C2 12/mar/2018

Avisos...

① O curso tem uma página - http://angg.twu.net/2018.1-C2.html
O jeito mais fácil de chegar nela é googlar por "eduardo ochs", ir pra qualquer subpágina do http://angg.twu.net/ e clicar em "C2" na barra de navegação...

② Eu fotografo todos os quadros e ponho na página do curso.

③ Visão geral do curso: depois.

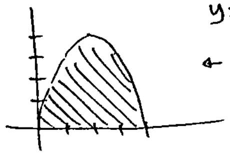
Notação:
$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$$

$x \in (3,3]$

$3<x\le 3$

Tema principal do curso: integral - que tem a ver com áreas e num certo sentido é uma operação inversa à derivação...

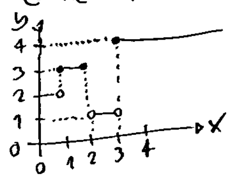
② "Área sob uma curva"



$y=4-(x-2)^2$

← difícil

Vamos calcular a área entre $y=4-(x-2)^2$ e $y=0$ entre $x=0$ e $x=4$.



$y=f(x)$

(Função descontínua! Em C1 a gente não gosta muito de funções descontínuas)

① Funções escada e funções definidas por casos

No exemplo anterior,

x	f(x)
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
4.5	

Definição por casos pra função g

Intervalos (consecutivos)

Seja:
$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{quando } x\le 2\\ 2 & \text{quando } 2<x<3\\ 4 & \text{quando } x=3\\ 0 & \text{quando } 3<x\end{cases}$$

$x\in(-\infty,2]$
$x\in(2,3)$
$x\in[3,3]$!!
$x\in(3,+\infty)$

Represente g graficamente.

Deem uma definição por casos pra função f.

Como calcular áreas?

Métodos:
1) Olhômetro
2) Chutar e testar
3) Teorema Fundamental do Cálculo e integração.

Notação:
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$ é a área sob a curva $y=f(x)$ (isto é, abaixo de $y=f(x)$ e acima de $y=0$) entre $x=a$ e $x=b$

extremidade esquerda do intervalo de integração

extremidade direita.

Exercícios:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$,

b) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$,

c)

b	$\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$
0	
1	
2	
3	
4	

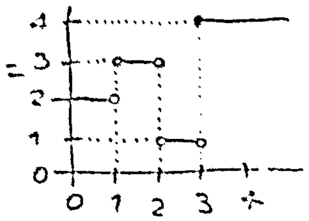
d)

b	$\int_{x=0}^{x=b} g(x)\,dx$
0	
1	
2	
3	
4	

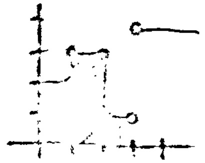
[C2 12/mar/2018]

e)

b	$\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$	$\int_{x=b}^{x=4} f(x)\,dx$
0		
0.1		
0.2		
0.3		
0.5		
1		
1.1		
1.2		
1.3		
2		
2.1		
2.2		
2.3		
3		
3.1		
3.2		
3.3		
4		

$f(x) =$ 

DICA:

$$\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx =$$ 

$= (1-0)\cdot 2$

$+ (2-1)\cdot 3$

$+ (2.5-2)\cdot 1$

Se vocês já fizeram o e vocês já devem ser capazes de calcular

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

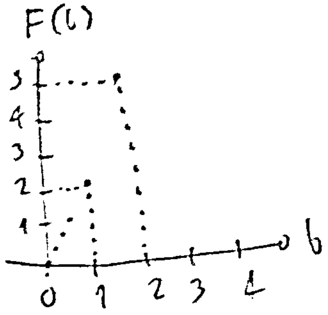
mais ou menos rápido para qualquer $b \in [0,4]$...

Exercício:

f) Represente graficamente $F(b)$ no intervalo $b \in [0,4]$.

