C2 21/AGO/2017

HOJE: INTRODUÇÃO!

O CURSO TEM UMA PÁGINA NA QUAL EU VOU COLOCAR UM BOCADO DE MATERIAL, INCLUINDO FOTOS DOS QUADROS E LINKS PRA LIVROS...

http://angg.twu.net/2017. (?)

OU PROCUREM POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, ENTREM EM QUALQUER SUBPÁGINA DO angg.twu.net E CLIQUEM EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

O CURSO TEM DUAS PARTES:

- INTEGRAÇÃO
- EDOS ("EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS")

E A GENTE VAI VER ALGUMAS COISAS QUE NÃO ESTÃO NO PROGRAMA MAS QUE SÃO FERRAMENTAS QUE VÃO SIMPLIFICAR O RESTO...

- DIFERENCIAIS E LINEARIZAÇÃO
- SÉRIE DE TAYLOR
- NÚMEROS COMPLEXOS
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

INTEGRAÇÃO

1) UMA OPERAÇÃO INVERSA À DERIVAÇÃO
2) MEDIR ÁREAS

(A GENTE VAI VER PORQUE ELES SÃO EQUIVALENTES)

MÉTODO MAIS IMPORTANTE:

CHUTAR E TESTAR.

EXEMPLOS:

a) DIGAMOS QUE $f(x) = 2x$. ENCONTRE UMA FUNÇÃO $g(x)$ TAL QUE $\frac{d}{dx} g(x) = f(x)$. $\boxed{x^2}$

b) IDEM, MAS ENCONTRE UMA OUTRA FUNÇÃO $g(x)$ TAL QUE $\frac{d}{dx} g(x) = f(x) = 2x$. $\boxed{x^2+99}$

c) SE $f'(x) = 5x+6$, QUEM É $f(x)$?

d) SE $f'(x) = e^{3x}$, $f(x) = ?$

e) SE $f'(x) = \cos x$, $f(x) = ?$

f) SE $h'(x) = \cos 4x$, $h(x) = ?$

REVISÃO DE REGRA DA CADEIA

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x) \quad \text{(RC)}$$

ÀS VEZES A GENTE USA ESTA NOTAÇÃO AQUI PRA INDICAR SUBSTITUIÇÃO SIMULTÂNEA...

$$(\underbrace{x}_{20} + 3\underbrace{y}_{x+2})\begin{bmatrix} x := 20 \\ y := x+2 \end{bmatrix} = (20 + 3(x+2))$$

COMO USAR ISSO NA FÓRMULA DA REGRA DA CADEIA?

$$\text{(RC)}\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix}$$

AOS POUCOS...

$$f(g(x))\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix} = \mathrm{sen}\,4x$$

$$f'(y)\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix} = \cos y$$

$$f'(22)\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix} = \cos 22$$

$$f'(g(x))\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix} = \cos 4x$$

$$\left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\right)\begin{bmatrix} g(x) := 4x \\ f(y) := \mathrm{sen}\,y \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(4x) = (\cos 4x)\cdot 4\right)$$

UM MÉTODO:

$f(y)$	$g(x)$	$\overbrace{f(g(x))}^{h(x)}$	$f'(y)$	$g'(x)$	$\overbrace{f'(g(x))\,g'(x)}^{h'(x)}$
$\mathrm{sen}\,y$	$4x$	$\mathrm{sen}\,4x$	$\cos y$	4	$\cos(4x)\cdot 4$
$\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,y$	$4x$	$\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,4x$	$\frac{1}{4}\cos y$	4	$\cancel{\frac{1}{4}}\cos(4x)\cdot\cancel{4}$

A GROSSO MODO, EDOS SÃO EQUAÇÕES COM DERIVADAS...

P.EX.: $\frac{d}{dx} f(x) = \cos 4x$

$\frac{d}{dx} f(x) = 2f(x)$

$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$

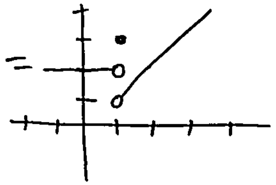
AS EDOS EM GERAL VÃO TER VÁRIAS SOLUÇÕES... ENCONTRAR A SOLUÇÃO CERTA É DIFÍCIL MAS TESTAR UM "CANDIDATO A SOLUÇÃO" É FÁCIL.

EDO	$f(x)$	OK?
$\frac{d}{dx} f(x) = 2f(x)$	x^2	NÃO
"	e^x	NÃO
"	e^{2x}	SIM
"	$3e^{2x}$	SIM
$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$	e^{2x}	SIM
"	e^{-2x}	NÃO
"	e^{3x}	NÃO
"	e^{-3x}	SIM
"		

$\boxed{\text{C2 } 21/\text{AGO}/2017}$

ÁREAS SOB CURVAS

LEMBREM (DE CÁLCULO 1) QUE ISSO AQUI É UMA CURVA...

$f(x) =$ 

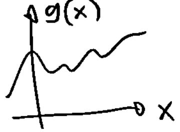
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x=1 \\ x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

VAMOS USAR "FUNÇÕES DEFINIDAS POR CASOS" A BEÇA (PORQUE ELAS SÃO FÁCEIS DE INTEGRAR)

CALCULAR ÁREAS.

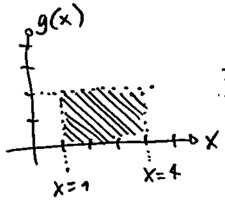
NOTAÇÃO:

$$\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

É A ÁREA SOB A CURVA DE 

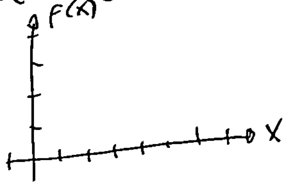
ENTRE $x=a$ E $x=b$.

EXEMPLO:

$$\int_{x=1}^{x=4} \underbrace{2}_{g(x)}\,dx =$$  $= 3 \cdot 2 = 6.$

$$\text{SE } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x<1, \\ 3 & \text{se } 1 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{se } 3 < x, \end{cases}$$

ENTÃO A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DELA É:



E CALCULEM:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$

b) $\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx$

c) $\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$.

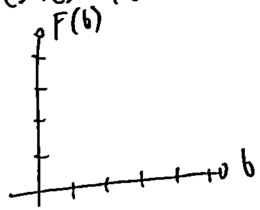
DEFINIÇÃO (TEMPORÁRIA, SÓ PRA ESTE EXERCÍCIO):

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

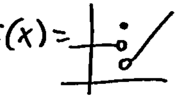
COMPLETEM A TABELA:

b	$F(b)$
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	

DEPOIS PLOTEM ESTES PONTOS EM $\mathbb{R}^2$:



DEPOIS TENTE FAZER O GRÁFICO DA $F(b)$ FAZENDO UMA TABELA BEM MAIOR - $b = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots$ DEPOIS PLOTE ESSES PONTOS E FAÇA O GRÁFICO DA $F(b)$.

A FUNÇÃO $F(b)$ VAI SER FEITA DE SEGMENTOS DE RETA COMO A $f(x) =$ 

LÁÁÁ DA ESQUERDA... DÊ UMA DEFINIÇÃO POR CASOS PRA $F(b)$.

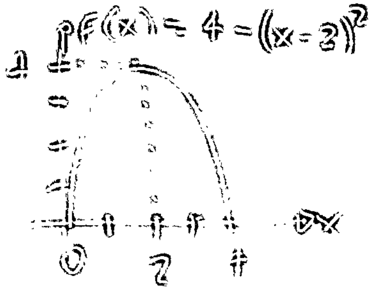
- A FUNÇÃO F É CONTÍNUA? ONDE?
- A FUNÇÃO F É DERIVÁVEL? ONDE?
- FAÇA O GRÁFICO DE $F'(b)$ (ONDE ELA FOR DERIVÁVEL).

C2 23/AGO/2017

Lembre que a gente sabe calcular a área de uma função escada fazendo uma soma de [illegible]

Ex. 1: [illegible]

$f(x) = 4-(x-2)^2$

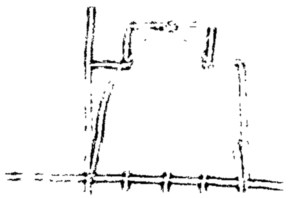


NA AULA QUE VEM:

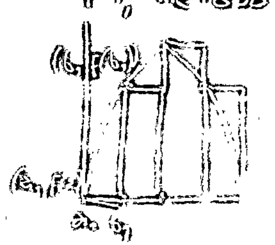
$$\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$$

$$\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx = \lim_{\substack{P \text{ part } [2,4] \\ \|P\| \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$$

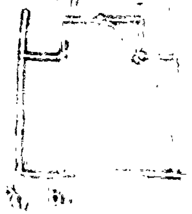
Exemplo: part P1, método "max"



Exemplo: P1, método L



P1, método max



Se alguém quiser ler mais sobre isso em casa, eu recomendo o Stewart 7th ed (tem link pra ele na página do C2 na [illegible])

Seções 4.1 e 4.2

C2 2[illegible]/AGO/2017

SUP É UMA GENERALIZAÇÃO DO MAX,
INF É UMA GENERALIZAÇÃO DO MIN.
NORMALMENTE SUP E INF SÃO FUNÇÕES QUE RECEBEM SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$

$\sup(\{2,3,4,10\}) = \max(2,3,4,10) = 10$

$\inf(\{2,3,4,10\}) = \min(2,3,4,10) = 2$

$\sup(\{1,2,3,\ldots\}) = +\infty$

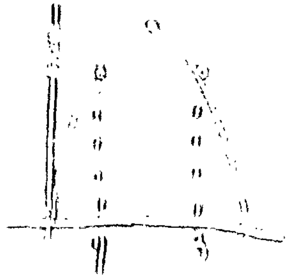
$\inf(\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}) = 0$

$\sup(\mathbb{R}) = +\infty$

$\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

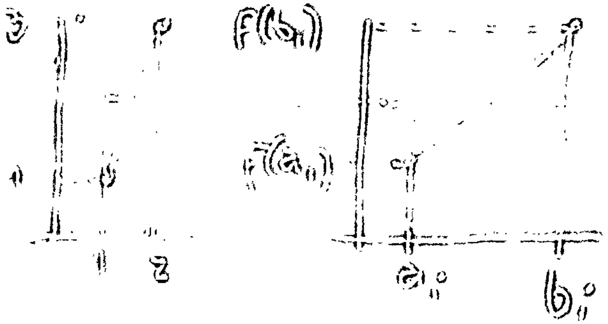
$$\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x) = \sup(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})$$

$$\sup_{x\in[1,3]} f(x) = 4$$



OBS: O STEWART USA "SAMPLE POINTS"

MÉTODO DO TRAPÉZIO



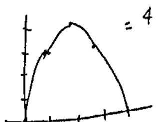
$$= \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$$

C2 28/AGO/2017

Hoje:
A GENTE VAI FAZER MAIS UNS EXERCÍCIOS DE VISUALIZAR FUNÇÕES-ESCADA, E PROVAVELMENTE A GENTE VAI CONSEGUIR VER A DEFINIÇÃO FORMAL DE INTEGRAL.

ALGUMAS FUNÇÕES NÃO SÃO DERIVÁVEIS.
ALGUMAS FUNÇÕES NÃO SÃO INTEGRÁVEIS.

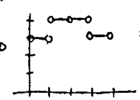
OBS: QUASE TODAS AS NOTAÇÕES DAS FOLHAS FUI EU QUE INVENTEI.

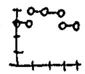
$f(x) =$  $= 4-(x-2)^2$

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$

$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{4} (\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x))(b_i-a_i)$

$= \begin{pmatrix} (\sup_{x\in[0,1]} f(x))(1-0) \\ +(\sup_{x\in[1,2]} f(x))(2-1) \\ +(\sup_{x\in[2,3]} f(x))(3-2) \\ +(\sup_{x\in[3,4]} f(x))(4-3) \end{pmatrix} = 3(1-0)+4(2-1)+4(3-2)+3(4-3)$

$\rightsquigarrow$  $= \overline{F}_{P_1} \quad \overline{F}_{P_1,P} =$

OBS: SE $g =$  $a=0$

ENTÃO $g_L =$

$g_L(0) = g_L(a) = 3$
$g_L(4) = 3$
$g_L(1) =$

$g_R =$

$g_{up}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x\in[a,b]\setminus P \\ \lim_{t\to a^+} g(t) & \text{se } x=a \\ \lim_{t\to b^-} g(t) & \text{se } x=b \\ \max(\lim_{t\to x^-} g(t), \lim_{t\to x^+} g(t)) & \text{se } x\in P\setminus\{a,b\} \end{cases}$

$= \begin{cases} g(x) & \text{se } x\in[0,4]\setminus\{0,1,2,3,4\} \\ \lim_{t\to 0^+} g(t) & \text{se } x=0 \\ \lim_{t\to 4^-} g(t) & \text{se } x=4 \\ \max(\lim_{t\to x^-} g(t), \lim_{t\to x^+} g(t)) & \text{se } x\in\{1,2,3\} \end{cases}$

$g_{up}(1) = \max(\lim_{t\to 1^-} g(t), \lim_{t\to 1^+} g(t))$

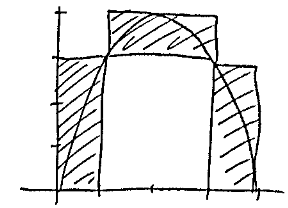
$g_{up}(2) = \max(\lim_{t\to 2^-} g(t), \lim_{t\to 2^+} g(t))$

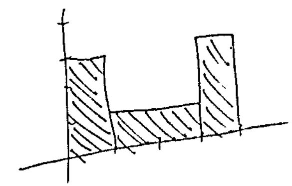
$g_{up}(3) = \max(\lim_{t\to 3^-} g(t), \lim_{t\to 3^+} g(t))$

$g_{dn}(x)$

$P_1 = \{0,1,2,3,4\} \quad N=4$

i	a_i	b_i
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4





[illegible]

Hoje:

Vamos terminar os exemplos [illegible]

[illegible]

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx = 3$$

$$\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx = 0$$

A gente viu que duas coleções [illegible] diferentes [illegible] uma partição ser mais fina que outra.

$[a,b]=[0,6]$

$\{0,3,6\}$ $\{0,2,4,6\}$

$\{0,3,6\}\cup\{0,2,4,6\}$

$\{0,1,2,3,4,6\}$

$\|\{0,3,6\}\| = $ [illegible]

$\|\{0,2,4,6\}\| = $ [illegible]

Teorema:

Dizemos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$, $\forall c,d\in[a,b]$, $|c-d|<\delta \Rightarrow |f(c)-f(d)|<\varepsilon$.

Então se Q é uma partição de $[a,b]$ com $|Q|<\delta$ temos

[illegible]

Lembre que

$f(x) = 4 - (x-2)^2$
$= 4 - (x^2 - 4x + 4)$
$= 4x - x^2$
$= -(x^2 - 4x)$
$= -(x - 4)x$
$= x(4 - x)$

$f'(x) = 4 - 2x$

Como $|f'(x)| \leq 4$

se $c, d \in [a, b]$

e $|c - d| \leq \delta$

então $|f(c) - f(d)| \leq 4\delta$

Partição

Voltando ao Teorema

Ele vale pra qualquer função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Lembrem que

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Lembre que g não é contínua em 0

Teorema

Digamos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, $\forall c, d \in [a,b]$,

$|c - d| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(d)| < \varepsilon$

Então se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| \leq \delta$ temos

Obs: Uma outra forma: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall c, d \in [a,b]$

$|c - d| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(d)| < \varepsilon$

[E2 30/Ago/2012]

Hoje

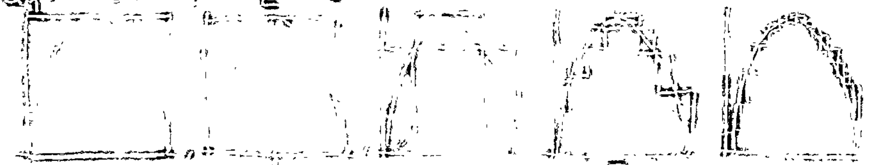
Vamos terminar os [illegible]

[illegible]

Em "Funções integráveis: introdução" a gente pegou um exemplo simples...

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \to [a,b]$



$\overline{f}_{Q_1} \geq \overline{f}_{Q_2} \geq \overline{f}_{Q_3} \geq \overline{f}_{Q_4} \geq \overline{f}_{Q_5} \to f$

$\underline{f}_{Q_1} \leq \underline{f}_{Q_2} \leq \underline{f}_{Q_3} \leq \underline{f}_{Q_4} \leq \underline{f}_{Q_5} \to f$

Dá pra provar que dá pra fazer algo bem parecido com $Q_1, Q_2, Q_3 \to [a,b]$

E dá pra provar que f é integrável (no sentido anterior) se e só se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |Q| < \delta \Rightarrow \sup \overline{f}_Q - \underline{f}_Q \leq \varepsilon$

Funções integráveis

Def 1: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável se existe $Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \to [a,b]$ com $\lim_{i\to\infty} \int_{Q_i} \overline{f}(x)\,dx$

$= \lim_{i\to\infty} \int_{Q_i} \underline{f}(x)\,dx$

Def 2: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável se

$\inf_{Q \text{ part. } [a,b]} \int_Q \overline{f}(x)\,dx$

$= \sup_{Q \text{ part. } [a,b]} \int_Q \underline{f}(x)\,dx$

[illegible]

[C2 30/AGO/2017]

DÁ PRA PROVAR (VAMOS VER VÁRIAS DEMONSTRAÇÕES NA PRÓXIMA AULA) QUE:

1) SE $a \le b \le c$ ENTÃO

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

2)
$$\int_{x=a}^{x=a} f(x)\,dx = 0$$

3)
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx \quad \text{(CASA)}$$

4)
$$\int_{x=a}^{x=b} k\,f(x)\,dx = K\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad \text{(CASA)}$$

5) (TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO, VERSÃO 1, TFC1):

SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CON

PARA $c\in[a,b]$, DEF:

ENTÃO: $F(a)=0$,

$$\frac{d}{dc}F(c) = f(c)$$

C2 4/set/2017

Avisos:
1) meu computador quebrou
2) não deu pra digitar coisas novas
3) vamos fazer as coisas numa ordem um pouco diferente da que eu tinha planejado originalmente

Na aula passada a gente viu a definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ e de função integrável e eu mencionei que dava pra demonstrar coisas como:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx \quad (1)$$

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \quad (2)$$

(3) $\int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx = k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

(4) TFC1: Se $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ é contínua, defina:

$F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

então $F(a)=0$,

$F:[a,c]\to\mathbb{R}$ é contínua,

$F'(b)=f(b)$ (em todo lugar?)

