0)

$$2\cdot(3+4)+5\cdot 6 = 2\cdot(3+4)+30$$

$= 2\cdot 3+2\cdot 4+5\cdot 6$

$= 6+2\cdot 4+5\cdot 6$

$= 6+8+5\cdot 6$

$= 6+8+30$

$= 14+30$

$= 44$

$= 2\cdot 7+30$

$= 14+30$

$= 44$

$$\begin{tikzcd}
2\cdot(3+4)+5\cdot 6 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot(3+4)+30 \arrow[d] \\
2\cdot 7+5\cdot 6 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot 7+30 \arrow[d] \\
14+5\cdot 6 \arrow[r] & 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}$$

$2\cdot(3+4)+5\cdot 6$

$= 2\cdot 7+5\cdot 6$

$= 14+5\cdot 6$

$= 14+30$

$= 44$

$$\begin{tikzcd}
2\cdot(3+4)+5\cdot 6 \arrow[d] \\
2\cdot 3+2\cdot 4+5\cdot 6 \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr] & & 2\cdot 3+2\cdot 4+30 \arrow[d] \\
6+2\cdot 4+5\cdot 6 \arrow[dr] & 2\cdot 3+8+5\cdot 6 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot 3+8+30 \arrow[d] \\
& 6+8+5\cdot 6 \arrow[r] \arrow[d] & 6+8+30 \arrow[r] \arrow[d] & 6+38 \arrow[d] \\
& 14+5\cdot 6 \arrow[r] & 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}$$

a) $2\cdot(3+4)+5\cdot 6 = 2\cdot(3+4)+30$

$= 2(7)+30$

$= 14+30$

$= 44$

$= 2\cdot(7)+5\cdot 6$

$= 14+5\cdot 6$

$= 14+30$

$= 44$

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot\underbrace{(3+4)}_{7}}_{14}+\underbrace{5\cdot 6}_{30}}_{44}$$

$= 6+2(4)+5\cdot 6$

$= 6+8+5\cdot 6$

$= 6+8+30$

$= 14+30$

$= 44$

$\to$ D

$\downarrow$ E

$$\begin{tikzcd}
2\cdot(3+4)+5\cdot 6 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot(3+4)+30 \arrow[d] \\
2(7)+5\cdot 6 \arrow[r] & 2(7)+30 \arrow[d] \\
& 14+30 \arrow[r] & 44
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
2+3+4 \arrow[r] \arrow[d] & 2+7 \arrow[d] \\
5+4 \arrow[r] & 9
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(2+3)+(4+5) \arrow[r] \arrow[d] & (2+3)+9 \arrow[d] \\
5+(4+5) \arrow[r] \arrow[d] & 5+9 \arrow[d] \\
5+5 \arrow[r] & 14
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 2+3+4+5 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
5+4+5 \arrow[d] \arrow[dr] & 2+7+5 \arrow[dl] \arrow[dr] & 2+3+9 \arrow[dl] \arrow[d] \\
9+5 \arrow[dr] & 5+9 \arrow[d] & 2+12 \arrow[dl] \\
& 14 &
\end{tikzcd}$$

$2+3+4+5$

NOTAÇÃO PARA SUBSTITUIÇÃO (SIMULTÂNEA):

$$((\underbrace{x}_{y+1}+\underbrace{y}_{z\cdot 3})\cdot \underbrace{z}_{x-1})\begin{bmatrix} x := y+1 \\ y := z\cdot 3 \\ z := x-1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$((y+1)+(z\cdot 3))\cdot(x-1)$$

$$(\lambda x.\, expr)\, val$$
$$\downarrow$$
$$expr\,[x := val]$$
$$\downarrow$$
$$\dots$$

1.28:

a) $(\lambda x.xy)(\lambda u.vuu)$

$$\downarrow$$

$$(vuu)y$$

EXERCÍCIO 1.4:

OBS: $f\,a\,b\,c = ((fa)b)c$
$= (((f(a))(b))(c)$

1.4

a) $xyz(yx)$

$$((x(y))z)(yx)$$

$$xyz(yx)$$

(VER "NOTATION 1.3", P.4)

1.4 b) $\lambda x.uxy$

HIPÓTESES:

$\lambda x.uxy = ((\lambda x.u)x)(y)$ NÃO, PORQUE $\lambda x.PQ = \lambda x.(PQ)$

$\lambda x.uxy = \lambda x.((ux)(y))$ SIM

$\lambda x.uxy = (\lambda x.u(x))(y)$ NÃO

$\lambda x.uxy = \lambda x.(u(x(y)))$ NÃO, PORQUE $MNP = (MN)P$

a) $A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (2,3) \\ (1,4), (2,4) \end{matrix} \right\}$

b) $A \to D$ $\left\{ \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,10) \end{matrix} \right\} \right\}$

c) $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(1,3)}}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(1,3)}}_{3})}_{30})}_{(1,30)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,3)}}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,3)}}_{3})}_{30})}_{(2,30)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,4)}}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,4)}}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$ | $\underbrace{(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,4)}}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,4)}}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$

$D \times C = \left\{ \begin{matrix} (10,30), (20,30) \\ (10,40), (20,40) \end{matrix} \right\}$

d)

e) V

f) $p=(2,3)$ $\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(2,3)}}_{2})}_{30}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(2,3)}}_{3})}_{30})}_{(30,30)}$

g) $\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{(1,3)}}_{1})}_{10}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{(1,3)}}_{3})}_{30})}_{(10,30)}$ ✓

$\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi p}_{2})}_{20}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(20,30)}$

$\underbrace{(\underbrace{g(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:A})}_{:D}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:B})}_{:C})}_{:D\times C}$

a) $A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (1,4) \\ (2,3), (2,4) \end{matrix} \right\}$

$A=(1,2)$
$B=(3,4)$

b) $A \to D = \left\{ \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,10) \\ (2,20) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,10) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} (1,20) \\ (2,20) \end{matrix} \right\} \right\}$

$D=(10,20)$

c) Para $p:(2,3)$ $\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(2,30)}$

Para $p:(2,4)$ $\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{4})}_{40})}_{(2,40)}$

$P: A \times B$

Para $p:(1,3)$ $\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{3})}_{30})}_{(1,30)}$

Para $p:(1,4)$ $\underbrace{(\underbrace{\pi p}_{1}, \underbrace{f(\underbrace{\pi' p}_{4})}_{40})}_{(1,40)}$

$f: \left\{ \begin{matrix} (3,30) \\ (4,40) \end{matrix} \right\}$

$\boxed{\text{LA } 11/\text{ABRIL}/2017}$

a)
$$\underbrace{\left(\lambda \underbrace{p}_{:A\times C} : A\times C \,.\, \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{f}_{:A\to B}(\underbrace{\pi \underbrace{p}_{:A\times C}}_{:A})}_{:B},\ \underbrace{\pi' \underbrace{p}_{:A\times C}}_{:C}\right)}_{B\times C}\right)}_{A\times C \to B\times C}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p : A\times C}{\pi p : A} \quad f : A \to B}{f(\pi p) : B} \qquad \cfrac{p : A\times C}{\pi' p : C}}{\cfrac{(f(\pi p), \pi' p) : B\times C}{(\lambda p : A\times C \,.\, (f(\pi p), \pi' p)) : A\times C \to B\times C}}$$

