$\boxed{\text{GA 21/AGO/2017}}$

HOJE: INTRODUÇÃO!

PÁGINA DO CURSO:

PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PARA QUALQUER SUBPÁGINA DO http://angg.twu.net/ E CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA!

CHUTAR E TESTAR

QUAIS SÃO AS SOLUÇÕES DE

$$(x-2)(x+3)=0\ ?$$

TEM FOTOS DOS QUADROS!

NÓS VAMOS USAR ALGUNS OBJETOS MATEMÁTICOS QUE VOCÊS NUNCA VIRAM:

PONTOS E VETORES

PARECIDOS COM AS MATRIZES QUE VOCÊS VIRAM NO ENSINO MÉDIO, MAS...

... ANTES DA GENTE VER PONTOS E VETORES A GENTE VAI VÁRIAS NOTAÇÕES PRA CONSTRUIR CONJUNTOS...

PAGS 6 E 7: EXERCÍCIOS

PAG 8: GABARITO.

PAGS 4 E 5: EXPLICAÇÕES

$\boxed{\text{TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS!}}$

G1. 23/agosto/2017

Hoje: primeira aula de verdade! :)

Exercícios de conjuntos ("set comprehensions") no "material para exercícios" — tem link pra ele na página do curso.

Exercícios: pags 6 e 7.

Explicações, truques, etc: pags 4 e 5.

Gabarito: pag 8.

P.7:

$\{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$

$\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

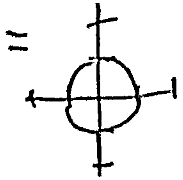
$\{1,2,3\}^2$

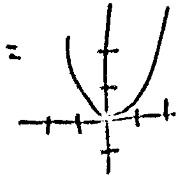
5) $P := \{(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\}$

O exercício 6 não tem gabarito !!

6) $L' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2\}$ ← Reta (um conjunto infinito de pontos!)

Exemplos (vamos ver depois):

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} =$ 

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\} =$ 

GA 28/AGO/2017

Hoje:

- Terminar os exercícios de construir conjuntos (inclusive os de conjuntos infinitos do exercício 6)
- Como provar que dois conjuntos são iguais? Como provar que eles são diferentes?
- Introdução a pontos e vetores e às operações sobre pontos e vetores
- Trajetórias

Dica:

Façam o 3B

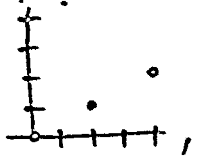
esta variação dele:

$B' := \{(x, x/2) \mid x \in \{0,1,2,3,4\}\}$

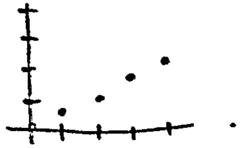
Façam o 5L:

$L := \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y = x/2\}$

E sejam:

$L' =$ 

$L' \not\ni (1, 1/2)$

$L'' =$ 

$L'' \ni (1, 1/2)$

Dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos pontos, e diferentes quando algum deles têm um ponto que o outro não tem.

Exemplos:

$\{2,3,3,4\} = \{2,3,4\}$

$\{0,1,2,3\} \neq \{0,1,2,4\}$

$\{0,1,2,3\} \ni 3$, $\{0,1,2,4\} \not\ni 3$

Mostre que os conjuntos L' e L'' à esquerda são diferentes — pra fazer isto <u>formalmente</u> você tem que mostrar que algum ponto (bem escolhido!) pertence a um deles e não a outro.

Obs: Se $x=0$,

$$\underbrace{(\underbrace{x}_{0}, \underbrace{2 - \underbrace{\underbrace{x}_{0}/2}_{0}}_{2})}_{(0,2)}$$

Se $x=1$,

$$\underbrace{(\underbrace{x}_{1}, \underbrace{2 - \underbrace{\underbrace{x}_{1}/2}_{0.5}}_{1.5})}_{(1,1.5)}$$

$x=3$ $\quad \frac{2-3}{2} \quad 4-3 = \frac{1}{2}$

GA /AGO/2017

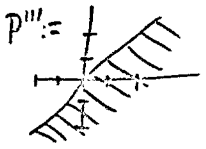
Exercício 6:

$P' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$

EXTRAS:

$P'' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$

$P''' :=$

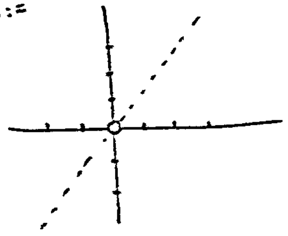


$(0,0) \in P'''$ (sim)

$P' \neq P''$

$(0,0) \in P'$, $(0,0) \notin P''$

$A :=$



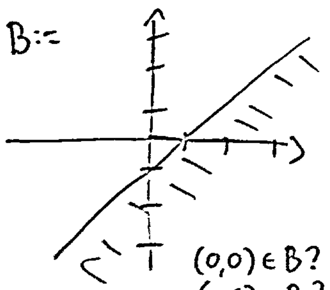
$(0,0) \in A$? ambíguo

$(1,0) \in A$? não

$(1,1) \in A$? ambíguo

$(0,1) \in A$? não

$B :=$



$(0,0) \in B$? não

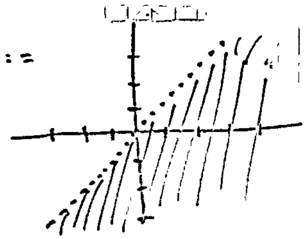
$(1,0) \in B$? sim

$(1,1) \in B$? não

$(0,1) \in B$? não

$(0.5, 0) \in B$? não

$P'' :=$



O conjunto tem todos os pontos abaixo da diagonal $y=x$ e não inclui a diagonal $y=x$.

$(0,0) \in P''$? não

$(1,0) \in P''$? sim

$(1,1) \in P''$? não

$(0,1) \in P''$? não

$(0.5,0) \in P''$? sim

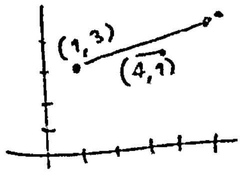
Pontos e vetores (introdução)

Depois a gente vai ver a interpretação gráfica...

Pra não ter ambiguidades a gente ver a interpretação algébrica primeiro e só depois a gente que ela corresponde a:

"Pontos" são pontos mesmo

"Vetores" são deslocamentos.



OBS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 340 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Façam os exercícios da p.9, usando a notação que indica que regra você está usando:

$$\underbrace{(2,3) + \underbrace{\left(\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}\right)}_{\substack{[\text{Regra 2}] \\ = \overrightarrow{(14,25)}}}}_{\substack{[\text{Regra 1}] \\ = (16,28)}}$$

$\boxed{\text{GA /AGO/2017}}$

... AGORA VAMOS VER UM MONTE DE COISAS QUE SÃO <u>CONSEQUÊNCIAS</u> DAS REGRAS 1 ATÉ 7.

SERÁ QUE ESSAS OPERAÇÕES NOVAS SÃO <u>COMUTATIVAS</u>?

EM MATRIZES $AB \neq BA$

ESSA NOTAÇÃO DIZ QUE SE A E B SÃO MATRIZES "$AB = BA$" É FALSA

OBS: "$AB = BA$ É VERDADEIRA" QUER DIZER "$AB = BA$ É VERDADEIRO <u>SEMPRE</u>."

"$AB \neq BA$" QUE NEM SEMPRE $AB = BA$.

PAG.10:

SERÁ QUE ESSAS PROPRIEDADES SÃO VERDADEIRAS QUANDO $A, B, C \in \mathbb{R}$?

$A \cdot B = B \cdot A$? SIM

$A + B = B + A$? SIM

$A - B = B - A$? NÃO.

<u>MÉTODOS PRA VER SE PROPRIEDADES VALEM</u>

1º MÉTODO: CHUTAR E TESTAR.

7)

C1) ( ) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

SE $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$,

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (2,3) + \overrightarrow{(4,5)} = (6,8)$

$\overrightarrow{(c,d)} + (a,b) = \overrightarrow{(4,5)} + (2,3) = \text{ERRO}$

REPARE: ENCONTRAMOS <u>UMA</u> SITUAÇÃO NA QUAL $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$...

("CONTRA-EXEMPLO")

BASTA UM CONTRA-EXEMPLO — NO CASO, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, PRA MOSTRAR QUE A AFIRMAÇÃO GERAL

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

É <u>FALSA</u>.

OU SEJA:

C1) (F) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

DEMONSTRAÇÃO:

SE $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$

ENTÃO $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (6,8)$ $\neq$ $\overrightarrow{(c,d)} + (a,b) = \text{ERRO}$

Avisos:

- Meu computador quebrou
- Não deu tp eu digitar (nem imprimir) coisas novas
- Vamos fazer as coisas numa ordem um pouco diferente da das folhas

Introdução à representação gráfica de pontos e vetores

Lembre que a regra 1 era:

$$\underbrace{(a,b)}_{\text{ponto}} + \underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{\text{vetor}} = \underbrace{(a+c,\, b+d)}_{\text{ponto}}$$

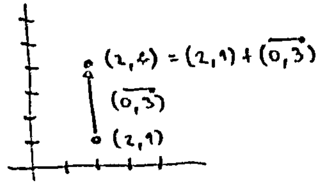
Aviso:

A matéria é grande demais - e não vai dar tempo da gente aprender a escrever direito argumentos gráficos - a gente só vai ter tempo de ver as técnicas pra desugar argumentos algébricos.

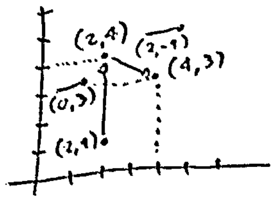
Vetores são deslocamentos (setas).

Exemplo:

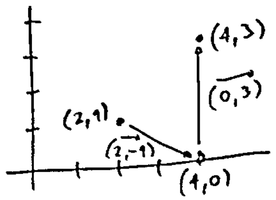
$$(2,1) + \overrightarrow{(0,3)} = (2,4)$$



$$\underbrace{\underbrace{((2,1)+\overrightarrow{(0,3)})}_{(2,4)} + \overrightarrow{(2,-1)}}_{(4,3)}$$

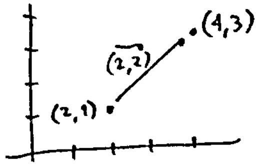


$$\underbrace{\underbrace{((2,1)+\overrightarrow{(2,-1)})}_{(4,0)} + \overrightarrow{(0,3)}}_{(4,3)}$$

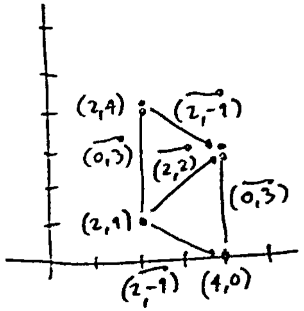


$$\underbrace{(2,1) + \underbrace{(\overrightarrow{(2,-1)} + \overrightarrow{(0,3)})}_{\overrightarrow{(2,2)}}}_{(4,3)}$$

$$\underbrace{(2,1) + \underbrace{(\overrightarrow{(0,3)} + \overrightarrow{(2,-1)})}_{\overrightarrow{(2,2)}}}_{(4,3)}$$



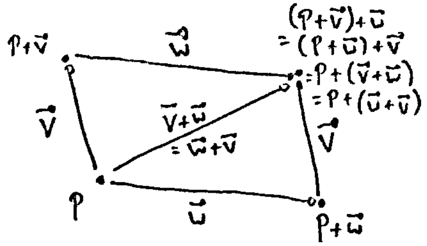
Num desenho só:



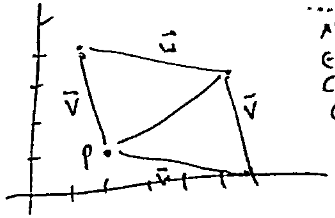
"Regra do paralelogramo"

Nos livros isto aparece deste jeito:

Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}, \vec{u}$ vetores.



Um truque que os livros usam (e não contam!):
eles começam escolhendo as coordenadas (ou "componentes") de $P, \vec{v}, \vec{w}$,



... e depois eles apagam os eixos e não contam as coordenadas pra gente!

4/set/2017

AVISOS:

- MEU COMPUTADOR QUEBROU
- NÃO DEU PRA EU DIGITAR (NEM IMPRIMIR) COISAS NOVAS
- VAMOS FAZER AS COISAS NUMA ORDEM UM POUCO DIFERENTE DA DAS FOLHAS

INTRODUÇÃO À REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS E VETORES

LEMBRE QUE A REGRA 1 ERA:

$$\underbrace{(a,b)}_{\text{PONTO}} + \underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{\text{VETOR}} = \underbrace{(a+c,\, b+d)}_{\text{PONTO}}$$

AVISO:

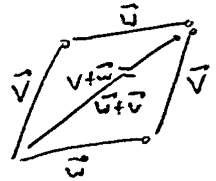
A MATÉRIA É GRANDE DEMAIS — E NÃO VAI DAR TEMPO DA GENTE APRENDER A ESCREVER DIREITO ARGUMENTOS GRÁFICOS — A GENTE SÓ VAI TER TEMPO DE VER AS TÉCNICAS PRA DEDUZIR ARGUMENTOS ALGÉBRICOS.

A PÁGINA 10 DISCUTE PROPRIEDADES (ALGÉBRICAS!) DAS REGRAS 1 A 7...

A GENTE ACABOU DE VER UM ARGUMENTO GRÁFICO QUE MOSTRA QUE

$$\begin{aligned}(P+\vec{v})+\vec{w} &= (P+\vec{w})+\vec{v}\\ &= P+(\vec{w}+\vec{v})\\ &= P+(\vec{v}+\vec{w}),\end{aligned}$$

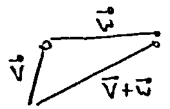
E SE A GENTE APRENDE A DESENHAR VETORES "SEM PONTO DE APOIO", A GENTE ENTENDE QUE



$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

"PORQUE TANTO $\vec{v}+\vec{w}$ QUANTO $\vec{w}+\vec{v}$ CORRESPONDEM À DIAGONAL DO MESMO PARALELOGRAMO".