Hoje: plano B!
A gente vai aprender a aplicar essas propriedades, principalmente o TFC1.

Exemplo:

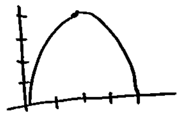
$f:[0,4]\to\mathbb{R}$

$x \mapsto 4-(x-2)^2$

Obs: $4-(x-2)^2$

$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$

$= 4x-x^2$

$f =$ 

(5) Problema:
(Obs: um "problema" é um exercício mais difícil !!)

Use o TFC1 nestas condições –
$a=0$,
$c=4$,
$f(x)=4x-x^2$
para calcular:

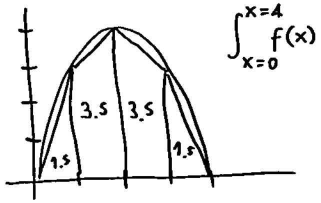
$F(x)$,
$F(0)$,
$F(2)$,
$F(4)$,

$\int_{x=0}^{x=0} f(x)\,dx =$

$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx =$

$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx =$

Lembre que:



$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx > 1.5+3.5+3.5+1.5$
$= 10$
$= \frac{30}{3}$

(5) $F(x) = 2x^2-\frac{1}{3}x^3$

$F(0)=0$
$F(2)=\frac{16}{3}$
$F(4)=\frac{32}{3}$

$\int_{x=0}^{x=0} f(x)\,dx = F(0)=0$

$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx = F(2)=\frac{16}{3}$

$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4)=\frac{32}{3}$

(6) Use o TFC1 nestas condições:
$a=2$
$c=4$
$f(x)=4x-x^2$
$F(x)=?$

$\int_{x=2}^{x=2} f(x)\,dx =$

$\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx =$

(4') TFC1, versão 2:
Se $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ é contínua, defina:

$F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Então $F(a)=0$,
$F:[a,c]\to\mathbb{R}$ é contínua,
$F'(b)=f(b)$ em todo ponto,

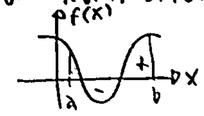
E se $G:[a,c]\to\mathbb{R}$ contínua
com $G(a)=0$
e $G'(b)=f(b)$ em todo lugar
então
$G(b)=F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Obs: No item (6) faz sentido calcular $F(0)=\int_{x=2}^{x=0} f(x)\,dx = -\frac{16}{3}$

Graficamente, isso é uma área "contada negativamente",

$\int_{x=2}^{x=0} f(x)\,dx = -\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx$.

Obs: Numa situação tipo esta,



$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ conta a parte abaixo do eixo negativamente.

$\boxed{\text{C2 4/set/2017}}$

Avisos:
1) meu computador quebrou
2) não deu pra digitar coisas novas
3) vamos fazer as coisas numa ordem um pouco diferente da que eu tinha planejado originalmente

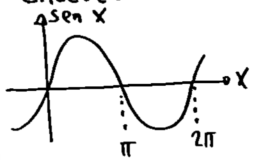
Na aula passada a gente viu a definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ e de função integrável e eu mencionei que dava pra demonstrar coisas como:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx \quad ①$$

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \quad ②$$

$$③ \quad \int_{x=a}^{x=b} k\,f(x)\,dx = k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

Calcule:



$$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx =$$

Dica: faça passo a passo, e use substituição.

Se $a=0$, $c=\pi$, $f(x)=\operatorname{sen} x$, $F(x)=-\cos x + 1$

então
$$F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$
$$= -\cos\pi + 1 = 2$$

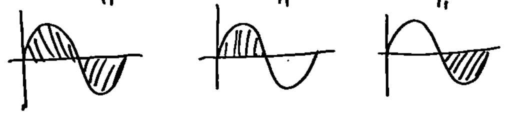
Se $a=0$, $c=2\pi$, $f(x)=\operatorname{sen} x$, $F(x)=-\cos x + 1$

então
$$F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=2\pi} f(x)\,dx$$
$$= \underbrace{\underbrace{-\underbrace{\cos 2\pi}_{1}}_{-1} + 1}_{0}$$

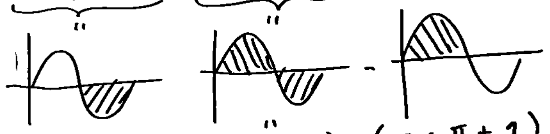
Como é que a gente usa o ②?

Se $a=0$, $c=2\pi$, $b=\pi$, $f(x)=\operatorname{sen} x$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx}_{\shortparallel} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx}_{\shortparallel} + \underbrace{\int_{x=\pi}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx}_{\shortparallel}$$



$$\underbrace{\int_{x=\pi}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx}_{\shortparallel} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx}_{\shortparallel} - \int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$



$$(-\cos 2\pi + 1) - (-\cos\pi + 1)$$
$$\shortparallel$$
$$(-\cos 2\pi) - (-\cos\pi)$$

⑦ TFC2 (versão 1):
Digamos que $f:[a,d]\to\mathbb{R}$
e que $F:[a,d]\to\mathbb{R}$
tal que $F'(x)=f(x)$ em todo $x\in[a,d]$.
Então para quaisquer $b,c\in[a,d]$
temos:
$$\int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)-F(b).$$

Exercício:
Use o TFC2 pra calcular:

OBS: $f(x)=\operatorname{sen} x$, $F(x)=-\cos x$

$$\int_{x=\pi}^{x=2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = ? \quad = (-\cos 2\pi) - (-\cos\pi)$$
$$= (-1) - (-(-1)) = -1-1 = -2$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = ? \quad = (-\cos\pi) - (-\cos\tfrac{\pi}{2})$$
$$= (-(-1)) - (0) = 1$$

OBS: Lá no início eu mencionei as propriedades ①, ② e ③... elas podem ser provadas pela definição de integral usando aproximações por funções-escada (próxima aula), mas elas também são consequências fáceis do TFC2.

Uma notação importante:
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Exercício:
$$\int_{x=a}^{x=b} 3\cos(4+5x)\,dx = ? = \left(\tfrac{3}{5}\operatorname{sen}(4+5x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

C2 4/set/2017

O TFC2 vai nos dar várias fórmulas relativamente simples pra calcular integrais... ("simples" no sentido de que parecem com coisas de Cálculo 1)

E além disso ele vai nos dar uma fórmula MUITO DIFÍCIL e MUITO ÚTIL que vocês vão precisar treinar MUITO porque ela vai ter MUITAS aplicações diferentes...

Ela se chama "Regra da substituição" ou "integração por substituição" e esse "substituição" é num sentido diferente do que a gente vem usando...

SUBSTITUIÇÃO, VERSÃO 1:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a))$$

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = f(g(b)) - f(g(a))$$

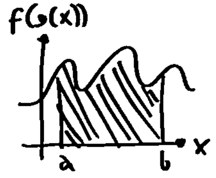
A partir de agora eu vou tratar isto como óbvio:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

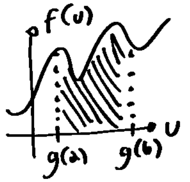
$$\boxed{\begin{array}{l} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,dx \\ \quad \| \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}}$$

S1

=



=



EXERCÍCIO:
Reescreva S1' (as 4 fórmulas!) com:
$a = \alpha$
$b = \beta$
$f(u) = 3\cos(u)$
$g(x) = 4+5x$

$f'(u) = -3\,\text{sen}\,u$
$g'(x) = 5$

OOPS! TUDO ERRADO!

$$\boxed{\begin{array}{l} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \quad \| \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}}$$

S1'

$$\boxed{\begin{array}{l} 3\cos(4+5x)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \displaystyle\int_{x=\alpha}^{x=\beta} (-3\,\text{sen}(4+5x))\cdot 5\,dx \\ \quad \| \\ 3\cos u\Big|_{u=4+5\alpha}^{u=4+5\beta} = \displaystyle\int_{u=4+5\alpha}^{u=4+5\beta} -3\,\text{sen}\,u\,du \end{array}}$$

EXERCÍCIO:
Encontre a, b, f, g para os quais a fórmula S1' (4 fórmulas!) reescrita "calcule $\displaystyle\int_{x=\alpha}^{x=\beta} 3\cos(4+5x)\,dx$", ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{l} ? = \displaystyle\int_{x=\alpha}^{x=\beta} 3\cos(4+5x)\,dx \\ \| \\ ? = ? \end{array}}$$

[illegible]

$\boxed{S2}$ $F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx$

$F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

ONDE $F(u)$ É ALGUMA FUNÇÃO TAL QUE $F'(u) = f(u)$.

$\boxed{S1}$ $\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

(... VAI SER A NOSSA FÓRMULA ... FOI CALCULADO = ... VAI ... PRA ... NÃO ...)

EXERCÍCIO: S3 $\left[f(u) = \sqrt{u},\ g(x) = x^2 + 3 \right]$

EXEMPLO

FAÇA A SEGUINTE SUBSTITUIÇÃO NA S2:

$a = \alpha$

$b = \beta$

$g(x) = x^2 + 1$

$f(u) = \tan u$

NÃO SUBSTITUA F.

$F(x^2+1)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} \tan(x^2+1)\,2x\,dx$

$F(u)\Big|_{u=\alpha^2+1}^{u=\beta^2+1} = \int_{u=\alpha^2+1}^{u=\beta^2+1} \tan(u)\,du$

LEMBRE QUE

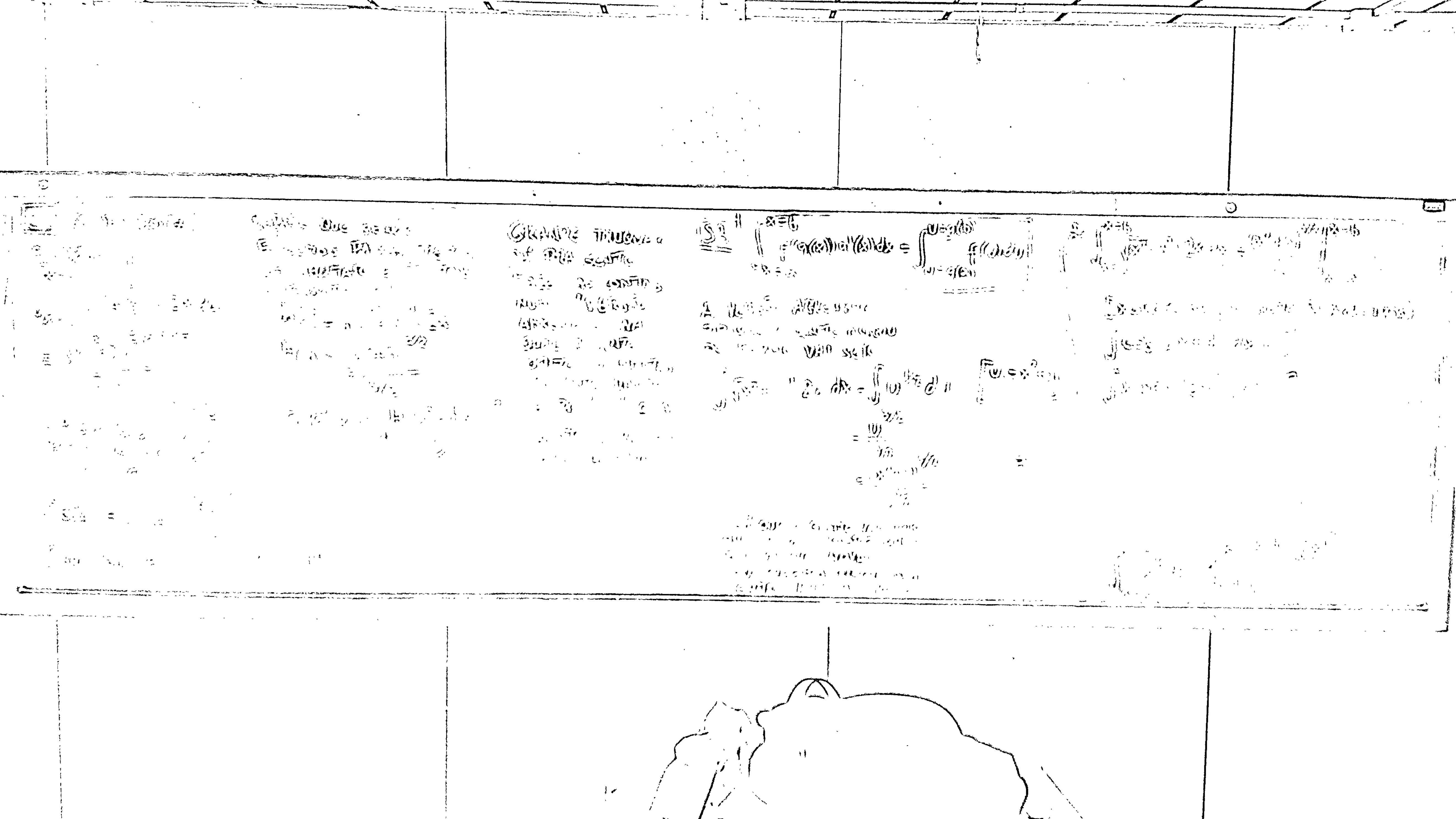
$\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}$

$\int_{x=a}^{x=b} k x^{k-1}\,dx = x^k\Big|_{x=a}^{x=b}$

$\int_{x=a}^{x=b} x^{k-1}\,dx = \frac{x^k}{k}\Big|_{x=a}^{x=b}$

$\int_{x=a}^{x=b} x^{k}\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{x=a}^{x=b}$

CONTINUAÇÃO ... PRA CALCULAR ... [illegible]



6 nov 2014!

$$\int \cos(3x+4)\,dx = \int \frac{1}{3}\cos(\underbrace{3x+4}_{g(x)})\,\underbrace{3}_{g'(x)}\,dx \qquad [u = 3x+4]$$

$$= \int \frac{1}{3}\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{sen}\,u$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x+4)$$

$$\int x\,\text{sen}(3x^2)\,dx = \int \text{sen}(3x^2)\,x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{6}\,\text{sen}(3x^2)\cdot 6x\,dx \qquad [u = 3x^2]$$

$$= \int \frac{1}{6}\,\text{sen}\,u\,du$$

$$= \frac{1}{6}\int \text{sen}\,u\,du$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(-\cos u)$$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x^2)$$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$$

MAIS UM TRUQUE
(INFORMAL, POR ENQUANTO)

Se $u = 3x^2$

então $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}3x^2 = 6x$

$du = 6x\,dx$

$\frac{1}{6}du = x\,dx$

$u = 3x^2$

$3x^2 = u$

$x^2 = \frac{u}{3}$

$x\,dx = \frac{1}{6}du$

$$\int \text{sen}(3x^2)\,x\,dx = \int \text{sen}\,u\cdot\frac{1}{6}\,du$$

$$\int \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow s \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos(\theta) \\ ds = \cos(\theta)\,d\theta \\ \cos(\theta)\,d\theta \Rightarrow ds \end{array}\right] =$$

$$\int s\,ds = \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\theta))^2 =$$

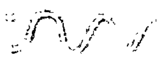
$$\boxed{\text{S.S.}} \quad \boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$$

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$

$$\cos^2(\theta) - 1 = \operatorname{sen}^2(\theta)$$

A OUTRA SUBSTITUIÇÃO
IRMÃ DESSA É

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \Rightarrow c \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}(\theta) \\ dc = -\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta \\ \operatorname{sen}(\theta)\,d\theta \Rightarrow (-1)\,dc \end{array}\right] =$$



C2 11/set/2017

HOJE: MUITOS EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO!

(ANTES DA GENTE REVER DERIVADA DE FUNÇÃO INVERSA, DIFERENCIAIS, ETC...)

DERIVADA DE FUNÇÃO INVERSA

EXEMPLO:
SABEMOS $\frac{d}{dx}e^x$.
ln e exp SÃO INVERSAS.
SABEMOS $\frac{d}{dx}\ln x$

DIFERENCIAIS

NOTAÇÃO ESTRANHA: $f(a+dx) = f(a)+f'(a)\,dx$ LINEARIZAÇÃO

a: NÚMERO REAL

dx: INTUITIVAMENTE, NÚMERO MUITO PEQUENO; FORMALMENTE, UMA VARIÁVEL

LEMBREM QUE QUANDO SE PREPARA PRA FAZER UMA SUBSTITUIÇÃO A GENTE CRIA UMA "CAIXA COM INSTRUÇÕES"... P.EX:

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \int s\,ds = \frac{s^2}{2} = \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} s=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ \cos\theta\,d\theta \to ds \\ \operatorname{sen}\theta \to s \end{array}\right]$$

VOCÊS TEM QUE TER BASTANTE PRÁTICA COM ISSO E TÊM QUE SER CAPAZES DE CRIAR AS "CAIXAS COM INSTRUÇÕES" VOCÊS MESMO.

9) $\int (1-2x)^9\,dx$
$=$

$$\left[\begin{array}{l} u=1-2x \\ \frac{du}{dx}=-2 \\ du=-2dx \\ dx \to -\frac{1}{2}du \end{array}\right]$$

DERIVADA DE FUNÇÃO INVERSA

(COM O TRUQUE PRA QUEM TEM MEMÓRIA RUIM).

DIGAMOS QUE f E g SÃO INVERSAS UMA DA OUTRA.