$\boxed{\text{LA 11/ABRIL/2017}}$

b)

$$\underbrace{\lambda \underbrace{q}_{:B\times C} : B\times C \, . \, \underbrace{(\underbrace{\underbrace{h}_{:B\to(C\to D)}(\underbrace{\pi \underbrace{q}_{:B\times C}}_{:B}))}_{:C\to D}(\underbrace{\pi' \underbrace{q}_{:B\times C}}_{:C})}_{:D}}_{B\times C\to D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q:B\times C}{(\pi q):B} \quad h:B\to(C\to D)}{(h(\pi q)):C\to D} \qquad \dfrac{q:B\times C}{(\pi' q):C}}{(h(\pi q))(\pi' q):D}}{\lambda q : B\times C \, . \, (h(\pi q))(\pi' q) : B\times C\to D}$$

c)

$$\underbrace{\lambda \underbrace{b}_{:B} : B \, . \, \underbrace{\lambda \underbrace{c}_{:C} : C \, . \, \underbrace{\underbrace{g}_{B\times C\to D} \underbrace{(\underbrace{b}_{:B}, \underbrace{c}_{:C})}_{:B\times C}}_{:D}}_{:C\to D}}_{:B\to(C\to D)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b:B \quad c:C}{g:B\times C\to D \quad (b,c):B\times C}}{g(b,c):D}}{\lambda c:C.g(b,c):C\to D}}{\lambda b:B.\lambda c:C.g(b,c):B\to(C\to D)}$$

d)

$$\underbrace{\lambda \underbrace{\varphi}_{:C\to D} : C\to D \, . \, \underbrace{\lambda \underbrace{c}_{:C} : C \, . \, \underbrace{\underbrace{k}_{D\to E}(\underbrace{\underbrace{\varphi}_{:C\to D} \underbrace{c}_{:C}}_{:D})}_{:E}}_{:C\to E}}_{(C\to D)\to(C\to E)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{c:C \quad \varphi:C\to D}{\varphi c:D} \quad k:D\to E}{k(\varphi c):E}}{\lambda c:C.k(\varphi c) : C\to E}}{\lambda \varphi:C\to D.\lambda c:C.k(\varphi c):(C\to D)\to(C\to E)}$$

LA 11/ABRIL/2017

ÁRVORES EM $ND_{\wedge\to}$ SÃO CHAMADAS DE "DEDUÇÕES" (OU "DERIVAÇÕES").

TODA VEZ QUE TEMOS UMA INTRODUÇÃO SEGUIDA DE UMA ELIMINAÇÃO NÓS PODEMOS "REDUZIR" A DEDUÇÃO.

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}\&I}{Q}\&E_1 \quad Q\to S}{S}{\to}E \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad Q\to S}{S}{\to}E \quad (A')$$

(B)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}}{R}\&E_2 \quad R\to S}{S}{\to}E \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E \quad R\to S}{S}{\to}E \quad (B')$$

EXERCÍCIO 2:
REESCREVA AS ÁRVORES (A), (A'), (B), (B') INCLUINDO "$\vdash$"s.

$$\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P, P\to Q\vdash Q}$$

EXERCÍCIOS:
1) ESCREVA A ÁRVORE (B')
2) REESCREVA ELAS COMO ÁRVORES DE TIPOS EM λ-CÁLCULO. EX:

(A'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{app} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{app}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}\pi \quad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}\text{app}$$
$$\Uparrow$$
$$h(\pi(\underbrace{fa,ga}_{fa})):D$$

(A''')
$$\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B} \quad h:B\to D}{h(f(a)):D}$$
$$\Uparrow$$
$$h(fa):D$$

(B'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{APP} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}\pi' \quad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}\text{APP}$$
$$h(\pi'(\underbrace{fa,ga}_{ga})):D$$

(B''')
$$\dfrac{\dfrac{a:A \quad g:A\to C}{ga:C} \quad h:C\to D}{h(g(a)):D}$$

$$h(ga):D$$

LA 11/ABRIL/2017

ÁRVORES EM $ND_{\wedge\to}$ SÃO CHAMADAS DE "DEDUÇÕES" (OU "DERIVAÇÕES").

TODA VEZ QUE TEMOS UMA INTRODUÇÃO SEGUIDA DE UMA ELIMINAÇÃO NÓS PODEMOS "REDUZIR" A DEDUÇÃO.

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}\&I}{Q}\&E_1 \quad Q\to S}{S}{\to}E
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad Q\to S}{S}{\to}E \quad (A')$$

(B)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to}E \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E}{Q\&R}\&E_2}{R} \quad R\to S}{S}{\to}E
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to}E \quad R\to S}{S}{\to}E \quad (B')$$

EXERCÍCIO 2:
REESCREVA AS ÁRVORES (A), (A'), (B), (B') INCLUINDO "$\vdash$"s.

$$\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P, P\to Q\vdash Q}$$

EXERCÍCIOS:

1) ESCREVA A ÁRVORE (B')
2) REESCREVA ELAS COMO ÁRVORES DE TIPOS EM λ-CÁLCULO. EX:

(A'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{app} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{app}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}\pi \quad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}\text{app}$$

$$\Uparrow$$

$$h(\underbrace{\pi(fa,ga)}_{fa}):D \rightsquigarrow h(fa):D$$

(B')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}\text{APP} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}\text{APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}\text{PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}\pi' \quad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}\text{APP}$$

$$h(\underbrace{\pi'(fa,ga)}_{ga}):D \rightsquigarrow$$

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad \dfrac{P\vdash P \quad P\to R\vdash P\to R}{P,P\to R\vdash R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q\&R}}{\dfrac{P,P\to Q,P\to R\vdash Q \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,P\to R,Q\to S\vdash S}}$$

(A')
$$\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,Q\to S\vdash S}$$

LA 11/ABRIL/2017

ÁRVORES EM $ND_{\to}$ SÃO CHAMADAS DE "DEDUÇÕES" (OU "DERIVAÇÕES").

TODA VEZ QUE TEMOS UMA INTRODUÇÃO SEGUIDA DE UMA ELIMINAÇÃO NÓS PODEMOS "REDUZIR" A DEDUÇÃO.

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to E} \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to E}}{Q\&R}{\&I}}{Q}{\&E_1} \quad Q\to S}{S}{\to E}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to E} \quad Q\to S}{S}{\to E} \quad (A')$$

(B)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \quad P\to Q}{Q}{\to E} \quad \dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to E}}{Q\&R}}{R}{\&E_2} \quad R\to S}{S}{\to E}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{P \quad P\to R}{R}{\to E} \quad R\to S}{S}{\to E} \quad (B')$$

EXERCÍCIO 2:
REESCREVA AS ÁRVORES (A), (A'), (B), (B') INCLUINDO "$\vdash$"s.

$$\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,\ P\to Q\vdash Q}$$

EXERCÍCIOS:
1) ESCREVA A ÁRVORE (B'')
2) REESCREVA ELAS COMO ÁRVORES DE TIPOS EM λ-CÁLCULO. EX:

(A'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{app} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{app}}{(f(a),g(a)):B\times C}{pair}}{\pi(f(a),g(a)):B}{\pi} \quad h:B\to D}{h(\pi(f(a),g(a))):D}{app}$$

$$\Uparrow$$

$$h(\underbrace{\pi(fa,ga)}_{fa}):D \rightsquigarrow h(fa):D$$

(B'')
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a:A \quad f:A\to B}{f(a):B}{APP} \quad \dfrac{a:A \quad g:A\to C}{g(a):C}{APP}}{(f(a),g(a)):B\times C}{PAIR}}{\pi'(f(a),g(a)):C}{\pi'} \quad h:C\to D}{h(\pi'(f(a),g(a))):D}{APP}$$

$$h(\underbrace{\pi'(fa,ga)}_{ga}):D \rightsquigarrow$$

(A)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad \dfrac{P\vdash P \quad P\to R\vdash P\to R}{P,P\to R\vdash R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q\&R}}{P,P\to Q,P\to R\vdash Q} \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,P\to R,Q\to S\vdash S}$$

(A')
$$\dfrac{\dfrac{P\vdash P \quad P\to Q\vdash P\to Q}{P,P\to Q\vdash Q} \quad Q\to S\vdash Q\to S}{P,P\to Q,Q\to S\vdash S}$$

LA 18/ABRIL/2017

SLOGAN:
Quase todas as operações que a gente vai precisar correspondem a derivações em dedução natural "traduzidas"!

$$\dfrac{\dfrac{[p:A\times B]}{:A} \quad \dfrac{\dfrac{[p:A\times B]^1}{:B} \quad f:B\to C}{:C}}{\dfrac{:A\times C}{:A\times B\to A\times C}\,1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\&Q]^1}{P}\&E_1 \quad \dfrac{\dfrac{[P\&Q]^1}{Q}\&E_2 \quad Q\to R}{R}\to E}{P\&R}\&I}{P\&Q\to P\&R}\to I;1
\qquad
\dfrac{P\&Q \quad Q\to R}{P\&R}$$

