GA 21/AGO/2017

HOJE: INTRODUÇÃO!

PÁGINA DO CURSO:

PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PARA QUALQUER SUBPÁGINA DO http://angg.twu.net/ E CLIQUE EM "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA!

CHUTAR E TESTAR

QUAIS SÃO AS SOLUÇÕES DE

$$(x-2)(x+3)=0 \, ?$$

TEM FOTOS DOS QUADROS!

NÓS VAMOS USAR ALGUNS OBJETOS MATEMÁTICOS QUE VOCÊS NUNCA VIRAM:

PONTOS E VETORES

PARECIDOS COM AS MATRIZES QUE VOCÊS VIRAM NO ENSINO MÉDIO, MAS...

... ANTES DA GENTE VER PONTOS E VETORES A GENTE VAI VÁRIAS NOTAÇÕES PRA CONSTRUIR CONJUNTOS...

PAGS 6 E 7: EXERCÍCIOS

PAG 8: GABARITO.

PAGS 4 E 5: EXPLICAÇÕES

TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS!

GA 23/agosto/2017

Hoje: primeira aula de verdade! :)

Exercícios de conjuntos ("set comprehensions") no "material para exercícios" — tem link pra ele na página do curso.

Exercícios:
Pags 6 e 7.

Explicações, truques, etc:
Pags 4 e 5.

Gabarito:
Pag 8.

P.7:

$\{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$

$\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

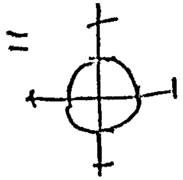
$\{1,2,3\}^2$

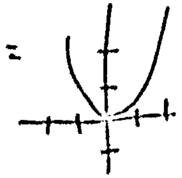
5) $P := \{(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\}$

O exercício 6 não tem gabarito !!

6) $L' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2\}$ ← Reta (um conjunto infinito de pontos!)

Exemplos (vamos ver depois):

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} =$ 

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} =$ 

GA 28/AGO/2017

Hoje:

- Terminar os exercícios de construir conjuntos (inclusive os de conjuntos infinitos do exercício 6)
- Como provar que dois conjuntos são iguais? Como provar que eles são diferentes?
- Introdução a pontos e vetores e às operações sobre pontos e vetores
- Trajetórias

Dica:

Façam o 3B

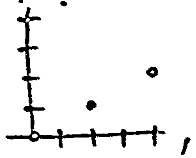
esta variação dele:

$B' := \{(x, x/2) \mid x \in \{0,1,2,3,4\}\}$

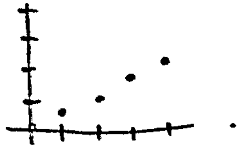
Façam o 5L:

$L := \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y = x/2\}$

E sejam:

$L' =$ 

$(1, 1/2) \in L'$

$L'' =$ 

$(1, 1/2) \in L''$

Dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos pontos, e diferentes quando algum deles têm um ponto que o outro não tem.

Exemplos:

$\{2,3,3,4\} = \{2,3,4\}$

$\{0,1,2,3\} \neq \{0,1,2,4\}$

$3 \in \{0,1,2,3\}$, $3 \notin \{0,1,2,4\}$

Mostre que os conjuntos L' e L'' à esquerda são diferentes — pra fazer isto **formalmente** você tem que mostrar que algum ponto (bem escolhido!) pertence a um deles e não a outro.

Obs: se $x=0$,

$$\underbrace{(\underbrace{x}_{0},\ \underbrace{2 - \underbrace{\underbrace{x}_{0}/2}_{0}}_{2})}_{(0,2)}$$

se $x=1$,

$$\underbrace{(\underbrace{x}_{1},\ \underbrace{2 - \underbrace{\underbrace{x}_{1}/2}_{0.5}}_{1.5})}_{(1,1.5)}$$

$x=3$ $\quad \frac{2-3}{2}$ $\quad 4-3 = \frac{1}{2}$

GA /AGO/2017

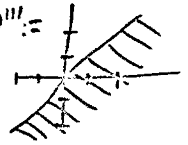
EXERCÍCIO 6:

$P' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$

EXTRAS:

$P'' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$

$P''' :=$

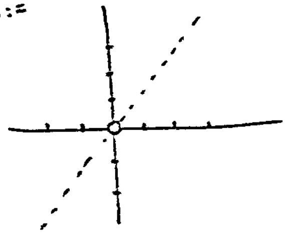


$(0,0) \in P'''$ (sim)

$P' \neq P''$

$(0,0) \in P'$, $(0,0) \notin P''$

A:=



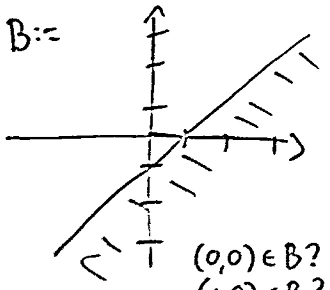
$(0,0) \in A$? AMBÍGUO

$(1,0) \in A$? NÃO

$(1,1) \in A$? AMBÍGUO

$(0,1) \in A$? NÃO

B:=



$(0,0) \in B$? NÃO

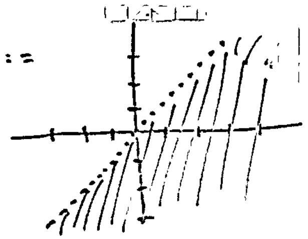
$(1,0) \in B$? SIM

$(1,1) \in B$? NÃO

$(0,1) \in B$? NÃO

$(0.5, 0) \in B$? NÃO

$P'' :=$



O CONJUNTO TEM TODOS OS PONTOS ABAIXO DA DIAGONAL $y=x$ E NÃO INCLUI A DIAGONAL $y=x$.

