circ_{\mathbf{B}}, \times, \pi, \pi', \langle,\rangle)$$

$\times : \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$

$\pi_{QR} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(Q \times R, Q)$ $\quad (Q \xleftarrow{\pi_{QR}} Q\&R)$

$\pi'_{QR} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(Q \times R, R)$ $\quad (Q\&R \xrightarrow{\pi'_{QR}} R)$

$\langle,\rangle_{PQR} \in \ldots$

$$P \xrightarrow{\langle P \xrightarrow{f} Q,\ P \xrightarrow{g} R\rangle_{PQR}} Q\&R$$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
Q & Q \times R \arrow[l, "\pi_{QR}"] \arrow[r, "\pi'_{QR}"'] & R
\end{tikzcd}$$

E no caso mais abstrato?
Em dois passos:

1) $Q \xleftarrow{\pi} Q \times R \xrightarrow{\pi'} R$ é um "product diagram" se e só se:

$\forall P.$
$\forall f : P \to Q,\ \forall g : P \to R.$
$\exists!\, h : P \to Q \times R.$
$(h;\pi = f) \,\&\, (h;\pi' = g)$

Exercício:
Mostre que isto aqui (em $B$) não é um product diagram:

$$21 \xleftarrow{\pi} 01 \xrightarrow{\pi'} 12$$

(Dica: procurem um P!)

$P = 11$

Em Set a gente também tem produtos...

Exercício:
Mostre que isto aqui não é um product diagram em Set:

$$\begin{tikzcd}
 & \{35, 46\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{3,4\} & \{35, 36, 45\} \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

$35 \mapsto 3$, $36 \mapsto 3$, $45 \mapsto 4$ $\qquad$ $35 \mapsto 5$, $36 \mapsto 6$, $45 \mapsto 5$

$\{3,4\} = Q$, $\{35,36,45\} = Q \times R$, $\{5,6\} = R$

$$\begin{tikzcd}
 & \{46\} \arrow[dl] \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & \\
\{3,4\} & \{35, 36, 45\} \arrow[l] \arrow[r] & \{5,6\}
\end{tikzcd}$$

Isto aqui é um coproduct diagram em Set:
(Exercício: complete)

$$\begin{tikzcd}
 & \{0, 45, 67, 8, 9\} & \\
\{4,5,6\} \arrow[ur] \arrow[r, "i"'] & \{4,5,6,7,8,9\} \arrow[u, dotted] & \{7,8,9\} \arrow[ul] \arrow[l, "i'"]
\end{tikzcd}$$

LA 6/junho/2017

Hoje: álgebras de Heyting são uma desculpa pra gente estudar montes de outras coisas de lógica... p.ex. lógicas modais.

Uma Kripke frame é um par $(W,R)$ onde $W$ é um conjunto e $R \subseteq W \times W$.

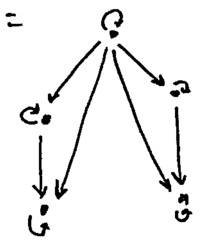
Exemplos: $H = \left\{ \begin{smallmatrix} & (1,2), & \\ (0,1), & & (2,1), \\ (0,0), & & (2,0) \end{smallmatrix} \right\} =$

Black pawns moves: ↙↓↘

White pawns moves: ↖↑↗

$(H, BPM(H)) =$

$(H, BPM(H)^*) =$



...e a gente vai usar $(W,R)$ pra definir uma lógica...

Os valores de verdade dela são funções de $W$ em $\{0,1\}$.

Exemplos: $P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 0&&1 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$ $\quad Q = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&0 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}$

$\top$ é 1 em todos os mundos,

$\bot$ é 0 em todos os mundos,

$\&, \lor, \to, \neg$ etc são calculadas "em cada mundo em separado".

$\begin{smallmatrix} &0& \\ 0&&1 \\ 1&&0 \end{smallmatrix} \ \& \ \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&0 \\ 1&&1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} &0& \\ 0&&0 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$

Novidade: $\Box$, $\Diamond$

$\Box$: "é necessário que" — nec

$\Diamond$: "é possível que" — poss

Como calcular $\Box P$? Pra cada mundo $a \in W$, o resultado de $(\Box P)_a$ vai ser:

$$\forall b \in W.\ aRb \to P_b.$$

Exercício: Calculem $\Box P$ para:

(a) $\begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&0 \\ 1&&1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}$

(b) $\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} &1& \\ 0&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}$

Obs:

$(\Box P)_a = \forall b \in W.\ aRb \to P_b$

$(\Box P)_a = \forall b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Se $P = \begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&0 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}$ então $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$

$(\Box P)_1 = \forall b \in \{2,3\}.\ P_b = P_2 \,\&\, P_3 = 1 \,\&\, 0 = 0$

$(\Box P)_4 = \forall b \in \{\}.\ P_b = 1$

$(\Box P)_1 = 0$, $(\Box P)_2 = 1$, $(\Box P)_3 = 1$, $(\Box P)_4 = 1$, $(\Box P)_5 = 1$

(Obs: $(W,R) =$ )

(Dica: numere os mundos deste jeito: $\begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&3 \\ 4&&5 \end{smallmatrix}$)

Def:

$$(\Diamond P)_a = \exists b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$$

Exercício:

(c) $\Diamond \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&0 \\ 0&&1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} &1& \\ 0&&1 \\ 0&&0 \end{smallmatrix}$

O meu livro de referência preferido sobre lógica modal é o Carnielli/Pizzi. p.37:

Axiomas:

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

(4) $\Box P \to \Box\Box P$

Em $(W,R) =$ nem (T) nem (4) são verdade!