"$\vdash$":

$$\dfrac{Q\to R,\ P\&Q \vdash P\&R}{Q\to R\vdash P\&Q\to P\&R}$$

A figura da p.8 vira isso aqui, se a gente traduz ela pra notação lógica:

$$\begin{tikzcd}
P\&R \arrow[d] & \arrow[l, phantom, "\longleftarrow"] & P \arrow[ll, mapsto] \arrow[d] \\
Q\&R \arrow[d] & \arrow[l, phantom, "\leftrightarrows"] & Q \arrow[ll, mapsto] \arrow[d] \\
S \arrow[d] \arrow[rr, mapsto] & \mapsto & R\to S \arrow[d] \\
T \arrow[rr, mapsto] & & R\to T
\end{tikzcd}$$

$$\dfrac{P\to Q}{P\&R\to Q\&R} = ?_a \qquad \dfrac{Q\to(R\to S)}{Q\&R\to S} = ?_b \qquad \dfrac{Q\&R\to S}{Q\to(R\to S)} = ?_c \qquad \dfrac{S\to T}{(R\to S)\to(R\to T)} = ?_d$$

a) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\&R]^1}{P}\&E_1 \quad P\to Q}{Q}\to E \quad \dfrac{[P\&R]^1}{R}\&E_2}{\dfrac{Q\&R}{P\&R\to Q\&R}\to I;1}\&I$$

b) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q\&R]^1}{Q}\&E_1 \quad Q\to(R\to S)}{R\to S}\to E \quad \dfrac{[Q\&R]^1}{R}\&E_2}{S}\to E}{Q\&R\to S}\to I;1$$

c) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^1\ [R]^2}{Q\&R}\&I \quad Q\&R\to S}{S}\to E}{R\to S}\to I;2}{Q\to(R\to S)}\to I;1$$

d) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[R]^1\ [R\to S]^2}{S}\to E \quad S\to T}{T}\to E}{R\to T}\to I;1}{(R\to S)\to(R\to T)}\to I;2$$

TRUQUES:

1. Uma "derivação normal" não tem $\&I$ seguido de $\&E$ e nem $\to I$ seguido de $\to E$
2. Princípio da subfórmula: Numa "derivação normal" de $\dfrac{P\&Q \quad Q\to R}{P\&R}$ as "fórmulas" que aparecem nos nós da árvore são só estas aqui:

$$\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q} \qquad \underbrace{Q}_{Q}\to\underbrace{R}_{R} \qquad \underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q}$$

E nesta: $\dfrac{Q\to R}{P\&Q\to P\&R}$

$$\underbrace{Q}_{Q}\to\underbrace{R}_{R} \qquad \underbrace{P\&Q}_{\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{Q}_{Q}}\to\underbrace{P\&R}_{\underbrace{P}_{P}\&\underbrace{R}_{R}}$$

OUTRO DIAGRAMA:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Q & Q\&R \arrow[l] \arrow[r] & R
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
P \arrow[d] \\
P\&Q
\end{tikzcd}
\leftrightarrows
\left(\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Q & & R
\end{tikzcd}\right)$$

$$\Rightarrow\ Q \leftarrow Q\&R \to R$$

$$\dfrac{P\to Q\&R}{P\to Q} = ?_e \qquad \dfrac{P\to Q \quad P\to R}{P\to Q\&R} = ?_g$$

$$\dfrac{P\to Q\&R}{P\to R} = ?_f \qquad \dfrac{}{Q\&R\to Q} = ?_h \qquad \dfrac{}{Q\&R\to R} = ?_i$$

REGRAS DE DN QUE NÓS VIMOS ATÉ AGORA:

$$\dfrac{P \quad Q}{P\&Q}\&I \qquad \dfrac{P\&Q}{P}\&E_1 \qquad \dfrac{P\&Q}{Q}\&E_2$$

$$\dfrac{\begin{matrix}P\ [Q]^1\\ \vdots \\ R\end{matrix}}{Q\to R}\to I;1 \qquad \dfrac{Q \quad Q\to R}{R}\to E$$

Regras novas:

$$\dfrac{P}{P\vee Q}\vee I_1 \qquad \dfrac{Q}{P\vee Q}\vee I_2 \qquad \dfrac{Q\vee R \quad \begin{matrix}P\ [Q]^1\\ \vdots\\ S\end{matrix} \quad \begin{matrix}P\ [R]^1\\ \vdots\\ S\end{matrix}}{S}\vee E;1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{P,Q\vdash S \quad P,R\vdash S}{P,Q\vee R\vdash S}$$

$$\dfrac{}{\top}\top I \qquad \dfrac{\bot}{P}\bot E$$

E o "não"?

$$\neg P := P\to\bot$$
$$\neg\neg P = (P\to\bot)\to\bot$$
$$\neg\underbrace{\neg P}_{P\to\bot} \quad (P\to\bot)\to\bot$$

Fato: em DN dá pra provar $P\to\neg\neg P$ mas não $\neg\neg P\to P$... porquê

$$\dfrac{P}{\neg\neg P} \Rightarrow \dfrac{P}{(P\to\bot)\to\bot} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{P \quad [P\to\bot]^1}{\bot}\to E}{(P\to\bot)\to\bot}\to I;1$$

Quando a gente "traduzir" isso pra λ-cálculo vamos ter:

$P\vee Q \Rightarrow A+B$ ("+" é união disjunta!)

$\top \Rightarrow$ um conjunto com um elemento

$\bot \Rightarrow$ o conjunto vazio.

Lambda

A named function: $g(a) = a \cdot a + 4$
An unnamed function: $\lambda a.\, a \cdot a + 4$
Let $h = \lambda a.\, a \cdot a + 4$.
Then:

$$
\begin{tikzcd}
g(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & g(5) \arrow[ddd] \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
& (2+3)\cdot 5+4 \arrow[dr] & \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[rr] & & 5\cdot 5+4 \arrow[d] \\
& & 25+4 \arrow[d] \\
& & 29
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & h(5) \arrow[d] & \\
(\lambda a.\, a\cdot a+4)(2+3) \arrow[rr] \arrow[d] & & (\lambda a.\, a\cdot a+4)(5) \arrow[ddd] \arrow[dr] & \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[dd] \arrow[dr] & & & (a\cdot a+4)[a:=5] \arrow[ddl] \\
& (2+3)\cdot 5+4 \arrow[dr] & & \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[rr] & & 5\cdot 5+4 \arrow[d] & \\
& & 25+4 \arrow[d] & \\
& & 29 &
\end{tikzcd}
$$

The usual notation for defining functions is like this:

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\
& n & \mapsto & 2+\sqrt{n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\text{(name)}: & \text{(domain)} & \to & \text{(codomain)} \\
& \text{(variable)} & \mapsto & \text{(expression)}
\end{array}
$$

It creates *named* functions
(with domains and codomains).

The usual notation for creating named functions
without specifying their domains and codomains
is just $f(n) = 2 + \sqrt{n}$.
Note that this is:

$$
\begin{array}{cccc}
f & (n) & = & 2+\sqrt{n} \\
\text{(name)} & (\text{(variable)}) & = & \text{(expression)}
\end{array}
$$

LA 25/ABRIL/2017

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

$\neg\neg P \to P$...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

$\langle 2,1\rangle = (-1,3)$

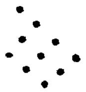
$\langle 3,3\rangle = (0,6)$

$\langle 0,3\rangle = (3,3)$

$\langle 1,1\rangle = (0,2)$

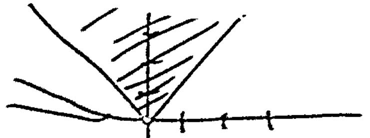
$\langle 2,2\rangle = (0,4)$

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

B =  ⇐ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

$$= \left\{\begin{array}{ccccc} & (-1,5) & & & \\ & & (0,4) & & \\ & (-1,3) & & (1,3) & \\ (-2,2) & & (0,2) & & (2,2) \\ & (-1,1) & & (1,1) & \\ & & (0,0) & & \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array}\right\}$$