ENTÃO:
$$f(g(x))=x \Rightarrow \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

ALÉM DISSO,
$$g(f(x))=x \Rightarrow \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

CASO PARTICULAR:
exp E ln SÃO INVERSAS UMA DA OUTRA.
$\exp' x = \exp x$ ⇐ ESSE TRUQUE VAI SER IMPORTANTE.
ALÉM DISSO, UMA DAS FÓRMULAS ACIMA VAI NOS AJUDAR A CALCULAR $\ln' x$... QUAL?
DICA: TESTE AS DUAS!!.

$$\frac{d}{dx}\exp\ln x = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\frac{d}{dx}\exp\ln x = \exp'(\ln x)\ln' x = \exp(\ln x)\ln' x$$

$$\frac{d}{dx}\ln\exp x = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\frac{d}{dx}\ln\exp x = \ln'(\exp x)\exp' x = \ln'(\exp x)\exp x$$

EXERCÍCIOS SEGUINTES:
$\frac{d}{dx}\arcsen x = ?$
$\frac{d}{dx}\arccos x = ?$

DICA:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$
$\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$
$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$

⇧
PRA CASA! :)

OUTRO JEITO DE VER DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA...

DIGAMOS QUE $f(g(x))=x$
E QUE $u=g(x)$
$v=f(g(x))=f(u)$

ENTÃO:
$$\frac{dv}{dx} = \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x) = f'(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{df(u)}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{\cancel{du}}\frac{\cancel{du}}{dx}$$

OLHA SÓ:
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\frac{dv}{dx} = 1$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\underbrace{\frac{dv}{du}}_{f'(u) = f'(g(x))}\ \underbrace{\frac{du}{dx}}_{g'(x)} = 1$$

C2 13/set/2017

Hoje: linearizações e diferenciais!
Mas antes: aproximações por polinômios e séries de Taylor!

Vamos começar inventando algumas operações.
Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então

$derivs(f) = (f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, \ldots)$,
$derivs_a(f) = (f(a), f'(a), f''(a), \ldots)$

Exercícios:
Calcule
$derivs((x^4))$, $derivs_0((x^4))$,
$derivs((e^x))$, $derivs_0((e^x))$,
$derivs((\operatorname{sen} x))$, $derivs_0((\operatorname{sen} x))$,
$derivs((\cos x))$, $derivs_0((\cos x))$.

Digamos que $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_5x^5$.
Calcule
$derivs(f)$, $derivs_0(f)$.

Digamos que $g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots + b_5x^5$
e que $derivs_0(g) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 0, \ldots)$.
Descubra os coeficientes de g.

Vamos dizer que
f e g coincidem até ordem n
no ponto a quando
$f(a) = g(a)$
$f'(a) = g'(a)$
$f^{(2)}(a) = g^{(2)}(a)$
$\vdots$
$f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$.

A aproximação polinomial
de ordem n de f em a
é o polinômio de grau n, $g(x)$,
tal que f e g coincidem
até ordem n em a.

A gente vai usar $a \neq 0$
pouco por enquanto.

Truque/Convenção:
Digamos que
$$g(x) = b_0(x-a)^0 + b_1(x-a)^1 + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3.$$
Calcule
$derivs((g(x)))$,
$derivs_a((g(x)))$.

$$g'(x) = b_1 \cdot 1(x-a)^0 + b_2 \cdot 2(x-a)^1 + b_3 \cdot 3(x-a)^2$$
$$g''(x) = b_2 \cdot 2 \cdot 1(x-a)^0 + b_3 \cdot 3 \cdot 2(x-a)^1$$
$$g'''(x) = b_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(x-a)^0$$
$$g''''(x) = 0$$

$$derivs_a(g) = (b_0, b_1, 2b_2, 6b_3, 0, 0, \ldots)$$

Obtenha aproximações polinomiais
de ordem 5 para e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$
(no ponto 0).

$$e^x \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$g(x)$

$$derivs_0((e^x)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$$
$$derivs_0((g(x))) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$\operatorname{sen} x \Rightarrow 0 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{6} + 0x^4 + \frac{x^5}{120}$$
$$\cos x \Rightarrow 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + 0x^3 + \frac{x^4}{24} + 0x^5$$

C2 13/set/2017

Essas aproximações polinomiais são muito boas: dão resultados muito próximos à função original quando a gente calcula elas em pontos próximos ao ponto a.

Sugestão: ... Stewart, seção 11.10

$$g(x) = b_0(x-a)^0 + b_1(x-a)^1 + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3$$

$$\Rightarrow g(a+\varepsilon) = b_0\varepsilon^0 + b_1\varepsilon^1 + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3$$

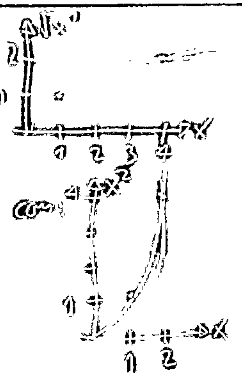
Eu resolvi puxar esse assunto: séries de Taylor e Maclaurin: pro início da matéria pra explicar linearizações.

Exemplo (padrão): Seja $f(x)=\sqrt{x}$. Calculem $f'(x)$, $f(4)$, $f'(4)$, e um polinômio

$$h(x) = b_0(x-4)^0 + b_1(x-4)^1$$

que seja uma aproximação linear de grau 1 para $f(x)$ no ponto 4.

Figura



compare com

Comparem os valores de $f(x)$ e $h(x)$ em
$x=4$
$x=5$
$x=4.1$
$x=3$
$x=3.9$
$x=2$

Infinitesimais, versão antiga (antes de 1800)

Digamos que ε seja um número tão próximo de 0 que $\varepsilon^2=0$ (o que é mais fácil: que "ε^2 é muito pequeno" ou "ε^2 é desprezível").

Então se $x=a+\varepsilon$

$$g(x) = b_0(a+\varepsilon-a)^0 + b_1\varepsilon^1 + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 = b_0 + b_1\varepsilon$$

Pegue um f qualquer (suave) e uma aproximação por uma $g(x)$ da f de grau 5 no ponto a.

(ou qualquer número maior que 1)

Então

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{6} + \ldots$$

E se $x=a+\varepsilon$ (com $\varepsilon^2=0$) vamos ter

$$g(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon$$

C2 13/SET/2017

EM TEXTOS ATUAIS
A GENTE VAI VER
COISAS COMO

$$f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$f(a+\varepsilon) \approx f(a) + f'(a)\cdot\varepsilon$$

COM INFINITESIMAIS
ANTIGOS (QUE AS PESSOAS
SÓ CONSEGUIRAM FORMALIZAR
DIREITO HÁ POUCAS DÉCADAS)
A GENTE PODERIA DIZER:

$$f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon.$$

DIFERENCIAS SÃO
UM JEITO DE FORMALIZAR
ISTO COM UMA GAMBIARRA
RELATIVAMENTE SIMPLES.

IDÉIA: dx É UM
INFINITESIMAL.

$$f(a+dx) = f(a) + f'(a)\,dx$$

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x)}_{y} + \underbrace{f'(x)}_{\frac{dy}{dx}}\,dx$$

EM CERTOS CONTEXTOS USAMOS:
x_0 VARIÁVEL, Δx TAMBÉM,
$x_1 = x_0 + \Delta x$,
$y_0 = f(x_0)$
$y_1 = f(x_1)$, $\Delta y = y_1 - y_0$

$$\underbrace{f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x_1})}_{y_1} = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{\frac{dy}{dx}}\Delta x$$

$$\underbrace{y_1 - y_0}_{\Delta y} = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

A GAMBIARRA DAS
DIFERENCIAIS VAI
NOS PERMITIR
DEFINIR dy COMO

$$dy = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)}\,dx$$

$\boxed{\text{C2 18/SET/2017}}$

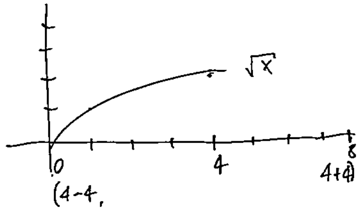
AVISO: EU NÃO CONSEGUI PREPARAR BEM A AULA SOBRE DIFERENCIAIS, ENTÃO A GENTE HOJE VAI VER OUTRAS COISAS RELACIONADAS COM SÉRIE DE TAYLOR!

OBS: SE $f(x)$ É UMA FUNÇÃO E $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots$ SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE ORDEM $0, 1, 2,$ ETC DE $f(x)$ NO PONTO 0, SERÁ QUE PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ TEMOS $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$?

NÃO.

IDÉIA: "RAIO DE CONVERGÊNCIA" DE UMA SÉRIE DE TAYLOR (GOOGLEM OU PROCUREM NOS LIVROS) - SE O RAIO DE CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR DE $f(x)$ EM 0 É R ENTÃO $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ PARA $x \in (-R, R)$.

NO CASO DA RAIZ QUADRADA (SE FIZERMOS TUDO ISSO EM TORNO DO PONTO $x=4$) VAI TER ISTO AQUI:



SE $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$ ETC SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $f(x)$ EM TORNO DE $x=4$ A CONVERGÊNCIA $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ VAI ACONTECER NUM INTERVALO DE RAIO 4.

AVISO: NAS FUNÇÕES QUE A GENTE VAI VER NA AULA DE HOJE O RAIO DE CONVERGÊNCIA É INFINITO.

EXERCÍCIO DE REVISÃO: (RE)ENCONTREM AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 5 PARA: e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$.

$$f_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$
$$g_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
$$h_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

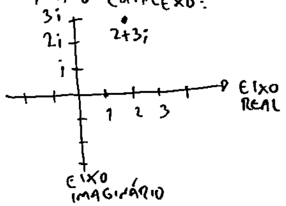
(TUDO AO REDOR DO 0).

OBS: $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

(A GENTE VAI USAR ISSO PRINCIPALMENTE PRA ENTENDER E USAR ESTA FÓRMULA: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$).

REVISÃO DE COMPLEXOS

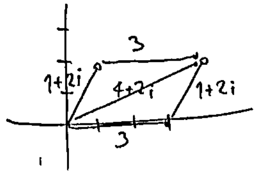
PLANO COMPLEXO:



OPERAÇÕES: TRUQUE: O i PODE SER VISTO COMO UMA VARIÁVEL (!!!) QUE OBEDECE $i^2 = -1$.

$$(2+3i) + (4+5i) = 6+8i$$
$$\begin{aligned}(2+3i)(4+5i) &= 2(4+5i) + 3i(4+5i) \\ &= 2\cdot 4 + 2\cdot 5i + 3\cdot 4i + 3\cdot 5i^2 \\ &= 2\cdot 4 + (2\cdot 5 + 3\cdot 4)i + \underbrace{(3\cdot 5)\underbrace{i^2}_{-1}}_{-3\cdot 5} \\ &= (2\cdot 4 - 3\cdot 5) + (2\cdot 5 + 3\cdot 4)i\end{aligned}$$

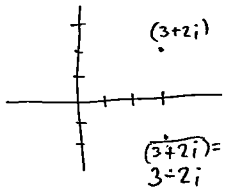
VISUALMENTE A SOMA FUNCIONA COMO SOMA DE VETORES...



A MULTIPLICAÇÃO É MAIS ESTRANHA, E ELA ENVOLVE UMA ROTAÇÃO. !!

UMA OPERAÇÃO NOVA: "CONJUGAÇÃO".

SE $z \in \mathbb{C}$ E $z = a+ib$ ONDE $a, b \in \mathbb{R}$, ENTÃO $\bar{z} = a - ib$.



$\overline{3+2i} = 3-2i$

EXERCÍCIO: CALCULE $(a+ib)(a-ib)$.

COMPLETE:

z	$\bar{z}$	$z\bar{z}$	$\lvert z\rvert$
3			
$2i$			
$-2i$			
-3			
0			
$3+4i$			
$3-4i$			

ALGUMAS PROPRIEDADES IMPORTANTES DA CONJUGAÇÃO:

SE $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $z = a+ib$, $w = c+id$, ENTÃO:

1) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z+w}$

OBS: $\overline{(a+ib)} + \overline{(c+id)} = (a-ib) + (c-id) = (a+c) + (-b-d)i$

2) $\bar{z}\bar{w} = \overline{zw}$ $= (ac-bd) - (ad+bc)i$

3) $z\bar{z}$ É REAL E $z\bar{z} \geq 0$

4) DEF: EM COMPLEXOS $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

5) $|zw| = \sqrt{(zw)(\overline{zw})} = \sqrt{zw\bar{z}\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} = |z||w|$.

C2 18/set/2017

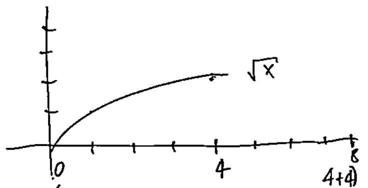
AVISO: EU NÃO CONSEGUI PREPARAR BEM A AULA SOBRE DIFERENCIAIS, ENTÃO A GENTE HOJE VAI VER OUTRAS COISAS RELACIONADAS COM SÉRIE DE TAYLOR!

OBS: SE $f(x)$ É UMA FUNÇÃO E $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots$ SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE ORDEM 0, 1, 2, ETC DE $f(x)$ NO PONTO 0, SERÁ QUE PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ TEMOS $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$?

NÃO.

IDÉIA: "RAIO DE CONVERGÊNCIA" DE UMA SÉRIE DE TAYLOR (GOOGLEM OU PROCUREM NOS LIVROS) - SE O RAIO DE CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR DE $f(x)$ EM 0 É R ENTÃO $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ PARA $x \in (-R, R)$.

NO CASO DA RAIZ QUADRADA (SE FIZERMOS TUDO ISSO EM TORNO DO PONTO $x=4$) VAI TER ISTO AQUI:



SE $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$ ETC SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $f(x)$ EM TORNO DE $x=4$ A CONVERGÊNCIA $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ VAI ACONTECER NUM INTERVALO DE RAIO 4.

AVISO: NAS FUNÇÕES QUE A GENTE VAI VER NA AULA DE HOJE O RAIO DE CONVERGÊNCIA É INFINITO.

EXERCÍCIO DE REVISÃO: (RE) ENCONTREM AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 5 PARA: e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$.

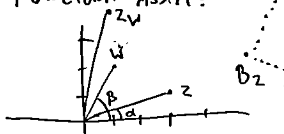
$$f_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$
$$g_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
$$h_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

(TUDO AO REDOR DO 0).

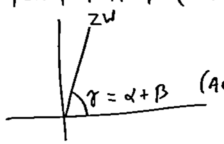
OBS: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

(A GENTE VAI USAR ISSO PRINCIPALMENTE PRA ENTENDER E USAR ESTA FÓRMULA: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$).

VISUALMENTE A MULTIPLICAÇÃO FUNCIONA ASSIM:



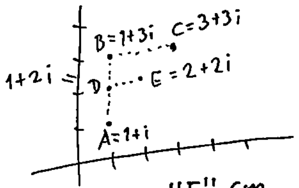
$|zw| = |z||w|$ (OK)



(ACREDITEM).

MULTIPLICAÇÃO POR COMPLEXOS TEM A VER COM ROTAÇÃO E MUDANÇA DE ESCALA.

EXERCÍCIO: SEJAM:

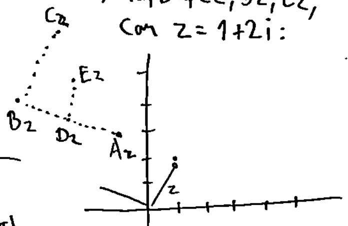


FAÇAM OS "F" COM VÉRTICES:

a) 2A, 2B, 2C, 2D, 2E

b) Ai, Bi, Ci, Di, Ei

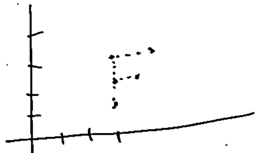
c) Az, Bz, Cz, Dz, Ez, COM $z = 1+2i$:



OBS (TRIVIAL): SOMAR z CORRESPONDE A UM DESLOCAMENTO.

$z = 2$,

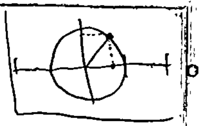
d) $(A+z), (B+z), (C+z), (D+z), (E+z)$



TODO NÚMERO COMPLEXO z PODE SER EXPRESSO DE FORMA ÚNICA COMO...

$\forall z \in \mathbb{C}.\ \exists! a,b \in \mathbb{R}.\ z = a+ib$

A GENTE DIZ QUE a É A "PARTE REAL" DE z E ib É A "PARTE IMAGINÁRIA".



REPARE: SE $z = a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$

ENTÃO $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(a+ib)+(a-ib)}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{(\cancel{a}+ib)-(\cancel{a}-ib)}{2} = \frac{2ib}{2} = ib$

$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{ib}{i} = b$.

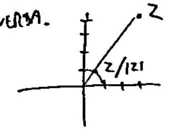
(PODEMOS USAR CONJUGAÇÃO PRA ENCONTRAR AS PARTES REAIS E IMAGINÁRIAS DE COMPLEXOS!)

DEIXA EU CONVENCER VOCÊS DO "ACREDITEM" À ESQUERDA.

SE $z = 3+4i$

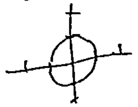
$\Rightarrow |z| = 5$

$\Rightarrow z \cdot \frac{1}{|5|} = \frac{1}{5} z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$



OBS: $\frac{z}{|z|}$ TEM MÓDULO 1...

TODOS OS $z \in \mathbb{C}$ COM $|z|=1$ ELES ESTÃO NO "CÍRCULO UNITÁRIO":



E PRA CADA $z \in \mathbb{C}$ COM $|z|=1$ EXISTE UM θ REAL COM

$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

E, MULTIPLICANDO POR $|z|$,

$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

C2 18/SET/2017

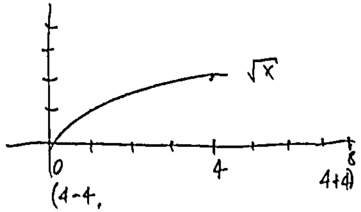
AVISO: EU NÃO CONSEGUI PREPARAR BEM A AULA SOBRE DIFERENCIAIS, ENTÃO A GENTE HOJE VAI VER OUTRAS COISAS RELACIONADAS COM SÉRIE DE TAYLOR!