Exemplo: Se $P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}$ então:

$$\underbrace{\underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &1& \\ 0&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}} \to \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}}$$

(4)

$$\underbrace{\underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &1& \\ 0&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}} \to \underbrace{\Box \underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &1& \\ 0&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 1&&1 \end{smallmatrix}}$$

Fato (ou seja, "teorema que eu não vou demonstrar"): Uma das expressões (T) ou (4) (não lembro qual) é verdadeira sempre que $(W,R)$ for transitivo e a outra vai ser verdadeira sempre que $(W,R)$ for reflexivo.

Vamos fazer uns testes...

Se $(W,R) = 1 \to 2 \to 3$ e $P =$ então (T) = e (4) =

Se $(W,R) = 1 \to 2 \to 3$ e $P =$ então (T) = e (4) =

LA 6/Junho/2017

$P = \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}$

(T) $\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}} \to \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}}$

(4) $\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}} \to \underbrace{\square\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}}$

---

$P = \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}$

(T) $\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}} \to \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}}$

(4) $\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}} \to \underbrace{\square\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}}$

Como calcular $\square P$?
Pra cada mundo $a \in W$,
o resultado de $(\square P)_a$
vai ser:
$\forall b \in W.\ aRb \to P_b$.

Exercício:
Calculem $\square P$
para:

ⓐ $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&0\\1&&1\end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\1&&1\end{smallmatrix}$

ⓑ $\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\0&&1\\1&&1\end{smallmatrix}$

(OBS: $(W,R) =$ ⋰⋱ )

(Dica: Numere os mundos deste jeito: $\begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\4&&5\end{smallmatrix}$)

OBS:
$(\square P)_a = \forall b \in W.\ aRb \to P_b$
$(\square P)_a = \forall b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Se $P = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&0\\1&&1\end{smallmatrix}$ então $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$

$(\square P)_1 = \forall b \in \{2,3\}.\ P_b$
$= P_2 \,\&\, P_3$
$= 1 \,\&\, 0$
$= 0$

$(\square P)_1 = 0$
$(\square P)_2 = 1$ $(\square P)_3 = 1$
$(\square P)_4 = 1$ $(\square P)_5 = 1$

$(\square P)_4 = \forall b \in \{\}.\ P_b$
$= 1$

Def:
$(\Diamond P)_a = \exists b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Exercício:
© $\Diamond \begin{smallmatrix}&0&\\1&&0\\0&&1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}&1&\\0&&1\\0&&0\end{smallmatrix}$

O meu livro de referência preferido sobre lógica modal é o Carnielli/Pizzi.
P.37:
Axiomas:
(K) $\square(P \to Q) \to (\square P \to \square Q)$
(T) $\square P \to P$
(4) $\square P \to \square\square P$
Em $(W,R) =$ ⋰⋱
nem (T) nem (4) são verdade!
Exemplo:
Se $P = \begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}$ então:

$\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\1&&1\end{smallmatrix}} \to \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}}$

(4) $\underbrace{\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&1&\\0&&1\\1&&1\end{smallmatrix}} \to \underbrace{\square\underbrace{\square \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\0&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&1&\\0&&1\\1&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\1&&1\end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix}&0&\\1&&1\\1&&1\end{smallmatrix}}$

Fato (ou seja, "teorema que eu não vou demonstrar"):
Uma das expressões (T) ou (4) (não lembro qual) é verdadeira sempre que $(W,R)$ for transitivo
e a outra vai ser verdadeira sempre que $(W,R)$ for reflexivo.

Vamos fazer uns testes...
Se $(W,R) = \begin{smallmatrix}1\\\downarrow\\2\\\downarrow\\3\end{smallmatrix}$ e $P = \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}$ então $(T) = \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}$
e $(4) = \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}$

Se $(W,R) = \begin{smallmatrix}1\circlearrowleft\\\downarrow\\2\circlearrowleft\\\downarrow\\3\circlearrowleft\end{smallmatrix}$ e $P = \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}$ então $(T) = \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}$
e $(4) = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}$

## LA 6/JUNHO/2017

AGORA A GENTE VAI INTERROMPER TEMPORARIAMENTE ESSA HISTÓRIA DE LÓGICA MODAL E VER UM JEITO DE "FALSIFICAR" EXPRESSÕES DE LÓGICA PROPOSICIONAL (CLÁSSICA).

$P \to P\&Q$

$\Rightarrow P=1$ e $Q=0$
FALSIFICA $P \to P\&Q$.

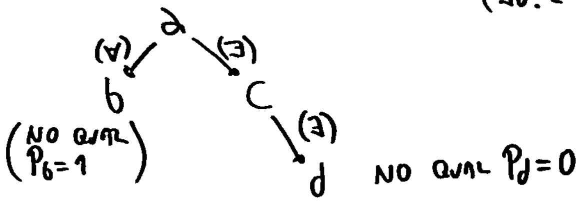
ÀS VEZES A GENTE VAI PRECISAR DE ALGO MAIS COMPLICADO — PORQUE VÃO APARECER DUAS (OU MAIS) POSSIBILIDADES.