DICA: Qual é a inclinação — isto é, a derivada — de F em $b \in (0,1)$? E em $b \in (1,2)$? E em $b \in (2,3)$?

$$F(2) = \int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx = 5$$

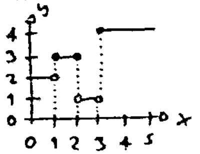


$\boxed{\text{C2 14/MAR/2018}}$

AVISO: OS QUADROS DA AULA PASSADA JÁ ESTÃO NO SITE - INCLUSIVE PDFIZADOS!

VAMOS CONTINUAR OS EXERCÍCIOS DA AULA PASSADA...

$f(x) =$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{QUANDO } x \leq 2 \\ 2 & \text{QUANDO } 2 < x < 3 \\ 4 & \text{QUANDO } x = 3 \\ 0 & \text{QUANDO } 3 < x \end{cases}$$

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

EXERCÍCIOS (AULA PASSADA):

e)

b	$\int_{x=3}^{x=b} f(x)\,dx$	$\int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx$
0		
0.1		
0.2		
0.3		
0.5		
1		
1.1		
1.2		
1.3		
2		
2.1		
2.2		
2.3		
3		
3.1		
4		

f) REPRESENTE GRAFICAMENTE $F(b)$ NO INTERVALO $b \in [0,4]$.

DICA: QUAL É A INCLINAÇÃO - ISTO É, A DERIVADA - DE F
EM $b \in (0,1)$?
E EM $b \in (1,2)$?
E EM $b \in (2,3)$?
E EM $b \in (3,4)$?

DICA: $$\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx = \underbrace{(1-0)}_{\text{BASE DO RETÂNGULO}} \cdot \underset{\text{ALTURA DO RETÂNGULO}}{2} + (2-1)\cdot 3 + (2.5-2)\cdot 1$$

ÁREAS COMO SOMAS DE RETÂNGULOS

REPARE QUE PODEMOS CALCULAR

$$\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx = \text{ÁREA}\Bigg($$  $$\Bigg) = \begin{array}{l}(1-0)\cdot 2 \\ +(2-1)\cdot 3 \\ +(2.5-2)\cdot 1\end{array}$$

SE A SOMA À DIREITA ESTIVER ESCRITA NUMA DETERMINADA FORMA PODEMOS INTERPRETÁ-LA GRAFICAMENTE COMO UMA SOMA DE RETÂNGULOS...

TRUQUE: UMA TABELA COMO ESTA:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1
4	3	4	4

DEFINE $a_1, b_1, c_1,$
$a_2, b_2, c_2,$
$a_3, b_3, c_3,$
$a_4, b_4, c_4.$

ESTAMOS INTERESSADOS EM TABELAS COMO ESTAS QUE OBEDECEM AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

- AS LINHAS SÃO NUMERADAS DE 1 A N - NO EXEMPLO TEMOS $N = 4$;
- $a_i < b_i$ PARA $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$;
- $b_i = a_{i+1}$ PARA $i \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$.

NUM CASO DESTES PODEMOS INTERPRETAR $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\cdot c_i$ COMO UMA SOMA DE RETÂNGULOS.

EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\cdot c_i$ PARA ESTA TABELA:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	1	3
2	1	3	4
3	3	4	3

OBS: $a_i = a_1$, $b_i = b_1$

DEFINIÇÃO:
UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ (OBS: FICA IMPLÍCITO QUE $a \leq b$) É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $[a,b]$ CONTENDO a E b.

UMA TABELA OBEDECENDO AS CONDIÇÕES ANTERIORES GERA UMA PARTIÇÃO, E UMA PARTIÇÃO QUASE GERA UMA TABELA...