OBS: SE $f(x)$ É UMA FUNÇÃO E $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots$ SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE ORDEM $0, 1, 2$, ETC DE $f(x)$ NO PONTO 0, SERÁ QUE PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ TEMOS $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$?

NÃO.

IDÉIA: "RAIO DE CONVERGÊNCIA" DE UMA SÉRIE DE TAYLOR (GOOGLEM OU PROCUREM NOS LIVROS) — SE O RAIO DE CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR DE $f(x)$ EM 0 É R ENTÃO $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ PARA $x \in (-R, R)$.

NO CASO DA RAIZ QUADRADA (SE FIZERMOS TUDO ISSO EM TORNO DO PONTO $x=4$) VAI TER ISTO AQUI:



SE $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$ ETC SÃO AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS PARA $f(x)$ EM TORNO DE $x=4$ A CONVERGÊNCIA $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ VAI ACONTECER NUM INTERVALO DE RAIO 4.

AVISO: NAS FUNÇÕES QUE A GENTE VAI VER NA AULA DE HOJE O RAIO DE CONVERGÊNCIA É INFINITO.

EXERCÍCIO DE REVISÃO: (RE)ENCONTREM AS APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU 5 PARA: e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$.

$$f_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$
$$g_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
$$h_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

(TUDO AO REDOR DO 0).

OBS: $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

(A GENTE VAI USAR ISSO PRINCIPALMENTE PRA ENTENDER E USAR ESTA FÓRMULA: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$).

VOLTANDO PRO "ACREDITEM"...

SEJAM $z, w \in \mathbb{C}$ COM $z \neq 0$, $w \neq 0$.

SEJAM α E β TAIS QUE:

$$z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$
$$w = |w|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$
$$zw = |z||w|\big((\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) + i(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \cos\beta \operatorname{sen}\alpha)\big)$$
$$= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)).$$

DEPOIS QUE AS PESSOAS INVENTARAM COMPLEXOS E SÉRIE DE TAYLOR ELAS SE PERGUNTARAM: SERÁ QUE A GENTE PODE DEFINIR e^x, $\cos x$ E $\operatorname{sen} x$ PRA COMPLEXOS USANDO SÉRIE DE TAYLOR?

SIM:

1) A DEFINIÇÃO NOVA DÁ O MESMO RESULTADO QUE A ANTIGA QUANDO A GENTE CALCULA e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ PARA z REAL.

EXEMPLO: DEF.

$$f_5(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120}$$
$$g_5(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24}$$
$$h_5(z) = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120}$$

DIGAMOS QUE $\theta \in \mathbb{R}$.

$$f_5(i\theta) = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \frac{i\theta^5}{120}$$
$$g_5(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$$
$$ih_5(\theta) = i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120}\right)$$
$$f_5(i\theta) = g_5(\theta) + ih_5(\theta)$$
$$f_\infty(i\theta) = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \frac{i\theta^5}{120} + \ldots$$
$$\| \quad e^{i\theta}$$
$$g_\infty(\theta) = \cos\theta$$
$$h_\infty(\theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

SABEMOS QUE $e^a e^b = e^{a+b}$.

SERÁ QUE $e^z e^w = e^{z+w}$ PARA $z, w \in \mathbb{C}$?

[illegible]

$$((a+ib))^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

Como é que a gente vê que $e^x e^y = e^{(x+y)}$ vale p/ os complexos?

Seja $F(z,w) = e^z e^w - e^{z+w}$

Sabemos que $F(z,w) = 0$ quando $z, w \in \mathbb{R}$

[illegible]

Se $G(z) = 0$ para todo z real e G tem uma série de Taylor com raio de convergência infinito

[illegible]

Então a série de Taylor de $G(z) = 0 + 0z + 0z^2 + 0z^3 + \dots$

$= 0$

(p/ todo z complexo)

[illegible]

$F(z,w)$ [illegible] para $z, w \in \mathbb{R}$,

[illegible] $F(z,w)$ [illegible]

Exercício

$e^{2i\theta} = \_\ 1 + \_\ \theta + \_\ \theta^2 + \_\ \theta^3$

$\cos 2\theta =$

$\operatorname{sen} 2\theta =$

Dicas:

1) Vocês já obtiveram fórmulas para $e^{i\theta}$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$

Essas fórmulas valem p/ todo $\theta \in \mathbb{R}$ e portanto podem fazer substituições nelas.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \dots$$

$(*) [\theta := 2x] \Rightarrow$

$(*) [\theta := 2\theta] \Rightarrow$

2) A gente usa a idéia lá da esquerda para ver que essas fórmulas valem para $\theta \in \mathbb{C}$ (só generalizando)

$$(***)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$(***) [x := i\theta] \Rightarrow$$

3) Pela idéia à esquerda

$$(**)\ e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

vale [illegible]

[illegible] 20/set/2012

Dúvidas [illegible] [illegible]

Sugestão:

[illegible]

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$

[illegible] $e^{\theta} e^{-\theta} = e^{0} = 1$

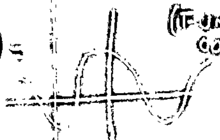
$\Rightarrow e^{-\theta} = 1/e^{\theta}$

Isto vale para [illegible]

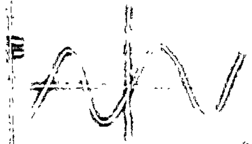
$e^{-z} = 1/e^{z}$

Ex.: Se $e^{z} = [illegible]$

então $e^{-z} = [illegible]$

$\cos\theta =$  (Função "par", como $f(x) = x^2$)

Então $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

$\mathrm{sen}\,\theta =$ 

("Função ímpar", como $f(x) = x^3$)

$\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$

Daí: $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$

$= \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

a) $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

b) $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta$

c) $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$

d) $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\,\mathrm{sen}\,\theta$

e) $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{sen}\,\theta$

Nos livros vocês vão ver essas contas "sem abreviações".

Lembra que usamos coisas como $v = x^2 + 2$, e esse v podia ser várias coisas:

- uma variável nova (dependente do x),
- uma abreviação para $x^2 + 2$.

Minhas variáveis preferidas

$S = \mathrm{sen}\,\theta$

$C = \cos\theta$

$E = e^{i\theta}$

Obs.: $E^2 = e^{i\theta} e^{i\theta} = e^{2i\theta}$

$E^{-1} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$

Com as abreviações,

$E = C + iS$

$E^{-1} = C - iS$,

$C = \dfrac{E + E^{-1}}{2}$

$S = \dfrac{E - E^{-1}}{2i}$

Exercício:

Calcule C^2 em termos de E e E^{-1}.

Mais truques:

$E^2 = \cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta$

$E^{-2} = \cos 2\theta - i\,\mathrm{sen}\,2\theta$

$E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$

$E^3 + E^{-3} = 2\cos 3\theta$

$E^3 - E^{-3} = 2i\,\mathrm{sen}\,3\theta$

$C^2 = \left(\dfrac{E + E^{-1}}{2}\right)^2 = \dfrac{(E + E^{-1})^2}{4}$

$= \dfrac{E^2 + 2EE^{-1} + E^{-2}}{4}$

$= \dfrac{E^2 + 2 + E^{-2}}{4}$

$= \frac{1}{4}(2\cos 2\theta + 2)$

[illegible] 20/11/2017

[illegible]

[illegible]

Exercícios:

$$\int (\cos\theta)^2\,d\theta = ?$$

$$\int (\cos\theta)^4\,d\theta = ?$$

$$(\cos\theta)^4 = c^4 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{(E+E^{-1})^4}{16}$$

$$= \frac{E^4 + 4E^3E^{-1} + 6E^2E^{-2} + 4E^1E^{-3} + E^{-4}}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left(E^4 + 4E^2 + 6 + 4E^{-2} + E^{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{E^4+E^{-4}}_{2\cos 4\theta} + 4\underbrace{(E^2+E^{-2})}_{2\cos 2\theta} + 6\Big)$$

$$\int (\cos\theta)^4\,d\theta = $$

Repare que a gente ainda não viu como integrar coisas como

$$\int x e^x\,dx = ?$$

$$\int x\cos x\,dx = ?$$

$$\int e^x \cos x\,dx = ?$$

A técnica pra isso é chamada "integração por partes" — mas ela acaba sendo útil em bem poucas situações.

Ideia:

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Exemplo

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}\,dx$$

$$= xe^x - e^x$$

Exemplo:

$$\int x^2 e^x\,dx = \ldots - \underbrace{\int 2xe^x\,dx}_{\text{calculado na fórmula anterior}}$$

$$\int x^{10} e^x\,dx = \ldots - \underbrace{\int 10x^9 e^x\,dx}_{\text{(como?) fórmula anterior}}$$

C2 25/set/2017

Hoje: integração por partes e o início de frações parciais.

Fórmulas do final da aula passada (vamos escrever "f" e "g" ao invés de "$f(x)$" e "$g(x)$").

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\int (fg)'\,dx = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

$$fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

Exercício:

Integre:

a) $\int x e^x\,dx$

b) $\int x^2 e^x\,dx$

c) $\int x^3 e^x\,dx$

d) $\int x^4 e^x\,dx$

...e no final escreva $\int x^4 e^x\,dx$ sem "onde".

Truque: basta expressar a solução de cada item "em termos dos anteriores".

(Truque do "onde").

Exemplo:

① $\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = xe^x - \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}\,dx$
$= xe^x - e^x$

② $\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int 2x e^x\,dx$
$= x^2e^x - 2\int x e^x\,dx$

$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\int x e^x\,dx$

onde $\int x e^x\,dx$ é dado por ①.

Meu modo preferido de escrever a resposta:

$\int x e^x\,dx = xe^x - e^x$

$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\int x e^x\,dx$

$\int x^3 e^x\,dx = x^3e^x - 3\int x^2 e^x\,dx$

$\int x^4 e^x\,dx = x^4e^x - 4\int x^3 e^x\,dx$

$= x^4e^x - 4(x^3e^x - 3(x^2e^x - 2(xe^x - e^x)))$

$= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x$

Dois truques

Caso principal em que ele aparece:

$\int e^x \cos x\,dx = ?$

$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = ?$

A gente vai precisar integrar por partes duas vezes e...

③ $\int \underbrace{e^x}_{f'}\underbrace{\cos x}_{g}\,dx = \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{g'}\,dx$
$= e^x\cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

④ $\int \underbrace{e^x}_{f'}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g}\,dx = \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx$

③' $\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$
$\overset{(\text{por } ④)}{=} e^x\cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx\right)$
$= e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\cos x\,dx$

$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x$

$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x)$

Dá pra fazer o mesmo pro ④. Façam o ④' em casa.

Segundo truque:

$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^x\cos x}_{g'}\,dx = \ldots$ (!!, mas funciona.)

Frações parciais

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^4+fx^3+gx^2+hx+j}\,dx = ?$$

Frações parciais serve pra integrar quocientes de polinômios.

⑤ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

⑥ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Reparem que ⑥ só vale para $x>0$...

Então ⑤ também só vale pra $\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

com $a,b>0$

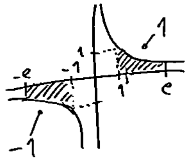
Vamos tentar usar a simetria do $\frac{1}{x}$ (função ímpar!) pra derivar isto:

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = ?$$

$$\left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\right)\begin{bmatrix} g(x) := -x \\ f(u) := \ln u \\ f'(u) \to 1/u \\ g'(x) \to -1 \end{bmatrix} = ?$$

$$\left(\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}\right)$$

Passo intermediário pra gente não se perder:



$\int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{x=1}^{x=2} = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln 2$

$\int_{x=1}^{x=e} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{x=1}^{x=e} = \underbrace{\ln e}_{1} - \underbrace{\ln 1}_{0} = 1$

$\int_{x=-e}^{x=-1} \frac{1}{x}\,dx = -1$

$\int_{x=-1}^{x=-e} \frac{1}{x}\,dx = 1$

Faça gráficos e calcule por áreas.

C2 25/set/2017

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ (PARA $0<x$)

$\frac{d}{dx} \ln -x = \frac{1}{x}$ (PARA $x<0$)

$\frac{d}{dx} \ln|x| = ?$

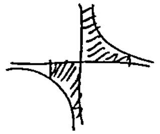
$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx}\left(\begin{cases} \ln x & \text{se } x>0 \\ \ln -x & \text{se } x<0 \end{cases}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

MAS $\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} dx$ só vai estar definido se $[a,b]$ estiver contido no domínio de $\ln|x|$... ou seja, se $[a,b] \not\ni 0$.

OBS: $\int_{x=-2}^{x=3} \frac{1}{x} dx =$  $= -\infty + \infty$ = indefinido.

...

$$\int \frac{1}{x-4} dx = \left[\begin{array}{l} u = x-4 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = dx \\ dx \to du \\ x-4 \to u \\ x \to u+4 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|u|$$
$$= \ln|x-4|$$

$$\int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} dx = \ln|x-2| + \ln|x+3|$$
$$\parallel$$
$$\int \frac{x+3}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} dx$$
$$\parallel$$
$$\int \frac{(x+3)+(x-2)}{(x-2)(x+3)} dx$$
$$\parallel$$
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx = \ln|x-2| + \ln|x+3| \quad \parallel$$

TRUQUE:

Pra integrar $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx$

precisamos decompor o $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$ numa soma de frações da forma $\frac{a}{x-b}$.

Exercício:

$$\int \frac{a}{x-b} + \frac{c}{x-d} dx = a \ln|x-b| + c \ln|x-d|$$

$$\frac{a}{x-b} + \frac{c}{x-d} = \frac{a(x-d)+c(x-b)}{(x-b)(x-d)}$$
$$= \frac{(a+c)x - ad - bc}{x^2-(b+d)x+bd}$$

E na direção inversa?

$$\int \frac{1}{x^2+x-6} dx = ?$$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

Quem são a e b?
Dá pra resolver na marra
(talvez por um sistema (simples)).

$\Rightarrow a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{1}{5}$

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

$$a(x+3) + b(x-2) = 0x + 1$$
$$\parallel$$
$$ax + 3a + bx - 2b$$
$$\parallel$$
$$\underbrace{(a+b)}_{0}x + \underbrace{(3a-2b)}_{1}$$

Próximo exercício:

$$\int \frac{x}{x^2+x-6} dx = ?$$

$$\frac{x}{x^2+x-6} = \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x+3}$$

$\Rightarrow c = \frac{2}{5},\ d = \frac{3}{5}$

Próxima aula:

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx = ?$$

"A aula passada

Exercício

Divisão com resto

Porquê?

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}\,dx = ?$$

números

$$\frac{x^2}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + C$$

polinômio

Divisão com resto $\frac{A}{B} = ?$

$\frac{A}{B} = C$?

$A = BC$?

$A = BC + R$

$(x-2)(x+3) = x^2+x-6$

$x^2 = Q(x^2+x-6) + R$

$$\frac{x^2+0x+0}{x^2+x-6} = ?$$

(Exemplo ruim!)

Exemplo/
Exercício/
Problema

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-6}\,dx = ?$$

$$= \int x-1+\frac{8/5}{x-2}+\frac{27/5}{x+3}\,dx = \frac{x^2}{2}-x+\frac{8}{5}\ln|x-2| + \frac{27}{5}\ln|x+3|$$

[illegible]

Exercícios:

a) $\int \frac{6x+7}{(x-2)^2}\,dx = ?$

b) Encontre a relação entre $A, B, C, D, E, \dots$ em

$$\frac{\boxed{A|B|C}}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{x+3}.$$

Dica aqui a: com a substituição $u = x-2$ a gente não precisa resolver sistema nenhum!

a) $$\int \frac{6x+7}{(x-2)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x-2 \\ x = u+2 \\ dx = du \end{array}\right] = \int \frac{6(u+2)+7}{u^2}\,du$$

$$= \int \frac{6u+12+7}{u^2}\,du$$

$$= \int \frac{6}{u} + \frac{19}{u^2}\,du = 6\ln|u| + 19\frac{u^{-1}}{-1}$$

$$= 6\ln|u| - \frac{19}{u}$$

$$= 6\ln|x-2| - \frac{19}{x-2}$$

b) $$\frac{D}{x-2} = \frac{D(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-2)(x+3)} = \frac{D\,\boxed{1|1|-6}}{(x-2)^2(x+3)}$$

$$\frac{E}{(x-2)^2} = \frac{E(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{E\,\boxed{0|1|3}}{(x-2)^2(x+3)}$$

$$\frac{F}{x+3} = \frac{F(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{F\,\boxed{1|-4|4}}{(x-2)^2(x+3)}$$

$$D\,\boxed{1|1|-6} + E\,\boxed{0|1|3} + F\,\boxed{1|-4|4}$$

$$= \left[\, D+F \;\middle|\; D+E-4F \;\middle|\; -6D+3E+4F \,\right]$$

$$= \boxed{A|B|C}$$

Aviso: a gente tá vez em [illegible] pra resolver esses sistemas, no caso [illegible] ([illegible])

C 27/07/2017

E quando a gente tem raízes complexas?

Exemplo mais simples:

$$\int \frac{1}{(x+i)(x-i)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}\,dx = A \ln|x+i| + B \ln|x-i| \ !!$$

Vamos resolver

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ? =$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = ?$$

Depois, com substituição trigonométrica.

Método de Heaviside (introdução)

Obs.: técnica geral é nada óbvia!

Exemplo (grau 3):

$$\int \frac{\overbrace{dx^2+ex+f}^{P(x)}}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx =$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$\underbrace{\frac{(x-a)P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{(x-a)A}{x-a} + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}}_{g(x)}$$

$f(x)$ não está definida para $x=a$ e ela dá ∞ em $x=b$ e $x=c$...

$g(x)$ idem.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = A+0+0$$

C2 2/out/2017

Hoje: método de Heaviside, e talvez introdução à substituição trigonométrica!