DÁ PRA DESENHAR $\vec{v}+\vec{w}$ COMO UM TRIÂNGULO:



OBS: $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$??? !!

COMO É QUE A GENTE PROVA AS PROPRIEDADES DA P.10? (AS QUE FOREM VERDADEIRAS!)

DE UM JEITO MAIS CONFIÁVEL QUE SÓ UM DESENHINHO E UMA EXPLICAÇÃO EM PORTUGUÊS...

TRUQUE:
VAMOS ESCREVER AS DEMONSTRAÇÕES COMO UMA SÉRIE DE IGUALDADES, CADA UMA DESSAS IGUALDADES SENDO MUITO FÁCIL DE JUSTIFICAR...

ALIÁS, DUAS SÉRIES.

EXEMPLO:

D6) ( ) $\underbrace{(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)}}_{\text{"LADO ESQ"}} \overset{?}{=} \underbrace{a\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)}}_{\text{"LADO DIREITO"}}$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{((a+b)u_1,(a+b)u_2)} && \text{(PELA REGRA 6)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)} && \text{(PELA DISTRIBUTIVIDADE EM } \mathbb{R}\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{(au_1,au_2)} + \overrightarrow{(bu_1,bu_2)} && \text{(REGRA 6 DUAS VEZES)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)}\end{aligned}$$

... UMA SÉRIE DE IGUALDADES SÓ:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{((a+b)u_1,(a+b)u_2)} && \text{(REGRA 6)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)} && \text{(DISTRIBUTIVIDADE EM } \mathbb{R}\text{)}\\ &= \overrightarrow{(au_1,au_2)} + \overrightarrow{(bu_1,bu_2)} && \text{(REGRA 2)}\\ &= a\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\overrightarrow{(u_1,u_2)} && \text{(REGRA 6 DUAS VEZES)}\end{aligned}$$

[illegible]/2017

AVISOS:

- MEU COMPUTADOR QUEBROU
- NÃO DEU PRA EU DIGITAR (NEM IMPRIMIR) COISAS NOVAS
- VAMOS FAZER AS COISAS NUMA ORDEM UM POUCO DIFERENTE DA DAS FOLHAS

C1 (F) (OK)
C2 (V)
C3 (F)
C4 (F)
C5 (F)
C6 (F)
C7 (V)
A11 (V)
A12 (V)
D6 (V)
D62 (V)

C5) SE $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=4$

ENTÃO $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(-3,-1)}$

$\overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(3,1)}$

O "PRODUTO ESCALAR"
(OU "PRODUTO INTERNO")

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$

VAI SERVIR PRA DEFINIR DUAS OPERAÇÕES NOVAS:

1) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

E PORTANTO:

$$\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}} = \sqrt{a \cdot a + b \cdot b} = \sqrt{a^2+b^2}$$

POR EXEMPLO:

$$\|\overrightarrow{(0,3)}\| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overrightarrow{(1,1)}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{(3,4)}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

PRONÚNCIA: $\|\vec{v}\|$ É A "NORMA" DE $\vec{v}$, OU O "COMPRIMENTO" DE $\vec{v}$.

2) $\vec{v} \perp \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w} = 0)$

EXEMPLOS:

$$\overrightarrow{(2,0)} \perp \overrightarrow{(0,3)} = (\overrightarrow{(2,0)} \cdot \overrightarrow{(0,3)} = 0) = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0) = (0=0) = \text{VERDADEIRO}$$

$$\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(3,4)} = (\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(3,4)} = 0) = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 0) = (3+8=0) = (11=0) = \text{FALSO}$$

PRONÚNCIA: $\vec{v} \perp \vec{w}$ É "$\vec{v}$ É ORTOGONAL A $\vec{w}$"

V/F/JUSTIFIQUE:

N1 ( ) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

DICA: CHUTAR E TESTAR!

k	$\vec{v}$	$k\vec{v}$	$\|k\vec{v}\|$	$\|\vec{v}\|$	$k\|\vec{v}\|$	$\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$
2	$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(0,6)}$	6	3	6	VERDADEIRO
2	$\overrightarrow{(5,0)}$					
0	$\overrightarrow{(3,4)}$					
1	$\overrightarrow{(3,4)}$					
2	$\overrightarrow{(3,4)}$					
10	$\overrightarrow{(3,4)}$					

SE $k=4$,
$k \cdot k = 4 \cdot 4 = 16$

GA 6/set/2017

Na aula passada nós definimos a norma de um vetor:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}$
$= \sqrt{a\cdot a + b\cdot b}$
$= \sqrt{a^2+b^2}$

E eu disse que $\|\overrightarrow{(a,b)}\|$ calcula o comprimento do vetor $\overrightarrow{(a,b)}$...

E a gente viu evidências de que isso aqui é sempre verdade:

N1) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$.

Como é que a gente prova que N1 é sempre verdade?

Algo equivalente:

N2) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

(para todos os valores de $a, b, k \in \mathbb{R}$).

Podemos tentar fazer uma demonstração de N2...
Vamos usar a técnica de calcular o lado esquerdo e o direito e depois juntar as duas séries de igualdades.

$$\begin{aligned}\|k\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(ka,kb)}\| \\ &= \sqrt{(ka)^2+(kb)^2} \\ &= \sqrt{k^2a^2+k^2b^2} \\ &= \sqrt{k^2(a^2+b^2)} \\ &= k\sqrt{a^2+b^2} \\ &= k\|\overrightarrow{(a,b)}\|\end{aligned}$$

$k\|\overrightarrow{(a,b)}\| = k\sqrt{a^2+b^2}$

Deixa eu dar um nome pra demonstração acima: $(\star)$.

Se fizermos $k=2$, $a=3$, $b=4$, $(\star)$ vira:

$$\begin{aligned}\|2\overrightarrow{(3,4)}\| &= \|\overrightarrow{(2\cdot 3, 2\cdot 4)}\| \\ &= \sqrt{(2\cdot 3)^2+(2\cdot 4)^2} \\ &= \sqrt{2^2\cdot 3^2+2^2\cdot 4^2} \\ &= \sqrt{2^2(3^2+4^2)} \\ &= 2\sqrt{3^2+4^2} \\ &= 2\|\overrightarrow{(3,4)}\|.\end{aligned}$$

Se fizermos $k=(-2)$, $a=3$, $b=4$, $(\star)$ vira:

$$\begin{aligned}\underbrace{\|(-2)\cdot\overrightarrow{(3,4)}\|}_{10} &\overset{ok}{=} \|\overrightarrow{((-2)\cdot 3, (-2)\cdot 4)}\| \\ &\overset{ok}{=} \sqrt{((-2)\cdot 3)^2+((-2)\cdot 4)^2} \\ &\overset{ok}{=} \sqrt{(-2)^2\cdot 3^2+(-2)^2\cdot 4^2} \\ &\overset{ok}{=} \sqrt{(-2)^2(3^2+4^2)} \\ &\overset{não}{=} (-2)\sqrt{3^2+4^2} \\ &\overset{ok}{=} \underbrace{(-2)\|\overrightarrow{(3,4)}\|}_{-10}\end{aligned}$$

Como descobrir quais dos "="s da $(\star)$ são verdade sempre?

1) Se ele usa regras que a gente conhece, ele vale
A gente tá dando nomes pras regras!

2) Isso vale tanto pras regras com pontos e vetores quanto pras regras com números

3) Se num "=" a gente usa uma regra que não vale o "=" provavelmente vai estar errado.

Exemplo:

$2\sqrt{9+16} = 2(\sqrt{9}+\sqrt{16})$

A regra que está sendo usado é esta: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Dica: quando alguém usa alguma regra errada "de cálculo" isso é erro conceitual grave e zera a questão.

...E depois que a gente prova algo a gente pode usar a demonstração sem ter que refazer ela!

Outra dica:
Não tentem consertar proposições erradas e dizer, p.ex., que N2 é verdade quando $k \geq 0$...
Ao invés disso façam outras proposições.

GA 6/set/2017

N1) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

N2) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

N3) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$
para $a,b,k \in \mathbb{R}$ e $k \geq 0$,

N4) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

Repare que nessas proposições fica implícito que ele vale para todo $k, a, b, \vec{v}$.

Uma demonstração da N4:

$$\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = \|\overrightarrow{(ka,kb)}\|$$
$$= \sqrt{(ka)^2+(kb)^2}$$
$$= \sqrt{k^2a^2+k^2b^2}$$
$$= \sqrt{k^2(a^2+b^2)}$$
$$\overset{(\star\star)}{=} \sqrt{k^2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= |k|\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|.$$

← OBS: Que regra estamos usando no $(\star\star)$?
$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$?
$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{-4}\sqrt{-9}$?
$\sqrt{36} = 6$ $\quad (2i)(3i) = -6$!!

A regra é que $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ quando $\alpha, \beta \geq 0$.

OBS: A definição do módulo é: $|x| = \sqrt{x^2}$ e a "$\sqrt{\ }$" sempre retorna números ≥ 0.

Uma proposição estranha:
V/F/justifique:

N5) ( ) $\|\,\|\vec{v}\|\cdot\vec{w}\,\| = \|\,\|\vec{w}\|\cdot\vec{v}\,\|$

Exercício:
Teste a N5 para alguns valores de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(Lembre que "valores" não são necessariamente números! Neste caso os valores de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores!)

Outra proposição equivalente:

N6) ( ) $\|\,\|\overrightarrow{(c,d)}\|\cdot\overrightarrow{(e,f)}\,\| = \|\,\|\overrightarrow{(e,f)}\|\cdot\overrightarrow{(c,d)}\,\|$

Dica: Com um pouco de prática a gente aprende a encontrar valores para c,d,e,f que façam as contas ficarem simples (sem raízes).

OBS: Dá pra provar a N6 por contas do jeito óbvio, que fica grande...

$$\|\,\|\overrightarrow{(c,d)}\|\cdot\overrightarrow{(e,f)}\,\| = \|\sqrt{c^2+d^2}\cdot\overrightarrow{(e,f)}\|$$
$$= \|\overrightarrow{(\sqrt{c^2+d^2}\,e, \sqrt{c^2+d^2}\,f)}\|$$
$$= \ldots$$

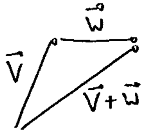
Uma proposição importante (e menos estranha):

N7) ( ) $\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

ou, equivalentemente,

N8) ( ) $\|\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(e,f)}\| = \|\overrightarrow{(c,d)}\| + \|\overrightarrow{(e,f)}\|$

Dica: Lembre que na aula passada nós vimos um jeito de visualizar $\vec{v}+\vec{w}$ como um triângulo:



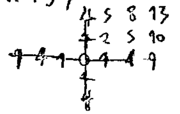
O que acontece se a gente pega N4 (ou a prova dela) e substitui: $k := \|\overrightarrow{(c,d)}\|$, $a := e$, $b := f$?

$$\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$$
$$\Rightarrow \|\,\|\overrightarrow{(c,d)}\|\overrightarrow{(e,f)}\,\| = |\,\|\overrightarrow{(c,d)}\|\,|\,\|\overrightarrow{(e,f)}\|$$

(Não vou completar agora - casa)

Como é que a gente visualiza (e entende) alguma operação nova? Exemplo: $\vec{v}\cdot\vec{w}$

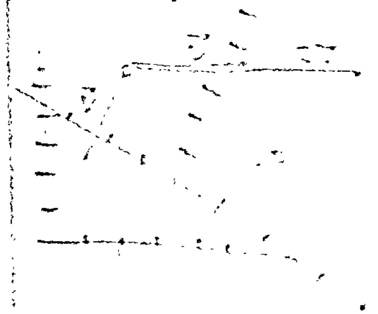
Truque (variação do chutar e testar):
1ª parte: Fixe $\vec{v}$, calcule $\vec{v}\cdot\vec{w}$ pra vários valores de $\vec{w}$.
2ª parte: Fazer o mesmo pra vários "$\vec{v}$"s.
3ª parte: Representar isso graficamente - aliás, a gente vai aprender a representar funções $F(x,y)$ graficamente... Exemplo:
$F(x,y) = x^2+y^2$,



Hoje: [illegible] $F(x,y)$, [illegible] e [illegible]!

Folhas [illegible]

Vetores [illegible] de CA [illegible] sistema de coordenadas [illegible]



[illegible] um ponto que a gente [illegible] de O [illegible] O = (0,0) [illegible]

[illegible] sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$

aí $(3,4)_\Sigma = O + 3\vec{u} + 4\vec{v}$

[illegible] O, u, v [illegible]

[illegible] Folha 17 tem exercícios [illegible]

Fazer agora: Folha 17: [illegible]

Na folha 15 fazer só o exercício 9. ⟸ O mais importante é o 9g.

Lembrem da dica 6 da página 2!

Dá pra fazer cada um dos exercícios muito rápido se você descobrir os truques.