$(0,0) \in P''$? NÃO

$(1,0) \in P''$? SIM

$(1,1) \in P''$? NÃO

$(0,1) \in P''$? NÃO

$(0.5,0) \in P''$? SIM

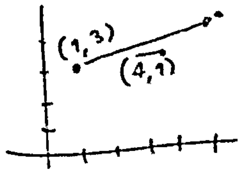
PONTOS E VETORES (INTRODUÇÃO)

DEPOIS A GENTE VAI VER A INTERPRETAÇÃO GRÁFICA...

PRA NÃO TER AMBIGUIDADES A GENTE VER A INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA PRIMEIRO E SÓ DEPOIS A GENTE QUE ELA CORRESPONDE A:

"PONTOS" SÃO PONTOS MESMO

"VETORES" SÃO DESLOCAMENTOS.



OBS:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120 & 0\\ 340 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}100 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100 & 200\\ 10 & 20\end{pmatrix}$$

FAÇAM OS EXERCÍCIOS DA P.1, USANDO A NOTAÇÃO QUE INDICA QUE REGRA VOCÊ ESTÁ USANDO:

$$\underbrace{(2,3) + \underbrace{(\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)})}_{\text{[REGRA 2]} \; = \overrightarrow{(14,25)}}}_{\text{[REGRA 1]} \; = (16,28)}$$

GA /AGO/2017

... AGORA VAMOS VER UM MONTE DE COISAS QUE SÃO CONSEQUÊNCIAS DAS REGRAS 1 ATÉ 7.

SERÁ QUE ESSAS OPERAÇÕES NOVAS SÃO COMUTATIVAS?

EM MATRIZES $AB \neq BA$

ESSA NOTAÇÃO DIZ QUE SE A E B SÃO MATRIZES "AB = BA" É FALSA

OBS: "AB = BA É VERDADEIRA" QUER DIZER "AB = BA É VERDADEIRO SEMPRE."

"AB ≠ BA" QUE NEM SEMPRE AB = BA.

PAG. 10:

SERÁ QUE ESSAS PROPRIEDADES SÃO VERDADEIRAS QUANDO $A, B, C \in \mathbb{R}$?

$A \cdot B = B \cdot A$? SIM

$A + B = B + A$? SIM

$A - B = B - A$? NÃO.

MÉTODOS PRA VER SE PROPRIEDADES VALEM

1º MÉTODO: CHUTAR E TESTAR.

7)

C1) ( ) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

SE $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$,

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (2,3) + \overrightarrow{(4,5)}$
$= (6,8)$

$\overrightarrow{(c,d)} + (a,b) = \overrightarrow{(4,5)} + (2,3)$
$=$ ERRO

REPARE: ENCONTRAMOS UMA SITUAÇÃO NA QUAL $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$...
("CONTRA-EXEMPLO")

BASTA UM CONTRA-EXEMPLO — NO CASO, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, PRA MOSTRAR QUE A AFIRMAÇÃO GERAL

$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

É FALSA.

OU SEJA:

C1) (F) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

DEMONSTRAÇÃO:

SE $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$

ENTÃO $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (6,8)$
$\overrightarrow{(c,d)} + (a,b) =$ ERRO

AVISOS:

- MEU COMPUTADOR QUEBROU
- NÃO SEI TÃO CEDO DIGITAR (NEM IMPRIMIR) COISAS NOVAS
- VAMOS FAZER AS COISAS NUMA ORDEM UM POUCO DIFERENTE DA DAS FOLHAS

INTRODUÇÃO À REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS E VETORES

LEMBRE QUE A REGRA 1 ERA:

$$\underbrace{(a,b)}_{\text{PONTO}} + \underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{\text{VETOR}} = \underbrace{(a+c,\, b+d)}_{\text{PONTO}}$$

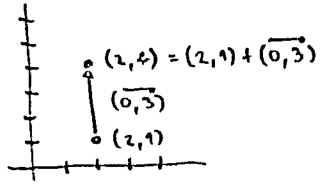
AVISO:

A MATÉRIA É GRANDE DEMAIS - E NÃO VAI DAR TEMPO DA GENTE APRENDER A ESCREVER DIREITO ARGUMENTOS GRÁFICOS - A GENTE SÓ VAI TER TEMPO DE VER AS TÉCNICAS PRA DESENHAR ARGUMENTOS ALGÉBRICOS.

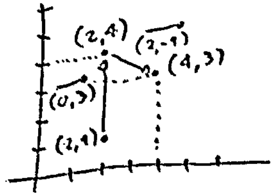
VETORES SÃO DESLOCAMENTOS (SETAS).