$lr = \langle l,r\rangle = (0,0) + l\underbrace{\overrightarrow{(-1,1)}}_{} + r\underbrace{\overrightarrow{(1,1)}}_{}$

"angle brackets"

EXERCÍCIOS:

REPRESENTEM, USANDO A NOTAÇÃO POSICIONAL DA P.1:

a) $\lambda lr{:}B.\ l$

b) $\lambda lr{:}B.\ r$

c) $\lambda lr{:}B.\ (l \leq 1)$

d) $\lambda lr{:}B.\ (r \geq 1)$

e) $\lambda lr{:}B.\ lr \leq 11$

f) $\lambda lr{:}B.\ lr \& 12$

g) $\lambda lr{:}B.\ \mathrm{valid}(\langle l+1, r\rangle)$

h) $\lambda lr{:}B.\ lr$ leftof 11

i) $\lambda lr{:}B.\ lr$ leftof 12

j) $\lambda lr{:}B.\ lr$ above 11

a) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & 2 & & 1 & \\ 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

b) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & 1 & & 2 & \\ 0 & & 1 & & 2 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

c) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\}$$

d) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

e) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\}$$

f) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 12 & & & \\ & & 12 & & \\ & 11 & & 12 & \\ 10 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array}\right\}$$

g) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\}$$

h) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

i) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

j) $$\left\{\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{LA 25/ABRIL/2017}}$

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

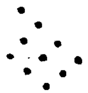
$P \to \neg\neg P$

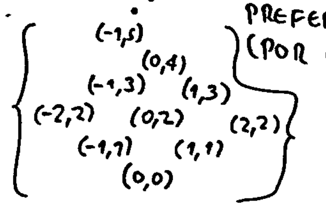
MAS NÃO

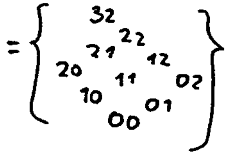
$\neg\neg P \to P$...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

B =  ⇐ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

= 

= 

EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

$\langle 2,1\rangle = (-1,3)$

$\langle 3,3\rangle = (0,6)$

$\langle 0,3\rangle = (3,3)$

$\langle 1,1\rangle = (0,2)$

$\langle 2,2\rangle = (0,4)$

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

MAIS EXERCÍCIOS:

k) $\lambda lr{:}B.\ ne(lr)$

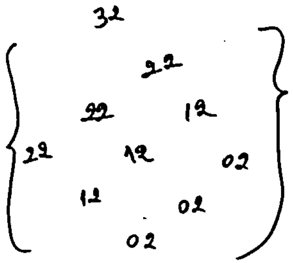
l) $\lambda lr{:}B.\ nw(lr)$

m) $20 \to 11 = 12$

n) $02 \to 11 = 21$

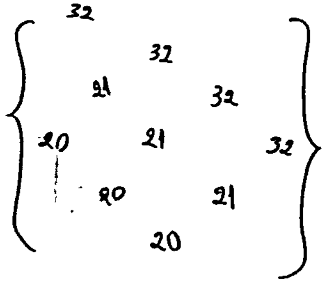
o) $22 \to 11 = 11$

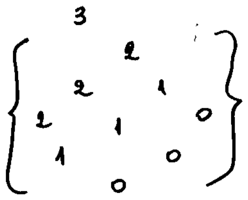
p) $00 \to 11 = 32$

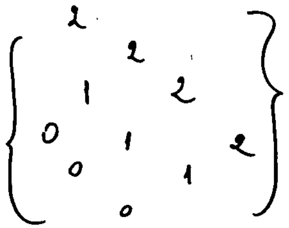
k) 

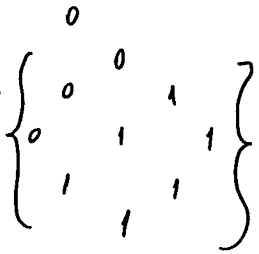
Se a=0 e b=0,

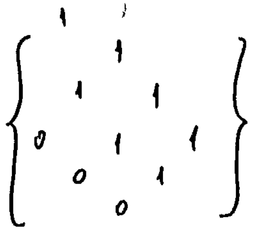
```
ne(00) := if valid(01)
          then ne(01)
          else 00
          end
```

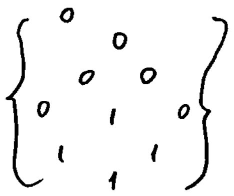
l) 

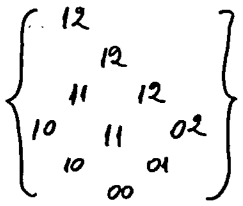
a) 

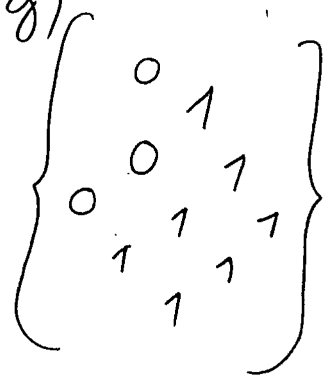
b) 

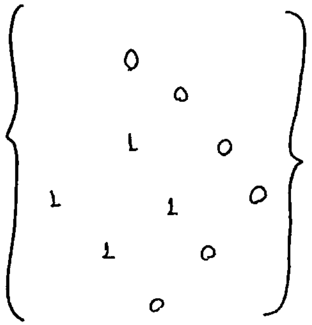
c) 

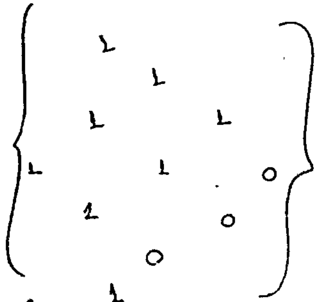
d) 

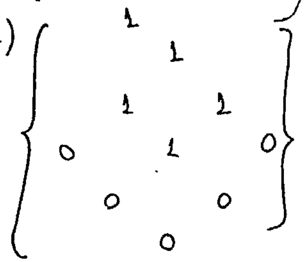
e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

j) 

LA 25/ABRIL/2017

NO FINAL DA AULA EU CONTEI PRA VOCÊS QUE A LÓGICA QUE NÓS ESTAMOS VENDO PROVA

$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

$\neg\neg P \to P$...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER UMA FERRAMENTA PRA ENTENDER ESSA LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

EXERCÍCIOS:

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

$\langle 2,1\rangle = (-1,3)$

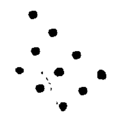
$\langle 3,3\rangle = (0,6)$

$\langle 0,3\rangle = (3,3)$

$\langle 1,1\rangle = (0,2)$

$\langle 2,2\rangle = (0,4)$

$\langle 2,0\rangle = (-2,2)$

B =  ⇐ A NOSSA ZHA PREFERIDA (POR ENQUANTO)

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} & (-1,5) & & & \\ & & (0,4) & & \\ & (-1,3) & & (1,3) & \\ (-2,2) & & (0,2) & & (2,2) \\ & (-1,1) & & (1,1) & \\ & & (0,0) & & \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$$

MAIS EXERCÍCIOS:

k) $\lambda lr{:}B.\ \mathrm{ne}(lr)$

l) $\lambda lr{:}B.\ \mathrm{nw}(lr)$

m) $20 \to 11 = 12$

n) $02 \to 11 = 21$

o) $22 \to 11 = 11$

p) $00 \to 11 = 32$

q) $\lambda lr{:}B.\ \underbrace{\neg lr}_{lr \to 00}$

r) $\lambda lr{:}B.\ \neg(\neg lr)$

s) $\lambda lr{:}B.\ lr = \neg\neg lr$

s) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \right\}$

q) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 00 & & & \\ & & 00 & & \\ & 00 & & 00 & \\ 02 & & 00 & & 20 \\ & 02 & & 20 & \\ & & 32 & & \end{array} \right\}$

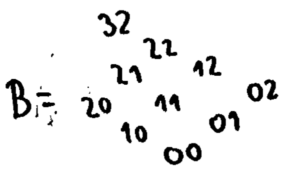
r) $\left\{ \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 32 & & \\ & 32 & & 32 & \\ 20 & & 32 & & 02 \\ & 20 & & 02 & \\ & & 00 & & \end{array} \right\}$

SE $P = 10$ E $Q = 01$,

$$\underbrace{\underbrace{\neg(\underbrace{\underbrace{P}_{10} \,\&\, \underbrace{Q}_{01}}_{00})}_{32} \to \underbrace{(\underbrace{\neg \underbrace{P}_{10}}_{02} \vee \underbrace{\neg \underbrace{Q}_{01}}_{20})}_{22}}_{22}$$

LA 25/ABRIL/2017

$B =$



NO FINAL DA AULA
EU CONTEI PRA VOCÊS
QUE A LÓGICA QUE
NÓS ESTAMOS VENDO
PROVA

$P \to \neg\neg P$

MAS NÃO

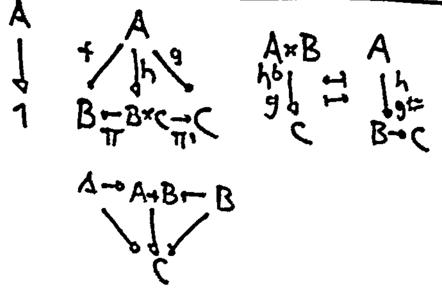
$\neg\neg P \to P$...