A TABELA DO ÚLTIMO EXERCÍCIO DIVIDE O INTERVALO $[a,b] = [0,4]$ EM

$$\underset{[0,4]}{[a,b]} = \underset{[0,1]}{[a_1,b_1]} \cup \underset{[1,3]}{[a_2,b_2]} \cup \underset{[3,4]}{[a_3,b_3]}$$

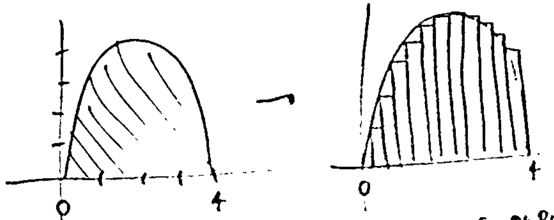
IDÉIA: SE P É UMA PARTIÇÃO DE $[a,b]$ E P TEM $N+1$ PONTOS ENTÃO

$$P = \{\underset{a}{a_1}, \underset{b_1}{a_2}, \underset{b_2}{a_3}, \ldots, \underset{b_{N-1}}{a_N}, \underset{b_N}{b}\}$$

EXERCÍCIO:
SEJA $P = \{0, 0.5, 1, 2, 3.5, 5\}$.
ISTO É UMA PARTIÇÃO DE QUE INTERVALO? QUEM SÃO $N, a, b, a_1, b_1, a_2, b_2$, ETC?
MONTE A TABELA:

i	a_i	b_i

EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\, f(a_i)$ NO CASO EM QUE $P = \{0, 1, 3, 4\}$ E $f(x) = 4 - (x-2)^2$.



... E DEPOIS NO CASO EM QUE $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$.

SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ E P É UMA PARTIÇÃO DE $[a,b]$, VAMOS TER VÁRIOS MÉTODOS PRA CALCULAR UMA APROXIMAÇÃO PARA $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ POR UMA SOMA DE RETÂNGULOS... O PRIMEIRO MÉTODO É:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \underbrace{f(a_i)}_{c_i}$$

O NOSSO OBJETIVO AGORA É APRENDER A VISUALIZAR O QUE ESTE MÉTODO "QUER DIZER".

C2 11/MAR/2018

TRUQUE:

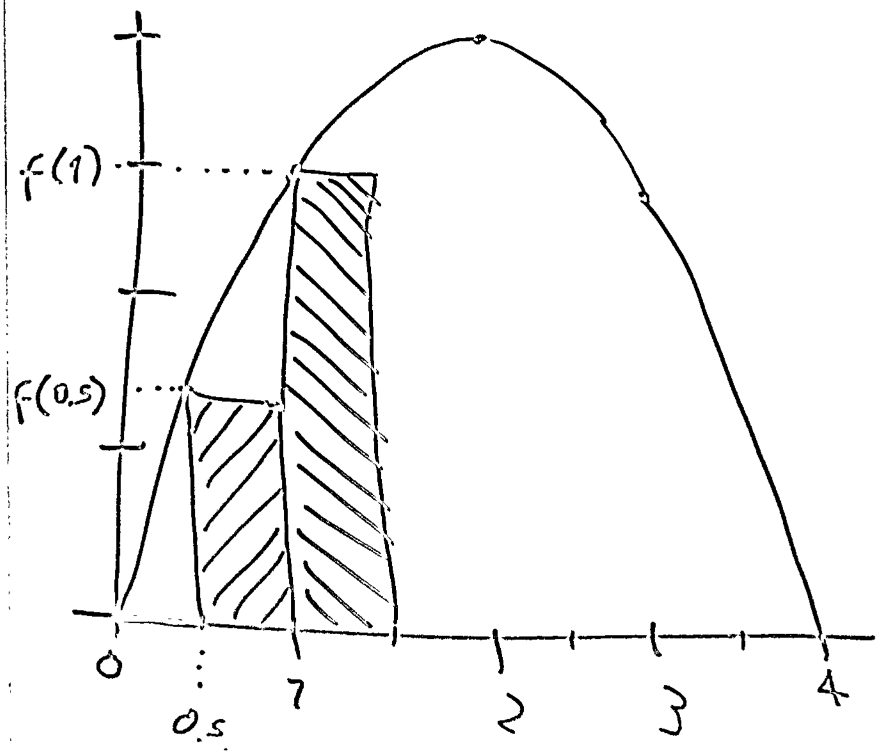
COMO A GENTE SÓ QUER REPRESENTAR GRAFICAMENTE

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) f(a_i)$$

PARA $P = \{0, 0.5, 1, \ldots, 4\}$

A GENTE NÃO PRECISA CALCULAR $f(0), f(0.5), f(1)$, ETC...