EXEMPLO:

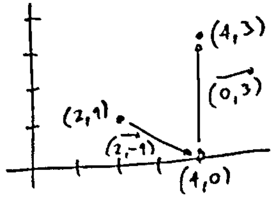
$$(2,1) + \overrightarrow{(0,3)} = (2,4)$$



$$\underbrace{\big((2,1) + \overrightarrow{(0,3)}\big) + \overrightarrow{(2,-1)}}_{(4,3)}, \quad \big((2,1)+\overrightarrow{(0,3)}\big) = (2,4)$$

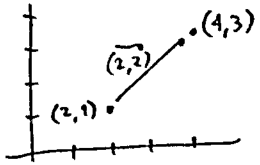


$$\underbrace{\big((2,1) + \overrightarrow{(2,-1)}\big) + \overrightarrow{(0,3)}}_{(4,3)}, \quad \big((2,1)+\overrightarrow{(2,-1)}\big) = (4,0)$$

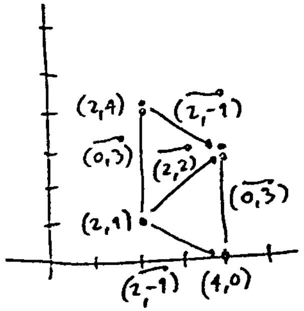


$$\underbrace{(2,1) + \big(\underbrace{\overrightarrow{(2,-1)} + \overrightarrow{(0,3)}}_{\overrightarrow{(2,2)}}\big)}_{(4,3)}$$

$$\underbrace{(2,1) + \big(\underbrace{\overrightarrow{(0,3)} + \overrightarrow{(2,-1)}}_{\overrightarrow{(2,2)}}\big)}_{(4,3)}$$



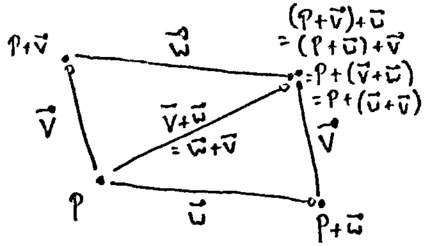
NUM DESENHO SÓ:



"REGRA DO PARALELOGRAMO"

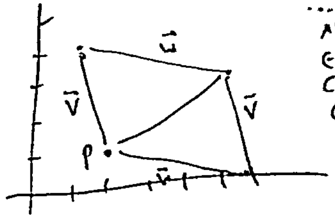
NOS LIVROS ISTO APARECE DESTE JEITO:

SEJAM $A \in \mathbb{R}^2$ E $\vec{v}, \vec{u}$ VETORES.



UM TRUQUE QUE OS LIVROS USAM (E NÃO CONTAM!):

ELES COMEÇAM ESCOLHENDO AS COORDENADAS (OU "COMPONENTES") DE $P, \vec{v}, \vec{w}$,



... E DEPOIS ELES APAGAM OS EIXOS E NÃO CONTAM AS COORDENADAS PRA GENTE!

[illegible]-4/set/2017

AVISOS:

- MEU COMPUTADOR QUEBROU
- NÃO DEU PRA EU DIGITAR (NEM IMPRIMIR) COISAS NOVAS
- VAMOS FAZER AS COISAS NUMA ORDEM UM POUCO DIFERENTE DA DAS FOLHAS

INTRODUÇÃO À REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS E VETORES

LEMBRE QUE A REGRA 1 ERA:

$$\underbrace{(a,b)}_{\text{PONTO}} + \underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{\text{VETOR}} = \underbrace{(a+c,\, b+d)}_{\text{PONTO}}$$

AVISO:

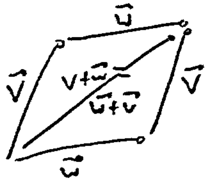
A MATÉRIA É GRANDE DEMAIS – E NÃO VAI DAR TEMPO DA GENTE APRENDER A ESCREVER DIREITO ARGUMENTOS GRÁFICOS – A GENTE SÓ VAI TER TEMPO DE VER AS TÉCNICAS PRA DEDUZIR ARGUMENTOS ALGÉBRICOS.

A PÁGINA 10 DISCUTE PROPRIEDADES (ALGÉBRICAS!) DAS REGRAS 1 A 7...

A GENTE ACABOU DE VER UM ARGUMENTO GRÁFICO QUE MOSTRA QUE

$$\begin{aligned}(P+\vec{v})+\vec{w} &= (P+\vec{w})+\vec{v}\\ &= P+(\vec{w}+\vec{v})\\ &= P+(\vec{v}+\vec{w}),\end{aligned}$$

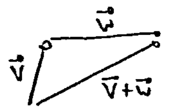
E SE A GENTE APRENDE A DESENHAR VETORES "SEM PONTO DE APOIO", A GENTE ENTENDE QUE



$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

"PORQUE TANTO $\vec{v}+\vec{w}$ QUANTO $\vec{w}+\vec{v}$ CORRESPONDEM À DIAGONAL DO MESMO PARALELOGRAMO".

DÁ PRA DESENHAR $\vec{v}+\vec{w}$ COMO UM TRIÂNGULO:



OBS: $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$??? !!

COMO É QUE A GENTE PROVA AS PROPRIEDADES DA P.10? (AS QUE FOREM VERDADEIRAS!)

DE UM JEITO MAIS CONFIÁVEL QUE SÓ UM DESENHINHO E UMA EXPLICAÇÃO EM PORTUGUÊS...

TRUQUE:
VAMOS ESCREVER AS DEMONSTRAÇÕES COMO UMA SÉRIE DE IGUALDADES, CADA UMA DESSAS IGUALDADES SENDO MUITO FÁCIL DE JUSTIFICAR...

ALIÁS, DUAS SÉRIES.