Folha 15, exercício 9g:

$F(x,y) = xy$

$F(0,2) = 0 \cdot 2 = 0$ $F(1,2) = 1 \cdot 2 = 2$ $F(2,2) = 2 \cdot 2 = 4$

$F(0,1) = 0 \cdot 1 = 0$ $F(1,1) = 1 \cdot 1 = 1$ $F(2,1) = 2 \cdot 1 = 2$

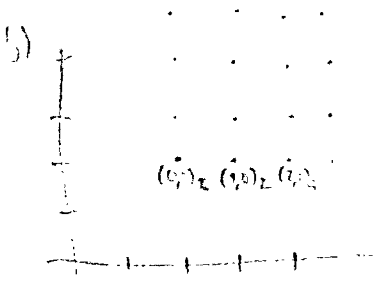
$F(0,0) = 0 \cdot 0 = 0$ $F(1,0) = 1 \cdot 0 = 0$ $F(2,0) = 2 \cdot 0 = 0$

				3	6	9
-9	-6	-3	0	2	4	6
-6	-4	-2	0	1	2	3
-3	-2	-1	0			
0	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1	-2	-3
6	4	2	0	[illegible]	-4	-6

Na folha 17 cada exercício tem um "O", um "$\vec{u}$" e um "$\vec{v}$" diferentes que a gente descobre pelo gráfico.

a) $O = (3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,?)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,?)}$

b) $O = (2,2)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(?,1)}$



Depois que a gente sabe O, $\vec{u}$, $\vec{v}$ (que são diferentes em cada item!) a gente sabe calcular [illegible] os pontos A, B, C, D, E... [illegible]

Ponto ? é $(1,2)_\Sigma = O + 1\vec{u} + 2\vec{v}$

$(3,1)$ $\overrightarrow{(2,1)}$ $\overrightarrow{(-1,1)}$

$\overrightarrow{(2,1)}$ $\overrightarrow{(-2,2)}$

$(3,4)$

[illegible] calcular [illegible]

$(0,3)_\Sigma$ $(1,3)_\Sigma$ $(2,3)_\Sigma$ $(3,3)_\Sigma$

$(0,2)_\Sigma$ $(1,2)_\Sigma$ $(2,2)_\Sigma$ $(3,2)_\Sigma$

$(0,1)_\Sigma$ $(1,1)_\Sigma$ $(2,1)_\Sigma$ $(3,1)_\Sigma$

$(0,0)_\Sigma$ $(1,0)_\Sigma$ $(2,0)_\Sigma$ $(3,0)_\Sigma$

GA 13/set/2017

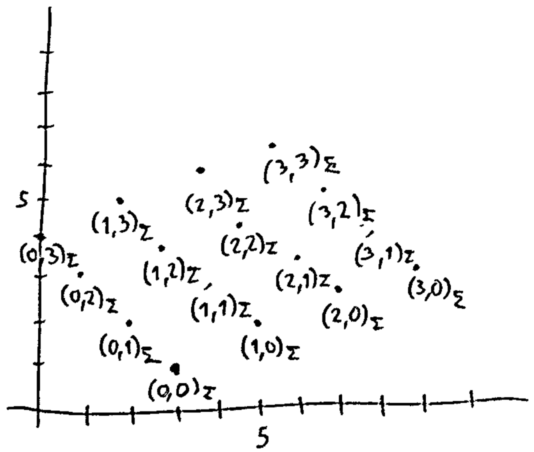
Hoje: coordenadas!
Na aula passada a gente viu como visualizar coisas como $O + a\vec{u} + b\vec{v}$, para $O, \vec{u}$ e $\vec{v}$ fixos...

Na folha 17 tinha uns exercícios disso - cada item tinha um valor para $O, \vec{u}, \vec{v}$ - e eu dei a dica de que quem tivesse dificuldade podia começar representando graficamente os pontos

$(0,3)_\Sigma$, $(1,3)_\Sigma$, $(2,3)_\Sigma$, $(3,3)_\Sigma$.
$(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$, $(3,2)_\Sigma$,
$(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$, $(3,1)_\Sigma$,
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$, $(3,0)_\Sigma$.

Fazer hoje - folha 23; eu trouxe uma cópia pra cada um - é o contrário: na folha 23 a gente vai aprender a encontrar as coordenadas de pontos em vários sistemas de coordenadas.

Exemplo: no item a da folha 17, temos



P. 17:
A partir do momento em que eu digo
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$
fica implícito que isto vale para todos os valores de a e b - por exemplo, se $a=3$ e $b=4$,
$(3,4)_\Sigma = O + 3\vec{u} + 4\vec{v}$

$$(e,f)_{ef} = \overbrace{O_{ef}}^{(1,5)} + e\overbrace{\vec{e}}^{\overrightarrow{(-1,-1)}} + f\overbrace{\vec{f}}^{\overrightarrow{(1,-1)}}$$
$$= (1,5) + e\overrightarrow{(-1,1)} + f\overrightarrow{(1,-1)}$$

GA 18/set/2017

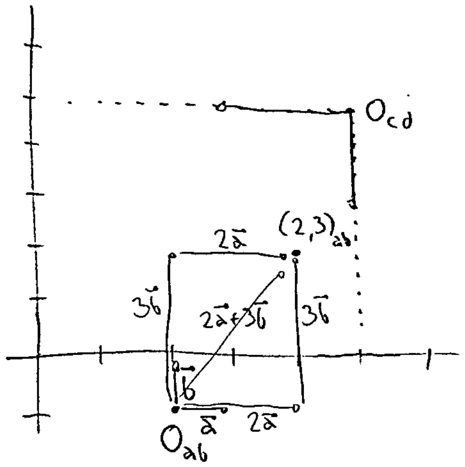
Acabei de pôr 3 livros de GA na página do curso. Todos eles (se não me engano) começam trabalhando com pontos e vetores sem coordenadas.

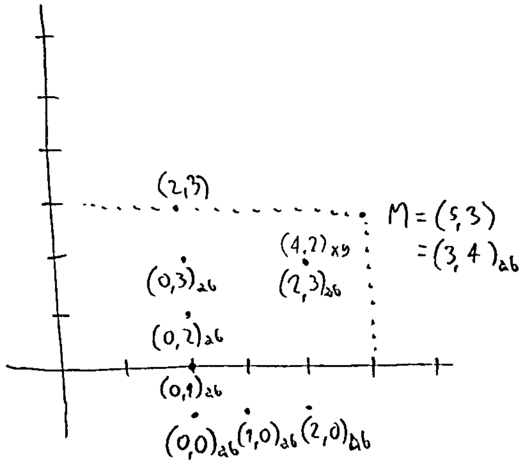
A folha 23 tem uma tabela pra completar embaixo.

Dica: o primeiro passo é marcar no plano (xy) os pontos P, Q, R, S, T.

Vocês têm até 15:00 pra terminar essa tabela. → 15:15

DICAS:





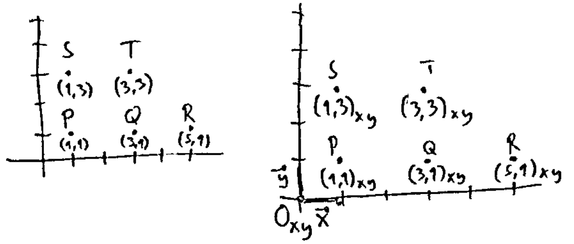
Vocês já sabem encontrar $(2,3)_{ab}$ de dois jeitos diferentes:

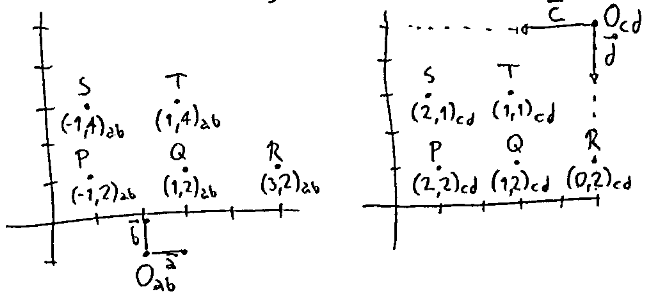
1º: conta: $(2,3)_{ab} = O_{ab} + 2\vec a + 3\vec b$
$= (2,-1) + 2\overrightarrow{(1,0)} + 3\overrightarrow{(0,1)}$
$= (4,2)$

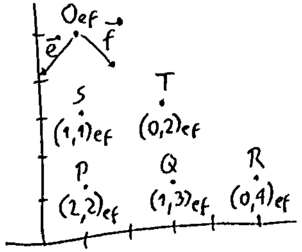
2º: visualmente:

$(5,3) = (3,4)_{ab} = (5,3)_{xy}$

$(2,2)_{cd} = (5,5) + 2\overrightarrow{(-2,0)} + 2\overrightarrow{(0,-2)}$



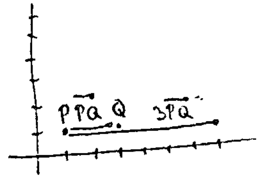




A gente já sabe interpretar visualmente pontos e vetores...

$P \quad \overrightarrow{PQ} \quad Q \qquad R = Q + \overrightarrow{PQ}$

PQ



Distâncias são inicialmente definidas como contas...

$d(P,Q)_{xy} = \sqrt{(Q_x-P_x)^2+(Q_y-P_y)^2}$
$= \sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2}$
$= 2$

$d(P,Q)_{ab} = \sqrt{(Q_a-P_a)^2+(Q_b-P_b)^2}$
$= \sqrt{(1-(-1))^2+(2-2)^2}$
$= 2$

$d(P,Q)_{cd} = \sqrt{(Q_c-P_c)^2+(Q_d-P_d)^2}$
$= \sqrt{(1-2)^2+(2-2)^2}$
$= 1$

$d(P,Q)_{ef} = \sqrt{2}$

GA 18/set/2017

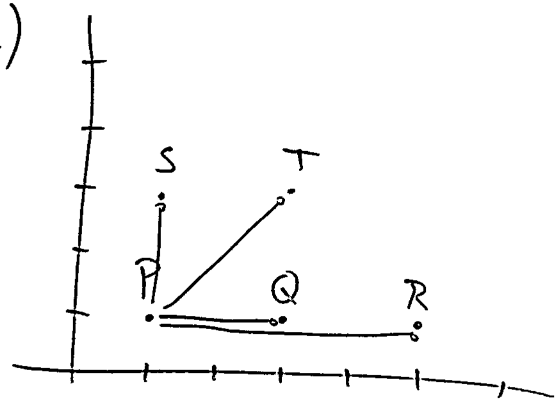
Acabei de pôr 3 livros de GA na página do curso. Todos eles (se não me engano) começam trabalhando com pontos e vetores sem coordenadas.

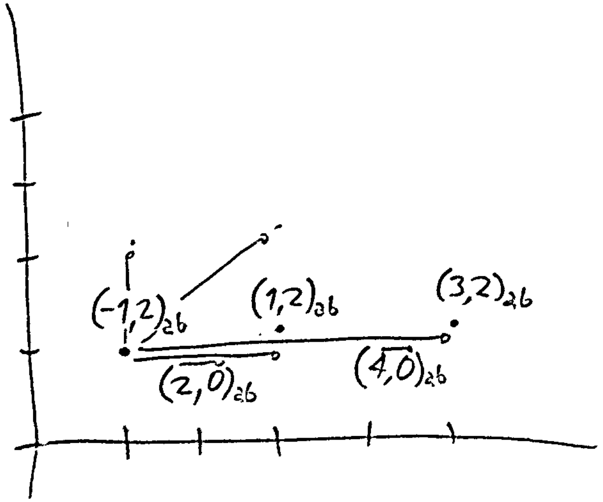
O exercício 15c é pra gente entender como é que vetores se transformam com mudanças de coordenadas!

$P=(1,1) \quad Q=(3,1) \quad \vec{PQ}=\overrightarrow{(2,0)}$

$P=(-1,2)_{ab} \quad Q_{ab}=(1,2)_{ab} \quad \vec{PQ}_{ab}=\overrightarrow{(2,0)}_{ab}$

15c)





Pra agora: Terminem o 15c!

Dica: façam desenhos (como esse aqui).

GA 20/SET/2017

NA AULA PASSADA NÓS FIXAMOS VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS – xy, ab, cd, ef – E VIMOS QUE CADA PONTO – DIGAMOS, P, TINHA COORDENADAS $P_x, P_y, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f$.

NA AULA PASSADA A GENTE A GENTE NÃO VIU DIRETO A RELAÇÃO ENTRE ESSAS COORDENADAS, E A GENTE CALCULOU TUDO POR OLHÔMETRO E CHUTAR-E-TESTAR.

HOJE A GENTE VAI VER O LADO ALGÉBRICO DISSO. UMA APLICAÇÃO – INTERSEÇÃO ENTRE RETAS – VAI SER MUITO IMPORTANTE NESSA PRIMEIRA PARTE DO CURSO, UMA OUTRA VAI SER MUITO IMPORTANTE NA PARTE SOBRE CÔNICAS, E A PARTE SOBRE MATRIZES VAI SER UMA CURIOSIDADE – NÃO VAI SER COBRADA, MAS É ÚTIL PRA ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

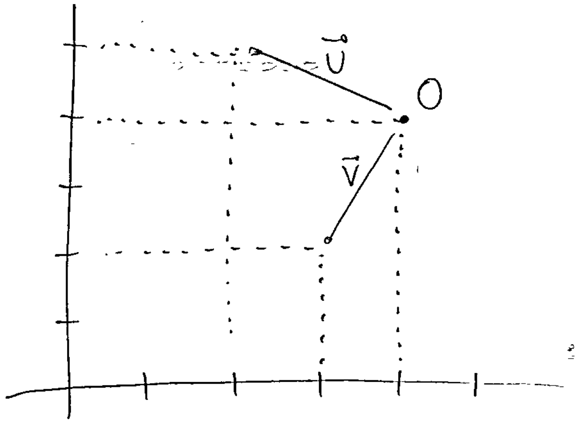
QUE EU VOU FAZER, E TUDO NO CURSO SEGUINTE – ÁLGEBRA LINEAR – VAI SER FEITO COM MATRIZES.