A GENTE PODE ENCONTRAR ESSES VALORES PELO GRÁFICO.



C2 19/MAR/2018

NA AULA PASSADA NÓS APRENDEMOS A VISUALIZAR O QUE ISTO AQUI QUERIA DIZER...

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i-a_i)\overbrace{f(a_i)}^{c_i}$$

EM TODOS OS NOSSOS EXEMPLOS POR ENQUANTO NÓS VAMOS USAR $f(x)=4-(x-2)^2$ E P VAI SER ALGUMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[0,4]$.

HOJE NÓS VAMOS APRENDER A INTERPRETAR – ISTO É, A VISUALIZAR – OUTRAS FÓRMULAS PARECIDAS COM A ACIMA. CADA UMA DELAS VAI TER UM NOME E CORRESPONDER A UM "MÉTODO DE INTEGRAÇÃO" – UM MODO DE CALCULAR UMA APROXIMAÇÃO NO COMPUTADOR (OU NA MÃO).

	FÓRMULA PRO c_i	NOME DO MÉTODO
a)	$c_i=f(a_i)$	"L"
b)	$c_i=f(b_i)$	"R"
c)	$c_i=\max(f(a_i),f(b_i))$	"MAX"
d)	$c_i=\min(f(a_i),f(b_i))$	"MIN"
e)	$c_i=f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$	"PONTO MÉDIO"
f)	$c_i=\frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$	"TRAPÉZIO"
g)	$c_i=\sup f([a_i,b_i])$	"SUP"
h)	$c_i=\inf f([a_i,b_i])$	"INF"

VAMOS USAR ESTAS PARTIÇÕES:

$P_1=\{0,1,2,3,4\}$,
$P_2=\{0,1,3,4\}$,
$P_3=\{0,4\}$
$P_4=\{0,2,4\}$
$P_5=\{0,0.5,1,1.5,\ldots,4\}$

EXERCÍCIO:

a) REPRESENTE GRAFICAMENTE

$$\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\,c_i$$

PARA $c_i=f(a_i)$ (MÉTODO (a) - "L") PARA AS PARTIÇÕES P_1,P_2,P_3,P_4,P_5.

E CALCULE O RESULTADO DO SOMATÓRIO EM P_1,P_2,P_3,P_4.

b) IDEM, MAS $c_i=f(b_i)$ (MÉTODO (b) - "R")

c) IDEM, MAS $c_i=\max(f(a_i),f(b_i))$

d) MÉTODO (d)

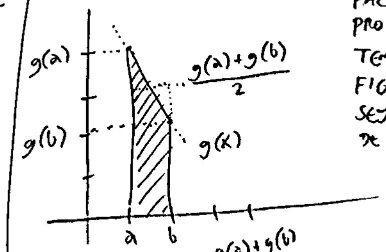
e) MÉTODO (e)

f) MÉTODO (f)

... DEPOIS QUE VOCÊS TERMINAREM OS EXERCÍCIOS ACIMA A GENTE VAI VER IMAGENS DE CONJUNTOS, SUPS E INFS, E AÍ VOCÊS VÃO FAZER EXERCÍCIOS COM OS MÉTODOS g E h.

OBS (PRO MÉTODO (f)):

TRAPÉZIO



ÁREA DO TRAPÉZIO: $(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$

DICA: QUANDO VOCÊS FOREM FAZER AS FIGURAS PRO MÉTODO (f) TENTEM FAZER FIGURAS QUE SEJAM SOMAS DE TRAPÉZIOS.

IMAGENS DE CONJUNTOS

ÀS VEZES A GENTE USA ESTA NOTAÇÃO: $f(\{2,3,4\})$

CONJUNTO DE NÚMEROS AO INVÉS DE UM NÚMERO SÓ!