Método de Heaviside

Digamos que sabemos $a,b,c \in \mathbb{R}$, e $p(x)$ é um polinômio de grau ≤ 2 — e queremos descobrir $A,B,C \in \mathbb{R}$ em:

$$\underbrace{\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}}_{g(x)}$$

Truque:

$$f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow (x-a)f(x)=(x-a)g(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(x-a)f(x) = \lim_{x\to a}(x-a)g(x)$$
$$\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)} \qquad\qquad A$$

Como é que entende/decora/acredita nesse método e nessa fórmula?

Comece com casos nos quais a gente sabe A,B,C!

P.ex:

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{10}{x-5} = \frac{p(x)}{(x-2)(x+3)(x-5)} = \frac{13x^2-6x-55}{(x-2)(x+3)(x-5)}$$

Sejam: $p(x)=13x^2-6x-55$, $a=2$, $b=-3$, $c=5$

Digamos que queremos encontrar A,B,C em:

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}.$$

Calcule-os pelo método de Heaviside.

Substituição trigonométrica

Lembrem que a gente sabe integrar expressões com senos e cossenos...

P.ex.: $\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta\,dx$

Agora vamos ver como integrar expressões com x e $\sqrt{1-x^2}$...

Por exemplo: $\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^{\,\beta}\,dx$

Lembre que eu mostrei que eu tinha várias "variáveis preferidas":

$s = \operatorname{sen}\theta$
$c = \cos\theta$
$E = e^{i\theta}$

Vamos introduzir mais duas:

$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

(mas só vamos usá-las pras outras duas versões de substituição trigonométrica: $\int x^\alpha \sqrt{1+x^2}\,dx$, $\int x^\alpha\sqrt{x^2-1}\,dx$)

Truque (versão 1):

$$\int \underbrace{x^\alpha}_{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha} \underbrace{\sqrt{1-x^2}^{\,\beta}}_{((\cos\theta)^\beta)}\,\underbrace{dx}_{?}$$

$x \to \operatorname{sen}\theta$, $x^2 \to (\operatorname{sen}\theta)^2$, $1-x^2 \to (\cos\theta)^2$, $\sqrt{1-x^2} \to \cos\theta$

Eu prefiro usar "s" ao invés de "x"...

$$\int \underbrace{s^\alpha}_{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha} \underbrace{\sqrt{1-s^2}^{\,\beta}}_{(\cos\theta)^\beta}\,\underbrace{ds}_{?} = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\,d\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \end{array}\right]$$

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta \cos\theta\,d\theta$$

Exercício:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int \operatorname{sen}\theta(\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2\,\underbrace{\operatorname{sen}\theta\,d\theta} = \int c^2(-1)\,dc = -\int c^2\,dc = -\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos\theta)^3}{3}$$

$$= -\frac{(\cos(\operatorname{arcsen} s))^3}{3}$$

Relembrando:

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^5\,d\theta =$$
$$\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^4\cos\theta\,d\theta =$$
$$\int s^3\,(1-s^2)^2\,ds$$

Substituições úteis:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta \to s \\ (\cos\theta)^2 \to 1-s^2 \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ \cos\theta\,d\theta \to ds \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{l} \cos\theta \to c \\ (\operatorname{sen}\theta)^2 \to \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$$

Uma das várias coisas que a gente vai ver depois é como simplificar $\cos(\operatorname{arcsen} s)$ e coisas assim...

Como é que a gente se vira com isto?

$$\int x^\alpha\sqrt{4-9x^2}^{\,\beta}\,dx = ?$$

Dicas: $\sqrt{4w} = \sqrt{4}\sqrt{w} = 2\sqrt{w}$

$x = ku$ ou $u = kx$

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4(1-\tfrac{9}{4}x^2)} = 2\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} = 2\sqrt{1-(\tfrac{3}{2})^2x^2} = 2\sqrt{1-(\underbrace{\tfrac{3}{2}x}_{s})^2} = 2\sqrt{1-s^2}$$

Exercício:

$$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx = \left[s = \tfrac{3}{2}x\right.$$

$\boxed{\text{C2 2/OUT/2017}}$

$$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx = ?$$

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4}\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2}$$
$$= 2\sqrt{1-(\underbrace{\tfrac{3}{2}x}_{s})^2}$$
$$= 2\sqrt{1-s^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} s=\frac{3}{2}x \\ x=\frac{2}{3}s \\ dx=\frac{2}{3}ds \\ \sqrt{4-9x^2}\to 2\sqrt{1-s^2} \end{array}\right]$$

$$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx =$$
$$\int \tfrac{2}{3}s\cdot 2\sqrt{1-s^2}\cdot\tfrac{2}{3}ds$$

$$\int x^2\sqrt{25-16x^2}^{\,3}dx = ?$$

E SE A GENTE FIZER ESTE TRUQUE "AO CONTRÁRIO"?

POR EXEMPLO, $s=8x$...

$$\sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-(8x)^2}$$
$$= \sqrt{1-64x^2}$$
$$100\sqrt{1-64x^2} = \sqrt{10}\sqrt{1-64x^2}$$
$$= \sqrt{10-640x^2}$$

E SE A GENTE FIZER $s=2+3x$?

ALIÁS, $s=a+bx$?

$$\sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-(a+bx)^2}$$
$$= \sqrt{1-(a^2+2abx+b^2x^2)}$$
$$= \sqrt{\underbrace{(1-a^2)}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{2ab}_{\in\mathbb{R}}x - \underbrace{b^2}_{\in\mathbb{R}}x^2}$$

SE A GENTE FIZER $s=a+bx$ A GENTE CONSEGUE RESOLVER ALGUNS CASOS COM RAÍZES DESTA FORMA:

$$\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}$$

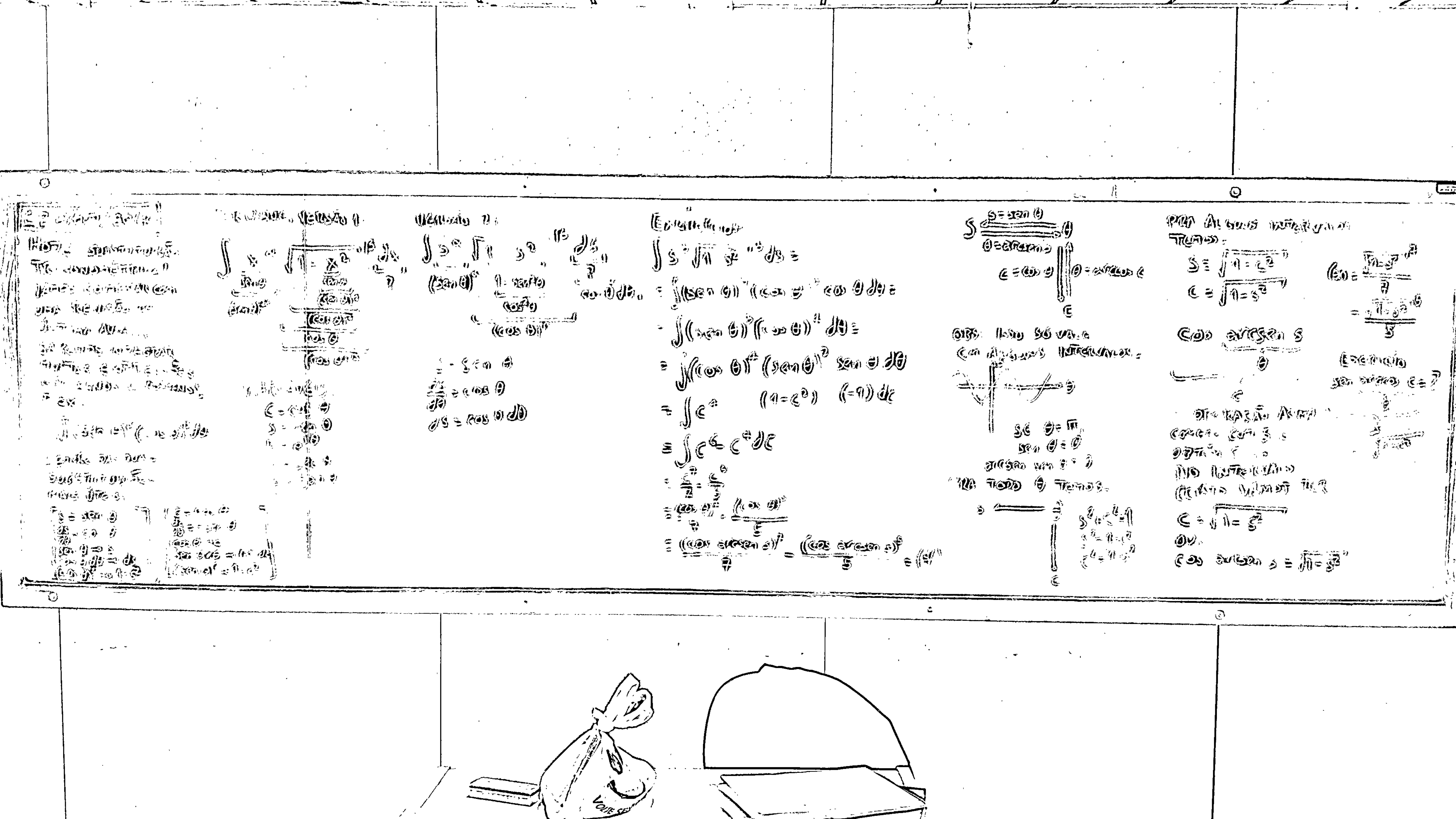
($\in \alpha$)

QUAIS SÃO OS a E b ADEQUADOS PRA RESOLVER ISTO?

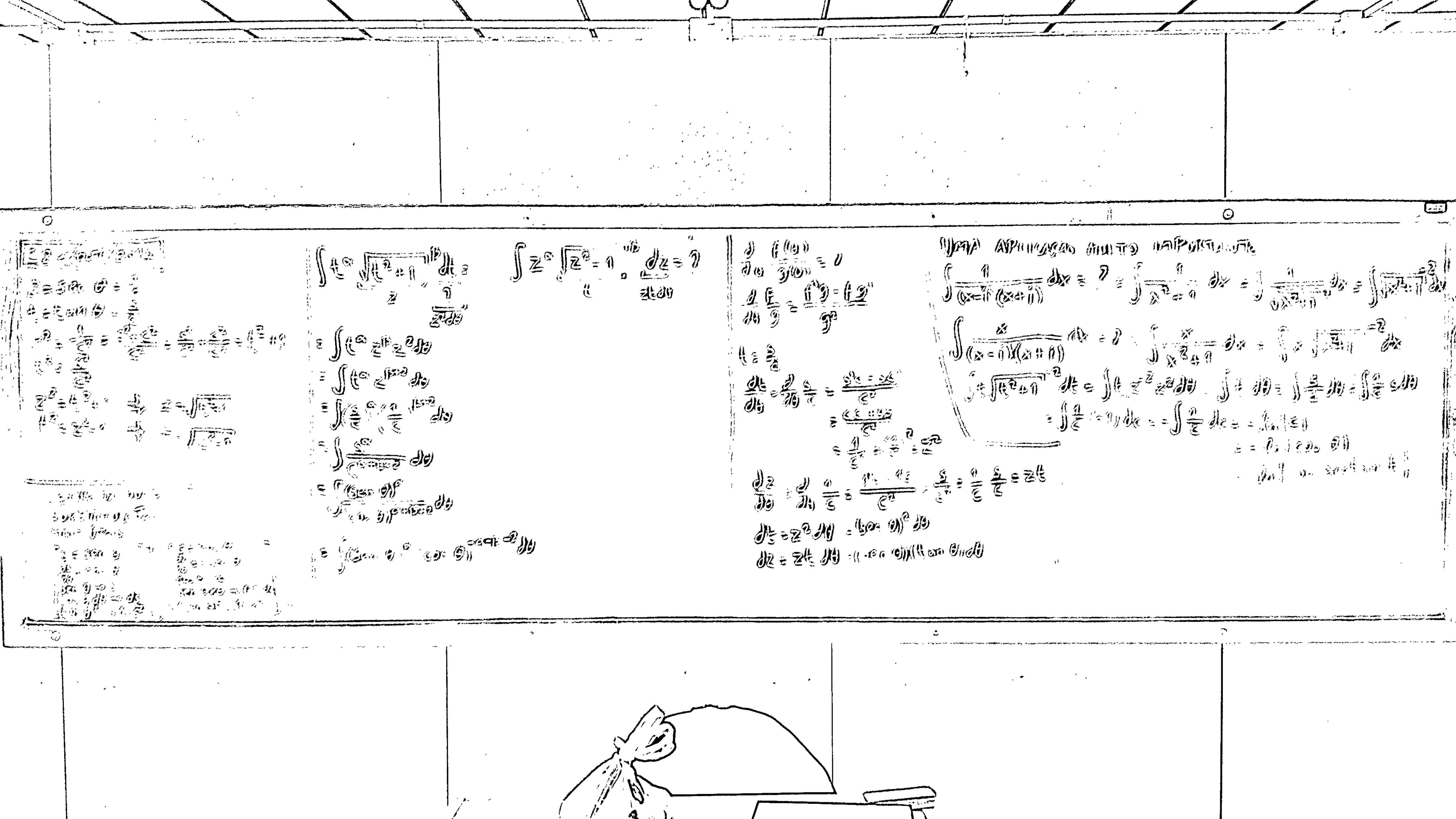
$s=a+bx$

$$\sqrt{1-s^2} = \sqrt{\alpha+\underbrace{\beta}_{-2ab}x-\underbrace{9}_{b^2}x^2}\ ?$$

SE $b=3$,
$$\beta = -2ab$$
$$= -2a\cdot 3$$
$$= -6a$$
$$a = -\frac{\beta}{6}$$
$$\alpha = 1-a^2 = 1-\left(-\frac{\beta}{6}\right)^2$$
$$= 1-\frac{\beta^2}{36}$$



Exemplo
= ∫((cos θ)⁴ (sen θ)² sen θ dθ
= ∫ c⁶ c⁴ dc


UMA APLICAÇÃO MUITO IMPORTANTE

C2 9/out/2017

Na última aula a gente viu como fazer os outros tipos de substituições trigonométricas...

$t = \tan\theta = \frac{s}{c}$

$z = \sec\theta = \frac{1}{c}$

$t^2+1 = \frac{s^2}{c^2}+\frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$z = \sqrt{t^2+1}$

$t = \sqrt{z^2-1}$

$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1'c-1c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = zt$

$dt = z^2 d\theta$

$dz = zt\,d\theta$

$\int t^\alpha \sqrt{t^2+1}^\beta dt = \int t^\alpha z^\beta z^2 d\theta$

$\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^\beta dz = \int z^\alpha t^\beta zt\,d\theta$

(Fiquei devendo mostrar como simplificar cos arctan t)

Exercícios do fim da aula passada:

$\int \frac{1}{(x+i)(x-i)} dx = ?$

$\int \frac{x}{(x+i)(x-i)} dx = ?$

"

$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{t}{t^2+1} dt \quad [t=x]$

$= \int t \sqrt{t^2+1}^{-2} dt$

$= \int t z^{-2} z^2 d\theta$

$= \int t\, d\theta$

$= \int \frac{s}{c} d\theta$

$= \int \frac{1}{c} s\, d\theta$

$= \int \frac{1}{c}(-1)\, dc$

$= -\int \frac{1}{c} dc$

$= -\ln|c|$

$= -\ln|\cos\theta|$

$= -\ln|\cos\arctan t|$

$= -\ln|\cos\arctan x|$

Variáveis:

$c = \cos\theta \qquad \theta = \arccos c$

$t = \tan\theta \qquad \theta = \arctan t$

$\underbrace{\cos \underbrace{\arctan t}_{\theta}}_{c}$

Qual é a relação entre t e c? Como calcular um a partir do outro?

$\boxed{t^2+1 = \frac{1}{c^2}} = z^2$

$t^2 = \frac{1}{c^2} - 1$

$\boxed{t = \sqrt{\frac{1}{c^2}-1}}$

$\frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{1/c^2} = c^2$

$c^2 = \frac{1}{t^2+1}$

$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{t^2+1}}}$

$\cos\arctan t = c = \sqrt{\frac{1}{t^2+1}}$

Hoje (resto da aula):

A gente vai combinar todos os métodos de integração.

Próximas aulas:

Vamos rever os TFCs e vamos aprender a lidar com funções estranhas, p.ex., funções definidas por casos;

- integrais impróprias, p.ex., $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$;

aplicações, p.ex. usar integrais pra calcular áreas (fácil) e volumes (principalmente de sólidos de revolução).

E provavelmente: diferenciais, derivação implícita.

Oops, faltou!

Como lidar com $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, $\sqrt{b^2x^2-a^2}$?

Que substituição a gente usa pra converter...

① $\sqrt{a^2+b^2x^2} \to K\sqrt{1+u^2}$

② $\sqrt{a^2-b^2x^2} \to K\sqrt{1-u^2}$

③ $\sqrt{b^2x^2-a^2} \to K\sqrt{u^2-1}$

② $\sqrt{a^2-b^2x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}$ (se $a \geq 0$)

$= a\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}$ $[u = \frac{b}{a}x]$

$= a\sqrt{1-u^2}$

Exercícios (Stewart, p.336):

16) $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = ?$ Se $u=\sqrt{x}$ então...

22) $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2} dx = ?$ Se $u = \frac{\pi}{x}$ então...

23) $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}} dz = ?$ Se $u = 1+z^3$ então...