SOBRE A FOLHA 21: NA FOLHA 20 (?) NÓS TÍNHAMOS VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS, E NO ITEM (a) TÍNHAMOS

$$\begin{aligned}(a,b)_\Sigma &= O + a\vec{u} + b\vec{v}\\ &= (4,4) + a(\overrightarrow{-2,1}) + b(\overrightarrow{-1,-2})\\ &= (4,4) + (\overrightarrow{-2a,a}) + (\overrightarrow{-b,-2b})\\ &= (4-2a-b,\ 4+a-2b)\\ &= (x,y)\end{aligned}$$

CADA PONTO TEM COORDENADAS x, y, a, b.

$$\begin{array}{ccc} a\,b & & x\ \ y \\ (0,0)_\Sigma & = & (4,4) \\ (1,1)_\Sigma & = & (1,3) \end{array}$$



$O + \vec{u} + \vec{v}$

POR MATRIZES:

$$\begin{aligned}(a,b)_\Sigma &= \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$$

Na aula passada nós vimos como encontrar a interseção de duas retas parametrizadas resolvendo um sistema — i.e., fazendo uma conta.

Hoje nós vamos ver como descobrir a conta que a gente vai precisar usar pra encontrar pontos de uma reta que tenham uma determinada propriedade. Ao invés de chutar e testar a gente vai aprender a chutar, visualizar e testar!!

Como calcular as coordenadas do ponto C de uma reta r mais próximo de um ponto B dado?

Vamos usar estes casos pra testes:

a) $A=(1,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $B=(3,1)$

b) $A=(3,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,2)}$, $B=(2,1)$

c) $A=(2,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$, $B=(2,4)$

d) $A=(0,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$, $B=(1,4)$

e) $A=(0,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$, $B=(1,2)$

Sejam $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e C o ponto de r mais próximo de B.

1) Em cada um dos casos acima represente graficamente $A, \vec{v}, B, r, C$. (Determine C no olhômetro e dê as coordenadas dele quando possível)

Como é que a gente pode visualizar funções de r em $\mathbb{R}$, isto é, funções que recebem pontos da reta r e retornam números reais?

A gente pode usar um truque parecido com o da folha 14, em que a gente fazia anotações ao lado de alguns pontos da reta como "t=0", "t=1", "u=0", etc... e a gente pode usar tabelas pra nos ajudar a decidir o que escrever.

2) Em cada uma das retas dos casos-teste mostre quais são os pontos correspondentes a $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=-1$.

3) Represente graficamente as 5 retas de novo, e em cada um dos pontos delas que você escolheu no exercício anterior indique as coordenadas daquele ponto.

> Observação importante: vocês não vão ver exercícios deste tipo em lugar nenhum — nem em livros nem na prova — porque tanto os livros quanto as provas supõem que vocês sabem fazer tudo isto de cabeça.

Notação: $P=A+t\vec{v}$.

Note que A e $\vec{v}$ dependem de qual caso-teste você escolheu, e o t depende de qual ponto da reta você escolheu.

4) Em cada uma das retas e para cada ponto $P\in r$ (use os que você já escolheu!) mostre quanto vale $\overrightarrow{AP}$ naquele ponto.

5) Idem, mas mostre o valor de $\overrightarrow{PB}$.

6) Idem, mas mostre o valor de $d(P,B)$ $(=\|\overrightarrow{PB}\|)$.

7) Idem, mas mostre o valor de $d(P,B)^2$ $(=\|\overrightarrow{PB}\|^2=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB})$.

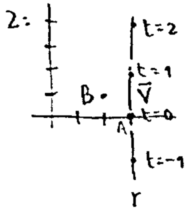
8) Idem, mas mostre o valor de $\overrightarrow{PB}\cdot\vec{v}$.

9) Idem, mas mostre o valor de $\overrightarrow{PB}\perp\vec{v}$ (que vai ser verdadeiro ou falso, ou 0 ou 1).

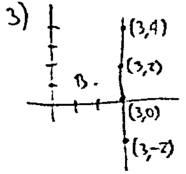
Exemplo:

b) $A=(3,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,2)}$, $B=(2,1)$

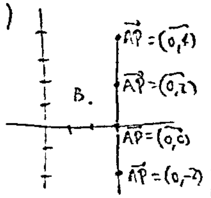
1 e 2:



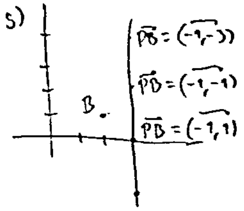
3)



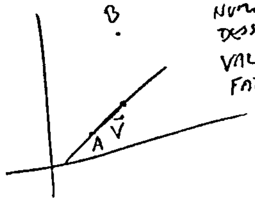
4)



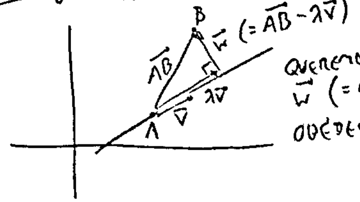
5)



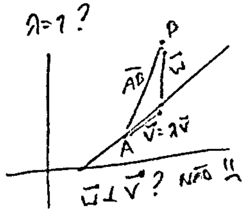
Próxima aula (trailer):



Numa situação dessas, qual é o valor de λ que faz ... seja um triângulo retângulo?



Queremos que $\vec{w}$ $(=\overrightarrow{AB}-\lambda\vec{v})$ obedeça $\vec{w}\perp\vec{v}$



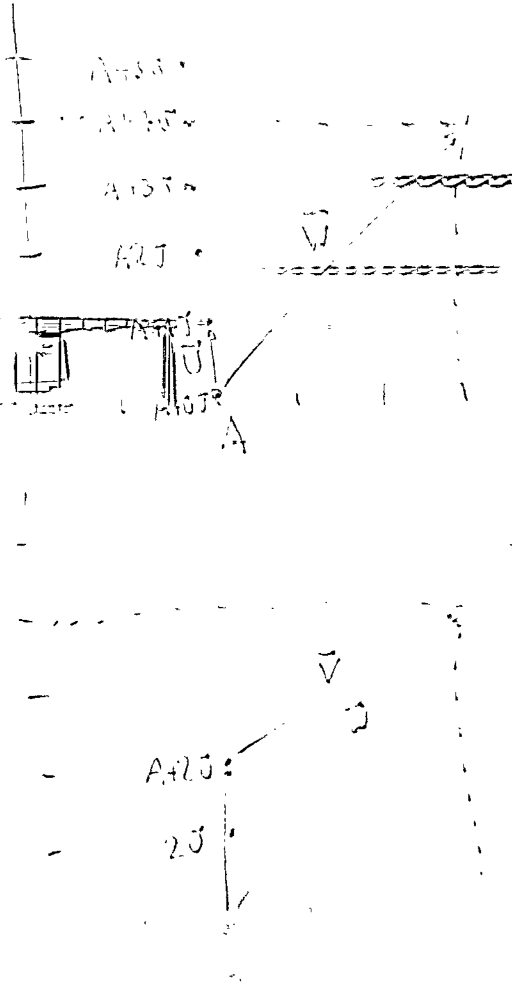
GA 27/set/2017

$Pr_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{u}$, onde

$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \lambda\vec{u}$ tal que

$\vec{u} \perp (\vec{w} - \lambda\vec{u})$

isto é $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \lambda\vec{u}) = 0$



Fórm

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{w} - \lambda\vec{u}) = 0$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} - \vec{u}\cdot\lambda\vec{u} = 0$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} - \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 0$

$\Rightarrow \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{w}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\vec{v} = \vec{w} - \lambda\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Fórmula:

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=0$$

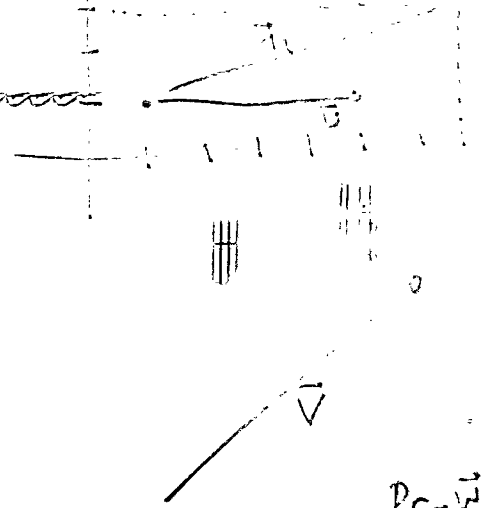
$$\Rightarrow \vec{U}\cdot(\vec{W}-\lambda\vec{U})=0$$

$$\Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{W}-\vec{U}\cdot\lambda\vec{U}=0$$

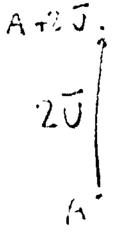
$$\Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{W}-\lambda(\vec{U}\cdot\vec{U})=0$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{U}\cdot\vec{U})=\vec{U}\cdot\vec{W}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}$$



$$Pr_{\vec{U}}\vec{W}=\frac{\vec{U}\cdot\vec{W}}{\vec{U}\cdot\vec{U}}\vec{U}$$

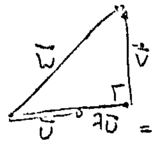


GA 27/out/2017

Na aula passada nós vimos um jeito de calcular $Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ por chutar-e-testar:

$\boxed{\begin{aligned} &Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \lambda\vec{u},\\ &\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w},\\ &\vec{v}=\vec{w}-\lambda\vec{u},\\ &\vec{u}\perp\vec{v}\end{aligned}}$

E a gente viu como visualizar tudo isso,



E a gente viu um jeito de calcular o λ:

$\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{u}\perp\vec{w}-\lambda\vec{u}$

$\vec{u}\cdot(\vec{w}-\lambda\vec{u})=0$

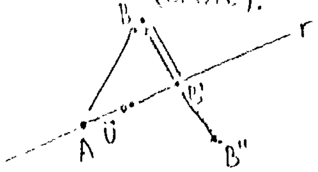
$\vec{u}\cdot\vec{w}-\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}=0$

$\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\lambda=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Hoje vamos ver aplicações destas idéias e como encontrar as fórmulas certas (por chutar-e-testar)...

Figura (geral):



Casos-testes:

a) $A=(1,2)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,0)}$, $B=(3,0)$

b) $A=(3,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(0,2)}$, $B=(1,1)$

c) $A=(2,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,1)}$, $B=(3,3)$

d) $A=(2,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,1)}$, $B=(3,2)$

e) $A=(0,1)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(4,2)}$, $B=(0,6)$

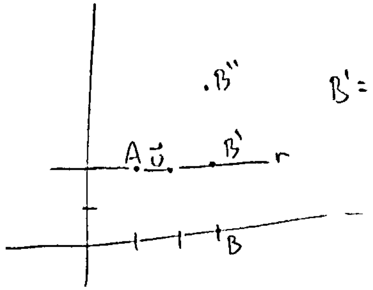
f) $A=(0,1)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(4,2)}$, $B=(0,4)$

Exercício:
Encontre fórmulas para os pontos e vetores indicados. Use o olhômetro pra descobrir quais devem ser os resultados em cada caso-teste, e use isto pra testar as suas fórmulas.

Exercício mais importante de hoje; pra casa

Encontre as fórmulas para a B' e B'', onde: B' é o ponto de r mais próximo de B, e B'' é o ponto simétrico a B com relação a r.

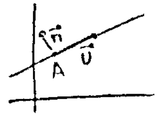
Obs: $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$.



$B'=B+\overrightarrow{(3,4)}$?

Próximo assunto:
"Vetores normais", que são vetores ortogonais a uma reta.

Exemplo:



"Vetores normais" são ortogonais a "vetores diretores".

Exercício:
Seja $r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$.
Represente graficamente r nos seguintes casos:

a) $A=(1,2)$, $\vec{n}=\overrightarrow{(0,1)}$

b) $A=(2,0)$, $\vec{n}=\overrightarrow{(-1,1)}$

c) $A=(4,2)$, $\vec{n}=\overrightarrow{(-1,2)}$

Aula que vem

Os livros falam muito de comprimento, sentido e direção de vetores.

Truque:

$\overrightarrow{(a,b)}\perp\overrightarrow{(b,-a)}$

$\overrightarrow{(a,b)}\perp k\overrightarrow{(b,-a)}$

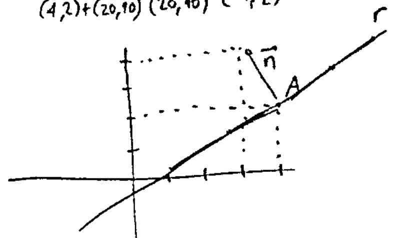
Digamos que $A=(4,2)$, $\vec{n}=\overrightarrow{(-1,2)}$,

$r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$

Como é que a gente encontra pontos de r?

$r=\{\underbrace{P}_{\substack{A+\overrightarrow{AP}\\ (4,2)+\overrightarrow{(2,1)}\\ (6,3)}}\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{(2,1)}}\perp\underbrace{\vec{n}}_{\overrightarrow{(-1,2)}}\}$

$r=\{\underbrace{P}_{(4,2)+\overrightarrow{(20,10)}}\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{(20,10)}}\perp\underbrace{\vec{n}}_{\overrightarrow{(-1,2)}}\}$



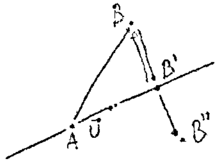
$r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$
$=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp 3\vec{n}\}$

... e coisas intessantes acontecem quando $\|\vec{n}\|=1$.

GA 4/out/2017

Na aula passada nós vimos algumas utilidades do "Pr": o problema era este,

(1) Encontre fórmulas para os pontos e vetores indicados nesta figura,



E teste as suas fórmulas em cada um dos casos-teste abaixo:

a) $A=(1,2)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,0)}$, $B=(3,0)$
b) $A=(3,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(0,2)}$, $B=(1,1)$
c) $A=(2,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,1)}$, $B=(3,3)$
d) $A=(2,0)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(1,1)}$, $B=(3,2)$
e) $A=(0,1)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(4,2)}$, $B=(0,6)$
f) $A=(0,1)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(4,2)}$, $B=(0,4)$

Obs: $r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
B' é o ponto de r mais próximo de B,
B'' é o ponto simétrico a B com relação a r,
$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

Novidade:
(2) Em cada um dos casos-teste calcule também $d(B,r)$ — a distância entre o ponto B e a reta r.