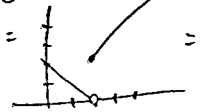
CONVENÇÃO: $f(\{2,3,4\})=\{f(2),f(3),f(4)\}$

COM A f DOS EXEMPLOS,

$f(\{2,3,4\})=\{4,3,0\}$
$=\{0,3,4\}$

EXEMPLO/EXERCÍCIO:

SEJA g ESTA FUNÇÃO:

$g(x)=$  $=\begin{cases}2-x & \text{QUANDO } x<2,\\ x & \text{QUANDO } x\geq 2.\end{cases}$

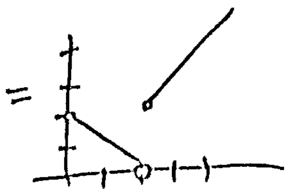
CALCULEM:

a) $g(\{0,1,2,3,4\})$
b) $g(\{1,1.2,1.4,1.6,1.8,2,2.2\})$

a) $\{2,1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$
b) $\{1,0.8,0.6,0.4,0.2,2,2.2\}=$
$\{0.2,0.4,0.6,0.8,1,2,2.2\}=$ 

$\boxed{\text{C2 19/MAR/2018}}$

SUGESTÃO: EM CASA DÊEM UMA OLHADA NA SEÇÃO 1.1 DO LIVRO (STEWART 7TH ED)

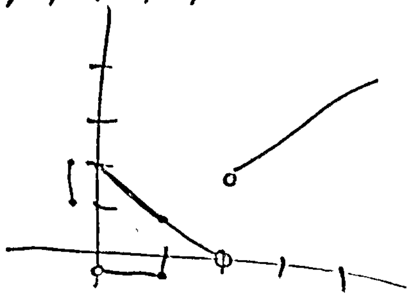
$g(x) =$ 

$g([0,1]) = [1,2]$

$g([1,2]) = (0,1] \cup \{2\}$

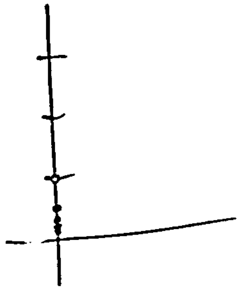
$\max(3, 9, 4, 2, 4, 0) = 9$ $\quad$ $\min(3,9,4,2,4,0) = 0$

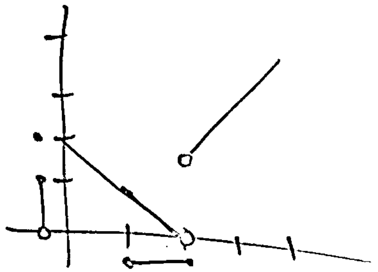
$\sup(\{3,9,4,2,4,0\}) = 9$ $\quad$ $\inf(\{3,9,4,2,4,0\}) = 0$



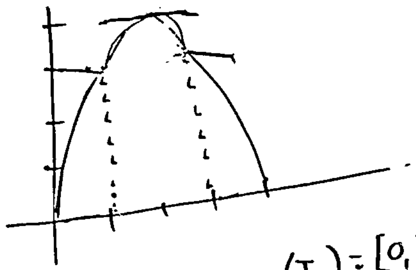
$\inf(\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}) = 0$

$\notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$





PRÓXIMO PASSO:



$I_1 = [0,1]$ $\quad$ $f(I_1) = [0,3]$ $\quad$ $\sup(f(I_1)) = 3$

$I_2 = [1,3]$ $\quad$ $f(I_2) = [3,4]$ $\quad$ $\sup(f(I_2)) = 4$

$I_3 = [3,4]$ $\quad$ $f(I_3) = [0,3]$ $\quad$ $\sup(f(I_3)) = 3$

C2 21/mar/2018

Lembrem que estamos usando esta função nos exercícios

$f(x) = 4 - (x-2)^2$

e estas partições,

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$
$P_2 = \{0,1,3,4\}$
$P_3 = \{0,4\}$
$P_4 = \{0,2,4\}$
$P_5 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$

e estes métodos para calcular os "c_i"s:

a) $c_i = f(a_i)$ ("L")
b) $c_i = f(b_i)$ ("R")
c) $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$ ("max")
d) $c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$ ("min")
e) $c_i = f(\frac{a_i+b_i}{2})$ ("ponto médio")
f) $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ ("trapézio")
g) $c_i = \sup(f([a_i,b_i]))$ ("sup")
h) $c_i = \inf(f([a_i,b_i]))$ ("inf")