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR
A VER UMA FERRAMENTA
PRA ENTENDER ESSA
LÓGICA NOVA

UM "MODELO"

DE ONDE VÊM ESSAS
DEFINIÇÕES PARA $ab \& cd$,
$ab \lor cd$,
$ab \to cd$?

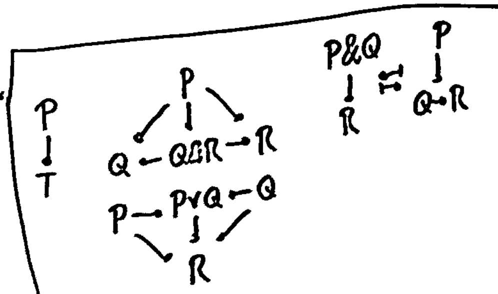
LEMBREM QUE:



$\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ TEM 27 ELEMENTOS

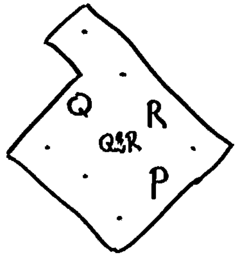
$\{1,2,3\} \to \{4\}$ TEM 1 ELEMENTO

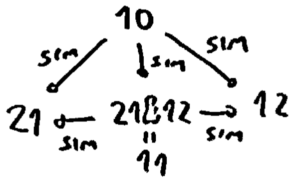
$\{1,2,3\} \to \{\}$ TEM 0 ELEMENTOS



$01 \to 12$ TEM 1 ELEMENTO (PORQUE $01 \leq 12$)

$20 \to 11$ TEM 0 ELEMENTOS (PORQUE $20 \not\leq 11$)





EXISTE UMA "FUNÇÃO" $P \to Q$? SIM

$P \to R$? SIM

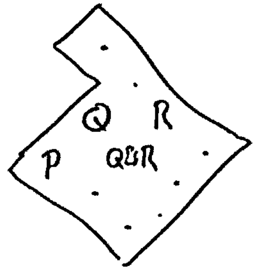
$P \to Q\&R$? SIM

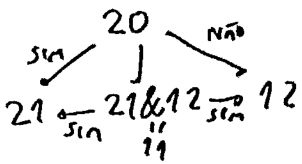
$Q\&R \to Q$? SIM

$Q\&R \to R$? SIM

$Q\&R = 11$

OUTRO CASO:





$\boxed{\text{LA } 2/\text{maio}/2017}$

Alguns anéis familiares:

$$\mathbb{Z}_6 = (\{0,1,2,3,4,5\},\ 0,\ 1,\ +_{\text{mod } 6},\ -_{\text{mod } 6},\ \cdot_{\text{mod } 6})$$

$\uparrow$
R

$(-_{\text{mod } 6})(1) = 5$

$\underbrace{1 +_{\text{mod } 6} \underbrace{(-_{\text{mod } 6})(1)}_{5}} = 0$

[Lemos o Awodey das págs 3 a 8]

As nossas categorias preferidas (por enquanto!) vão ser coisas bem concretas:

- Set
- ZHAs (as álgebras de Heyting planares da aula passada)

$$B = \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array}$$

$\mathbb{B}$ (B como categoria):

$$\begin{tikzcd}
& 32 & & & \\
& & 22 \arrow[ul] & & \\
& 21 \arrow[ur] & & 12 \arrow[ul] & \\
20 \arrow[ur] & & 11 \arrow[ul] \arrow[ur] & & 02 \arrow[ul] \\
& 10 \arrow[ul] \arrow[ur] & & 01 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & 00 \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{B} = (\mathbb{B}_0, \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}, \mathrm{id}_{\mathbb{B}}, \circ_{\mathbb{B}})$

$\mathbb{B}_0 = B$ (10 elementos)

Um truque pra entender o Hom:

$f: A \to B$ é "formalizado" como $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(P,Q) = \begin{cases} \{(P,Q)\} & \text{se } P \leq_B Q, \\ \emptyset & \text{se } P \not\leq_B Q. \end{cases}$$

Exemplos:

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(11,22) = \{(11,22)\}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(22,22) = \{(22,22)\}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(11,02) = \{\}$

Composição:

$$\begin{tikzcd}
00 \arrow[r, "{(00,12)}"] \arrow[rr, bend right, "{(00,32)}"'] & 12 \arrow[r, "{(12,32)}"] & 32
\end{tikzcd}$$

(não tem muita escolha)

$12 \xrightarrow{\mathrm{id}_{12}} 12 \qquad \mathrm{id}_{12} = (12,12)$

Que que a gente pode provar numa categoria qualquer? Muito pouca coisa...

1) Se $A \xrightarrow{g} B$ tem inversa à esquerda e à direita elas são iguais.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"] & \\
& B \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

$g \circ f = f;g$

$f;g = \mathrm{id}_B$

$g;h = \mathrm{id}_A$

$f;(g;h) = f;\mathrm{id}_A = f$

$\| $

$(f;g);h = \mathrm{id}_B;h = h$

2) Um diagrama "comuta" se (definição informal!) para cada dois objetos X e Y dele todos os jeitos de obter uma seta de X pra Y compondo setas do diagrama dão o mesmo resultado.

Isto aqui comuta?

$$\begin{tikzcd}
\{1,2\} \arrow[r, "{1\mapsto3,\ 2\mapsto4}"] \arrow[d, "{1\mapsto5,\ 2\mapsto6}"'] & \{3,4\} \arrow[d, "{3\mapsto7,\ 4\mapsto7}"] \\
\{5,6\} \arrow[r, "{5\mapsto7,\ 6\mapsto8}"'] & \{7,8\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f;h"] \arrow[r, shift right, "g;k"'] & D
\end{tikzcd}$$

$f;h \neq g;k$... Não!

Teorema: num diagrama planar em que cada célula tem exatamente uma "fonte" e um "ralo", se cada célula comuta então o diagrama todo comuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $a;d = c;f$ e $b;e = d;g$

Então:

$a;b;e = a;(b;e)$
$= a;(d;g)$
$= (a;d);g$
$= (c;f);g$
$= c;f;g$

Reparem que o 1 e o 2 precisam que a gente esteja numa categoria, não numa proto-categoria...

Uma coisa muito legal que os livros não contam é que todos os teoremas bacanas de categorias podem ser entendidos primeiro em proto-categorias...

LA 2/maio/2017

Alguns anéis familiares:

$\mathbb{Z}_6 = (\{0,1,2,3,4,5\},\ 0,\ 1,\ +_{\text{mod }6},\ -_{\text{mod }6},\ \cdot_{\text{mod }6})$

R

$(-_{\text{mod }6})(1) = 5$

$1 +_{\text{mod }6} \underbrace{(-_{\text{mod }6})(1)}_{5} = 0$

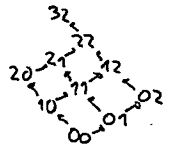
[Lemos o Awodey das págs 3 a 8]

As nossas categorias preferidas (por enquanto!) vão ser coisas bem concretas:

- Set
- ZHAs (as álgebras de Heyting planares da aula passada)

$$B = \begin{array}{ccccc} & 32 & & & \\ & & 22 & & \\ & 21 & & 12 & \\ 20 & & 11 & & 02 \\ & 10 & & 01 & \\ & & 00 & & \end{array}$$

$\mathbf{B}$ (B como categoria):



$\mathbf{B} = (\underset{\substack{\| \\ B}}{B_0}, Hom_B, id_B, \circ_B)$

(10 elementos)

Idéia:

"Categorias" são sem graça,
"categorias com" são legais.