Obs: tem duas fórmulas rápidas pra calcular $d(B,r)$ e mais de 50% ou decora elas errado ou usa elas errado

E se F* na prova.

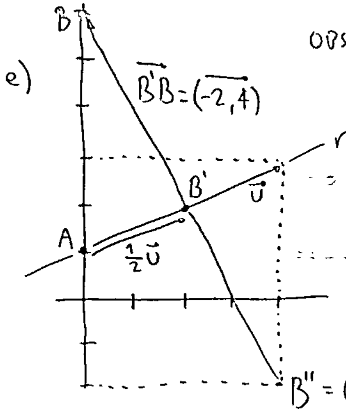
A primeira dessas fórmulas usa o "vetor normal" a uma reta.

Um exercício preparatório pro que a gente vai ver depois (vetores normais etc):

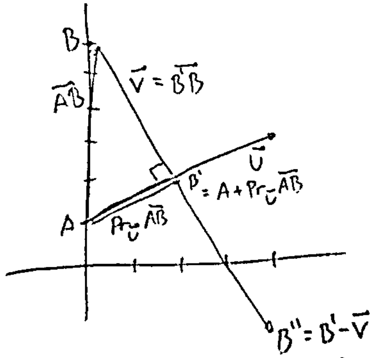
(3) Para cada um dos vetores abaixo encontre dois valores de k para os quais:
a) $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\|k\vec{v}\|=4$
b) $\vec{v}=\overrightarrow{(0,3)}$, $\|k\vec{v}\|=4$
c) $\vec{v}=\overrightarrow{(3,4)}$, $\|k\vec{v}\|=10$
d) $\vec{v}=\overrightarrow{(3,4)}$, $\|k\vec{v}\|=1$

(4) Para cada um dos vetores abaixo encontre quatro vetores diferentes ortogonais a ele:
a) $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$
b) $\vec{v}=\overrightarrow{(0,3)}$
c) $\vec{v}=\overrightarrow{(3,4)}$
d) $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,2)}$

1e)



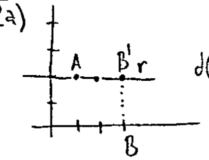
OBS: $\overrightarrow{B'B} \perp \vec{u}$
$\overrightarrow{B'B} = (-2,4)$, $\vec{u} = (4,2)$



$B' = Pr_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{B'B}$
$B'' = B'-\vec{v}$

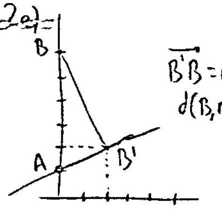
$\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
$B' = A+\lambda\vec{u}$
$\vec{v} = \overrightarrow{B'B}$
$B'' = B'-\vec{v}$

2a)



$d(B,r)=d(B,B')=2$

2e)

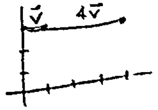


$\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{(-2,4)}$
$d(B,r)=d(B,B')$
$=d(B',B)$
$=\sqrt{(-2)^2+4^2}$
$=\sqrt{20}$
$=2\sqrt{5}$

3) $\|k\vec{v}\| = |k|\cdot\|\vec{v}\|$

a) $\underset{4}{\underset{\|}{\|k\vec{v}\|}} = |k|\cdot\|\overrightarrow{(1,0)}\| = |k|\cdot 1$

Queremos k tal que $|k|\cdot 1 = 4$.
Soluções: $k=4$, $k=-4$.



4) Se $\vec{v}=\overrightarrow{(a,b)}$
então $\overrightarrow{(a,b)} \perp \overrightarrow{(-b,a)}$
e vale $\overrightarrow{(a,b)} \perp k\overrightarrow{(-b,a)}$...

a) $\overrightarrow{(1,0)} \perp \overrightarrow{(0,1)}$
$\overrightarrow{(1,0)} \perp k\overrightarrow{(0,1)}$

Soluções:
$\overrightarrow{(1,0)} \perp \overrightarrow{(0,1)}$,
$\overrightarrow{(1,0)} \perp \overrightarrow{(0,4)}$,
$\overrightarrow{(1,0)} \perp \overrightarrow{(0,-2)}$,
$\overrightarrow{(1,0)} \perp \overrightarrow{(0,0)}$

OBS: $\overrightarrow{(1,0)}\cdot\overrightarrow{(0,0)}=0$

6.ª 4, out, 2019

Uma aplicação:

Sejam $A = (2,2)$,

$\vec{n} = (-1,2)$,

$$r = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \}.$$

Vamos calcular alguns pontos de r.

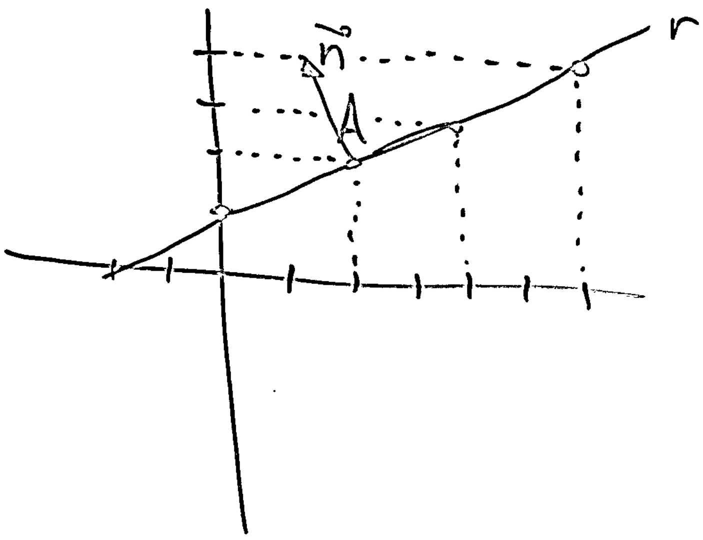
$\overrightarrow{(-1,2)} \perp \overrightarrow{(2,1)}$

$\overrightarrow{(-1,2)} \perp \overrightarrow{(4,2)}$

$\overrightarrow{(-1,2)} \perp \overrightarrow{(-2,-1)}$

$\overrightarrow{(-1,2)} \perp \overrightarrow{(0,0)}$

$\overrightarrow{AP}$	$P = \underset{(2,2)}{A} + \overrightarrow{AP}$
$\overrightarrow{(2,1)}$	$(4,3)$
$\overrightarrow{(4,2)}$	$(6,4)$
$\overrightarrow{(-2,-1)}$	$(0,1)$
$\overrightarrow{(0,0)}$	$(2,2)$



GA 9/out/2017

O que a gente vai ver hoje tem alguns pré-requisitos...

① Vetores unitários.

A gente diz que $\vec{v}$ é unitário se $\|\vec{v}\|=1$.

Notação (temporária, só pra hoje): $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Exercício: Em cada um dos casos abaixo calcule $\vec{v}'$, represente $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ graficamente, e verifique (no olhômetro quando der) que $(0,0)+\vec{v}'$ é um ponto do "círculo unitário", que o círculo centrado em $(0,0)$ e de raio 1.

$\vec{v}$	$\vec{v}'$
$\overrightarrow{(1,0)}$	$\overrightarrow{(1,0)}$
$\overrightarrow{(2,0)}$	$\overrightarrow{(1,0)}$
$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(0,1)}$
$\overrightarrow{(0,-4)}$	$\overrightarrow{(0,-1)}$
$\overrightarrow{(3,4)}$	$\overrightarrow{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} = \overrightarrow{(0.6,0.8)}$
$\overrightarrow{(6,8)}$	$\overrightarrow{(0.6,0.8)}$
$\overrightarrow{(4,3)}$	$\overrightarrow{(0.8,0.6)}$
$\overrightarrow{(-3,4)}$	
$\overrightarrow{(1,1)}$	

(Até 15:00)

② Nós já vimos vários modos de definir retas:

a) $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

b) $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$

Ponha cada uma das retas abaixo na forma (c):

e) $\{(2,3)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

f) $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid (P-(2,2))\perp\overrightarrow{(1,1)}\}$

g) $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid (P-(2,2))\perp\overrightarrow{(2,1)}\}$

h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=6\}$

Encontre uma representação na forma (a) para cada uma das retas abaixo:

i) $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid (P-(2,2))\perp\overrightarrow{(1,1)}\}$

j) $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid (P-(2,2))\perp\overrightarrow{(2,1)}\}$

k) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=6\}$

Encontre uma representação na forma (b) para cada uma das retas abaixo:

l) $\{(2,3)+t\overrightarrow{(2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\}$

m) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=6\}$.

A gente vai usar as idéias desses exercícios - assim que elas ficarem claras - pra ver uma fórmula explícita pra calcular distância entre ponto e reta.

Truque: se $\vec{v}$ e $\vec{n}$ são unitários e ortogonais e $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ então

(I) $r=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$

e para qualquer $B\in\mathbb{R}^2$ temos:

(II) $\overrightarrow{AB} = Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB} + Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}$

(III) $\|Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}\| = |\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}|$

(IV) $\|Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}\| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|$

(V) $d(B,r) = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|$

Ops: o princípio por trás disto é: se $\|\vec{u}\|=1$ então

$$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{1}\vec{u}$$

$$\|Pr_{\vec{u}}\vec{w}\| = \|(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u}\| = |\vec{u}\cdot\vec{w}|\,\|\vec{u}\| = |\vec{u}\cdot\vec{w}|$$

Dica pra ~~...~~

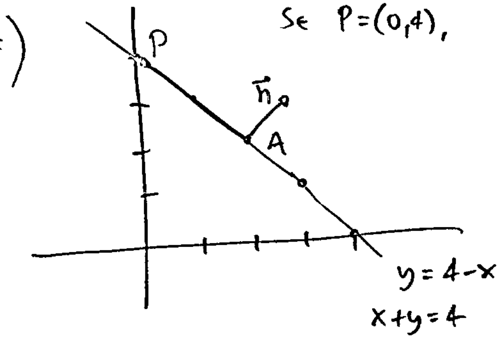
$\overrightarrow{(1,-1)} \perp \overrightarrow{(1,1)}$

$(P-(2,2)) \perp \overrightarrow{(1,1)}$ se

$P-(2,2) \perp \overrightarrow{(1,-1)}$, ou seja,

$(x,y)-(2,2) \perp \overrightarrow{(1,-1)}$, ou seja...

2f)



Se $P=(0,4)$, $(\underbrace{P-(2,2)}_{(0,4)})\perp\overrightarrow{(1,1)}$?

$(-2,2)$

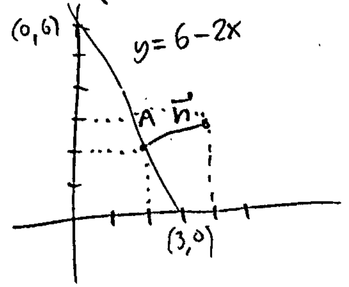
$((x,y)-(2,2))\cdot\overrightarrow{(1,1)}=0$

$(x-2,y-2)\cdot\overrightarrow{(1,1)}=0$

$(x-2)+(y-2)=0$

$x+y-4=0$

2g) Se $A=(2,2)$ e $\vec{n}=\overrightarrow{(2,1)}$ então $\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP}\perp\vec{n}\}$



GA 11/OUT/2017

EXERCÍCIO DA AULA PASSADA:

NÓS CONHECEMOS ESTES MODOS DE DEFINIR RETAS,

a) $\{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}\}$,

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$

SEJAM:

$r_e = \{(2,3) + t\overrightarrow{(1,2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_f = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid (P - (2,2)) \perp \overrightarrow{(1,1)}\}$

$r_g = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid (P - (2,2)) \perp \overrightarrow{(2,1)}\}$

$r_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6\}$.

① ENCONTRE UMA REPRESENTAÇÃO NA FORMA (a) PARA r_h.

② ENCONTRE UMA REPRESENTAÇÃO NA FORMA (b) PARA r_h.

③ PARA CADA UMA DAS RETAS ~~ABAIXO~~

ESCOLHA UM VETOR DIRETOR $\vec{v}$ PARALELA E UM VETOR $\vec{n}$ NORMAL A ELA;

ESCOLHA UM PONTO $A \in r$;

CALCULE $\vec{v}'$ E $\vec{n}'$;

CALCULE $Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$,

$Pr_{\vec{v}'} \overrightarrow{AB}$,

$Pr_{\vec{n}} \overrightarrow{AB}$ E

$Pr_{\vec{n}'} \overrightarrow{AB}$,

E REPRESENTE GRAFICAMENTE $A + \vec{v}$,

$A + \vec{v}'$,

$A + \vec{n}$,

$A + \vec{n}'$,

$A + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$,

ETC.

a) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$, $B = (3,4)$,

b) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$, $B = (1,3)$,

c) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$, $B = (3,4)$.

$\overrightarrow{(a,b)} \perp \overrightarrow{(-b,a)}$

$\overrightarrow{(a,b)} \perp k\overrightarrow{(-b,a)}$

HOJE: DOIS MODOS DE CALCULAR DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA.

SEJAM:

$$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}\},$$

ONDE $\vec{v}$ É UM VETOR DIRETOR E $\vec{n}$ É UM VETOR NORMAL PARA A RETA r; E SEJA $B \in \mathbb{R}^2$.

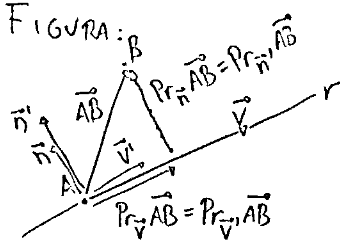
SEJAM $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

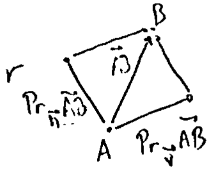
E $\vec{n}' = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PEDI PRA VOCÊS REPRESENTAREM GRAFICAMENTE

$A + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$,
$A + Pr_{\vec{v}'}\overrightarrow{AB}$,
$A + Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}$,
$A + Pr_{\vec{n}'}\overrightarrow{AB}$.