Lembre que a gente pode interpretar $\sum_{i=1}^{N} (b_i-a_i)c_i$ quando $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ como uma soma de trapézios.

Hoje:

1) Vamos rever os métodos do trapézio, do sup e do inf
2) Refinamentos de partições, largura de uma partição, $\lim\limits_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ \|P\| \to 0}}$
3) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\int_{x=a}^{x=b} f(x)$.
4) Funções integráveis e não-integráveis

Exercícios:

1) Represente graficamente $\sum_{i=1}^{N} (b_i-a_i)c_i$ para os métodos do trapézio, do sup e do inf e para as partições P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

$\boxed{\text{Defs:}}$

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i-a_i) \sup f([a_i,b_i])$$

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i-a_i) \inf f([a_i,b_i])$$

2) Represente graficamente todas as expressões abaixo e veja se você consegue interpretar o que os "≤"s querem dizer.

$$P_3 \subset P_2 \subset P_1 \subset P_5 \subset [0,4]$$

$$\overline{\int}_{P_3} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_1} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_5} f(x)dx \geq \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

$$\text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI}$$

$$\underline{\int}_{P_3} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_1} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_5} f(x)dx \leq \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

3) Seja $g(x) = x$. Represente graficamente

$\overline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$.

Compare com

$\overline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Def:}}$ A largura de uma partição $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ (obs: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$) é $\max(x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{N+1}-x_N)$.
Notação: $\|P\|$.

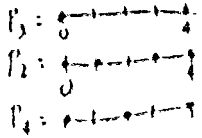
4) Exercício: calcule $\|P_1\|, \|P_2\|, \|P_3\|, \|P_4\|, \|P_5\|$.

$\boxed{\text{Def:}}$ Se $Q_1, Q_2, \ldots$ são partições do mesmo intervalo $[a,b]$, dizemos que $Q_1, Q_2, \ldots$ convergem para $[a,b]$ quando:

- $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \ldots$
- $\lim_{i\to\infty} \|Q_i\| = 0$.

5) Exercício: Para cada uma das sequências (finitas!) de partições abaixo verifique se $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_N$ é verdade e calcule $\|Q_1\|, \|Q_2\|, \ldots, \|Q_N\|$.

a) P_3, P_2, P_1, P_5
b) P_4, P_2, P_3, P_4, P_5
c) P_3, P_4, P_1, P_5
d) P_3, P_2, P_4, P_1, P_5



$P_3 \subseteq P_2 \not\subseteq P_4$

$\|P_1\| = 1$
$\|P_2\| = 2$ ← não-trivial
$\|P_3\| = 4$
$\|P_4\| = 2$
$\|P_5\| = 0.5$

$\boxed{\text{Def:}}$ Seja $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ alguma sequência de partições de $[a,b]$ que converge para $[a,b]$.

Então: $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$

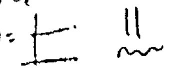
e $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Teorema:}}$ ← difícil!

O resultado de $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não depende da escolha da sequência $Q_1, Q_2, \ldots$ — todas as escolhas dão o mesmo resultado!