EXEMPLO:

D6) ( ) $\underbrace{(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)}}_{\text{"LADO ESQ"}} \stackrel{?}{=} \underbrace{a\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)}}_{\text{"LADO DIREITO"}}$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{((a+b)u_1,(a+b)u_2)} \quad \text{(PELA REGRA 6)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)} \quad \text{(PELA DISTRIBUTIVIDADE EM } \mathbb{R}\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{(au_1,au_2)} + \overrightarrow{(bu_1,bu_2)} \quad \text{(REGRA 6 DUAS VEZES)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)}\end{aligned}$$

... UMA SÉRIE DE IGUALDADES SÓ:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot\overrightarrow{(u_1,u_2)} &= \overrightarrow{((a+b)u_1,(a+b)u_2)} && \text{(REGRA 6)}\\ &= \overrightarrow{(au_1+bu_1,\, au_2+bu_2)} && \text{(DISTRIBUTIVIDADE EM } \mathbb{R}\text{)}\\ &= \overrightarrow{(au_1,au_2)} + \overrightarrow{(bu_1,bu_2)} && \text{(REGRA 2)}\\ &= a\overrightarrow{(u_1,u_2)} + b\overrightarrow{(u_1,u_2)} && \text{(REGRA 6 DUAS VEZES)}\end{aligned}$$

~~[illegible]/2017~~

AVISOS:

- MEU COMPUTADOR QUEBROU
- NÃO DEU PRA EU DIGITAR (NEM IMPRIMIR) COISAS NOVAS
- VAMOS FAZER AS COISAS NUMA ORDEM UM POUCO DIFERENTE DA DAS FOLHAS

C1(F) (OK)
C2(V)
C3(F)
C4(F)
C5(F)
C6(F)
C7(V)
A11(V)
A12(V)
D6(V)
D62(V)

C5) SE $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=4$

ENTÃO $\overrightarrow{(a,b)}-\overrightarrow{(c,d)}=\overrightarrow{(-3,-1)}$

$\overrightarrow{(c,d)}-\overrightarrow{(a,b)}=\overrightarrow{(3,1)}$

O "PRODUTO ESCALAR" (OU "PRODUTO INTERNO")

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)}=ac+bd$

VAI SERVIR PRA DEFINIR DUAS OPERAÇÕES NOVAS:

1) $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

E PORTANTO:

$\|\overrightarrow{(a,b)}\|=\sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}$
$=\sqrt{a\cdot a+b\cdot b}$
$=\sqrt{a^2+b^2}$

POR EXEMPLO:

$\|\overrightarrow{(0,3)}\|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{9}=3$

$\|\overrightarrow{(1,1)}\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{(3,4)}\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

PRONÚNCIA: $\|\vec{v}\|$ É A "NORMA" DE $\vec{v}$, OU O "COMPRIMENTO" DE $\vec{v}$.

2) $\vec{v}\perp\vec{w}=(\vec{v}\cdot\vec{w}=0)$

EXEMPLOS:

$\overrightarrow{(2,0)}\perp\overrightarrow{(0,3)}=(\overrightarrow{(2,0)}\cdot\overrightarrow{(0,3)}=0)$
$=(2\cdot0+0\cdot3=0)$
$=(0=0)$
$=$ VERDADEIRO

$\overrightarrow{(1,2)}\perp\overrightarrow{(3,4)}=(\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(3,4)}=0)$
$=(1\cdot3+2\cdot4=0)$
$=(3+8=0)$
$=(11=0)$
$=$ FALSO

PRONÚNCIA: $\vec{v}\perp\vec{w}$ É "$\vec{v}$ É ORTOGONAL A $\vec{w}$"

V/F/JUSTIFIQUE:

N1( ) $\|k\vec{v}\|=k\|\vec{v}\|$

DICA: CHUTAR E TESTAR!

k	$\vec{v}$	$k\vec{v}$	$\|k\vec{v}\|$	$\|\vec{v}\|$	$k\|\vec{v}\|$	$\|k\vec{v}\|=k\|\vec{v}\|$
2	$\overrightarrow{(0,3)}$	$\overrightarrow{(0,6)}$	6	3	6	VERDADEIRO
2	$\overrightarrow{(5,0)}$					
0	$\overrightarrow{(3,4)}$					
1	$\overrightarrow{(3,4)}$					
2	$\overrightarrow{(3,4)}$					
10	$\overrightarrow{(3,4)}$					

SE $k=4$,
$k\cdot k=4\cdot4=16$

GA 6/set/2017

Na aula passada nós definimos a norma de um vetor:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{(a,b)}\| &= \sqrt{\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\\ &= \sqrt{a\cdot a+b\cdot b}\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

E eu disse que $\|\overrightarrow{(a,b)}\|$ calcula o comprimento do vetor $\overrightarrow{(a,b)}$...

E a gente viu evidências de que isso aqui é sempre verdade:

N1) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$.

Como é que a gente prova que N1 é sempre verdade?

Algo equivalente:

N2) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

(para todos os valores de $a,b,k \in \mathbb{R}$).

Podemos tentar fazer uma demonstração de N2...

Vamos usar a técnica de calcular o lado esquerdo e o direito e depois juntar as duas séries de igualdades.

$$\begin{aligned}\|k\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(ka,kb)}\|\\ &= \sqrt{(ka)^2+(kb)^2}\\ &= \sqrt{k^2a^2+k^2b^2}\\ &= \sqrt{k^2(a^2+b^2)}\\ &= k\sqrt{a^2+b^2}\\ &= k\|\overrightarrow{(a,b)}\|\end{aligned}$$

$$k\|\overrightarrow{(a,b)}\| = k\sqrt{a^2+b^2}$$

Deixa eu dar um nome pra demonstração acima: (☆).