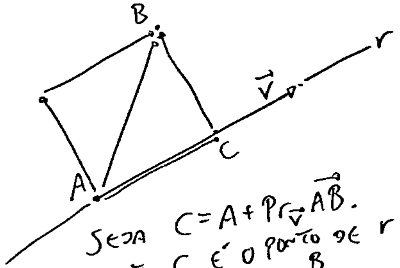
FIGURA:





$$\underbrace{Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}}_{\text{PARTE PARALELA A } r} + \underbrace{Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}}_{\text{PARTE ORTOGONAL A } r} = \overrightarrow{AB}$$

...ISTO DECOMPÕE O VETOR $\overrightarrow{AB}$ NUMA PARTE PARALELA A r E UMA PARTE ORTOGONAL A r!



SEJA $C = A + Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$.
ENTÃO C É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B,
E $d(B,r) = d(B,C)$
$= \|\overrightarrow{CB}\|$
$= \|Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}\|$
$= \|Pr_{\vec{n}'}\overrightarrow{AB}\|$

$$= \left\| \frac{\vec{n}' \cdot \overrightarrow{AB}}{\underbrace{\vec{n}' \cdot \vec{n}'}_{1}} \underbrace{\vec{n}'}_{\text{NORMA } 1} \right\|$$
$$= |\vec{n}' \cdot \overrightarrow{AB}| \, \underbrace{\|\vec{n}'\|}_{1}$$
$$= |\vec{n}' \cdot \overrightarrow{AB}|$$

FÓRMULAS PRA CALCULAR $d(B,r)$:

(1) $d(B,r) = |\vec{n}' \cdot \overrightarrow{AB}|$
$= \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \overrightarrow{AB} \right|$
$= \frac{1}{\|\vec{n}\|} |\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|$

TESTES:

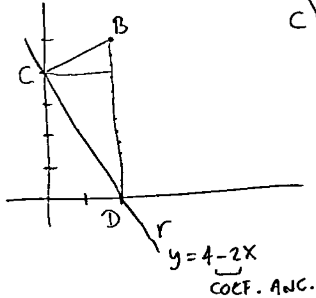
a) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$, $B = (3,4)$
b) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$, $B = (1,3)$
c) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$, $B = (3,4)$
d) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$, $B = (2,5)$
e) idem, $B = (99,200)$
f) idem, $B = (x,y)$

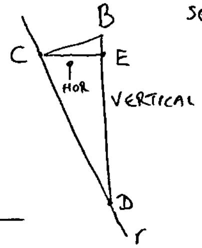
FAÇAM OS ITENS d, e E f EM CASA.
O f É MUITO IMPORTANTE!

(2) $d(B,r) = ?$

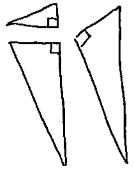
SE O COEF. ANG. DE r É m...

EXEMPLO: TESTE d.

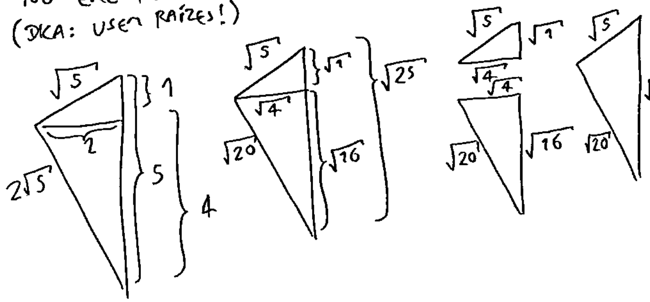




TRIÂNGULOS SEMELHANTES:

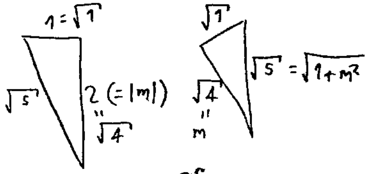


NO EXEMPLO:
(DICA: USEM RAÍZES!)



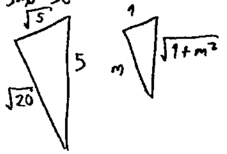
1º TRUQUE:
ESSES TRÊS TRIÂNGULOS SÃO SEMELHANTES.

2º TRUQUE:

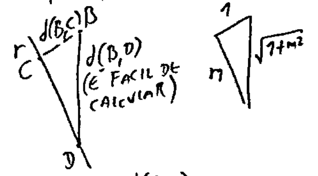


ESSES DOIS TRIÂNGULOS NOVOS SÃO SEMELHANTES AOS ANTERIORES...

3º TRUQUE:
ESTES DOIS TRIÂNGULOS SÃO SEMELHANTES:



4º TRUQUE: CASO GERAL:



$$d(B,C) = \frac{d(B,D)}{\sqrt{1+m^2}}$$

GA 18/out/2017

Hoje: a segunda fórmula pra calcular distância entre ponto e reta!

Obs: o mais importante é aprender a encontrar fórmulas e testar se a fórmula que você encontrou parece estar certa...

Mais adiante vocês vão ter que encontrar fórmulas e testá-las vocês mesmos bem mais rápido do que a gente está fazendo agora.

Sejam:

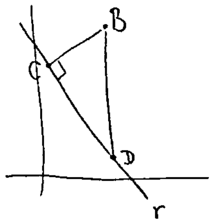
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx+b\}$,

$B = (B_x, B_y)$,

C o ponto de r mais próximo de B,

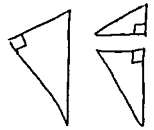
$D = (D_x, D_y)$ um ponto de r que está na mesma reta vertical que B.

Truque:

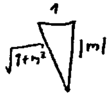


A fórmula vai ser baseada em triângulos (retângulos) semelhantes.

Estes três triângulos são semelhantes,



e eles são semelhantes a este triângulo aqui:



Casos fáceis:

a) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$, $B = (3,4)$

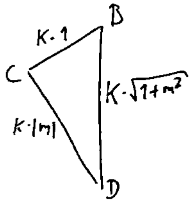
b) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$, $B = (2,4)$

c) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$, $B = (3,3)$

Sugestão:

1. Comece desenhando os triângulos nos três "casos fáceis" acima e verifique que eles são semelhantes.

Depois:



2. Exercício: encontre uma fórmula para $d(B,D)$ — use estes casos extras:

d) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$, $B = (42, 99)$

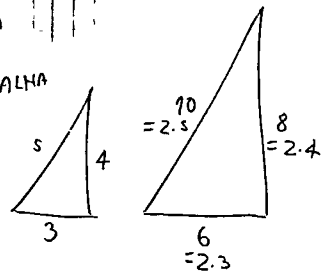
e) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\}$, $B = (B_x, B_y)$

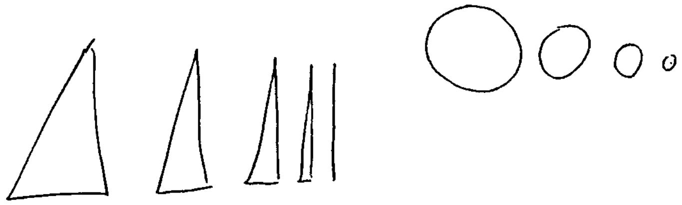
f) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx+b\}$, $B = (B_x, B_y)$.

3. Encontre o k em cada um dos casos fáceis a, b, c, d, e, f.

4. Encontre fórmulas para $\frac{d(B,C)}{d(B,D)}$ e $\frac{d(B,D)}{d(B,C)}$.

5. Encontre uma fórmula para $d(B,C)$ que valha para o "caso fácil" f e teste-a nos "casos fáceis" anteriores.





GA 30/05/2017

SÓ CONSEGUI CHEGAR DO RIO AGORA (15:00), ENTÃO MUITA GENTE JÁ DEVE TER IDO EMBORA... TUDO QUE A GENTE VAI VER AGORA A GENTE VAI REVER NA AULA QUE VEM.

HOJE: ÂNGULOS!

(AVISO: AGORA A PÁGINA DO CURSO TEM LINKS PRA 10 LISTAS DE EXERCÍCIOS DA ANA ISABEL. DEEM UMA OLHADA E TENTEM FAZÊ-LOS!)

1ª IDÉIA:

SE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO UNITÁRIOS E ORTOGONAIS, SEJA $\vec{w}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$... ⇦ (1)

ENTÃO $\vec{w}_\theta$ É UNITÁRIO ⇦ (2)

E $\operatorname{ANG}(\vec{u}, \vec{w}_\theta) = \theta$. ⇦ (3)

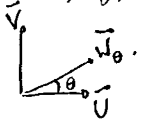
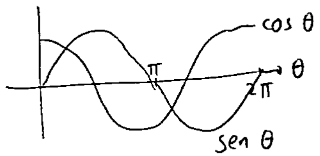


TABELA:

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	θ (EM RADIANOS)
0°			0
90°			
180°			
270°			
360°			2π
45°			



PRA ENTENDER O (1) VAMOS COMEÇAR FAZENDO $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$ E $\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$.

(4) EXERCÍCIO: CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE $\vec{w}_{0°}$, $\vec{w}_{90°}$, $\vec{w}_{180°}$, $\vec{w}_{270°}$, $\vec{w}_{360°}$, $\vec{w}_{45°}$.

A GENTE VAI PRECISAR SABER OS SENOS E COSSENOS DE TODOS OS ÂNGULOS DA FORMA

$$k \cdot 90°,$$
$$k \cdot 90° + 30°,$$
$$k \cdot 90° + 45°,$$
$$k \cdot 90° + 60°$$

PARA $k \in \mathbb{Z}$.

(5) COMPLETE A TABELA:

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$
0°	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$
30°	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
90°		
120°		$\sqrt{1}/2$
135°		$\sqrt{2}/2$
150°		$\sqrt{3}/2$
180°		
210°		
225°		
240°		
270°		
300°		
315°		
330°		
360°		

(6) EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE, NO OLHÔMETRO, $\vec{w}_{0°}$, $\vec{w}_{90°}$, $\vec{w}_{180°}$, $\vec{w}_{270°}$, $\vec{w}_{30°}$, $\vec{w}_{45°}$, $\vec{w}_{60°}$ NO CASO EM QUE $\vec{u} = \overrightarrow{(0.8, 0.6)}$ E $\vec{v} = \overrightarrow{(-0.6, 0.8)}$.

(7) A REGRA DO COSSENO DIZ O SEGUINTE:

a) SE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO UNITÁRIOS E ORTOGONAIS E $\vec{w}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}$ ENTÃO $\vec{u} \cdot \vec{w}_\theta = \cos\theta$,

b) SE $\vec{u}$ E $\vec{w}$ SÃO DOIS VETORES NÃO-NULOS QUAISQUER ENTÃO $\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\| \cos \operatorname{ANG}(\vec{u}, \vec{w})$.

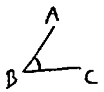
UM PROBLEMA DA P1 DO SEMESTRE PASSADO QUE SÓ UMA OU DUAS PESSOAS ACERTARAM:

4) SEJAM $A = (1,1)$, $B = (3,1)$, $C = (3,2)$, $A' = (4,1)$, $B' = (7,2)$.

4a) ENCONTRE UM PONTO C' QUE FAÇA OS TRIÂNGULOS ABC E $A'B'C'$ SEREM SEMELHANTES.

4b) VERIFIQUE QUE $A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$ E QUE $B\hat{A}C = B'\hat{A'}C'$.

(CADA ITEM VALIA 1 PONTO.)



OBS: $\cos A\hat{B}C = \cos \operatorname{ANG}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|}$ ...

CALCULE $\cos A\hat{B}C$ E $\cos B\hat{A}C$.

GA 1º/NOV/2017

HOJE: ÂNGULOS
(NUMA ORDEM DIFERENTE DA DA AULA PASSADA)

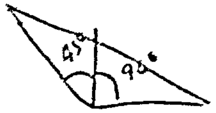
FALTA POUCO PRA TERMINAR A MATÉRIA DA P1 - TALVEZ 3 AULAS - MAS A GENTE TEM QUE MARCAR AS PROVAS...

SUGESTÕES DE DATAS:

P1: ?
P2: 11/DEZ
VR: 13/DEZ
VS: 18/DEZ

EXERCÍCIO:
DESENHE, NO OLHO, TRIÂNGULOS COM UM ÂNGULO α VALENDO:
$90^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

$\alpha = 45^\circ$



~~DICAS~~
EXERCÍCIOS DA AULA PASSADA:

$\frac{\sqrt{1}}{2} = 0.5$

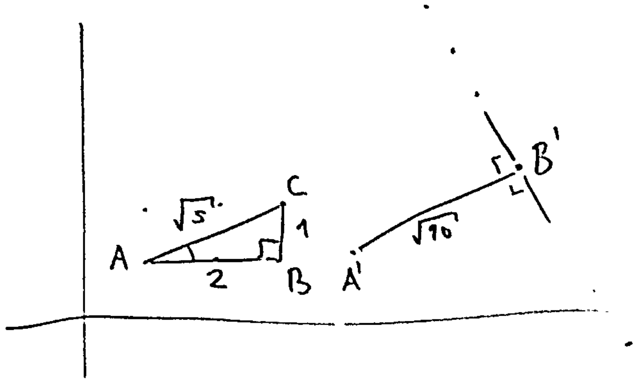
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

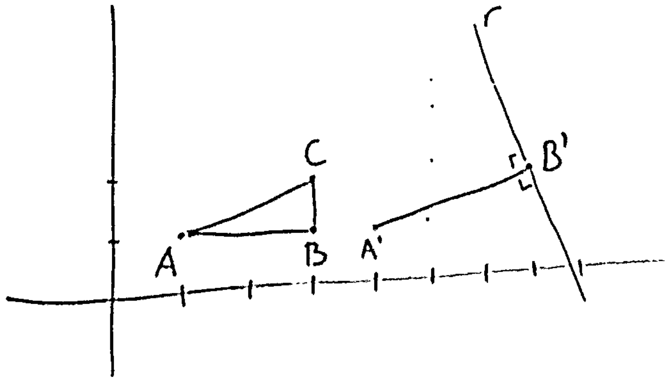
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.85$

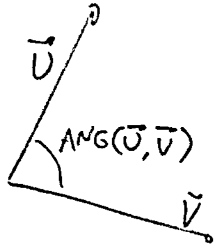
$\sqrt{5} \approx 2.25$

REPRESENTE GRAFICAMENTE

$r = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid A'\hat{B'}P = 90^\circ \}$







Hoje: Áreas e círculos!