E idem para $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Obs: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$h(x) =$ 

C2 21/MAR/2018

LEMBREM QUE ESTAMOS USANDO ESTA FUNÇÃO NOS EXERCÍCIOS,

$f(x) = 4-(x-2)^2$

E ESTAS PARTIÇÕES,

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$

$P_2 = \{0,1,3,4\}$

$P_3 = \{0,4\}$

$P_4 = \{0,2,4\}$

$P_5 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$

E ESTES MÉTODOS PARA CALCULAR OS "c_i"S:

a) $c_i = f(a_i)$ ("L")
b) $c_i = f(b_i)$ ("R")
c) $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$ ("max")
d) $c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$ ("min")
e) $c_i = f(\frac{a_i+b_i}{2})$ ("PONTO MÉDIO")
f) $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ ("TRAPÉZIO")
g) $c_i = \sup(f([a_i,b_i]))$ ("sup")
h) $c_i = \inf(f([a_i,b_i]))$ ("inf")

LEMBRE QUE A GENTE PODE INTERPRETAR $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ QUANDO $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ COMO UMA SOMA DE TRAPÉZIOS.

HOJE:

1. VAMOS REVER OS MÉTODOS DO TRAPÉZIO, DO SUP E DO INF
2. REFINAMENTOS DE PARTIÇÕES, LARGURA DE UMA PARTIÇÃO, $\lim_{\substack{P \text{ PART } [a,b] \\ \|P\| \to 0}}$
3. $\overline{\int_P} f(x)\,dx$, $\underline{\int_P} f(x)\,dx$, $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$, $\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$, $\int_{x=a}^{x=b} f(x)$.
4. (?) FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO-INTEGRÁVEIS

EXERCÍCIOS:

1. REPRESENTE GRAFICAMENTE $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ PARA OS MÉTODOS DO TRAPÉZIO, DO SUP E DO INF E PARA AS PARTIÇÕES P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

$\boxed{\text{DEFS:}}$

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\sup f([a_i,b_i])$$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\inf f([a_i,b_i])$$

2. REPRESENTE GRAFICAMENTE TODAS AS EXPRESSÕES ABAIXO E VEJA SE VOCÊ CONSEGUE INTERPRETAR O QUE OS "⊂"S QUEREM DIZER.

$$P_3 \subset P_2 \subset P_1 \subset P_5 \subset [0,4]$$

$$\overline{\int_{P_3}} f(x)dx \geq \overline{\int_{P_2}} f(x)dx \geq \overline{\int_{P_1}} f(x)dx \geq \overline{\int_{P_5}} f(x)dx \;\; ? \;\; \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

$$\text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{VI} \quad \text{?}$$

$$\underline{\int_{P_3}} f(x)dx \leq \underline{\int_{P_2}} f(x)dx \leq \underline{\int_{P_1}} f(x)dx \leq \underline{\int_{P_5}} f(x)dx$$

3. SEJA $g(x) = x$. REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int_{\{-2,-1,0,1,2\}}} g(x)\,dx$ E $\underline{\int_{\{-2,-1,0,1,2\}}} g(x)\,dx$.

COMPARE COM

$\overline{\int_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}}} g(x)\,dx$ E $\underline{\int_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}}} g(x)\,dx$.

$\boxed{\text{DEF:}}$ A LARGURA DE UMA PARTIÇÃO $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ (OBS. $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$) É $\max(x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{N+1}-x_N)$.

NOTAÇÃO: $\|P\|$.

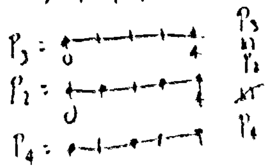
4. EXERCÍCIO: CALCULE $\|P_1\|, \|P_2\|, \|P_3\|, \|P_4\|, \|P_5\|$.

$\boxed{\text{DEF:}}$ SE $Q_1, Q_2, \ldots$ SÃO PARTIÇÕES DO MESMO INTERVALO $[a,b]$, DIZEMOS QUE $Q_1, Q_2, \ldots$ CONVERGEM PARA $[a,b]$ QUANDO:

- $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \ldots$
- $\lim_{i\to\infty} \|Q_i\| = 0$.