Se fizermos $k=2$, $a=3$, $b=4$, (☆) vira:

$$\begin{aligned}\|2\overrightarrow{(3,4)}\| &= \|\overrightarrow{(2\cdot3,2\cdot4)}\|\\ &= \sqrt{(2\cdot3)^2+(2\cdot4)^2}\\ &= \sqrt{2^2\cdot3^2+2^2\cdot4^2}\\ &= \sqrt{2^2(3^2+4^2)}\\ &= 2\sqrt{3^2+4^2}\\ &= 2\|\overrightarrow{(3,4)}\|.\end{aligned}$$

Se fizermos $k=(-2)$, $a=3$, $b=4$, (☆) vira:

$$\begin{aligned}\underbrace{\|(-2)\cdot\overrightarrow{(3,4)}\|}_{10} &\overset{\text{ok}}{=} \|\overrightarrow{((-2)\cdot3,(-2)\cdot4)}\|\\ &\overset{\text{ok}}{=} \sqrt{((-2)\cdot3)^2+((-2)\cdot4)^2}\\ &\overset{\text{ok}}{=} \sqrt{(-2)^2\cdot3^2+(-2)^2\cdot4^2}\\ &\overset{\text{ok}}{=} \sqrt{(-2)^2(3^2+4^2)}\\ &\overset{\text{não}}{=} (-2)\sqrt{3^2+4^2}\\ &\overset{\text{ok}}{=} \underbrace{(-2)\|\overrightarrow{(3,4)}\|}_{-10}\end{aligned}$$

Como descobrir quais dos "="s da (☆) são verdade sempre?

1) Se ele usa regras que a gente conhece, ele vale

A gente tá dando nomes pras regras!

2) Isso vale tanto pras regras com pontos e vetores quanto pras regras com números

3) Se num "=" a gente usa uma regra que não vale o "=" provavelmente vai estar errado.

Exemplo:

$$2\sqrt{9+16} = 2(\sqrt{9}+\sqrt{16})$$

A regra que está sendo usado é esta: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Dica: quando alguém usa alguma regra errada "de cálculo" isso é erro conceitual grave e zera a questão.

...E depois que a gente prova algo a gente pode usar a demonstração sem ter que refazer ela!

Outra dica:

Não tentem consertar proposições erradas e dizer, p.ex., que N2 é verdade quando $k \geq 0$...

Ao invés disso façam outras proposições.

GA 6/set/2017

N1) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

N2) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

N3) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = k\|\overrightarrow{(a,b)}\|$
para $a,b,k \in \mathbb{R}$ e $k \geq 0$,

N4) $\|k\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

Repare que nessas proposições fica implícito que ele vale para todo $k, a, b, \vec{v}$.

Uma demonstração da N4:

$$
\begin{aligned}
\|k\overrightarrow{(a,b)}\| &= \|\overrightarrow{(ka,kb)}\| \\
&= \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\
&= \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\
&= \sqrt{k^2(a^2+b^2)} \\
&\overset{(\star\star)}{=} \sqrt{k^2}\sqrt{a^2+b^2} \\
&= |k|\sqrt{a^2+b^2} \\
&= |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|.
\end{aligned}
$$

OBS: Que regra estamos usando no $(\star\star)$?

$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$?

$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{-4}\sqrt{-9}$?

$\sqrt{36} = 6$ $\qquad (2i)(3i) = -6$!!

A regra é que $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ quando $\alpha, \beta \geq 0$.

OBS: A definição do módulo é: $|x| = \sqrt{x^2}$ e a "$\sqrt{\ }$" sempre retorna números ≥ 0.

Uma proposição estranha:
V/F/justifique:

N5) ( ) $\big\|\, \|\vec{v}\| \cdot \vec{w} \,\big\| = \big\|\, \|\vec{w}\| \cdot \vec{v} \,\big\|$

Exercício:
Teste a N5 para alguns valores de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(Lembre que "valores" não são necessariamente números! Neste caso os valores de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores!)

Outra proposição equivalente:

N6) ( ) $\big\|\, \|\overrightarrow{(c,d)}\| \cdot \overrightarrow{(e,f)} \,\big\| = \big\|\, \|\overrightarrow{(e,f)}\| \cdot \overrightarrow{(c,d)} \,\big\|$

Dica: com um pouco de prática a gente aprende a encontrar valores para c, d, e, f que façam as contas ficarem simples (sem raízes).

OBS: Dá pra provar a N6 por contas do jeito óbvio, que fica grande...

$$
\begin{aligned}
\big\|\, \|\overrightarrow{(c,d)}\| \cdot \overrightarrow{(e,f)} \,\big\| &= \big\|\sqrt{c^2+d^2} \cdot \overrightarrow{(e,f)}\big\| \\
&= \big\|\overrightarrow{(\sqrt{c^2+d^2}\,e, \sqrt{c^2+d^2}\,f)}\big\| \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

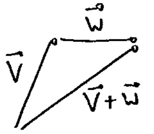
Uma proposição importante (e menos estranha):

N7) ( ) $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

ou, equivalentemente,

N8) ( ) $\|\overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(e,f)}\| = \|\overrightarrow{(c,d)}\| + \|\overrightarrow{(e,f)}\|$

Dica: Lembre que na aula passada nós vimos um jeito de visualizar $\vec{v} + \vec{w}$ como um triângulo:



O que acontece se a gente pega N4 (ou a prova dela) e substitui: $k := \|\overrightarrow{(c,d)}\|$, $a := e$, $b := f$?