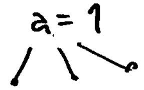
$P\&Q \to Q \vee R$ $\qquad$ $P \vee Q \to Q\&R$

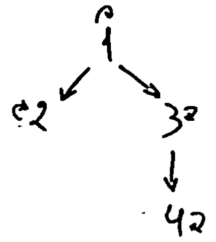
E PRA LÓGICA MODAL?

$\Box P \to \Box\Box P$

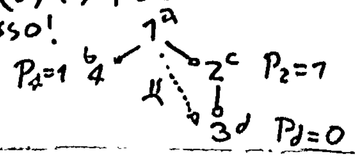
MUNDO:
a
b ($\forall b.\ aRb$)
c ($\exists c.\ aRc$)
d ($\exists d.\ cRd$)



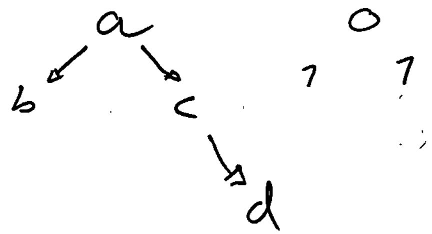




PRA FALSIFICAR
(4) $\Box P \to \Box\Box P$
TEMOS QUE TER UM MUNDO a COM:
$\forall b.\ aRb \to P_b=1$
$\exists c.\ aRc \,\&\, (\exists d.\ cRd \,\&\, P_d=0)$
REPARE QUE SE $(W,R)$ FOR TRANSITIVA NÃO DÁ PRA TER ISSO!

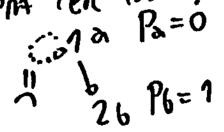



$\Box P \to P$

a
b ($\forall b.\ aRb$)




PRA FALSIFICAR
(T) $\Box P \to P$
TEMOS QUE TER UM MUNDO a COM:
$P_a=0$
$\forall b.\ aRb \to P_b=1$
REPARE QUE SE $(W,R)$ FOR REFLEXIVA NÃO DÁ PRA TER ISSO!



**LA 13/JUN/2017**

HOJE: MAIS SOBRE S4 E OUTRAS LÓGICAS MODAIS; A TRADUÇÃO DE GÖDEL ENTRE IL E S4; S4 E TOPOLOGIAS.

LEMBRE QUE

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

(4) $\Box P \to \Box\Box P$

TEM DOIS JEITOS DA GENTE DEFINIR S4 "COMO LÓGICA": UM É DEFINIR QUAIS SÃO AS <u>REGRAS DE DEDUÇÃO</u> DELA, QUE PODEM SER ESCRITAS EM ÁRVORE OU NÃO... DÁ PRA USAR FITCH, POR EXEMPLO.

O OUTRO JEITO É A GENTE DEFINIR O QUE SÃO <u>FRAMES</u> E <u>VALUAÇÃO</u> NUM FRAME, E AÍ A GENTE CONSEGUE ENTENDER QUAIS SÃO AS TAUTOLOGIAS EM S4.

## UM FRAME PARA S4

É UM PAR $(W,R)$ ONDE $W$ É UM CONJUNTO "DE MUNDOS" E $R \subseteq W \times W$ ("RELAÇÃO DE ACESSIBILIDADE", OU A RELAÇÃO QUE DIZ QUE MUNDOS "VÊEM" QUAIS OS QUE MUNDOS ESTÃO "ADIANTE" DE QUAIS) E <u>ONDE $R$ É TRANSITIVA E REFLEXIVA</u>.

ALÉM DISSO UMA <u>VALUAÇÃO</u> $V$ <u>EM</u> $(W,R)$ É UMA FUNÇÃO QUE LEVA ALGUMAS "LETRAS" (VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS) EM SUBCONJUNTOS DE $W$.

EXEMPLO: $(W,R) =$  $V(P) = \substack{0\,1\\1}$ , $V(Q) = \substack{0\,1\\0}$

TODA VEZ QUE TEMOS $(W,R,V)$ E UMA EXPRESSÃO $E$ - POR EXEMPLO,

$E = \neg(\Box P \to \Diamond Q) \to \Diamond\Diamond\neg Q$

TAIS QUE $\mathrm{dom}(V) \supset \{P,Q\}$ A GENTE SABE CALCULAR O VALOR DE $E$ NA VALUAÇÃO $(W,R,V)$.

## UMA EXPRESSÃO $E$ É UMA <u>TAUTOLOGIA EM S4</u> SE E SÓ SE

$\vDash_{(W,R,V)} E$

PARA TODO S4-FRAME $(W,R)$ E TODA VALUAÇÃO $V$.

$\Box P \to \Diamond P$

É UMA TAUTOLOGIA EM S4, MAS PORQUÊ? A GENTE TERIA QUE FAZER INFINITOS TESTES...

TEOREMÃO:

AS TAUTOLOGIAS EM S4 SÃO EXATAMENTE AS EXPRESSÕES QUE SÃO DEMONSTRÁVEIS PELO SISTEMA DEDUTIVO QUE EU ESBOCEI PORCAMENTE LÁ À ESQUERDA.

## HISTORINHA

DURANTE SÉCULOS (SÉRIO!) OS LÓGICOS DISCUTIAM VÁRIOS TIPOS DE IMPLICAÇÃO, AS LÓGICAS PARA POSSIBILIDADE, OBRIGAÇÃO, CRENÇA, ETC...