Primeiro exemplo:
categorias com produtos.
(proto-categorias com produtos)

Exemplo:

(exemplo: &)

$(B_0, Hom_B, id_B, \circ_B, \times, \pi, \pi', \langle,\rangle)$

$\times : B_0 \times B_0 \to B_0$

$\pi_{QR} \in Hom_B(Q\times R, Q) \qquad (Q \xleftarrow{\pi_{QR}} Q\&R)$

$\pi'_{QR} \in Hom_B(Q\times R, R) \qquad (Q\&R \xrightarrow{\pi'_{QR}} R)$

$\langle,\rangle_{PQR} \in \ldots$

$P \xrightarrow{\langle P \xrightarrow{f} Q,\ P \xrightarrow{g} R\rangle_{PQR}} Q\&R$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ Q & Q\times R \arrow[l, "\pi_{QR}"] \arrow[r, "\pi'_{QR}"'] & R \end{tikzcd}$$

E no caso mais abstrato?
Em dois passos:

1) $Q \xleftarrow[\pi]{} Q\times R \xrightarrow[\pi']{} R$ é um "product diagram" se e só se:

$\forall P.$
$\forall f: P\to Q,\ \forall g: P\to R.$
$\exists!\ h: P\to Q\times R.$
$(h;\pi = f)\ \&\ (h;\pi' = g)$

Exercício:
Mostre que isto aqui (em B) não é um product diagram:

$21 \xleftarrow[\pi]{} 01 \xrightarrow[\pi']{} 12$

(Dica: procurem um P!)

$P = 11$

Em Set a gente também tem produtos...

Exercício:
Mostre que isto aqui não é um product diagram em Set:

$$\begin{tikzcd} & \{35,46\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \{3,4\} & \{35,36,45\} \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

$35\mapsto 3,\ 36\mapsto 3,\ 45\mapsto 4$ $\qquad$ $35\mapsto 5,\ 36\mapsto 6,\ 45\mapsto 5$

$\{3,4\} = Q,\quad \{35,36,45\} = Q\times R,\quad \{5,6\} = R$

$$\begin{tikzcd} & \{46\} \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "\nexists"] \arrow[dr] & \\ \{3,4\} & \{35,36,45\} \arrow[l] \arrow[r] & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

Isto aqui é um coproduct diagram em Set:
(Exercício: complete)

$$\begin{tikzcd} & \{0,45,67,8,9\} & \\ \{4,5,6\} \arrow[ur] \arrow[r, "i"'] & \{4,5,6,7,8,9\} \arrow[u, dashed] & \{7,8,9\} \arrow[ul] \arrow[l, "i'"] \end{tikzcd}$$

LA 6/Junho/2017

Hoje: Álgebras de Heyting são uma desculpa pra gente estudar montes de outras coisas de lógica... p.ex. lógicas modais.

Uma Kripke frame é um par (W,R) onde W é um conjunto e $R \subseteq W \times W$.

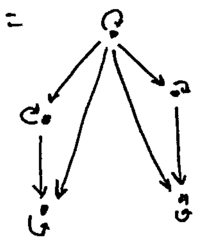
Exemplos:

$H = \left\{ \begin{smallmatrix} & (1,2), & \\ (0,1), & & (2,1), \\ (0,0), & & (2,0) \end{smallmatrix} \right\} =$ 

Black pawns moves: ↙↓↘

White pawns moves: ↖↑↗

$(H, BPM(H)) =$ 

$(H, BPM(H)^*) =$ 

...e a gente vai usar (W,R) pra definir uma lógica...

Os valores de verdade dela são funções de W em $\{0,1\}$.

Exemplos:

$P = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \qquad Q = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$

$\top$ é 1 em todos os mundos,

$\bot$ é 0 em todos os mundos,

$\&, \vee, \to, \neg$ etc são calculadas "em cada mundo em separado".

$\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \ \& \ \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix}$

Novidade: $\Box$, $\Diamond$

$\Box P$ "é necessário que" Nec

$\Diamond P$ "é possível que" Poss

Como calcular $\Box P$?

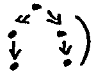
Pra cada mundo $a \in W$, o resultado de $(\Box P)_a$ vai ser:

$\forall b \in W.\ aRb \to P_b$.

Exercício: Calculem $\Box P$ para:

(a) $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$

(b) $\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$

(Obs: $(W,R) =$ )

(Dica: Numere os mundos deste jeito: $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 4 & & 5 \end{smallmatrix}$)

Obs:

$(\Box P)_a = \forall b \in W.\ aRb \to P_b$

$(\Box P)_a = \forall b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Se $P = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ então $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$

$(\Box P)_1 = \forall b \in \{2,3\}.\ P_b = P_2 \& P_3 = 1 \& 0 = 0$

$(\Box P)_4 = \forall b \in \{\}.\ P_b = 1$

$(\Box P)_1 = 0 \quad (\Box P)_2 = 1 \quad (\Box P)_3 = 1 \quad (\Box P)_4 = 1 \quad (\Box P)_5 = 1$

Def:

$(\Diamond P)_a = \exists b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Exercício:

(c) $\Diamond \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix}$

O meu livro de referência preferido sobre lógica modal é o Carnielli/Pizzi.

p.37:

Axiomas:

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

(4) $\Box P \to \Box\Box P$

Em $(W,R) =$  nem (T) nem (4) são verdade!

Exemplo:

Se $P = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}$ então:

$$\underbrace{\underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}} \to \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}}$$

(4) $$\underbrace{\underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}} \to \underbrace{\Box \underbrace{\Box \underbrace{P}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}}}_{\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}}$$

Fato (ou seja, "teorema que eu não vou demonstrar"):

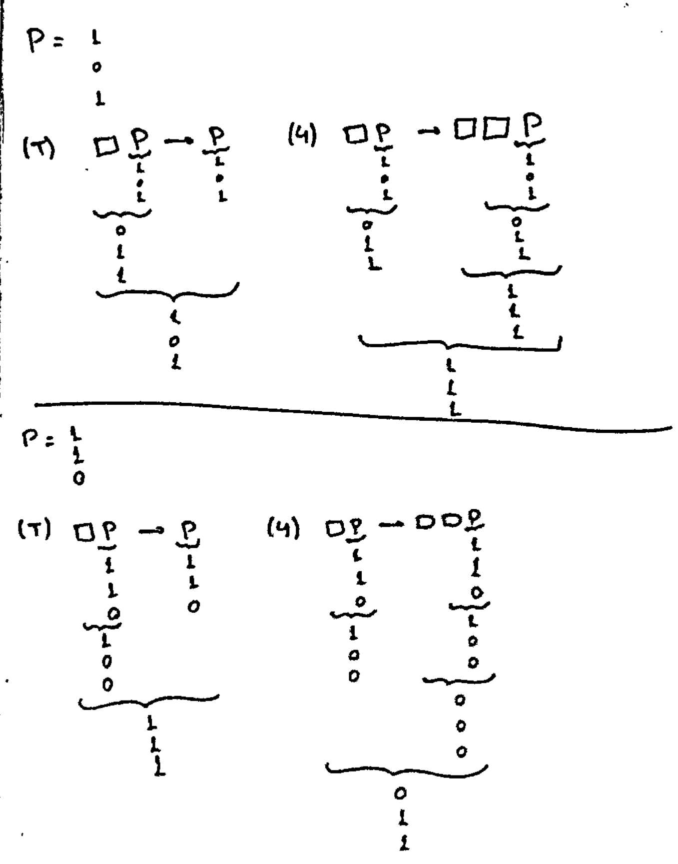
Uma das expressões (T) ou (4) (não lembro qual) é verdadeira sempre que (W,R) for transitivo e a outra vai ser verdadeira sempre que (W,R) for reflexivo.