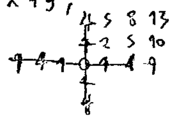
$\|k\,\overrightarrow{(a,b)}\| = |k|\,\|\overrightarrow{(a,b)}\|$

$\Rightarrow \big\|\, \|\overrightarrow{(c,d)}\|\,\overrightarrow{(e,f)} \,\big\| = \big|\,\|\overrightarrow{(c,d)}\|\,\big|\,\|\overrightarrow{(e,f)}\|$

(Não vou completar agora - casa)

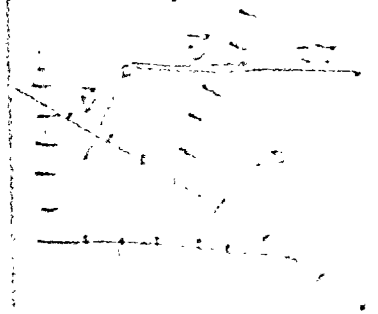
Como é que a gente visualiza (e entende) alguma operação nova? Exemplo: $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Truque (variação do chutar e testar):
1ª parte: Fixe $\vec{v}$, calcule $\vec{v} \cdot \vec{w}$ pra vários valores de $\vec{w}$.
2ª parte: Fazer o mesmo pra vários "$\vec{v}$"s.
3ª parte: Representar isso graficamente - aliás, a gente vai aprender a representar funções $F(x,y)$ graficamente... Exemplo:
$F(x,y) = x^2 + y^2$,



$F(x,y)$

$O=(0,0)$



$\Sigma=(O,\vec{u},\vec{v})$

Folha 12:

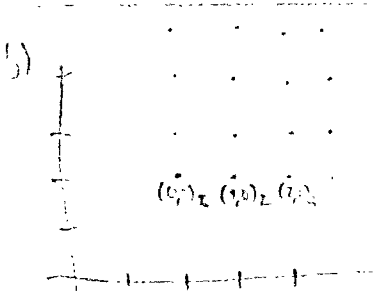
Na folha 15 façam só o exercício 9. ⟸ O mais importante é o 9g.

Lembrem da dica 6 da página 2!
Daí dá pra fazer cada um dos exercícios muito rápido se você descobrir os truques.

Folha 15, exercício 9g:
$F(x,y)=xy$

$F(0,2)=0\cdot2=0$ $\quad F(1,2)=1\cdot2=2$ $\quad F(2,2)=2\cdot2=4$
$F(0,1)=0\cdot1=0$ $\quad F(1,1)=1\cdot1=1$ $\quad F(2,1)=2\cdot1=2$
$F(0,0)=0\cdot0=0$ $\quad F(1,0)=1\cdot0=0$ $\quad F(2,0)=2\cdot0=0$

Na Folha 17 cada exercício tem um "O", um "$\vec{u}$" e um "$\vec{v}$" diferentes que a gente descobre pelo gráfico.
a) $O=(3,1)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(2,?)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(?,?)}$
b) $O=(2,2)$, $\vec{u}=\overrightarrow{(?,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{(?,?)}$



Depois que a gente sabe $O,\vec{u},\vec{v}$ (que são diferentes em cada item!) a gente sabe calcular facilmente os pontos A, B, C, D, E...
Ponto D é $(1,2)_\Sigma = O + 1\vec{u} + 2\vec{v}$

$(0,3)_\Sigma \quad (1,3)_\Sigma \quad (2,3)_\Sigma \quad (3,3)_\Sigma$
$(0,2)_\Sigma \quad (1,2)_\Sigma \quad (2,2)_\Sigma \quad (3,2)_\Sigma$
$(0,1)_\Sigma \quad (1,1)_\Sigma \quad (2,1)_\Sigma \quad (3,1)_\Sigma$
$(0,0)_\Sigma \quad (1,0)_\Sigma \quad (2,0)_\Sigma \quad (3,0)_\Sigma$

GA 13/set/2017

Hoje: coordenadas!

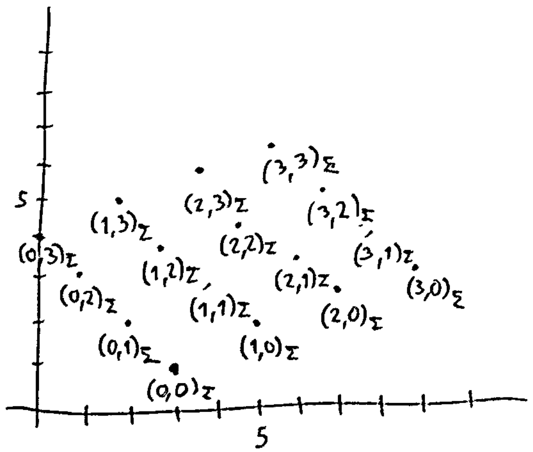
Na aula passada a gente viu como visualizar coisas como $O + a\vec{u} + b\vec{v}$, para $O, \vec{u}$ e $\vec{v}$ fixos...

Na folha 17 tinha uns exercícios disso - cada item tinha um valor para $O, \vec{u}, \vec{v}$ - e eu dei a dica de que quem tivesse dificuldade podia começar representando graficamente os pontos

$(0,3)_\Sigma$, $(1,3)_\Sigma$, $(2,3)_\Sigma$, $(3,3)_\Sigma$,
$(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$, $(3,2)_\Sigma$,
$(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$, $(3,1)_\Sigma$,
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$, $(3,0)_\Sigma$

Fazer hoje - folha 23;
eu trouxe uma cópia pra cada um - é o contrário: na folha 23 a gente vai aprender a encontrar as coordenadas de pontos em vários sistemas de coordenadas.