TUDO ISSO SÓ FOI FORMALIZADO MATEMATICAMENTE NO SÉCULO XX!

(DICA: LEIAM A INTRODUÇÃO DE ALGUM LIVRO DE LÓGICA MODAL!)

<u>LÓGICA INTUICIONISTA</u> É ALGO MAIS RECENTE... 1930?

E A FORMALIZAÇÃO DELA É MAIS RECENTE AINDA... 1960?

## GÖDEL:

- ELE TEM UM ARTIGO DE DUAS PÁGINAS QUE FALA DE UMA TRADUÇÃO $IL \to S4$ ...

IDÉIA: EXPRESSÕES EM IL SÃO FEITAS DE VARIÁVEIS E DOS CONECTIVOS: $\&_I, \vee_I, \to_I, \top_I, \bot_I$ E AS EXPRESSÕES EM S4 SÃO FEITAS DE VARIÁVEIS E $\&_m, \vee_m, \to_m, \top_m, \bot_m, \Box, \Diamond$.

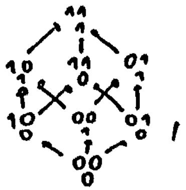
O MESMO $(W,R)$ ← TRANSITIVO REFLEXIVO. VAI SERVIR TANTO PRA S4 QUANTO PRA IL...

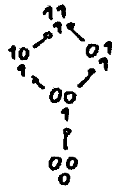
OS VALORES DE VERDADE DE S4 - ISTO É, $\Omega_M$ - SÃO <u>TODAS</u> AS FUNÇÕES DE $W$ EM $\{0,1\}$.

OS VALORES DE VERDADE DE IL - $\Omega_I$ - VÃO SER SÓ OS TAIS QUE $P = \Box P$.

EXEMPLO: $(W,R) = 1 \to 3 \leftarrow 2$

(NA VERDADE: $R^* = 1 \to 3 \leftarrow 2$ )

OBS: $\Omega_M =$ 

$\Omega_I =$ 

$\Omega_M = \{\substack{0\,0\\0}, \substack{0\,0\\1}, \substack{0\,1\\0}, \substack{0\,1\\1}, \substack{1\,0\\0}, \substack{1\,0\\1}, \substack{1\,1\\0}, \substack{1\,1\\1}\}$

$\Box\substack{0\,0\\0} = \substack{0\,0\\0}$ $\Box\substack{0\,0\\1} = \substack{0\,0\\1}$ $\Box\substack{0\,1\\0} = \substack{0\,0\\0}$ $\Box\substack{0\,1\\1} = \substack{0\,1\\1}$

$\Box\substack{1\,0\\0} = \substack{0\,0\\0}$ $\Box\substack{1\,0\\1} = \substack{1\,0\\1}$ $\Box\substack{1\,1\\0} = \substack{0\,0\\0}$ $\Box\substack{1\,1\\1} = \substack{1\,1\\1}$

OBS: $(\Box P)_a = \forall b \in (a\to).\, P_b$
$= \forall b \in \{b \in W \mid aRb\}.\, P_b$

$\Omega_I = \{\substack{0\,0\\0}, \substack{0\,0\\1}, \substack{0\,1\\1}, \substack{1\,0\\1}, \substack{1\,1\\1}\}$

# LA 13/JUN/2017

Hoje: mais sobre S4 e outras lógicas modais; a tradução de Gödel entre IL e S4; S4 e topologias.

Lembre que

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

(4) $\Box P \to \Box\Box P$

---

Tradução de Gödel:

$G(P) = \Box P$,

$G(Q) = \Box Q$,

etc

(se G recebe uma variável ele retorna $\Box$variável)

$G(E_1 \&_I E_2) = G(E_1) \&_M G(E_2)$

$G(E_1 \vee_I E_2) = G(E_1) \vee_M G(E_2)$

$G(E_1 \to_I E_2) = \Box(G(E_1) \to_M G(E_2))$

$G(\top_I) = \top_M$,

$G(\bot_I) = \bot_M$

Teorema:
Se E é uma expressão de IL então E é demonstrável (em IL) se e só se G(E) é demonstrável (em S4)

E a versão semântica disso?

Se E é uma expressão de IL então:
E é uma tautologia intuicionista (que ainda não vimos o que é!)
se e só se
G(E) é uma tautologia em S4.

Exemplos:

$$H = \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array}, \quad V(P) = 10, \quad V(Q) = 01,$$

$\neg\neg P = 20 \neq P$

$\neg\neg P \to P$ não é uma tautologia intuicionista.
Então $G(\neg\neg P \to P)$ não é uma tautologia em S4!

Exercício: $G(\neg_I \neg_I P \to_I P) = ?$

obs: $\neg_I Q = Q \to_I \bot_I$.

$\neg_I(P \to_I \bot_I) \to_I P$

$((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_I P$

$\Box(G((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_M \Box P)$

$\Box(G((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_M \Box P)$

$G(((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_I P)$

$\Box(G((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_M \Box P)$

$\Box(\Box(G(P \to_I \bot_I) \to_M \bot_M) \to_M \Box P)$

$\Box(\Box(\Box(\Box P \to_M \bot_M) \to_M \bot_M) \to_M \Box P)$

$\Box(\Box(\Box(\Box P \to \bot) \to \bot) \to \Box P)$

$\Box(\Box(?(\neg\Box P) \to \Box P)$

Repare que:

$G(\neg_I E)$

$= G(E_I \to_I \bot_I)$

$= \Box(G(E_I) \to_M \bot_M)$

$= \Box\neg G(E_I)$

Se a gente estender a nossa tradução pra incluir $G(\neg_I E)$

$= \Box\neg_M G(E)$

Temos:

$G(\neg_I \neg_I P \to_I P)$

$= \Box(G(\neg_I \neg_I P) \to_M \Box P)$

$= \Box(\Box\neg_M \Box\neg_M \Box P \to_M \Box P)$

LA 20/JUN/2017

HOJE: TOPOLOGIAS!
(DEPOIS A GENTE VOLTA PRA LÓGICAS MODAIS, S4, ETC...)