47) $\int_{x=1}^{x=2} x\sqrt{x-1}\,dx = ?$ Se $u = x-1$ então... $x = u+1$, $du = dx$

75) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx =$

22) $u = \frac{\pi}{x} = \pi x^{-1}$

$\frac{du}{dx} = \pi(-1)x^{-2} = -\frac{\pi}{x^2}$

$du = -\frac{\pi}{x^2}dx$

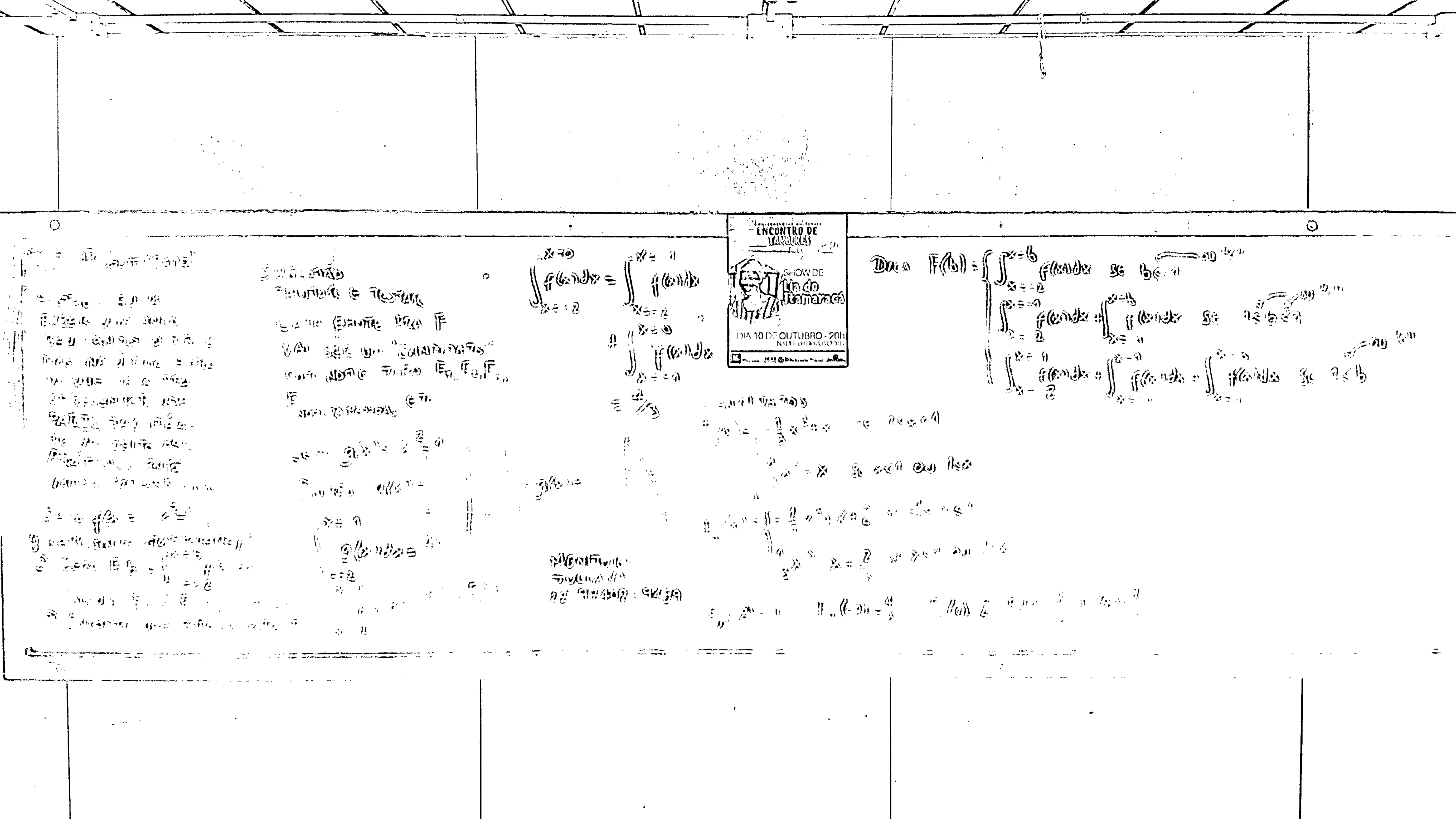
$-du = \frac{\pi}{x^2}dx$

$-\frac{du}{\pi} = \frac{dx}{x^2}$

$\frac{dx}{x^2} \to -\frac{1}{\pi}du$

47) $\ldots = \int (u+1)\sqrt{u}\,du = \int u\sqrt{u}\,du + \int 1\sqrt{u}\,du$

$= \int u^{3/2}du + \int u^{1/2}du$


ENCONTRO DE
TAMBORES
SHOW DE
Lia do
Itamaracá
DIA 10 DE OUTUBRO - 20h

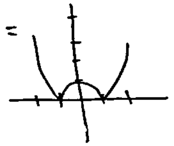
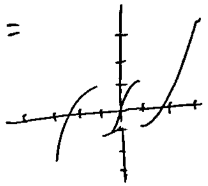
C2 16/out/2017

NA AULA PASSADA A GENTE VIU QUE NÃO DÁ PRA IR USANDO O TFC 2 DE QUALQUER JEITO...

$f(x) = |x^2 - 1|$

O GEOGEBRA DISSE QUE

$$\int f(x)\,dx = F_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x & \text{QUANDO } x \leq 1 \text{ E } 1 \leq x, \\ x - \frac{x^3}{3} & \text{QUANDO } 1 < x < x, \end{cases}$$

MAS $f(x) =$  , $F_1(x) =$ 

SÓ QUE ESSE $F_1(x)$ É DESCONTÍNUO! !!

MINI-REVISÃO DE TFC 2

(PRA GENTE NÃO SAIR CHUTANDO QUE $\int f(x)\,dx = F_1(x)$).

A GENTE VIU QUE

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underbrace{\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}_{\text{LIMITE DAS (SUP) SOMAS INFERIORES}} = \underbrace{\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}_{\text{LIMITE (INF) DAS SOMAS SUPERIORES}}$$

NEM SEMPRE É IGUAL! ESSA IGUALDADE VALE SE E SÓ SE f É "INTEGRÁVEL" EM $[a,b]$.

OBS: SEJA $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{SE } x \in \mathbb{Q}, \\ 4 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$\underline{\int}_{x=2}^{x=5} g(x)\,dx = ?$ $= 9$

$\overline{\int}_{x=2}^{x=5} g(x)\,dx = ?$ $= 12$

$\underline{\int}_{\{2,4,5\}} g(x)\,dx = ?$

$\overline{\int}_{\{2,4,5\}} g(x)\,dx = ?$

$\underline{\int}_{\{0,1,3,4\}} 4 - (x-2)^2\,dx = ?$

$\overline{\int}_{\{0,1,3,4\}} 4 - (x-2)^2\,dx = ?$

PROPRIEDADES DA $\int$ DEFINIDA

(STEWART, P.303):

1. $\int_{x=a}^{x=b} c\,dx = c(b-a)$
2. $\int_{x=a}^{x=b} f(x) + g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$
3. $\int_{x=a}^{x=b} c\,f(x)\,dx = c \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$
4. $\int_{x=a}^{x=b} f(x) - g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$
5. $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$

PROPRIEDADES DE COMPARAÇÃO (P.305)

6. SE $f(x) \geq 0$ PARA $a \leq x \leq b$ ENTÃO $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \geq 0$
7. SE $f(x) \geq g(x)$ PARA $a \leq x \leq b$ ENTÃO $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \geq \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$
8. SE $m \leq f(x) \leq M$ PARA $a \leq x \leq b$ ENTÃO $m(b-a) \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$

1 EXERCÍCIO:

DIGAMOS QUE:

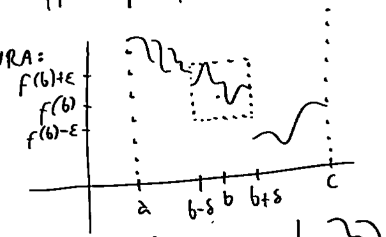
$a \leq b \leq c$,

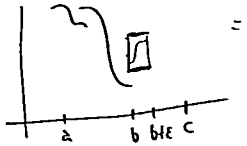
$f: [a,c] \to \mathbb{R}$ INTEGRÁVEL,

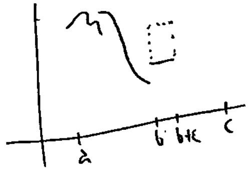
NÃO NECESSARIAMENTE CONTÍNUA,

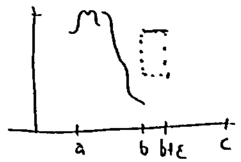
MAS f É CONTÍNUA EM b,

OU SEJA, $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$
$\forall x \in (b-\delta, b+\delta)$
$|f(x) - f(b)| \leq \varepsilon$

FIGURA: 

1a) $\int_{x=a}^{x=b+\varepsilon} f(x)\,dx =$  $=$

$\underline{\int}_{x=a}^{x=b+\varepsilon} f(x)\,dx \geq$ 

$\overline{\int}_{x=a}^{x=b+\varepsilon} f(x)\,dx \leq$ 

C2 16/out/2017

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + m\delta \le \int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + M\delta$$

$$\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx + (f(b)-\varepsilon).\delta \le$$

$$\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx \le$$

$$\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx + (f(b)+\varepsilon).\delta$$

1d) $\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ge$

1e) $\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \le$

1f) $\left| \int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \right| \le$

Def: $F : [a,c] \to \mathbb{R}$

$b \mapsto \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

F está definida, não dá erro...

1b) $F(b+\delta) \ge F(b) + (f(b)-\varepsilon)\cdot\delta$

1c) $F(b+\delta) \le F(b) + (f(b)+\varepsilon)\cdot\delta$

$F(b+\delta) - F(b) \ge (f(b)-\varepsilon)\cdot\delta$

$F(b+\delta) - F(b) \le (f(b)+\varepsilon)\cdot\delta$

$$\frac{F(b+\delta)-F(b)}{\delta} \ge f(b)-\varepsilon$$

$$\frac{F(b+\delta)-F(b)}{\delta} \le f(b)+\varepsilon$$

$$\frac{F(b+\delta)-F(b)}{\delta} - f(b) \le \varepsilon$$

$$\frac{F(b+\delta)-F(b)}{\delta} - f(b) \ge -\varepsilon$$

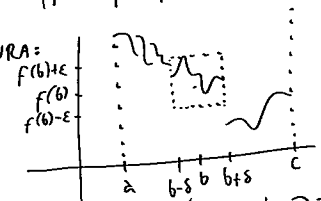
$$\left|\frac{F(b+\delta)-F(b)}{\delta} - f(b)\right| \le \varepsilon$$

$F'(b) = f(b)$

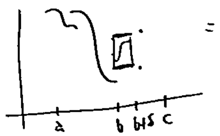
① Exercício:

Digamos que:
$a \le b \le c$,
$f : [a,c] \to \mathbb{R}$ integrável,
não necessariamente contínua,
mas f é contínua em b,
ou seja, $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$
$\forall x \in (b-\delta, b+\delta)$
$|f(x) - f(b)| \le \varepsilon$

Figura:

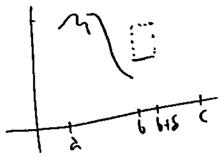


(1a) $\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx =$



=

(1b) $\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx \ge$



$= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \overbrace{\int_{x=b}^{x=b+\delta} m\,dx}^{m((b+\delta)-b)=m\delta}$

(1c) $\int_{x=a}^{x=b+\delta} f(x)\,dx \le$

$= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=b+\delta} M\,dx$

[illegible]

- [illegible] da integral [illegible]
- Um pouco mais sobre [illegible]
- [illegible]

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Lembre que f é limitada se $\sup_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$.

[illegible]

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0,\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ não limitada "por cima", i.e., $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = +\infty$...

Vamos construir $c_1, c_2, c_3, \ldots \in [a,b]$ da seguinte forma:

c_1 vai ser algum ponto de $[a,b]$ tal que $f(c_1) > 1000$.

Seja $c_2 \in [a,b]$ tal que $f(c_2) > f(c_1)$

c_3 com $f(c_3) > f(c_2)$, etc.

Seja $P \subset [a,b]$ uma partição de $[a,b]$.

Então $a, b \in P$ e P é finito.

Seja $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$.

O conjunto C é infinito e $C\setminus P$ também.

Olhe para os intervalos de P (existem só finitos subintervalos!)

Pra cada subintervalo, (a_i, b_i), podemos tentar contar quantos pontos tem $(C\setminus P)\cap(a_i,b_i)$.

Se todos os "$(C\setminus P)\cap(a_i,b_i)$"s forem finitos, então $C\setminus P$ é finito!

Não dá!

Contradição

Seja i tal que $(C\setminus P)\cap(a_i,b_i)$ é infinito...

E $\overline{\int_P} f(x)\,dx = ?$

$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{|P|-1} \sup_{x\in(a_i,b_i)} (b_i - a_i) = +\infty$

$= +\infty$

Isso vale pra qualquer partição P de $[a,b]$.

(Pulque partição tem que dividir $[a,b]$ em finitos intervalos)

Então o tipo de integral que a gente vem usando não vai ser bom pra integrar funções ilimitadas.

[illegible] $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$ ou $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$ vão ser $+\infty$ ou $-\infty$.

[illegible]

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ [illegible] f é limitada se [illegible] $\in \mathbb{R}$ [illegible] $x \in [a,b]$, [illegible] $\in \mathbb{R}$ [illegible]

[illegible]

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ não limitada. Por exemplo, [illegible]

$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$...

Vamos construir $c_1, c_2, c_3, \ldots \in [a,b]$ da seguinte forma: c_1 vai ser algum ponto de $[a,b]$ tal que $f(c_1) > 1000$. Seja $c_2 \in [a,b]$ tal que $f(c_2) > f(c_1)$, c_3 com $f(c_3) > f(c_2)$, etc.

Seja $P \subset [a,b]$ uma partição de $[a,b]$. Então $a, b \in P$ e P é finito.

Seja $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$. O conjunto C é infinito e $C \setminus P$ também.

Olhe para os intervalos de P (existem só finitos subintervalos!).

Para cada subintervalo (a_i, b_i), podemos tentar contar quantos pontos tem $(C \setminus P) \cap (a_i, b_i)$.

Se todos os "$(C \setminus P) \cap (a_i, b_i)$" forem finitos, então $C \setminus P$ é finito! "Não dá" [illegible]

Seja i tal que $(C \setminus P) \cap (a_i, b_i)$ é infinito...

E $\overline{\int_P} f(x)\,dx = ?$

$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in (a_i, b_i)} f(x)(b_i - a_i) = +\infty$

$= +\infty$

Isto vale para qualquer partição P de $[a,b]$. [illegible] partição tem que [illegible] $[a,b]$ em finitos intervalos.

Então o tipo de integral que a gente vem usando não pode ser usado para integrais [illegible] [illegible] $\overline{\int} f(x)\,dx$ [illegible] $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ [illegible] $= \infty$

2 18/out/2017

Lembre que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots = 2$$

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq \frac{2}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq \frac{4}{8}}+\frac{1}{9}+\dots =$$

$1 \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} \geq \frac{1}{8}$, $\frac{1}{6} \geq \frac{1}{8}$, $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Algumas somas de números positivos dão $+\infty$, outras não..

Algumas integrais de funções positivas devem dar $+\infty$, outras devem dar algo finito.

Def (pode mudar depois!).

$$\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx.$$

Exercício.
Calcule:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=+\infty} e^{-x}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\ln x\,dx$ ⇐ (int. por partes)

Voltando à integração por partes...

e) $\displaystyle\int 1\cdot\ln x\,dx$

f) $\displaystyle\int x^n \ln x\,dx$

Def $\displaystyle\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ converge se $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{x=a}^{x=b} f(x) \in \mathbb{R}$

(o limite existe e não é nem $+\infty$ nem $-\infty$).

g) Descubra pra que valores de α

$$\int_{x=1}^{x=+\infty} x^{\alpha}\,dx$$

converge.

C2 30/OUT/2017

Lembre que
$$\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$
DEFINIÇÃO!

A gente diz que $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE quando o limite acima existe e dá um número real (isto é, não dá nem $+\infty$ nem $-\infty$), e a gente diz que $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE quando ela não converge.

Exercícios (Revisão): estas integrais convergem ou divergem?

a) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ ← DIVERGE

b) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ← CONVERGE

c) $\int_{x=0}^{x=+\infty} \text{sen}\,x\,dx$ ← DIVERGE

Hoje!
Critérios de comparação!
Obs!
O Stewart só discute um critério de comparação (p. 549)!
O livro da Cristiane Hernández discute vários na "Aula 15"!

c) $$\int_{x=0}^{x=+\infty} \text{sen}\,x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{x=0}^{x=b} \text{sen}\,x\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\cos x \Big|_{x=0}^{x=b}\right)$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \Big((-\cos b) - \underbrace{\underbrace{(-\underbrace{\cos 0}_{1})}_{-1}}_{+1}\Big)$$
$$= \lim_{b\to+\infty} (1-\cos b)$$
(...)

Problemas que a gente ainda não sabe resolver mas vai saber daqui a pouco:

d) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,x\,dx$

e) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}(1+\text{sen}\,x)\,dx$

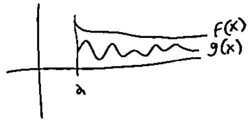
(Façam um esboço dos integrandos da (d) e da (e))

f) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}\,\text{sen}\,x\,dx$

g) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}(1+\text{sen}\,x)\,dx$

Primeiro teorema de comparação (Stewart, p. 549):
Suponha que $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ e $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ são contínuas e que $0 \le g(x) \le f(x)$ para $\underbrace{\text{x}}_{\text{todo}} \in [a,+\infty)$.

Idéia:



Então:

I) $\int_{x=a}^{x=+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE implica $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE;

II) $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE implica $\int_{x=a}^{x=+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE.

Defs: (temporária):
$$\text{sen}^+ x = \begin{cases} \text{sen}\,x & \text{quando } \text{sen}\,x \ge 0 \\ 0 & \text{quando } \text{sen}\,x \le 0 \end{cases}$$

$\text{sen}^+ x =$

$\text{sen}^- x =$

Dica pra (f): olhem pra $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}\,\text{sen}^+ x\,dx$ e $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x}\,\text{sen}^- x\,dx$

Def (padrão): $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE se e só se $\int_{x=a}^{x=+\infty} |f(x)|\,dx$ CONVERGE.

Exercício:

h) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}|\text{sen}\,x|\,dx$ converge ou diverge? Ela converge absolutamente?

i) $\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,x\,dx$ converge absolutamente?