Exemplo: no item a da folha 17, temos



P. 17:

A partir do momento em que eu digo
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$
fica implícito que isto vale para todos os valores de a e b - por exemplo, se $a=3$ e $b=4$,
$(3,4)_\Sigma = O + 3\vec{u} + 4\vec{v}$

$$(e,f)_{ef} = \underbrace{O_{ef}}_{(1,5)} + e\underbrace{\vec{e}}_{\overrightarrow{(-1,-1)}} + f\underbrace{\vec{f}}_{\overrightarrow{(1,-1)}}$$
$$= (1,5) + e\overrightarrow{(-1,1)} + f\overrightarrow{(1,-1)}$$

GA 18/set/2017

Acabei de pôr 3 livros de GA na página do curso. Todos eles (se não me engano) começam trabalhando com pontos e vetores sem coordenadas.

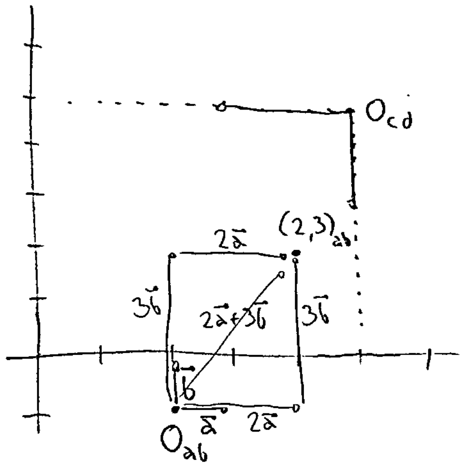
A folha 23 tem uma tabela pra **completar** embaixo.

Dica: o primeiro passo é marcar no plano (xy) os pontos P, Q, R, S, T.

Vocês tem até 15:00 pra terminar essa tabela.

→ 15:15

DICAS:



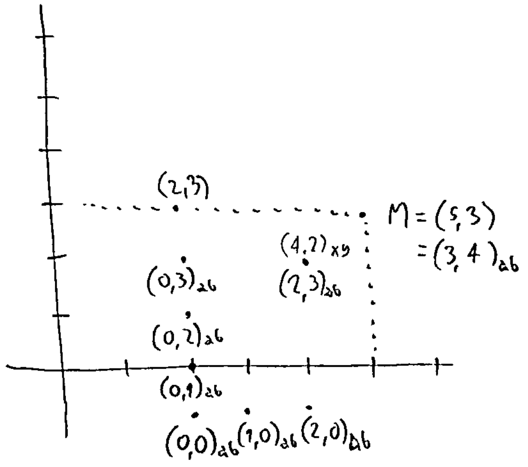
Vocês já sabem encontrar $(2,3)_{ab}$ de dois jeitos diferentes:

1º: conta: $(2,3)_{ab} = O_{ab} + 2\vec{a} + 3\vec{b}$

$= (2,-1) + 2\overrightarrow{(1,0)} + 3\overrightarrow{(0,1)}$

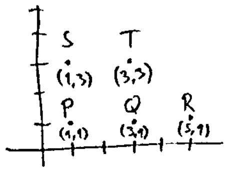
$= (4,2)$

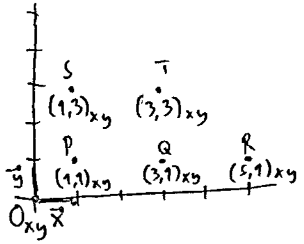
2º: visualmente:

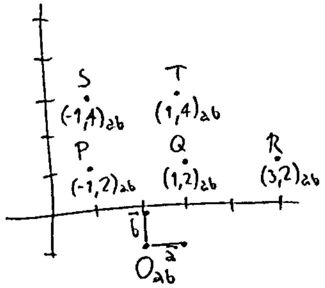


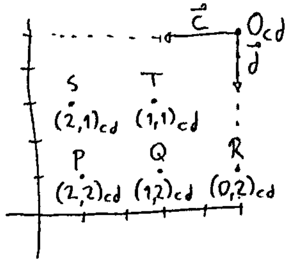
$(5,3) = (3,4)_{ab} = (5,3)_{xy}$

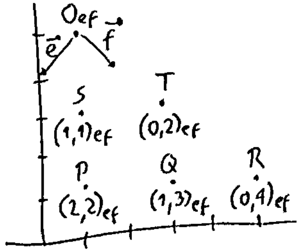
$(2,2)_{cd} = (5,5) + 2\overrightarrow{(-2,0)} + 2\overrightarrow{(0,-2)}$



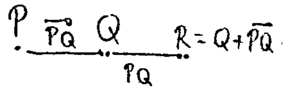


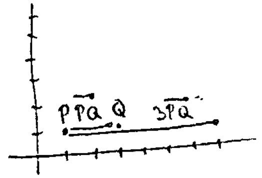






A gente já sabe interpretar <u>visualmente</u> pontos e vetores...





<u>Distâncias</u> são inicialmente definidas como contas...