MOTIVASÃO:
$(2,3)$ É UM INTERVALO ABERTO
$[4,5]$ É UM INTERVALO FECHADO

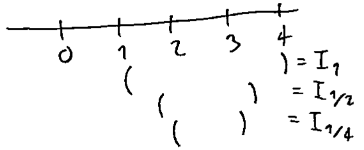
UM SUBCONJUNTO $S \subset \mathbb{R}$ É <u>ABERTO</u> SE E SÓ SE ELE É A UNIÃO DE INTERVALOS ABERTOS...

UM <u>ESPASO TOPOLÓGICO</u> É UM PAR $(X, \mathcal{U})$ ONDE $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ E $\mathcal{U}$ CONTÉM O "TUDO", O VAZIO, E É FECHADO POR UNIÕES BINÁRIAS, INTERSEÇÕES BINÁRIAS, E UNIÕES ARBITRÁRIAS.

SEJAM:
$I_\varepsilon = (2-\varepsilon, 3+\varepsilon)$
ENTÃO:
$I_2 = (0,5)$
$I_1 = (1,4)$
$I_{0.1} = (1.9, 3.1)$
$I_0 = (2,3)$

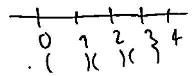
QUAL É O RESULTADO DISTO?

$A = I_1 \cap I_{1/2} \cap I_{1/4} \cap I_{1/8} \cap \ldots$




SERÁ QUE:
$2 \in A$? SIM
$3 \in A$? SIM
$A = I_0$? NÃO!
A É FECHADO!

SEJAM:
$B = (0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \ldots$

$B =$ 


B É ABERTO.

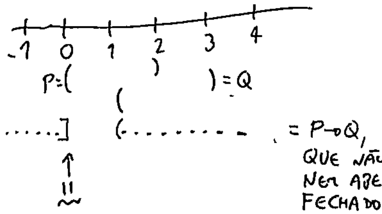
ALGUNS TEOREMAS DE CÁLCULO 1 (E 2 E 3) USAM TEOREMAS SOBRE A TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}$, MAS EM GERAL USAM COISAS SOBRE <u>CONJUNTOS COMPACTOS</u>.

IDÉIA:

ESCOLHA UM ESPASO TOPOLÓGICO $(X, \mathcal{O}(X))$
(QUALQUER UM – P.EX., $(X, \mathcal{O}(X)) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$.
OS ELEMENTOS DE $\mathcal{O}(X)$ – ISTO É, OS ABERTOS – VÃO SER OS VALORES DE VERDADE DE UMA HA –

P.EX.:
$P \& Q = \{x \in X \mid x \in P \,\&\, x \in Q\}$ OK
$P \vee Q = \{x \in X \mid x \in P \vee x \in Q\}$ OK
$P \to Q = \{x \in X \mid x \in P \to x \in Q\}$
$\top = \{x \in X \mid \top\}$ OK
$\bot = \{x \in X \mid \bot\}$ OK

EXERCÍCIO:
$(0,2) \to (1,3) = ?$




QUE NÃO É NEM ABERTO NEM FECHADO!

IDÉIA:

(VAMOS CONSERTAR A IDÉIA ANTERIOR!)

SE $S \subseteq X$ ENTÃO:
$\mathrm{Int}(S)$ (O "INTERIOR" DE S)
É O MAIOR ABERTO CONTIDO EM S.

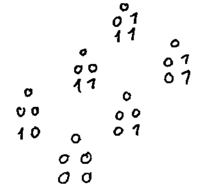
EX: $S = P \to Q$
$= (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$
$\mathrm{Int}(S) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

(OBS, QUE A GENTE NÃO VAI USAR: $S \subset X$ É <u>FECHADO</u> SE E SÓ SE O COMPLEMENTO DE S É ABERTO...
EX: $[1,2]$ É FECHADO PORQUE O SEU COMPLEMENTO É $(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$.
O <u>FECHO</u> DE S É O MENOR FECHADO CONTENDO S; A <u>FRONTEIRA</u> DE S É O FECHO DE S MENOS O INTERIOR DE S.)

...VERSÃO CONSERTADA:
$P \to Q = \mathrm{Int}(\{x \in X \mid x \in P \to x \in Q\})$

EXERCÍCIO: CALCULE $P \to Q$
(NA VERSÃO CONSERTADA!)
NESTES CASOS:

a) $\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} = \mathrm{Int}\left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$



$$x \in ((0,2) \to (1,3)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ 0 & \text{se } x \in (0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2) \\ 1 & \text{se } x \in [2,3) \\ 1 & \text{se } x \in [3,+\infty) \end{cases}$$
$$\parallel$$
$$x \in ((-\infty,0] \cup (1,+\infty))$$

| $x \in P$ | $x \in Q$ | $x \in P \to x \in Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

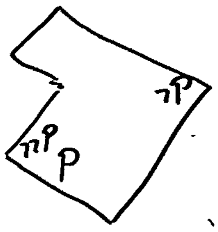
LA 20/JUN/2017

IDÉIA:
"PROPAGAÇÕES"
(EU USEI ISSO NO
MEU ARTIGO, MAS
LÁ PRO FINAL...)