Segundo teorema de comparação (← mas não sei se ele tem esse nome!!):
Se $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ converge absolutamente então $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Defs (temporárias):
$$\text{pos}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{neg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \ge 0, \\ x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dem: se $\int_{x=a}^{x=+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, sejam $P(b) = \int_{x=a}^{x=b} \text{pos}(f(x))\,dx$, $N(b) = \int_{x=a}^{x=b} \text{neg}(f(x))\,dx$.
Então $\forall b \in [a,+\infty)$ temos $\int_{x=a}^{x=b} |f(x)|\,dx = P(b) + N(b)$
e $\int_{x=a}^{x=+\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{b\to+\infty} P(b) + \lim_{b\to+\infty} N(b)$

[illegible] /2016

Lembre que $\int f(x)\,dx$ [illegible] converge absolutamente se e só se $\int |f(x)|\,dx$ converge

[illegible]

Sejam $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$,

$F^+(b)=\int_{x=a}^{x=b} f^+(x)\,dx$,

$F^-(b)=\int_{x=a}^{x=b} f^-(x)\,dx$,

$A(b)=\int_{x=a}^{x=b} |f(x)|\,dx$

[illegible] =

Argumento de [illegible], [illegible] mostrar que [illegible] que convergem absolutamente convergem (no sentido usual)

$\int_{x=1}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge,

$\int_{x=1}^{x=+\infty} |\operatorname{sen} x|\,\frac{1}{x^2}\,dx$ converge

$\int_{x=1}^{x=+\infty} \left|\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x^2}\right|\,dx$ converge

$\int_{x=1}^{x=+\infty} \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$ converge absolutamente

Queremos ver que $\int_{x=1}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ converge

$\forall b\in[a,+\infty)$,

$A(b)=F^+(b)+F^-(b)$

$F(b)=F^+(b)-F^-(b)$

$A(b)$ é não-decrescente

Notação (só pra eu não ter que escrever os limites a toda hora):

$A(+\infty)=\lim_{b\to+\infty} A(b)$,

$F^+(+\infty)=\lim_{b\to+\infty} F^+(b)$,

$F^-(+\infty)=$

$F(+\infty)=$

$F^+(b)$ é não-decrescente

$F^-(b)$ é não-decrescente

Hip.: $\int f(x)\,dx$ converge absolutamente,

ou seja, $\int |f(x)|\,dx$ converge,

ou seja, $\lim_{b\to+\infty} A(b)\in\mathbb{R}$

$\lim_{b\to+\infty} A(b)=A(+\infty)$

Então $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in[a,+\infty)$

$\forall b\in[k,+\infty)\quad |A(b)-A(+\infty)|<\varepsilon$

$A(+\infty)-A(b)<\varepsilon$

$A(b)>A(+\infty)-\varepsilon$

$A(b)$

Se ... (decomposição)

Se f ... a soma de duas outras funções, ...

F^{+} ... $= F^{-}(b)$ ...

O que acontece a partir de K que a gente escolheu?

$\forall b > K$

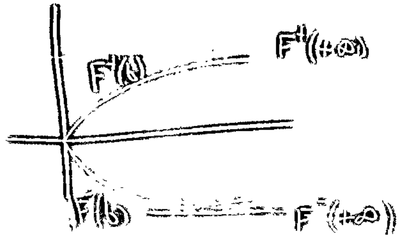
$F^{+}(b) \geq F^{+}(+\infty) - \varepsilon,$

$F^{-}(b) \geq - F^{-}(+\infty) - \varepsilon,$

Isso vale $\forall \varepsilon$ ($\forall \varepsilon \exists K$ etc)

... desenhos ...

$F(b) = F^{+}(b) + F^{-}(b)$



Qual é o comportamento de $F^{+}(b) + F^{-}(b)$?

$F(b)$

$\forall b > K$

$\left(F^{+}(b) + F^{-}(b) \right) = F(b)$

$F^{+}(b) + F^{-}(b) + \varphi$ onde $\varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

Com isso a gente garante que $\lim_{b \to +\infty} F(b)$ existe e é igual a $F^{+}(+\infty) + F^{-}(+\infty)$,

ou seja,

$\lim_{b \to +\infty} F(b) \in \mathbb{R}$

ou seja, $\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Isso termina o que a gente vai ver sobre integrais impróprias!

O que a gente não vai ver?

$\int_{x=-\infty}^{x=a} f(x)\,dx,$

$\lim_{b \to a^{+}} \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$

$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

Outros critérios de convergência (alternantes)

Próximo assunto: "Aplicações de integração"

1ª. ... área ... qual é a área da figura ... ?

Vamos ... (... ...).

22/04/2016

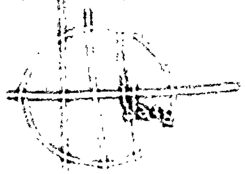
2ª Aplicação: Volume (por fatiamento)

Exemplo 1: Esfera

$x^2+y^2+z^2=1$

[illegible]

Fatias:



Qual é o volume da fatia da esfera entre $x=a$ e $x=a+\varepsilon$?

Se a fatia for fina, [illegible]

Se a fatia for bem fina,

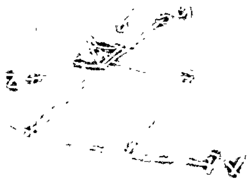
raio (quase constante) — quase cilindro

Área do disco

Exemplo 2:

Como a gente acha o volume da pirâmide?

Dizemos que $L(z)$ é o lado deste quadrado na altura z



A área desse quadrado é $A(z)=L(z)^2$.

Dizemos que $L(z)=1-z$.

O volume dela vai ser

$$\int_{z=0}^{z=1} A(z)\,dz = \frac{1}{3}$$

(= volume da pirâmide)

Um jeito de explicar porque é que isso dá $\frac{1}{3}$

três dessas com a mesma área

dá pra fazer a mesma coisa com pirâmides.

Podemos colocar o vértice no topo da pirâmide no ponto $(0,0,1)$. Os vértices da base vão ser $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$.

Essa pirâmide é $\frac{1}{3}$ do cubo

5ª 9/nov/2017

2ª aplicação: volumes (por fatiamento)

Exemplo 2:

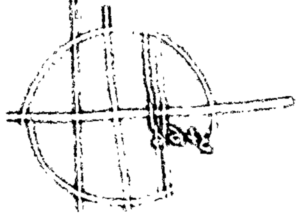
esfera:

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Alguns pontos extremos de E:

$(\pm 1, 0, 0)$, ...

Fatias:



Qual é o volume da fatia da esfera entre $x = a$ e $x = a + \varepsilon$?

Se a fatia for "fina", ...

Se a fatia for bem fina,

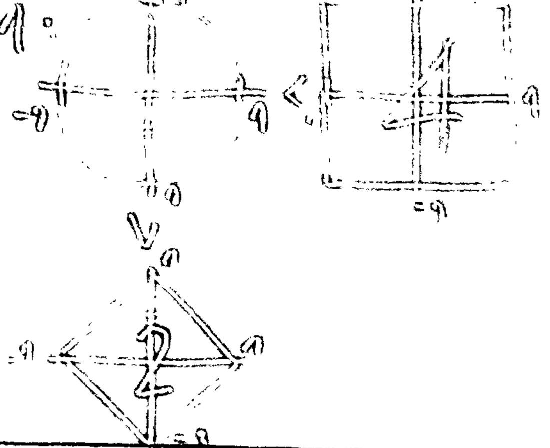
raio (quase direito)

quase horizontal

área desse disco?

=

Área do círculo de raio 1:



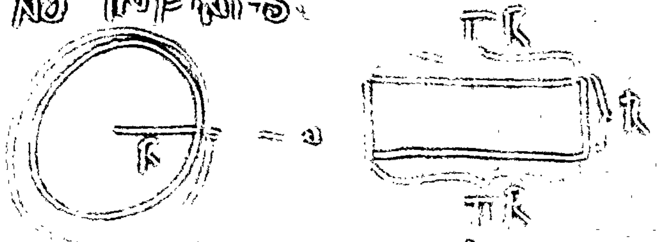
Pensem em pizza.

1/2 perímetro

raio

perímetro

No infinito:



$2\pi r$ área πr^2

$\boxed{\text{C2 6/nov/2017}}$

HOJE: REVISÃO DE ALGUMAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO E DOS PROBLEMAS DE ALGUMAS PROVAS ANTIGAS.

NA AULA QUE VEM NÓS VAMOS USAR NOTAÇÕES COMO ESTAS PRA DESCREVER SÓLIDOS DE ROTAÇÃO:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\ \sqrt{y^2+z^2}\le f(x)\},$$
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le y\le b,\ \sqrt{x^2+z^2}\le g(y)\},$$
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le z\le b,\ \sqrt{x^2+y^2}\le h(z)\}$$

LISTA DE 2010.2 DO GMA:

8) $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = ?$

FAÇAM UMA SUBSTITUIÇÃO DA FORMA $t=x+a$ QUE SIMPLIFIQUE A INTEGRAL ACIMA.

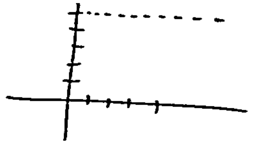
$$\int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = ?$$

$$\int \frac{\cos\theta}{4+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \left[\begin{matrix} c=\cos\theta \\ \vdots \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ \vdots \end{matrix}\right]$$

SEJA $f(x)=5$.

$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

$\lim_{x\to 2} a = a$



$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3} = \frac{A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

Prova 2017.1

4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x-5}\,dx \to \frac{x^2}{x^2+4x-5} = \frac{1/6}{x-1} + \frac{-25/6}{x+5} = \frac{ax+b}{(x-1)(x+5)}$

$$\int_1^6 \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$$

A notação sem "x":

$f'' + f' - 2f = 0$

[illegible]

[illegible] funções

[illegible]

Dizemos que [illegible]

[illegible]

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$

$f(2000), f(-99), f(1/2),$

$f(\pi)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(4f)(x) = 4 \cdot f(x)$

Notação

f' ou f''

$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$

Momento computação

Pra gente calcular $2x^2+4$, a gente precisa saber o valor do x (variável global).

Quando a gente calcula

$(2x^2+4)\Big|_{x=10}$

o x não é mais uma variável global

[illegible]

$f(x) = 2x^2+4$

[illegible]

$f(10) = 2 \cdot 10^2 + 4$

Como é a gente trabalha com funções nas quais o nome da variável não importa?

Notação λ:

$(\lambda x.\ 2x^2+4)$ é a função que quando recebe um valor, põe ele na variável local x, calcula $2x^2+4$ e retorna o resultado.

$(\lambda x.\ 2x^2+4)(10) =$

$(2x^2+4)\Big|_{x=10} =$

$2 \cdot 10^2 + 4 = 204$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

... uma função ...

... [illegible]

$$(\lambda v.\, 5)(4) = 5$$

$$(5)(4) \Rightarrow 5\,?$$

$$\Rightarrow 20\,?$$

[illegible]

Exemplos.

$$D(\lambda x.\, \text{sen}\, x) = (\lambda x.\, \tfrac{d}{dx}((\lambda a.\, \text{sen}\, a)(x)))$$

$$\text{sen}\, x$$

$$\cos x$$

$$D(\lambda a.\, \text{sen}\, a) = (\lambda x.\, \tfrac{d}{dx}((\lambda a.\, \text{sen}\, a)(x)))$$

$$\text{sen}\, x$$

$$\cos x$$

Exercícios.

$$D(\lambda x.\, x^3) = (\lambda x.\, 3x^2)$$

$$D(\lambda \theta.\, 2\theta + \text{sen}\, \theta) = (\lambda x.\, 2 + \cos x)$$

$$((\lambda x.\, 2x) + (\lambda x.\, 3x))(10) = 50$$

$$D(\lambda x.\, e^x) = (\lambda x.\, e^x)$$

$$D(\lambda x.\, e^{4x}) = (\lambda x.\, 4e^{4x})$$

$$(4(\lambda x.\, e^{4x}))(10) = 4e^{40}$$

$$(v + w)_i = v_i + w_i$$

$$(4v)_i = 4(v_i)$$

C2 27/nov/2017

LEMBREM QUE NA AULA PASSADA NÓS ESTÁVAMOS USANDO NOTAÇÃO λ PRA DISTINGUIR NÚMEROS DE FUNÇÕES...

$(\lambda x. x^3+2)(10) = 1002$

$(\lambda x. 4)(10) = 4$

E INVENTAMOS UM OPERADOR "D" QUE RECEBE UMA FUNÇÃO f E RETORNA f' (OUTRA FUNÇÃO).

FORMALMENTE,

$Df = (\lambda x. \frac{d}{dx}(f(x)))$

A EDO QUE ESTÁVAMOS USANDO COMO EXEMPLO ERA:

$$f'' + f' - 6f = 0 \qquad (\star)$$

$$\| $$

$$D(Df) + Df - 6f$$

LEMBREM QUE VAMOS INTERPRETAR FUNÇÕES COMO VETORES E D COMO UMA MATRIZ...

REPARE QUE $-6f$ É UMA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO POR VETOR... $(kv)_i = k(v_i)$

$(kf)(x) = k(f(x))$

REPARE QUE

$$-6f = (-6)\underset{\text{MATRIZ IDENTIDADE}}{I} f$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (-6)I = \begin{pmatrix} -6 & & & & \\ & -6 & & & \\ & & -6 & & \\ & & & -6 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$D(Df) + Df - 6f = 0$$

$$\|$$

$$(DD)f + Df + ((-6)I)f$$

$$\|$$

$$\underbrace{(DD + D + (-6I))}_{\text{MATRIZ! (DUH.00! !!) TRANSFORMAÇÃO LINEAR!}} f$$

SEJA $M = (DD + D - 6I)$.

O PROBLEMA $(\star)$ É EQUIVALENTE A $Mf = 0$...

SE TEMOS DUAS SOLUÇÕES DISTO,

$Mf_1 = 0$ E $Mf_2 = 0$

ENTÃO

$M(f_1 + f_2) = 0$,

$M(99 f_1 + 200 f_2) = 0$.

PODEMOS PENSAR QUE $\{f \mid Mf = 0\}$ É UM ESPAÇO VETORIAL, E PODEMOS TENTAR ENCONTRAR UMA BASE PRA ELE...

LEMBREM QUE

$D(\lambda x. e^{ax}) =$

$DD(\lambda x. e^{ax}) =$

$(DD + D - 6I)(\lambda x. e^{ax}) =$

$(\lambda x. a^2 e^{ax} + a e^{ax} - 6e^{ax}) =$

$(\lambda x. (a^2 + a - 6)e^{ax}) =$

$(a^2 + a - 6)(\lambda x. e^{ax})$

PRA QUE VALORES DE a TEMOS $(a^2 + a - 6) = 0$?

$a = -3$,

$a = 2$.

$(a^2 + a - 6) = (a+3)(a-2)$

E... $\|$

$(DD + D - 6) = (D+3)(D-2)$

LEMBREM QUE QUANDO A E B SÃO MATRIZES EM GERAL $AB \neq BA$... MAS $(D+3)$ E $(D-2)$ COMUTAM!

$(D+3)(D-2) =$

$(D + (3I))(D + (-2I)) =$

$D(D + (-2I)) + (3I)(D + (-2I)) =$

$D^2 + D(-2I) + (3I)D + (3I)(-2I) =$

$D^2 - 2D + 3D - 6 =$

$D^2 + D - 6$

$(DD + D - 6) = (D+3)(D-2)$

$= (D-2)(D+3)$

LEMBRE QUE QUERÍAMOS

$(DD + D - 6)f = 0$...

PODEMOS PROCURAR AS SOLUÇÕES ÓBVIAS DE:

$(D+3)\underbrace{(D-2)f}_{0} = 0 \Rightarrow (D-2)f = 0$

$\|$

$f' - 2f$

$(D-2)\underbrace{(D+3)f}_{0} = 0$

QUAL É A SOLUÇÃO DISTO QUE É DA FORMA $f = (\lambda x. e^{ax})$?

$(D-2)(\lambda x. e^{ax}) = (\underset{2}{a}-2)(\lambda x. e^{ax})$

SOLUÇÃO:

$f = (\lambda x. e^{2x})$

QUAL É A SOLUÇÃO DE $(D+3)(\lambda x. e^{ax}) = (\lambda x. 0)$?

$(D+3)(\lambda x. e^{-3x}) = (\lambda x. -3e^{-3x} + 3e^{-3x})$

$= (\lambda x. 0)$.

...O QUE NOS LEVA A UM MÉTODO SUPER-RÁPIDO DE RESOLVER EDOs COMO A $(\star)$...

$$f'' + 2f' - 15f = 0 \qquad (\star\star)$$

$$\|$$

$$(D^2 + 2D - 15)f$$

$$\|$$

$$(D+3)(D-5)f$$

SOLUÇÕES ÓBVIAS:

$f_1 = (\lambda x. e^{-3x})$,

$f_2 = (\lambda x. e^{5x})$.

DEPOIS VAMOS DEMONSTRAR QUE OS ESPAÇOS DE SOLUÇÕES DE $(\star)$ E DA $(\star\star)$ TÊM DIMENSÃO 2, E AS "SOLUÇÕES ÓBVIAS" SÃO BASES PRA ESSES ESPAÇOS...

O QUE QUER QUE TODA SOLUÇÃO DE $(\star\star)$ É DA FORMA

$f = \alpha f_1 + \beta f_2$

PRA UM ÚNICO PAR (α, β).

EXERCÍCIO:

ENCONTRE UMA SOLUÇÃO f PRA $(\star\star)$ QUE OBEDEÇA: $f(0) = 1$,

$f'(0) = 0$.

EXERCÍCIO PRELIMINAR:

SUPONHA QUE $f = \alpha f_1 + \beta f_2$.

CALCULE $f(0)$, $f'(x)$, $f'(0)$.