Defs: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

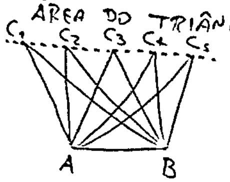
$\det(\overrightarrow{(a,b)}, \overrightarrow{(c,d)}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\text{Área}(\overrightarrow{(a,b)}, \overrightarrow{(c,d)}) = |\det(\overrightarrow{(a,b)}, \overrightarrow{(c,d)})|$

E visualmente?

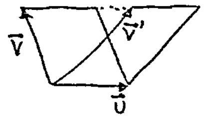
Lembre que a área de um triângulo é $\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$

E que a gente pode deslizar o ponto C paralelamente à base AB sem alterar a área do triângulo...



$\text{Área}(\Delta ABC_1)$
$= \text{Área}(\Delta ABC_2)$
$= \ldots$

A área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo, e podemos usar essa mesma idéia do deslizamento para paralelogramos...



$\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$
$= \text{Área}(\vec{u}, \vec{v}')$
$= \text{Área}(\vec{u}, \vec{v}+k\vec{u})$

As listas de [illegible] estão cheias de problemas que incluem algum passo como este aqui:

Sejam $A=(2,1)$, $B=(4,1)$.

(1) Seja $S = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Área}(\Delta ABC) = 4\}$. Represente graficamente S.

(2) Seja $S' = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6\}$. Represente graficamente S'.

(3) Seja $S'' = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6\}$. Represente graficamente S''.

(4) Sejam $A=(0,1)$, $B=(2,0)$, $S''' = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5\}$. Represente graficamente S'''.

Introdução a círculos

Seja

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9\}$.

O conjunto S é um círculo (juro pra vocês! Depois a gente vai ver porquê...)

E se conseguirmos um número suficiente de pontos de S conseguimos desenhar o círculo, determinar o seu centro e o seu raio, etc.

A primeira coisa que a gente vai ver é como encontrar os "quatro pontos óbvios" que são soluções de equações como a acima.

Truque:

$\underbrace{\underbrace{(\underset{1}{x}-4)}_{-3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{(\underset{3}{y}-3)}_{0}{}^2}_{0} = 9 \Rightarrow (x,y) = (1,3)$

$\underbrace{\underbrace{(x-4)}_{}{}^2}_{0} + \underbrace{\underbrace{(y-3)}_{}{}^2}_{9} = 9$

$\underbrace{\underbrace{(x-4)}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{(y-3)}_{}{}^2}_{0} = 9 \Rightarrow (x,y) =$

$\underbrace{\underbrace{(x-4)}_{}{}^2}_{0} + \underbrace{\underbrace{(y-3)}_{}{}^2}_{9} = 9$

Exercício:

Cada um dos conjuntos abaixo é um círculo. Para cada um deles

a) encontre os 4 pontos óbvios do círculo,

b) represente graficamente o círculo,

c) dê o centro e o raio do círculo.

(5) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4\}$

(6) $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1\}$

(7) $C'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-5)^2 = 1\}$

(8) $C''' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\}$

(9) $C'''' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25\}$

HOJE: CÍRCULOS!

QUASE TODOS OS PROBLEMAS DAS LISTAS DA ANA LONDER SOBRE CÍRCULOS ESCREVEM A EQUAÇÃO DOS CÍRCULOS NESTA FORMA:

$$ax^2+bx+dy^2+ey+f=0 \qquad (1)$$

ONDE $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$.

OS QUE NÓS VIMOS TÊM AS EQUAÇÕES DESTA FORMA:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c \qquad (2)$$

EXERCÍCIOS:

CONVERTA AS SEGUINTES EQUAÇÕES DA FORMA (2) PARA A FORMA (1).

(3) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

(4) $(x+2)^2+(y-3)^2=16$

CONVERTA AS SEGUINTES EQUAÇÕES DA FORMA (1) PARA A FORMA (2):

(5) $x^2+2x+y^2-2y-7=0$

(6) $x^2+y^2+6y-9=0$ (6') $x^2+y^2+6y+9=0$

(7) $x^2+y^2+6y-8=0$

(7') $x^2-y^2=0$

DICA: "COMPLETAR QUADRADOS"...

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$$
$$(x+a)^2+b = x^2+2ax+a^2+b$$
$$(x+a)^2+b-a^2 = x^2+2ax+b$$

PRÓXIMA COISA: INTERSEÇÃO DE CÍRCULOS E RETAS (ALGEBRICAMENTE USANDO BHASKARA)

PREPARAÇÃO:

(8) ESCOLHA DOIS PONTOS I_1, I_2 DE $\mathbb{R}^2$ COM COORDENADAS INTEIRAS; SEJA r A RETA QUE PASSA POR I_1 E I_2; ESCOLHA $C_0 \in \mathbb{R}$ E SEJA C O CÍRCULO QUE TEM CENTRO C_0 E PASSA POR I_1 E I_2.

(9) SEJAM $I_1=(1,2)$ E $I_2=(3,0)$. SE $C_0=(4,0)$ EXISTE UM CÍRCULO C QUE TEM CENTRO C_0 E PASSA POR I_1 E I_2?

(10) SEJAM $I_1=(1,2)$ E $I_2=(3,0)$. REPRESENTE GRAFICAMENTE O CONJUNTO DE TODOS OS PONTOS QUE PODEM SER CENTROS DE CÍRCULOS QUE PASSAM POR I_1 E I_2.

ANTES DA GENTE CONTINUAR, REPRESENTE GRAFICAMENTE ESTES CONJUNTOS:

(11) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-4)^2=25\}$

(12) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-4)^2=16\}$

(13) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-4)^2=9\}$

(14) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-4)^2=0\}$

(15) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-4)^2=-1\}$

(16) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$

(17) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$

VOLTANDO...

SEJAM $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3-x\}$,

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-2)^2=4\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-6x+y^2-4y+9=0\}$

SEJAM (18) E (19) ESTAS EQUAÇÕES:

(18) $y=3-x$

(19) $x^2-6x+y^2-4y+9=0$.

EXERCÍCIOS:

(20) SUBSTITUA CADA "y" NA EQUAÇÃO (19) POR $3-x$ E EXPANDA O QUE VOCÊ OBTEVE; PONHA A SUA EQUAÇÃO NA FORMA $ax^2+bx+c=0$.

(21) RESOLVA A EQUAÇÃO QUE VOCÊ OBTEVE NO (20) POR BHASKARA. CHAME AS DUAS SOLUÇÕES DE x_1 E x_2. QUE VALORES VOCÊ OBTEVE PARA x_1 E x_2?

(22) SEJAM $y_1=3-x_1$, $y_2=3-x_2$, $I_1=(x_1,y_1)$, $I_2=(x_2,y_2)$. REPRESENTE GRAFICAMENTE r, C, I_1, I_2.

GA 13/[illegible]

Hoje: último assunto da matéria da P1: interseção de dois círculos! Precisamos mudar a P1!

O grande truque pra calcular a interseção de dois círculos é que subtraindo as equações de dois círculos uma da outra a gente obtém a equação de uma reta...

Mas só dá pra eu explicar isso direito se vocês terminarem os exercícios da aula passada.

Comecem fazendo do 18 ao 22.

P1: 22/nov
P2: 11/dez
VR: 13/dez
VS: 18/dez

Continuação dos exercícios da aula passada...

Seja $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-0)^2 = 4\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0\}$.

Seja (23) esta equação:
$$x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0.$$

(24) Subtraia as equações (19) e (23). Chame a equação que você obteve de "(24)". Verifique que ela é a equação de uma reta. Chame esta reta de r'.

(25) Represente graficamente C, C', r'.

Algumas definições:

Uma equação de uma cônica é uma equação desta forma,
$$\_x^2 + \_x + \_ + \_xy + \_y + \_y^2 = 0,$$
com cada lacuna "_" substituída por um número.

Uma equação de reta é uma equação desta forma: $\_x + \_y + \_ = 0$.

Uma equação de círculo é uma equação desta forma,
$$x^2 + \_x + y^2 + \_y + \_ = 0$$
ou desta forma:
$$(x - \_)^2 + (y - \_)^2 = \_.$$

(26) Sejam
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25\}$,
$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-0)^2 + (y-3)^2 = 4\}$.

(a) Reescreva a equação de C na forma $x^2 + \_x + y^2 + \_y + \_ = 0$.

(b) Faça o mesmo para C'.

(c) Subtraia as equações (26a) e (26b) uma da outra. Seja r a reta com esta equação.

(27) Represente graficamente C, C' e r.

(28) Encontre as coordenadas dos pontos $I_1, I_2 \in C \cap C'$.

(29) Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(3,4))^2 = 5^2\}$. Ponha a equação de C na forma
$$(x - \_)^2 + (y - \_)^2 = \_$$
e na forma
$$x^2 + \_x + y^2 + \_y + \_ = \_.$$

(30) Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(3,4)) = 5\}$. Encontre uma equação da forma
$$(x - \_)^2 + (y - \_)^2 = \_$$
que é equivalente à equação de C.

(31) Faça o mesmo para
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(a,b)) = R\}$.

Algumas dicas pra estudar pra prova...

I) As listas 1, 2 e 3 da Ana Isabel têm alguns exercícios bem interessantes que exigem converter objetos entre vários formatos, como aqui:

II) Imprimam as fotos dos quadros — alguns quadros têm umas idéias que ninguém entendeu na hora — p.ex. coisas sobre projeções, vetores unitários e distância entre ponto e reta.

III) As provas dos semestres anteriores podem te dar uma noção de quanta criatividade você vai precisar pra fazer a P1.

IV) Se o Telegram não funcionar me mandem e-mail.

CA 27/nov/2012

Hoje: Cônicas!!!

Uma equação de cônica é uma equação desta forma,

ax^2+bx+c
$+dxy+ey$
$+fy^2=0,$

e uma cônica é um conjunto da forma

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bx+c +dxy+ey +fy^2=0\}$

Já vimos algumas cônicas ("degeneradas"): retas, o conjunto vazio, $\mathbb{R}^2$...

As cônicas não-degeneradas são elipses (incluindo círculos), parábolas e hipérboles.

Elipse canônica (um círculo):
$E_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

Parábola canônica:
$P_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$

Hipérbole canônica:
$H_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$

Exercício:
Dê as coordenadas de 5 pontos de E_0, 5 pontos de P_0 e 6 pontos de H_0.

Truque: "pontos óbvios" (nas coordenadas u,v).

Elipses, parábolas e hipérboles nas coordenadas u,v:

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$
$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v=u^2\}$
$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$

Exemplo: se $u=x+y$ e $v=y-2$,

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+y)}_{u}^2+\underbrace{(y-2)}_{v}^2=1\}$

e pra encontrar os 4 pontos óbvios de E a gente faz:

u	v	x	y
0	1	-3	3
0	-1	-1	1
1	0	-1	2
-1	0	-3	2

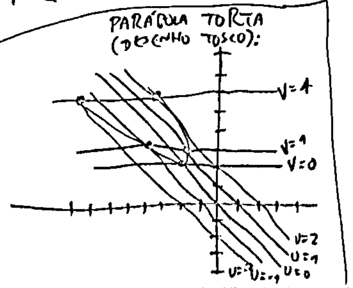
Lembre que a P1 tinha uma questão assim:

4) Vamos definir as "coordenadas ab" da seguinte forma:
$(a,b)_\Sigma=(0,2)+a\overrightarrow{(2,-1)}+b\overrightarrow{(0,1)}$.

a) Represente graficamente
$(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$,
$(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$,
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$.

b) Dê a equação da reta que contém $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$ ("$b=0$"). $y=2-\frac{x}{2}$

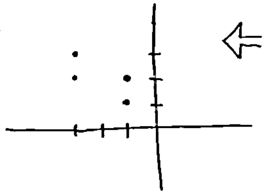
c) Dê a equação da reta que contém $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$ ("$b=1$"). $y=3-\frac{x}{2}$



Obs: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+y)}_{u}^2+(y-2)^2=1\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+2xy+y^2)+(y^2-4y+4)-1=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+0x+3 +2xy-4y +y^2=0\}$

$=$  ⇐ O conjunto E contém estes 4 pontos... Ele é uma elipse torta, mas como desenhá-la?

Próximo truque: desenhe as retas $u=0$, $u=1$, $u=-1$, $v=0$, $v=1$, $v=-1$...

$u=x+y$
$v=y-2$

u	v	x	y
-1	-1		
-1	0		
-1	1		
0	-1		
0	0		
0	1		
1	-1		
1	0		
1	1		

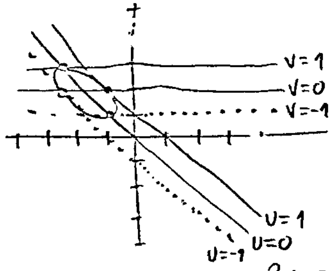
$u=0 \Rightarrow x+y=0$
$\Rightarrow y=-x$

$u=1 \Rightarrow x+y=1$
$\Rightarrow y=1-x$

$v=0 \Rightarrow y-2=0$
$\Rightarrow y=2$

$v=1 \Rightarrow y-2=1$
$\Rightarrow y=3$

Dica: vejam a P2, a VR e a VS do semestre passado — todas elas têm questões sobre cônicas tortas.