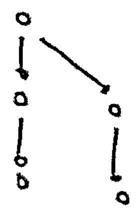
$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "="'] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] \\ 1 & & 1 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{prp}_0 \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 32 & & & & \\ & 22 & & & \\ 21 & & 12 & & \\ 20 & 11 & & 02 & \\ 10 & & 01 & & \\ & 00 & & & \end{matrix}$$




NOVO DESENHO:



CALCULEM:

$$\underbrace{\underbrace{\left( \begin{pmatrix} 0 \searrow & \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{=10} \to \begin{pmatrix} 0 \searrow & \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{=00} \right)}_{\underbrace{\mathrm{Int}\begin{pmatrix} 1 \searrow & \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \searrow & \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{=02}}} \to \begin{pmatrix} 0 \searrow & \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{=00}}_{\underbrace{\mathrm{Int}\begin{pmatrix} 1 \searrow & \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \searrow & \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{=20}}}$$

$$\underbrace{\underbrace{(10 \to 00)}_{02} \to 00}_{20}$$

LA 27/Jul/2017

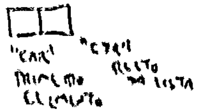
Hoje: mini-Lisp
Aula que vem: mini-Haskell

## Protótipos

- Não precisa ser user-friendly
- Não precisa ser resistente

## Lisp

Objetos:
- Números } átomos
- Strings } átomos
- Conses (listas)
- NIL

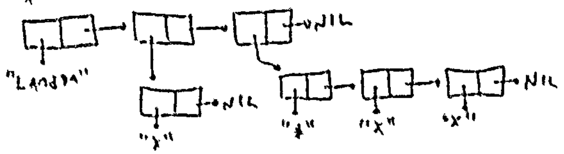



## Notações

- Sexps (s-expressions)
- memória
- intermediária

Idéia:
square = (LAMBDA (x) (* x x))
λ

Na memória:

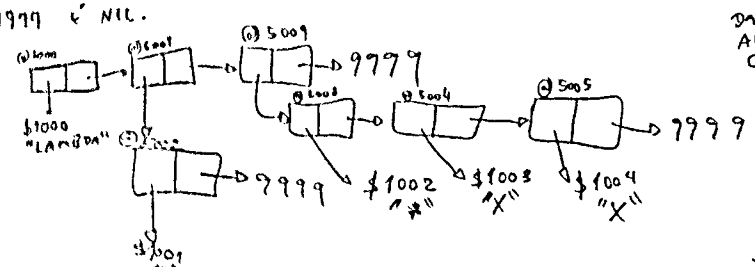



Obs: no nosso primeiro protótipo strings geralmente são escritos sem aspas

Uma implementação:
Todos os nossos "bytes" vão ser números decimais de 4 dígitos - 0000 até 9999.

Truque: 0000-0999 vão representar os números de 0-999...
Não, melhor: 0-499, 500-999
-500 → -1

Os números de 1000 até 4999 vão apontar pra strings...
Os números de 5000-9998 vão apontar pra conses,
e 9999 é NIL.




CAR(square) = lambda
CDR(square) = ((x) (* x x))
CONS(x, square)

Memória:
$1001: "x"
$1002:
$1003:
$1004:

| | CAR | CDR |
|---|---|---|
| @5000: | 1000 | 5001 |
| @5001: | 5002 | 5009 |
| @5002: | 1001 | 9999 |

CAR(@5000) = $1000
CDR(@5000) = @5001
TOSTR($1001) = "x"
TOSTR(@5003) = "(* x x)"
TOSTR(@5004) = "(x x)"

Obs: láááá atrás a gente atribuiu valores para subexpressões:
2 · 3 + 4 · 5
6, 20, 26

Dá pra fazer algo parecido com sexps, mas com um truque feio:

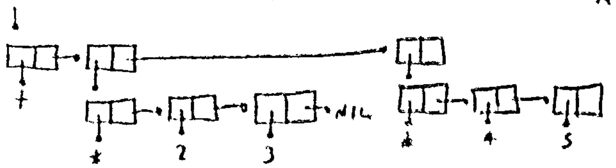
(LAMBDA (x) (* x x))
$1001, @5002, @5004

Às vezes um cons corresponde a um espaço, às vezes a um "(".

Outra função:
READ("(+ A (* B C))")

Outra:
EVAL

EVAL(READ("(+ (* 2 3) (* 4 5))"))



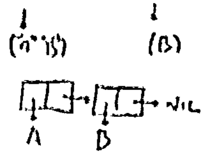

Como é que o EVAL funciona?
(* 2 3) ⇝ 6
(* 4 5) ⇝ 20
(+ (* 2 3)
(* 4 5)) ⇝ 26

O EVAL normalmente avalia ("evaluates") os argumentos...