$f_1(0) = e^{-3 \cdot 0} = 1$

$f_1(1) = e^{-3}$

$f(0) = \alpha e^{-3 \cdot 0} + \beta e^{5 \cdot 0} = \alpha + \beta$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\alpha e^{-3x} + \beta e^{5x})$

$= -3\alpha e^{-3x} + 5\beta e^{5x}$

$f'(0) = -3\alpha + 5\beta$

C2 27/nov/2017

$f(0) = \alpha + \beta$

$f'(0) = -3\alpha + 5\beta$

$f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 1,$

$\beta = 1 - \alpha,$

$-3\alpha + 5\beta = 0$

$\| $

$-3\alpha + 5(1-\alpha)$

$\|$

$-3\alpha + 5 - 5\alpha$

$\|$

$5 - 8\alpha$

$8\alpha = 5$

$\alpha = \frac{5}{8}$

$\beta = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow f = \frac{5}{8} f_1 + \frac{3}{8} f_2$

Outro exercício:

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0$

$\beta = -\alpha$

$-3\alpha + 5\beta = 1$

$\|$

-8α

$\alpha = -\frac{1}{8}, \ \beta = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow f = -\frac{1}{8} f_1 + \frac{1}{8} f_2$

Outro: $f(0) = 10, \ f'(0) = 200$

$\Rightarrow f = 10\left(\frac{5}{8} f_1 + \frac{3}{8} f_2\right) + 200\left(-\frac{1}{8} f_1 + \frac{1}{8} f_2\right)$

Dá pra gente fazer o contrário — a gente procurar uma EDO que tenha soluções e^{ax} e e^{bx}...

(Vou começar a omitir os "(x)"s de vez em quando)

$(D-a)e^{ax} = 0$

$(D-b)e^{bx} = 0$

$(D-a)(D-b)\ e^{ax} = 0$

$(D-a)(D-b)\ e^{bx} = 0$

$(D-a)(D-b)(\alpha e^{ax}) = 0$

$(D-a)(D-b)(\beta e^{bx}) = 0$

$(D-a)(D-b)(\alpha e^{ax} + \beta e^{bx}) = 0$

$(D-a)(D-b)(\alpha e^{ax} + \beta e^{bx})$

$\|$

$(D^2 - (a+b)D + ab)(\alpha e^{ax} + \beta e^{bx})$

Usem essa idéia pra encontrar EDOs da forma $f'' + cf' + df = 0$ que tenham estas soluções:

a) e^{4x}, e^{x}

b) e^{ix}, e^{-ix}.

a) Soluções: e^{4x}, e^{x}

EDO: $(D-4)(D-1)f = 0$

$\|$

$(D^2 - 5D + 4)f$

$\|$

$f'' - 5f' + 4f$

(ok)

b) Soluções: e^{ix}, e^{-ix}

EDO: $(D-i)(D+i)f = 0$

$\|$

$(D^2 - \cancel{iD} + \cancel{iD} - i \cdot i)f = 0$

$\|$

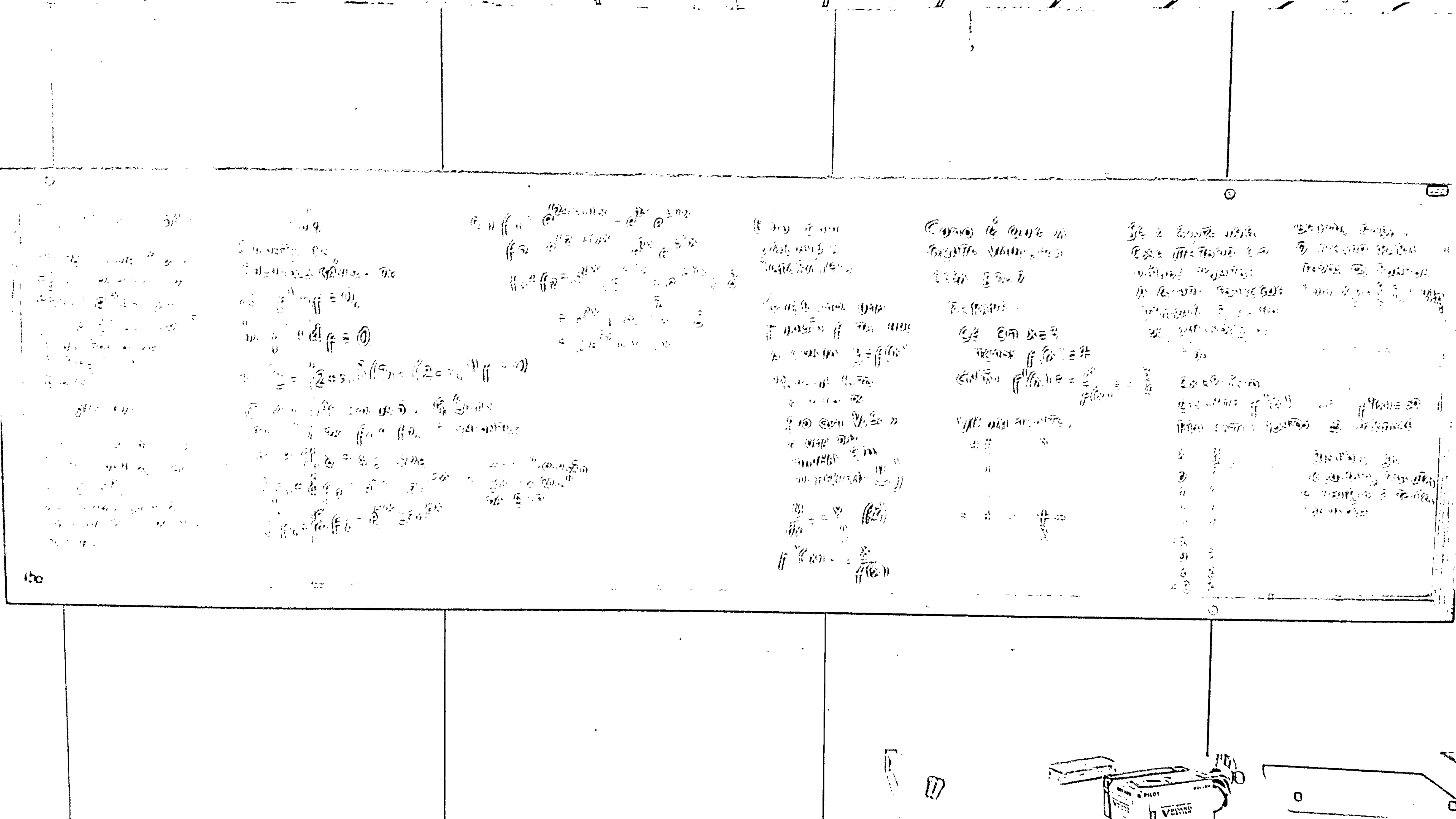
$(D^2 + 1)f = 0$

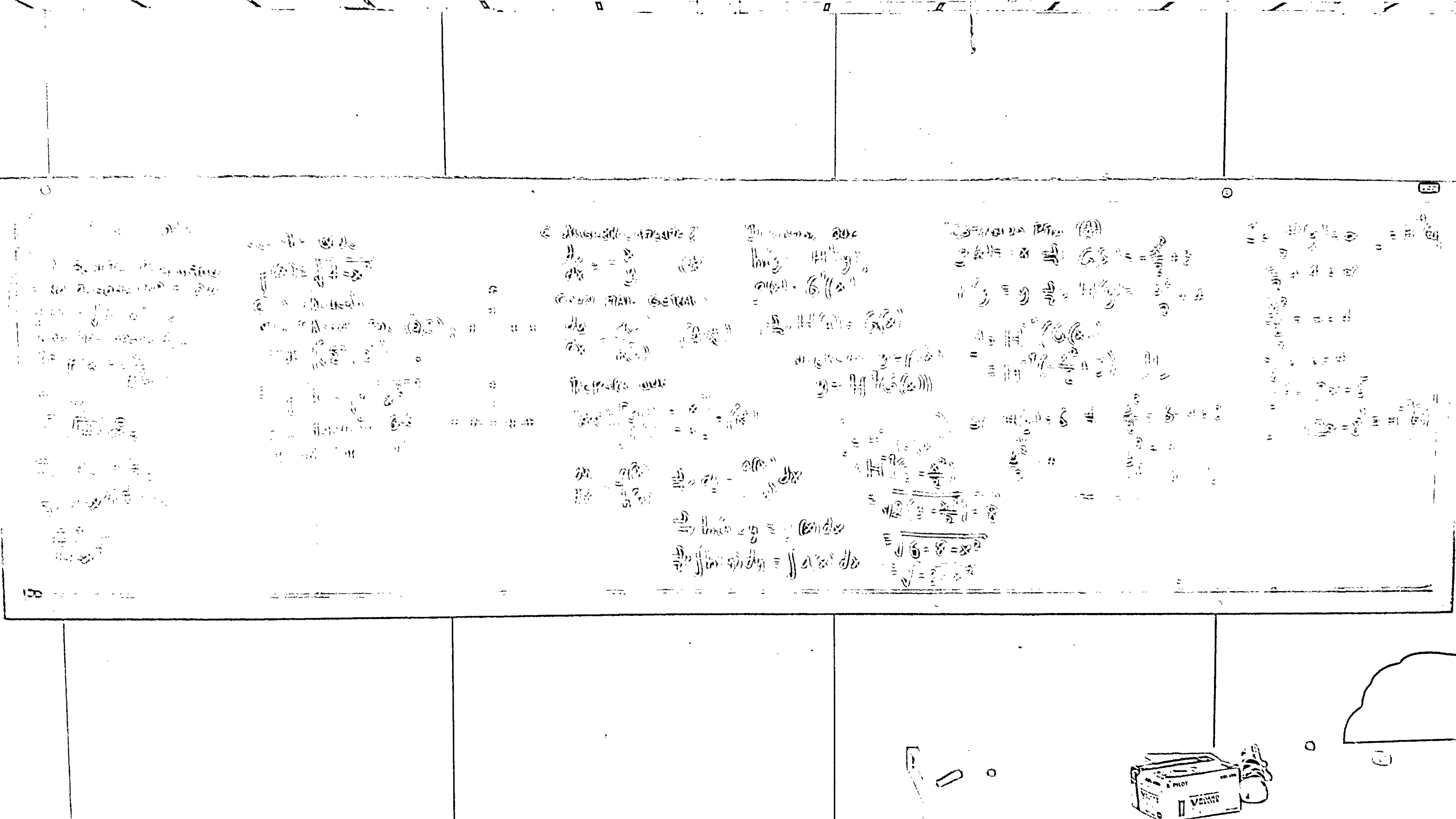
$f'' + f = 0$

$(D-i)(D+i)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) =$

$\|$

$(D^2 + 1)(\cos x)$





C2 4/DEZ/2017

... SE A GENTE VOLTAR A EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS A GENTE VAI REPARAR QUE AS SOLUÇÕES DELAS SÃO CURVAS DE NÍVEL DE FUNÇÕES DA FORMA $F(x,y) = G(x) - H(y)$...

HOJE A GENTE VAI VER ALGO MAIS GERAL: EDOS CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO $F(x,y)$ QUALQUER.

FIXE $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. COMO É QUE A GENTE CARACTERIZA AS CURVAS DE NÍVEL DA F?

IDÉIA: CHUTAR E TESTAR. CHUTE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E VAMOS VER SE $y=f(x)$ É UMA CURVA DE NÍVEL DA F.

REPARE: $F(x,f(x))$ TEM QUE PERMANECER CONSTANTE QUANDO A GENTE VARIA x...
... E PORTANTO $\frac{d}{dx} F(x,f(x)) = 0$.

COMO CALCULAR $\frac{d}{dx} F(x,f(x))$?
COMO CALCULAR $\frac{d}{dt} F(g(t),h(t))$?
USANDO DERIVADAS PARCIAIS! !! :)

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\, g'(t) + F_y(g(t),h(t))\, h'(t)$$

EXEMPLO: $F(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^2$

$$F_x(x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon,y) - F(x,y)}{\varepsilon}$$

OU SEJA, A GENTE VARIA O x MAS MANTÉM y FIXO.

$$F_x(x,y) = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2y - y^2) = 3x^2 + 4xy$$

$$F_y(x,y) = 2x^2 - 2y$$

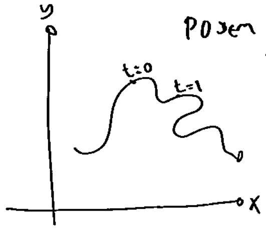
$$F_x(g(t),h(t)) = 3g(t)^2 + 4g(t)h(t)$$

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = (3g(t)^2 + 4g(t)h(t))\,g'(t) + (2g(t)^2 - 2h(t))\,h'(t)$$

A NOTAÇÃO PRA DERIVADAS PARCIAIS É "F_x", "F_y" OU: $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$.

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = \frac{\partial}{\partial x} F(g(t),h(t))\, g'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F(g(t),h(t))\, h'(t)$$

IMPORTANTE: "$\frac{d}{dx}$" E "$\frac{\partial}{\partial x}$" PODEM SER BEM DIFERENTES!...



$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,f(x)) \overbrace{\boxed{\frac{d}{dx} x}}^{=1} + \frac{\partial}{\partial y} F(x,f(x)) \overbrace{\boxed{\frac{d}{dx} f(x)}}^{=f'(x)}$$

$$\boxed{= F_x(x,f(x)) + F_y(x,f(x))\, f'(x)}$$

QUEREMOS $\frac{d}{dx} F(x,f(x)) = 0$!

EXERCÍCIO: CALCULAR $\frac{d}{dx} F(x,f(x))$ PARA $F(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^2$.

OBS: $\frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 f(x) - f(x)^2) = ?$

QUAIS SÃO OS JEITOS LEGAIS DE ESCREVER "$y=f(x)$ É UMA CURVA DE NÍVEL DE $F(x,y)$" COMO EDO?

① $\frac{d}{dx} F(x,f(x)) = 0$

② $F_x(x,f(x)) + F_y(x,f(x))\, f'(x) = 0$

③ $F_x(x,y) + F_y(x,y) \frac{dy}{dx} = 0$

④ $\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

⑤ $F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy = 0$

⑥ $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$

O JEITO ⑥ É UM JEITO ABSTRATO BONITO DE ENUNCIAR ESSA EDO...

REPARE: QUALQUER FUNÇÃO $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ INDUZ UMA EDO ⑥ $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA F.

EXEMPLO: SE $F(x,y) = x^2 + y^2$, QUAL É A EDO? ESCREVA-A NAS FORMAS ①...⑥.

DIGAMOS QUE ALGUÉM DÁ PRA GENTE UMA EDO DESTA FORMA:

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

(DIGAMOS QUE g E h SÃO POLIS EM x E y, PRA SIMPLIFICAR)

SE CONSEGUIMOS ENCONTRAR $F(x,y)$ TAL QUE

$$\underbrace{g(x,y)}_{F_x(x,y)} dx + \underbrace{h(x,y)}_{F_y(x,y)} dy =$$

ENTÃO SABEMOS RESOLVER A EDO... AS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA F.

MÉTODO: CHUTAR E TESTAR

EDO: $\underbrace{2xy^3}_{F_x} dx + \underbrace{3x^2y^2}_{F_y} dy = 0$ ⇐ $F(x,y) = x^2y^3$

a) ENCONTRE $F(x,y)$.

b) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO QUE PASSA PELO PONTO $(x,y) = (1,1)$.

RESP: A CURVA DE NÍVEL É: $\underbrace{F(x,y)}_{x^2y^3} = F(1,1) = 1$

$y^3 = \frac{1}{x^2}$, $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$.

$\boxed{\text{C2 4/DEZ/2017}}$

AS EDOS DA FORMA

$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$

SÃO CHAMADAS DE

"EDOS EXATAS".

NÓS SÓ VAMOS VER

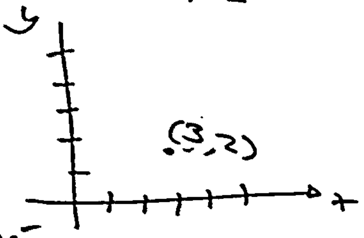
O CASO POLINOMIAL.

NOTAÇÃO DE CAIXINHAS 2D:

OBS: $\boxed{4}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{2}$ =

$4x^3+3x^2+2$

2D:



IDÉIA: NO PONTO (3,2)

(OBS: x=3, y=2) A GENTE

VAI PÔR O COEFICIENTE

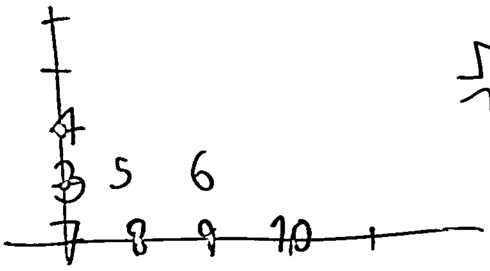
DE x^3y^2.

EXEMPLO: $4y^2 +$

$3y + 5xy + 6x^2y +$

$7 + 8x + 9x^2 + 10x^3$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

4			
3	5	6	
7	8	9	10

SE $F(x,y)$ =

4			
3	5	6	
7	8	9	10

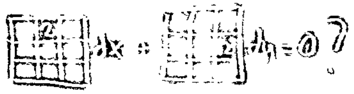
,

$F_x(x,y)$ =

5	12		
8	18	30	

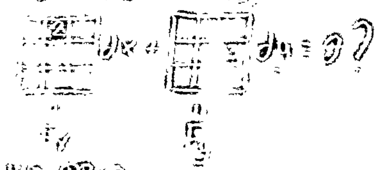
Problema 1

Quais são as soluções disto?



Problema 2

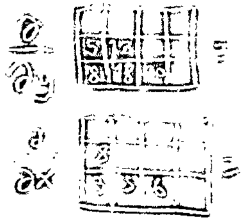
Quais são as soluções disto?



No problema 2 não dá pra gente usar o método que a gente conhece ... a gente precisa não exata

Teorema:

Pra qualquer $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suave = polinomial ou não = temos $F_{xy}=F_{yx}$.



Uma EDO exata é uma da forma

$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$,

ou, em outros termos, uma da forma

$G\,dx + H\,dy$ com $G_y = H_x$.

Uma EDO da forma

$G\,dx + H\,dy = 0$

que "não é exata", i.e., que não obedece $G_y = H_x$, não pode ser resolvida com as técnicas que a gente tem agora.

Dica: tentem fazer os exercícios [illegible] [illegible]