$d(P,Q)_{xy} = \sqrt{(Q_x-P_x)^2+(Q_y-P_y)^2}$

$= \sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2}$

$= 2$

$d(P,Q)_{ab} = \sqrt{(Q_a-P_a)^2+(Q_b-P_b)^2}$

$= \sqrt{(1-(-1))^2+(2-2)^2}$

$= 2$

$d(P,Q)_{cd} = \sqrt{(Q_c-P_c)^2+(Q_d-P_d)^2}$

$= \sqrt{(1-2)^2+(2-2)^2}$

$= 1$

$d(P,Q)_{ef} = \sqrt{2}$

GA 18/set/2017

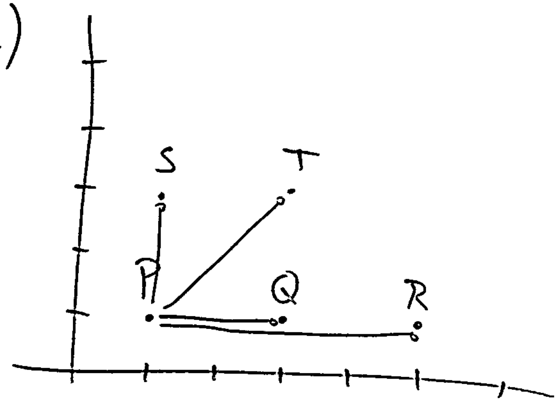
Acabei de pôr 3 livros de GA na página do curso. Todos eles (se não me engano) começam trabalhando com pontos e vetores sem coordenadas.

O exercício 15c é pra gente entender como é que <u>vetores</u> se transformam com mudanças de coordenadas!

$P=(1,1) \quad Q=(3,1) \quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{(2,0)}$

$P=(-1,2)_{ab} \quad Q_{ab}=(1,2)_{ab} \quad \overrightarrow{PQ}_{ab}=\overrightarrow{(2,0)}_{ab}$

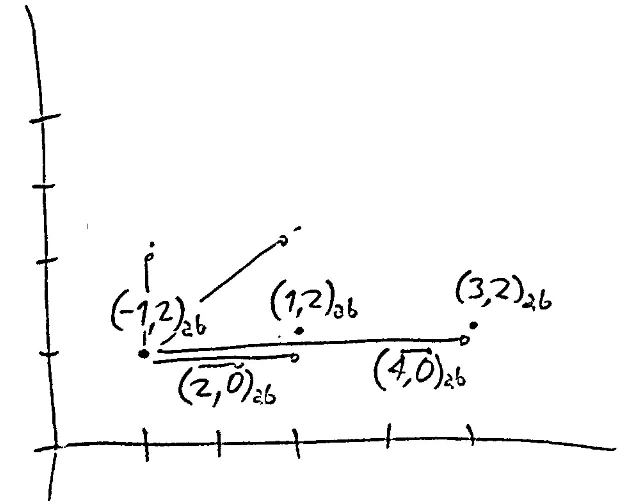
15c)



Pra agora:

Terminem o 15c!

Dica: façam desenhos (como esse aqui).



GA 20/SET/2017

NA AULA PASSADA NÓS FIXAMOS VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS - xy, ab, cd, ef - E VIMOS QUE CADA PONTO - DIGAMOS, P, TINHA COORDENADAS $P_x, P_y, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f$.

NA AULA PASSADA A GENTE A GENTE NÃO VIU DIRETO A RELAÇÃO ENTRE ESSAS COORDENADAS, E A GENTE CALCULOU TUDO POR OLHÔMETRO E CHUTAR-E-TESTAR.

HOJE A GENTE VAI VER O LADO ALGÉBRICO DISSO. UMA APLICAÇÃO - INTERSEÇÃO ENTRE RETAS - VAI SER MUITO IMPORTANTE NESSA PRIMEIRA PARTE DO CURSO, UMA OUTRA VAI SER MUITO IMPORTANTE NA PARTE SOBRE CÔNICAS, E A PARTE SOBRE MATRIZES VAI SER UMA CURIOSIDADE - NÃO VAI SER COBRADA, MAS É ÚTIL PRA ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

QUE EU VOU FAZER, E TUDO NO CURSO SEGUINTE - ÁLGEBRA LINEAR - VAI SER FEITO COM MATRIZES.

SOBRE A FOLHA 21:
NA FOLHA 20 (?) NÓS TÍNHAMOS VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS, E NO ITEM (a) TÍNHAMOS

$$\begin{aligned}(a,b)_\Sigma &= O + a\vec{u} + b\vec{v}\\ &= (4,4) + a\overrightarrow{(-2,1)} + b\overrightarrow{(-1,-2)}\\ &= (4,4) + \overrightarrow{(-2a,a)} + \overrightarrow{(-b,-2b)}\\ &= (4-2a-b,\ 4+a-2b)\\ &= (x,y)\end{aligned}$$

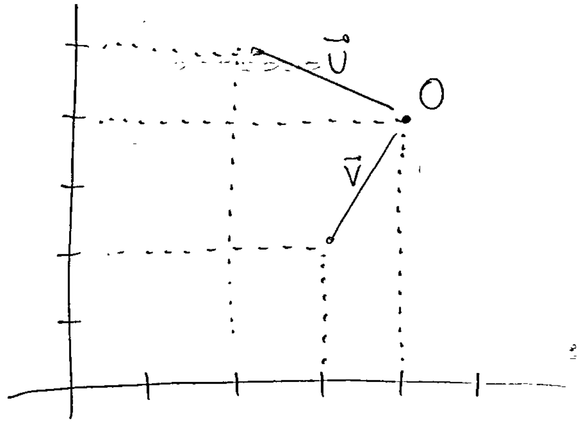
CADA PONTO TEM COORDENADAS x, y, a, b.

$$\begin{array}{ccc} a\ b & & x\ y\\ (0,0)_\Sigma & = & (4,4)\\ (1,1)_\Sigma & = & (1,3)\end{array}$$

POR MATRIZES:

$$\begin{aligned}(a,b)_\Sigma &= \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$



$O + \vec{u} + \vec{v}$

$$\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$$