(+ (* 2 3)
(* 4 5)) → (+ 6 20) → 26

Exceções:
A função QUOTE não avalia os argumentos.
(QUOTE (+ 2 3)) ⇝ (+ 2 3)
A função LAMBDA nem.
(LAMBDA (x) (* x x)) ⇝ (LAMBDA (x) (* x x))
SETQ

Revisando a sintaxe...
(CONS "A" (CONS "B" NIL))
("A" "B")  (B)




Agora muda tudo - a gente vai ter dois tipos de strings...
Com aspas:
"ABC" ⇝ "ABC"
ABC ⇝ conteúdo da variável ABC.

(SETQ A (+ 2 3))
Isto faz A := 5.
(SETQ B (+ 4 5))
(* A B) ⇝ 45

LA 27/JUN/2017

HOJE: MINI-LISP
AULA QUE VEM:
MINI-HASKELL

PROTÓTIPOS
- NÃO PRECISA SER USER-FRIENDLY
- NÃO PRECISA SER RESISTENTE

MAIS UMAS FUNÇÕES:

```
(PROGN (+ 1 2)
       (+ 3 4)
       (+ 5 6)) ~> 11
(PROGN (SETQ A 2)
       (SETQ B 3)
       (SETQ A 22)
       (SETQ B 33)
       (+ A B)) ~> 55
(EVAL (QUOTE (PROGN
               (SETQ A 2)
               (SETQ B 3)
               (+ A B)
               10)
      )
) ~> 10
```

```
(EVAL (CONS (QUOTE +)
            (QUOTE (2 3)))) ~> 5
((LAMBDA (X) (* X X)) 5) ~> 25
(DEFUN SQUARE (X) (* X X))
  ~> (SETQ SQUARE (QUOTE (LAMBDA (X)
                           (* X X))
                  )
     )
(SQUARE 5)
  ⇓
((LAMBDA (X) (* X X)) 5)
  ⇓
(* 5 5)
  ⇓
25
```

UM TRUQUE SINTÁTICO
(IMPLEMENTADO NO READ):

```
(READ "'(+ 2 5)")
  ⇓
(READ "(QUOTE (+ 2 5))")
```

ALGUMAS FUNÇÕES "ÓBVIAS":

```
(< 2 3) ~> T
(< 3 2) ~> NIL
```

MENOS ÓBVIA:

```
(IF (< 2 3)
    (SETQ A "YES")
    (SETQ B "NO"))

(DEFUN FACT (N)
  (IF (<= N 1)
      1
      (* N (FACT (- N 1)))
  )
)
(FACT 4) ~> 24

(DEFUN DECSEQ (N)
  (IF (< N 0)
      NIL
      (CONS N (DECSEQ (- N 1)))
  )
)
(DECSEQ 4)
(MAP (LAMBDA (X) (* 10 X))
     '(2 3 4)
) ~> (20 30 40)
```

```
(DEFUN MAP (F L) ...?)
```

SUGESTÃO:
TESTE A SUA IDEIA COM:

```
(DEFUN *10 (X) (* X 10))
(MAP '*10 '(2 3 4))

(DEFUN MAP (F L) [BODY])

[BODY] = (IF L
             (CONS [α] [β])
             NIL )
```

DICA: (APPLY '*10 2) ~> (*10 2) ~> 20

```
[α] = (APPLY F (CAR L))
[β] = (MAP F (CDR L))
```

OBS:

```
(DECSEQ 9) ~> (9 8 7 6 5 4 3 2 1 0)
(FIRSTN 4 (DECSEQ 9)) ~> (9 8 7 6)
```

EM HASKELL
DÁ PRA DEFINIR (SEQ 1) ~> (1 2 3 4 5 ...)
(FIRSTN 4 (SEQ 1)) ~> (1 2 3 4)

# LA 4/julho/2017

Hoje: Mini-Haskell (#SQN)

Haskell:
- Sintaxe ← não
- Sistema de tipos ← não
  (com tipos indutivos/recursivos, e polimorfismo)
- Lazyness ⇐ sim

(FIRSTN 4 (SEQ 10))
⇝ (10 11 12 13)

Dois truques.
- Thunks (e strictness)
- EVAL ← é modificável, e a gente vai definir uma extensão dela.

Revisão:

Memória: endereços 0-9999
Alguns apontavam pra strings
Outros eram números, outros eram conses,
9999 era NIL,
e no final da aula eu inventei uma distinção entre strings - que apareciam com ""s e o valor deles era eles eles mesmos
e "símbolos", que representavam variáveis.

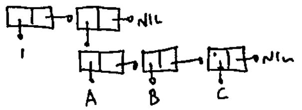
"ABC" $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ "ABC"
ABC $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ conteúdo da variável ABC (que podia ser um 27).

(SQUARE 5) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ (* 5 5) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ 25

SQUARE = (LAMBDA (X) (* X X))

Um truque na sintaxe:

'(A B C) ≈ (QUOTE (A B C))




Novidade:
Vamos usar "τ" pra representar thunks...

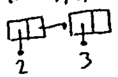
τ(+ 1 2) ≈ (THUNK (+ 1 2))

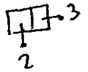
... e os thunks vão servir pra indicar coisas que a gente ainda não calculou.

(1 2 3 4 5 ...) é uma lista infinita

(1 2 3 4 τ(SEQ 5)) é ela calculada até um determinado ponto.

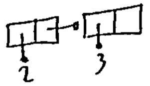
Mais uma notação (padrão do Lisp):

(2 3)



(2 . 3)


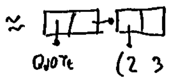

Importante:

(2 . 3 4) dá erro de sintaxe.