Vamos fazer uns testes...

Se $(W,R) = \begin{smallmatrix} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 3 \end{smallmatrix}$ e $P =$ então (T) = e (4) =

Se $(W,R) = \begin{smallmatrix} 1 \circlearrowleft \\ \downarrow \\ 2 \circlearrowleft \\ \downarrow \\ 3 \circlearrowleft \end{smallmatrix}$ e $P =$ então (T) = e (4) =

LA 6/Junho/2017



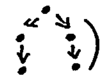
Como calcular $\Box P$?
Pra cada mundo $a \in W$,
o resultado de $(\Box P)_a$
vai ser:

$\forall b \in W.\ aRb \to P_b.$

Exercício:
Calculem $\Box P$
para:

ⓐ $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$

ⓑ $\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$

(Obs: $(W,R) =$ )

(Dica: numere os mundos deste jeito: $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 4 & & 5 \end{smallmatrix}$)

Obs:

$(\Box P)_a = \forall b \in W.\ aRb \to P_b$

$(\Box P)_a = \forall b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Se $P = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ então $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$

$(\Box P)_1 = \forall b \in \{2,3\}.\ P_b$
$= P_2 \,\&\, P_3$
$= 1 \,\&\, 0$
$= 0$

$(\Box P)_4 = \forall b \in \{\}.\ P_b$
$= 1$

$(\Box P)_1 = 0$

$(\Box P)_2 = 1$ $(\Box P)_3 = 1$

$(\Box P)_4 = 1$ $(\Box P)_5 = 1$

Def:

$(\Diamond P)_a = \exists b \in \{b \in W \mid aRb\}.\ P_b$

Exercício:

ⓒ $\Diamond \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix}$

O meu livro de referência preferido sobre lógica modal é o Carnielli/Pizzi.

p. 37:

Axiomas:

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

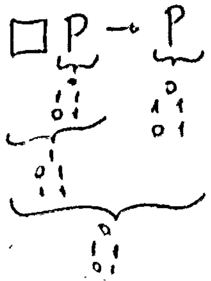
(4) $\Box P \to \Box\Box P$

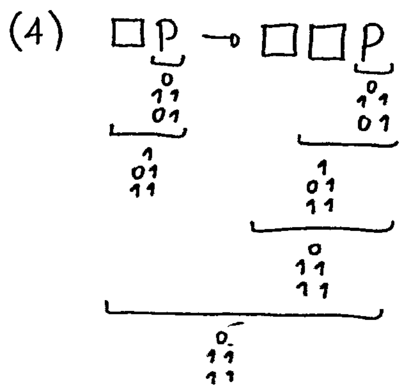
Em $(W,R) =$ 

nem (T) nem (4) são verdade!

Exemplo:

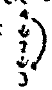
Se $P = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}$ então:

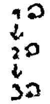




Fato (ou seja, "teorema que eu não vou demonstrar"):
Uma das expressões (T) ou (4) (não lembro qual) é verdadeira sempre que (W,R) for transitivo
e a outra vai ser verdadeira sempre que (W,R) for reflexivo.

Vamos fazer uns testes...

Se $(W,R) =$  e $P = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ então $(T) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$
e $(4) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$

Se $(W,R) =$  e $P = \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$ então $(T) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$
e $(4) = \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$

LA 6/junho/2017

Agora a gente vai interromper <u>temporariamente</u> essa história de lógica modal e ver um jeito de "falsificar" expressões de lógica proposicional (clássica).

$$P \to P\&Q$$

$\Rightarrow P=1$ e $Q=0$ falsifica $P \to P\&Q$.

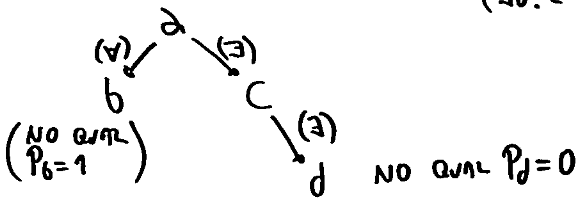
Às vezes a gente vai precisar de algo mais complicado — porque vão aparecer duas (ou mais) possibilidades.

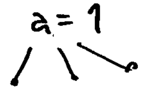
$P\&Q \to Q \vee R$ $\qquad$ $P \vee Q \to Q\&R$

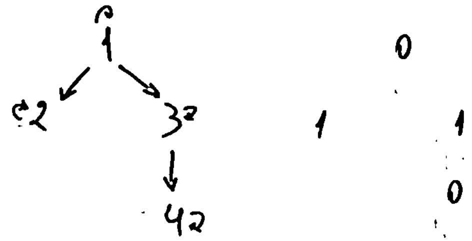
E pra lógica modal?

$\Box P \to \Box\Box P$

mundo:
a
b $(\forall b.\ aRb)$
c $(\exists c.\ aRc)$
d $(\exists d.\ cRd)$



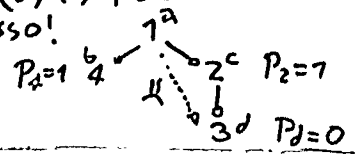




Pra falsificar (4) $\Box P \to \Box\Box P$ temos que ter um mundo a com:

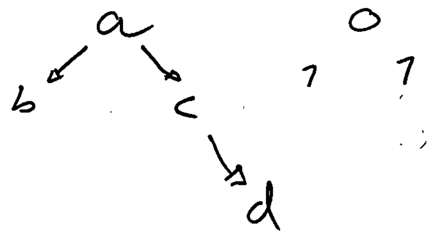
$\forall b.\ aRb \to P_b = 1$
$\exists c.\ aRc \,\&\, (\exists d.\ cRd \,\&\, P_d = 0)$

Repare que se (W,R) for transitiva não dá pra ter isso!



$\Box P \to P$

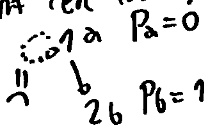
a
b $(\forall b.\ aRb)$



Pra falsificar (T) $\Box P \to P$ temos que ter um mundo a com:

$P_a = 0$
$\forall b.\ aRb \to P_b = 1$

Repare que se (W,R) for reflexiva não dá pra ter isso!



LA 13/JUN/2017

HOJE: MAIS SOBRE S4 E OUTRAS LÓGICAS MODAIS; A TRADUÇÃO DE GÖDEL ENTRE IL E S4; S4 E TOPOLOGIAS.

LEMBRE QUE

(K) $\Box(P\to Q)\to(\Box P\to\Box Q)$

(T) $\Box P\to P$

(4) $\Box P\to\Box\Box P$

TEM DOIS JEITOS DA GENTE DEFINIR S4 "COMO LÓGICA": UM É DEFINIR QUAIS SÃO AS REGRAS DE DEDUÇÃO DELA, QUE PODEM SER ESCRITAS EM ÁRVORE OU NÃO... DÁ PRA USAR FITCH, POR EXEMPLO. O OUTRO JEITO É A GENTE DEFINIR O QUE SÃO FRAMES E VALUAÇÃO NUM FRAME, E AÍ A GENTE CONSEGUE ENTENDER QUAIS SÃO AS TAUTOLOGIAS EM S4.

UM FRAME PARA S4

É UM PAR (W,R) ONDE W É UM CONJUNTO "DE MUNDOS" E $R\subseteq W\times W$ ("RELAÇÃO DE ACESSIBILIDADE", OU A RELAÇÃO QUE DIZ QUE MUNDOS "VÊEM" QUAIS OS QUE MUNDOS ESTÃO "ADIANTE" DE QUAIS) E ONDE R É TRANSITIVA E REFLEXIVA.

ALÉM DISSO UMA VALUAÇÃO V EM (W,R) É UMA FUNÇÃO QUE LEVA ALGUMAS "LETRAS" (VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS) EM SUBCONJUNTOS DE W.