A elipse $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$ está sempre numa "caixa" delimitada pelas retas $u=1$, $u=-1$, $v=1$, $v=-1$...

Exercício (meio pra agora e meio pra casa):
Represente graficamente estes 5 pontos da parábola
$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(y-2)}_{v}=\underbrace{(x+y)}_{u}^2\}$

u	v	x	y
-2	4		
-1	1		
0	0		
1	1		
2	4		

GA 29/nov/2017

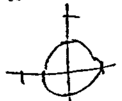
Hoje: HIPÉRBOLES!
(OBS: AINDA ESTAMOS NA FASE DE DESENHAR CÔNICAS - VAMOS VER PROPRIEDADES DELAS DEPOIS)

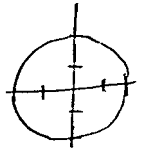
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$
$E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=k\}$
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$
$H_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv=k\}$

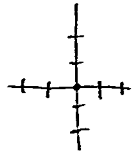
VAMOS COMEÇAR COM O CASO EM QUE $u=x$ E $v=y$.

FATO: E_0 E H_0 SÃO FÁCEIS DE DESENHAR E NOS AJUDAM A DESENHAR E E H.

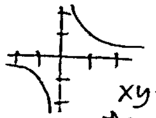
REPARE QUE:

$E_1 =$ 

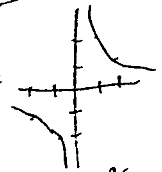
$E_4 =$ 

$E_0 =$ 

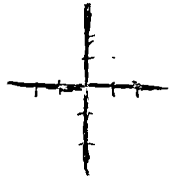
$E_{-1} = \emptyset$

$H_1 =$ 

$xy=1$
$\Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$H_2 =$ 

$y = 2/x$

$H_0 =$ 

$xy=0$

OBS:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-2x)(y+3x)=0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y-2x=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y+3x=0\}$

PONTOS ÓBVIOS DO H_1:

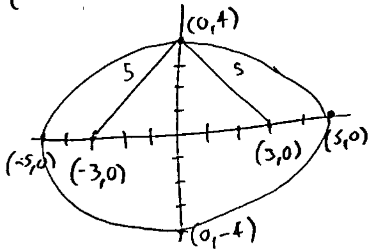
u	v
1	1
2	1/2
1/2	2
-1	-1
-2	-1/2

E_0 É PONTO ← CENTRO DE E_1, E_4, ETC.
H_0 É DUAS RETAS ← ASSÍNTOTAS DE H_1, H_2, H_{-1}, ETC.
(DEGENERADOS)

NOS EXERCÍCIOS DA AULA PASSADA NÓS USAMOS $u=x+y$ E $v=y-2$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE
$H_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+y)}_{u}\underbrace{(y-2)}_{v}=0\}$
$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x+y)}_{u}\underbrace{(y-2)}_{v}=1\}$
$H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(y-2)=2\}$
$H_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(y-2)=-1\}$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(-3,0)) + d((x,y),(3,0)) = 10\}$



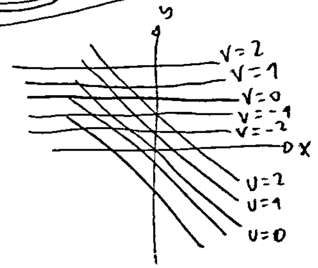
UMA CONTA MUITO GRANDE (QUE A GENTE VAI PRECISAR PRA PROVAR UMAS COISAS SOBRE FOCOS DE ELIPSES E HIPÉRBOLES, E QUE VOCÊS NÃO PRECISAM DECORAR, SÓ ENTENDER, E QUE VAI SER DADA NA PROVA):

$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$
$\Rightarrow (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 = C^2$
$\Rightarrow A + 2\sqrt{AB} + B = C^2$
$\Rightarrow 2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$
$\Rightarrow (2\sqrt{AB})^2 = (C^2-A-B)^2$
$\Rightarrow 4AB = C^2(C^2-A-B)$
$\quad - A(C^2-A-B)$
$\quad - B(C^2-A-B)$
$= C^4 - AC^2 - BC^2$
$\quad - AC^2 + A^2 + AB$
$\quad - BC^2 + AB + B^2$
$= C^4 - 2AC^2 - 2BC^2$
$\quad + A^2 + 2AB$
$\quad + B^2$

$0 = C^4 - 2AC^2 - 2BC^2$
$\quad + A^2 - 2AB$
$\quad + B^2$
$= C^2(C^2-2A-2B) + (A-B)^2$
$= C^2(C^2-2(A+B)) + (A-B)^2$

$\sqrt{A} - \sqrt{B} = C$
$\Rightarrow (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2 = C^2$
$\Rightarrow A - 2\sqrt{AB} + B = C^2$
$\Rightarrow -2\sqrt{AB} = C^2 - A - B$
$\Rightarrow (-2\sqrt{AB})^2 = (C^2-A-B)^2$

UM EXEMPLO DE USO:
$d((x,y),(-3,0)) + d((x,y),(3,0)) = 10$
$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10$
$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{x^2+6x+9+y^2}_{A}} + \sqrt{\underbrace{x^2-6x+9+y^2}_{B}} = \underbrace{10}_{C}$
$\Rightarrow A+B = 2(x^2+y^2+9)$
$A-B = 12x$
$C = 10$ $\Rightarrow 0 = 10^2(10^2-2(A+B)) + (12x)^2$
$= 10^4 - 200 \cdot 2(x^2+y^2+9)$
$+ 144x^2$



GA 4/DEZ/20

(USAMOS OS QUADROS DO FIM DO SEMESTRE PASSADO)

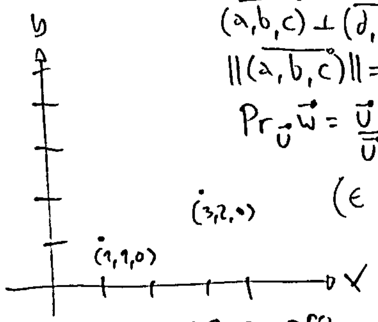
HOJE: $\mathbb{R}^3$!

(A GENTE FICOU DE VER FOCOS DE ELIPSES E HIPÉRBOLES, MAS ISSO É FÁCIL, VAMOS DEIXAR PRA DEPOIS).

- DISTÂNCIA ENTRE PONTOS EM $\mathbb{R}^3$
- RETAS EM $\mathbb{R}^3$
- PLANOS EM $\mathbb{R}^3$
- JEITOS ALGÉBRICOS DE DESCREVER RETAS E PLANOS EM $\mathbb{R}^3$

VISUALIZAÇÃO

A GENTE NÃO VAI USAR AS TÉCNICAS DE GD... COMO A GENTE TEM POUCO TEMPO A GENTE VAI USAR ALGO TOSCO E RÁPIDO.



O PLANO DO QUADRO É $z=0$

PLANOS

TENTE VISUALIZAR TAMBÉM ESTES PLANOS AQUI:

$\Pi_d = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z\}$

$\Pi_e = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y\}$

(DICA: COMECE DESCOBRINDO ALGUNS PONTOS, OU RETAS, CONTIDOS NESTES PLANOS)

$\Pi_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$

$\Pi_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\}$

OPERAÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ QUE PODEM SER ADAPTADAS PRA $\mathbb{R}^3$...

$\overrightarrow{(a,b,c)} + k\overrightarrow{(d,e,f)}$

$\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = ad+be+cf$

$\overrightarrow{(a,b,c)} \perp \overrightarrow{(d,e,f)} = (\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = 0)$

$\|\overrightarrow{(a,b,c)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(a,b,c)}}$

$Pr_{\vec{u}} \vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \vec{u}$

(E DETERMINANTE)

NOVIDADE

$\mathbb{R}^3$ TEM DOIS PRODUTOS DIFERENTES!!!

ESTE, E UM OUTRO, QUE A GENTE ESCREVE COM UM "x" NO LUGAR DO ".".

DEFINIÇÃO (ABSTRATA)

O "PRODUTO VETORIAL", "x", RETORNA UM VETOR; O "PRODUTO ESCALAR", ".", RETORNA UM ESCALAR (UM NÚMERO) E:

SEJAM:

$\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)}$,

$\vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)}$,

$\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$.

O PRODUTO "x" É A ÚNICA OPERAÇÃO QUE OBEDECE:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$ $(=\overrightarrow{(0,0,0)})$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

OBS: EM $\mathbb{R}^2$ $\vec{0} = \overrightarrow{(0,0)}$.

E É DISTRIBUTIVO NO SEGUINTE SENTIDO:

$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$ $\quad (a\vec{u})\times(b\vec{v}) = ab(\vec{u}\times\vec{v})$.

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

EXEMPLO:

$\overrightarrow{(2,0,0)} \times \overrightarrow{(0,3,4)} = \overrightarrow{(2,0,0)} \times \overrightarrow{(0,3,0)} + \overrightarrow{(2,0,0)} \times \overrightarrow{(0,0,4)}$

$= 2\cdot3\cdot\underbrace{\overrightarrow{(1,0,0)}}_{\vec{i}} \times \underbrace{\overrightarrow{(0,1,0)}}_{\vec{j}} + 2\cdot4\cdot\underbrace{\overrightarrow{(1,0,0)}}_{\vec{i}} \times \underbrace{\overrightarrow{(0,0,1)}}_{\vec{k}}$

$= 2\cdot3\cdot\underbrace{\overrightarrow{(0,0,1)}}_{\vec{k}} + 2\cdot4\cdot\underbrace{\overrightarrow{(0,-1,0)}}_{-\vec{j}}$

$= \overrightarrow{(0,0,6)} + \overrightarrow{(0,-8,0)}$

$= \overrightarrow{(0,-8,6)}$

EXERCÍCIO: ENTENDA A FÓRMULA 3 NOS CASOS EM QUE $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ SÃO VETORES "SIMPLES" COMO $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

EXISTEM VÁRIOS MÉTODOS RÁPIDOS PRA CALCULAR $\overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)} \times \overrightarrow{(v_1,v_2,v_3)}$

O RESULTADO É: $\overrightarrow{(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)}$

PROPRIEDADES DO "x"

1. $\vec{u}\times\vec{v}$ SEMPRE DÁ UM VETOR ORTOGONAL A $\vec{u}$ E A $\vec{v}$... I.E., $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$ E $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$.
2. SE $\vec{u}\perp\vec{v}$ ENTÃO $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$
3. $\vec{u}\times\vec{v}$ É UM "PEDAÇO DA CONTA DO DETERMINANTE"...

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \det[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

$(\overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)} \times \overrightarrow{(v_1,v_2,v_3)}) \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

GA 6/set/2017

O que a gente vai ver agora, sobre determinante e '×', é praticamente uma preparação pra Álgebra Linear...

Vamos chamar os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de "vetores muito simples", e os vetores "simples" vão ser os destas formas aqui: $\overrightarrow{(a,0,0)}, \overrightarrow{(0,b,0)}, \overrightarrow{(0,0,c)}$.

Tudo que a gente vai ver hoje deve ser entendido primeiro para vetores "muito simples" e "simples", e depois a gente vai "entortar" os vetores de um modo que não altera o resultado.

Dica: Faça em casa este exercício que eu passei no final da última aula...

Eu disse que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$; (☆)

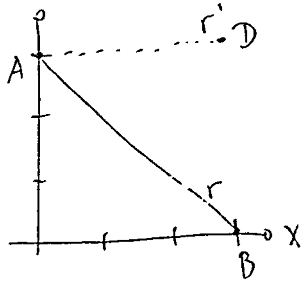
Verifique esta fórmula em vários casos para entender porque ela vale.

1. Verifique (☆) para $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ muito simples,
2. Verifique (☆) para $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ simples,
3. Verifique (☆) para $\vec{u},\vec{v}$ simples e $\vec{w}$ qualquer.

Exercícios (pra agora): P.34, exs a e b.

Dica: Faça este exercício em casa:

Sejam $A=(0,3,0)$, $B=(3,0,0)$, $C=(0,3,3)$; $D=(3,3,0)$, r a reta que passa por A e B, r' a reta que passa por C e D, s uma reta ortogonal a r e r' e que corta ambas.

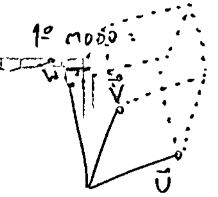


$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$

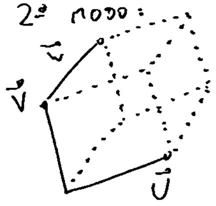
$r' = \{C + t'\overrightarrow{CD} \mid t'\in\mathbb{R}\}$

Na p.36, pros "usos" 4 em diante, a gente pode precisar de dois modos diferentes de definir "cubos tortos" a partir de 3 vetores...

1º modo:



2º modo:



Como a gente pode entender o "uso 6" com vetores simples?

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0,0)}$

$\vec{v} = \overrightarrow{(0,3,0)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,4)}$

$A = (0,1,0)$

$B = A + \vec{w} = (0,1,4)$

Visualizem r, r' e descubram no olhômetro:

- $d(r,r')$,
- o ponto $(A+t\vec{u})\in r$ mais próximo de r',
- o ponto $(B+t'\vec{v})\in r'$ mais próximo de r,
- t,
- t'.

Próximo passo: entortar o problema!

E se a gente usa

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0,0)}$,

$\vec{v} = \overrightarrow{(0,3,0)}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{(1,2,4)}$,

$A = (0,1,0)$,

$B = A + \vec{w} = (1,3,4)$?

Como é que a gente visualiza o "volume" e a "área" na fórmula $d(r,r') = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]/\text{área}(\vec{u},\vec{v})$