(2 . (3))


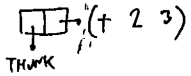
= (2 3)

Implementação do ' e do τ na sintaxe:

'(2 3 4) ≈


= (QUOTE (2 3 4))

τ(+ 2 3) ≈ (THUNK . (+ 2 3))




Alguns objetos o "EVAL" retorna eles sem modificações.

12 $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ 12
"ABC" $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ "ABC"
(LAMBDA . α) ⇝ (LAMBDA . α)

((LAMBDA (X) (* X X)) 5) ⇝⇝
(SQUARE 5) ⇝

Lembra que o EVAL não mexe no argumento do QUOTE...
(QUOTE α) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ α

Idéia: um objeto "estrito" é um que o EVAL não altera...

(2+3)·4
⇓ RED
5·4
⇓ RED
20

Não sei que nome dar pra isso... digamos, L.

(L 1 2) vai ser parecido com (1 2) — A gente pode mudar os detalhes disso depois!

Só que uma lista começada com L é uma lista que pode ter elementos "parcialmente calculados"...

(L 1 2 3) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ (L 1 2 3)
(L 1 τ(+ 4 5) τ(+ 6 7)) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$ (L 1 9 13)
(L (+ 2 3) τ(+ 4 5) τ(+ 6 7)) $\overset{eval}{\rightsquigarrow}$
(L (+ 2 3) 9 13)
(L 1 2 3 . τ(SEQ 4))

Hoje a gente vai começar a ver como fazer com que os "τ"s só sejam calculados quando precisam...

Idéia: pra maioria das funções do Lisp o "L" e o "τ" vão ser coisas invisíveis...

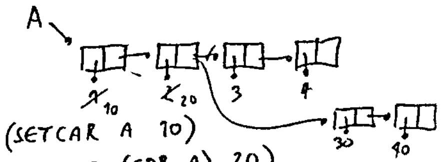
(CAR (L 1 2 3)) (CAR '(1 2 3))
⇝ 1 ⇜

## Truque:

### 1ª parte:

"O Lisp tem duas funções, SETCAR e SETCDR, que seriam proibidas em λ-cálculo... elas modificam objetos já existentes.

(SETQ A (1 2 3 4))




(SETCAR A 10)
(SETCAR (CDR A) 20)
(SETCDR (CDR A) '(30 40))

### 2ª parte

Objetos τ podem ser substituídos por versões "mais calculadas" deles...

(L 1 2 τ(SEQ 3))
(SEQ 3)
⇓
(L 3 τ(SEQ 4))

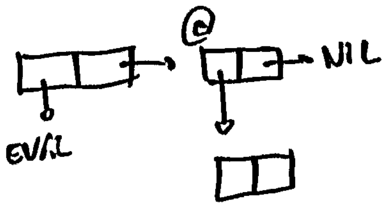
### 3ª parte

A gente tem por trás disso aí uma noção de "avaliação parcial" que é bem parecida com a do início...

(2+3)·(4+5) ⇝ (2+3)·9
⇓
5·(4+5)

Só que a relação nova vai se chamar "$τ_1$" - calcule um "τ".

LA 4/JULHO/2017




SUGESTÃO DE NOMES
(BASEADA NUMA CONVENÇÃO
DO LISP):

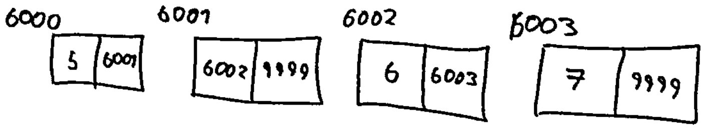
(NUMBERP "123") → NIL
(STRINGP "ABC") → T
(CONSP '(A B C)) → T
(SYMBOLP 'A) → T

```
EVAL @
    IF(NUMBERP @) RETURN @
    IF(STRINGP @) RETURN @
    IF(CONSP @) RETURN CDR @
    IF(SIMBOLP(CAR @)) RETURN VETOR[CAR @]
```

(+ (* 2 3) (* 4 5))
5000

mem={
3000 = {"+", 9999},
3001 = {"*", 9999},
6000 = {5, 6001},
6001 = {6002, 9999},
6002 = {6, 6003},
6003 = {7, 9999},
5000 = {3000, 5001}, --> "(+ (* 2 3) (* 4 5))"
5001 = {5010, 5002}, --> "((* 2 3) (* 4 5))"
6004 = {2, 6005}, --> "(2 3)"
6005 = {3, 9999}, --> "(3)"
5010 = {3001, 6004} --> "(* 2 3)"
5002 = {5003, 9999} --> "((* 4 5))"
6006 = {4, 6007} --> "(4 5)"
6007 = {5, 9999} --> "(5)"
5003 = {3001, 6006} --> "(* 4 5)"

symbolws = {
"+" = 3000,
"*" = 3001,
"nil" = 9999,




tostr(5000) = "(+ (* 2 3) (* 4 5))"

eval(5000) ~ 26
evalargs(5001) ~ 6 , 20

tostr(6000) --> "(5 ((6 7)))"
--> "(5 (6 7))"
tostr(5) --> "5"
tostr (3000) --> "+"
tostr (3001) --> "*"
tostr (9999) --> "nil"
tostr (6001) --> "((6 7))"
(6002) --> "(6 7)"
(6003) --> "(7)"