EXEMPLO: $(W,R)=$  $V(P)=\begin{smallmatrix}&0&\\0&&1\\&1&\\&1&\end{smallmatrix}$, $V(Q)=\begin{smallmatrix}&1&\\0&&1\\&0&\\&0&\end{smallmatrix}$

TODA VEZ QUE TEMOS (W,R,V) E UMA EXPRESSÃO E — POR EXEMPLO, $E=\neg(\Box P\to\Diamond Q)\to\Diamond\Diamond\neg Q$ TAIS QUE $\mathrm{dom}(V)\supset\{P,Q\}$ A GENTE SABE CALCULAR O VALOR DE E NA VALUAÇÃO (W,R,V).

UMA EXPRESSÃO E É UMA TAUTOLOGIA EM S4 SE E SÓ SE

$\models_{(W,R,V)} E$

PARA TODO S4-FRAME (W,R) E TODA VALUAÇÃO V.

$\Box P\to\Diamond P$

É UMA TAUTOLOGIA EM S4, MAS PORQUÊ? A GENTE TERIA QUE FAZER INFINITOS TESTES...

TEOREMÃO: AS TAUTOLOGIAS EM S4 SÃO EXATAMENTE AS EXPRESSÕES QUE SÃO DEMONSTRÁVEIS PELO SISTEMA DEDUTIVO QUE EU ESBOCEI PORCAMENTE LÁ À ESQUERDA.

HISTORINHA

DURANTE SÉCULOS (SÉRIO!) OS LÓGICOS DISCUTIAM VÁRIOS TIPOS DE IMPLICAÇÃO, AS LÓGICAS PARA POSSIBILIDADE, OBRIGAÇÃO, CRENÇA, ETC... TUDO ISSO SÓ FOI FORMALIZADO MATEMATICAMENTE NO SÉCULO XX! (DICA: LEIAM A INTRODUÇÃO DE ALGUM LIVRO DE LÓGICA MODAL!)

LÓGICA INTUICIONISTA É ALGO MAIS RECENTE... 1930?

E A FORMALIZAÇÃO DELA É MAIS RECENTE AINDA... 1960?

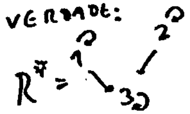
GÖDEL:

- ELE TEM UM ARTIGO DE DUAS PÁGINAS QUE FALA DE UMA TRADUÇÃO $IL\to S4$...

IDÉIA: EXPRESSÕES EM IL SÃO FEITAS DE VARIÁVEIS E DOS CONECTIVOS: $\&_I, \vee_I, \to_I, \top_I, \bot_I$ E AS EXPRESSÕES EM S4 SÃO FEITAS DE VARIÁVEIS E $\&_M, \vee_M, \to_M, \top_M, \bot_M, \Box, \Diamond$.

O MESMO (W,R) (TRANSITIVO REFLEXIVO.) VAI SERVIR TANTO PRA S4 QUANTO PRA IL... OS VALORES DE VERDADE DE S4 — ISTO É, Ω_M — SÃO TODAS AS FUNÇÕES DE W EM $\{0,1\}$. OS VALORES DE VERDADE DE IL — Ω_I — VÃO SER SÓ OS TAIS QUE $P=\Box P$.

EXEMPLO: $(W,R) = 1 \to 3 \leftarrow 2$

(NA VERDADE: )

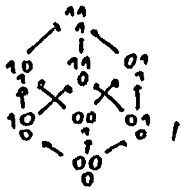
$\Omega_M=\{\overset{00}{0},\overset{00}{1},\overset{01}{0},\overset{01}{1},\overset{10}{0},\overset{10}{1},\overset{11}{0},\overset{11}{1}\}$

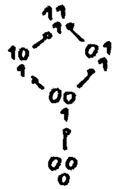
$\Box\overset{00}{0}=\overset{00}{0}$ $\Box\overset{00}{1}=\overset{00}{1}$ $\Box\overset{01}{0}=\overset{00}{0}$ $\Box\overset{01}{1}=\overset{01}{1}$

$\Box\overset{10}{0}=\overset{00}{0}$ $\Box\overset{10}{1}=\overset{10}{1}$ $\Box\overset{11}{0}=\overset{00}{0}$ $\Box\overset{11}{1}=\overset{11}{1}$

OBS: $(\Box P)_a=\forall b\in(a\to).P_b$
$=\forall b\in\{b\in W\mid aRb\}.P_b$

$\Omega_I=\{\overset{00}{0},\overset{00}{1},\overset{01}{1},\overset{10}{1},\overset{11}{1}\}$

OBS: $\Omega_M=$ 

$\Omega_I=$ 

LA 13/JUN/2017

HOJE: MAIS SOBRE S4 E OUTRAS LÓGICAS MODAIS; A TRADUÇÃO DE GÖDEL ENTRE IL E S4; S4 E TOPOLOGIAS.

LEMBRE QUE

(K) $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

(T) $\Box P \to P$

(4) $\Box P \to \Box\Box P$

TRADUÇÃO DE GÖDEL:

$G(P) = \Box P$,

$G(Q) = \Box Q$,

ETC

(SE G RECEBE UMA VARIÁVEL ELE RETORNA $\Box$VARIÁVEL)

$G(E_1 \&_I E_2) = G(E_1) \&_m G(E_2)$

$G(E_1 \vee_I E_2) = G(E_1) \vee_m G(E_2)$

$G(E_1 \to_I E_2) = \Box(G(E_1) \to_m G(E_2))$

$G(\top_I) = \top_m$,

$G(\bot_I) = \bot_M$

TEOREMA:

SE E É UMA EXPRESSÃO DE IL ENTÃO E É DEMONSTRÁVEL (EM IL) SE E SÓ SE G(E) É DEMONSTRÁVEL (EM S4)

E A VERSÃO SEMÂNTICA DISSO?

SE E É UMA EXPRESSÃO DE IL ENTÃO:

E É UMA TAUTOLOGIA INTUICIONISTA (QUE AINDA NÃO VIMOS O QUE É!)

SE E SÓ SE

G(E) É UMA TAUTOLOGIA EM S4.

EXEMPLOS:

$$H = \begin{array}{ccccc} & & 32 & & \\ & & & 22 & \\ & 21 & & 12 & 02 \\ 20 & & 11 & & 01 \\ & 10 & & & \\ & & 00 & & \end{array}, \quad V(P) = 10, \quad V(Q) = 01,$$

$\neg\neg P = 20 \neq P$

$\neg\neg P \to P$ NÃO É UMA TAUTOLOGIA INTUICIONISTA.

ENTÃO $G(\neg\neg P \to P)$ NÃO É UMA TAUTOLOGIA EM S4!

EXERCÍCIO:

$G(\neg_I \neg_I P \to_I P) = ?$

OBS: $\neg_I Q = Q \to_I \bot_I$.

$\neg_I(P \to_I \bot_I) \to_I P$

$((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_I P$

$\Box\Big(G\big(\underbrace{(\underbrace{P \to_I \bot_I}) \to_I \bot_I}\big) \to_M \Box P\Big)$

$\Box(G(\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\underbrace{P \to_I \bot_I}) \to_I \bot_I}) \to_m \Box P}})$

$G(((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_I P)$

$\Box(G((P \to_I \bot_I) \to_I \bot_I) \to_m \Box P)$

$\Box(\Box(G(P \to_I \bot_I) \to_m \bot_m) \to_M \Box P)$

$\Box(\Box(\Box(\Box P \to_m \bot_m) \to_M \bot_m) \to_m \Box P)$

$\Box(\Box(\Box(\Box P \to \bot) \to \bot) \to \Box P)$

$\Box(\Box(\Box(\Box P \to \bot)$ $\to \Box P)$

$\Box(\Box(?(\neg\Box P)$

REPARE QUE:

$G(\neg_I E)$

$= G(E_I \to_I \bot_I)$

$= \Box(G(E_I) \to_M \bot_m)$

$= \Box\neg G(E_I)$

SE A GENTE ESTENDE A NOSSA TRADUÇÃO PRA INCLUIR $G(\neg_I E)$

$= \Box\neg_m G(E)$

TEMOS:

$G(\neg_I \neg_I P \to_I P)$

$= \Box(G(\neg_I \neg_I P) \to_m \Box P)$

$= \Box(\Box\neg_m \Box\neg_m \Box P \to_m \Box P)$