5. EXERCÍCIO: PARA CADA UMA DAS SEQUÊNCIAS (FINITAS!) DE PARTIÇÕES ABAIXO VERIFIQUE SE $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_N$ É VERDADE E CALCULE $\|Q_1\|, \|Q_2\|, \ldots, \|Q_N\|$.

a) P_3, P_2, P_1, P_5
b) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5
c) P_3, P_4, P_1, P_5
d) P_3, P_2, P_4, P_1, P_5



$\boxed{\text{DEF:}}$ SEJA $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ ALGUMA SEQUÊNCIA DE PARTIÇÕES DE $[a,b]$ QUE CONVERGE PARA $[a,b]$.

ENTÃO: $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$

E $\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$.

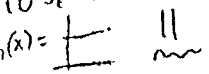
$\boxed{\text{TEOREMA:}}$ ← DIFÍCIL!

O RESULTADO DE $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$ NÃO DEPENDE DA ESCOLHA DA SEQUÊNCIA $Q_1, Q_2, \ldots$ — TODAS AS ESCOLHAS DÃO O MESMO RESULTADO! E IDEM PARA $\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$.

$\|P_1\| = 1$
$\|P_2\| = 2$ ← NÃO-TRIVIAL
$\|P_3\| = 4$
$\|P_4\| = 2$
$\|P_5\| = 0.5$

OBS: SEJA $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$h(x) =$



$\boxed{\text{C2 26/MAR/2018}}$

ALGUMAS COISAS DA ÚLTIMA AULA...

$\boxed{\text{DEFS:}}$ $\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \sup(f([a_i,b_i]))$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \inf(f([a_i,b_i]))$$

SEJA $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ ALGUMA SEQUÊNCIA DE PARTIÇÕES DE $[a,b]$ QUE CONVERGE PARA $[a,b]$. ENTÃO:

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$$

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{TEOREMA:}}$ ← DIFÍCIL!

O RESULTADO DE $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ NÃO DEPENDE DA ESCOLHA DA SEQUÊNCIA $Q_1, Q_2, \ldots$ — TODAS AS ESCOLHAS DÃO O MESMO RESULTADO!

IDEM PARA $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{DEF.}}$

(NOVA, E SÓ VAI VALER PARA A AULA DE HOJE):

$[a,b]/N$ É A PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM N SUBINTERVALOS IGUAIS.

EXEMPLOS:

$[0,4]/1 = \{0,4\}$

$[0,4]/2 = \{0,2,4\}$

$[0,4]/4 = \{0,1,2,3,4\}$

$[0,4]/8 = \{0, 0.5, 1, \ldots, 4\}$

$[0,4]/N = \{0, 0+\frac{4}{N}, 0+2\frac{4}{N}, 0+3\frac{4}{N}, \ldots, 4\}$

$[a,b]/N = \{a, a+1\frac{b-a}{N}, a+2\frac{b-a}{N}, \ldots, b\}$, $b = a+N\frac{b-a}{N}$

TRUQUE:

PRA ENTENDER $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

VAMOS OLHAR PARA $\underline{\int}_{[a,b]/1} f(x)\,dx$, $\underline{\int}_{[a,b]/2} f(x)\,dx$, $\underline{\int}_{[a,b]/4} f(x)\,dx$, ETC.

EXERCÍCIOS:

① REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int}_{[0,\pi]/N} \text{sen } x\,dx$ E $\underline{\int}_{[0,\pi]/N} \text{sen } x\,dx$

PARA $N = 1, 2, 4, 8, 16$.

② REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int}_{[0,2\pi]/2^K} \text{sen } x\,dx$ E $\underline{\int}_{[0,2\pi]/2^K} \text{sen } x\,dx$

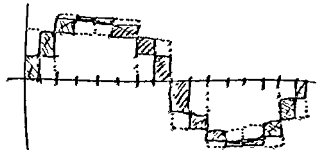
PARA $K = 0,1,2,3,4$.

③ REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int}_{[0,2\pi]/2^K} \text{sen } x\,dx - \underline{\int}_{[0,2\pi]/2^K} \text{sen } x\,dx$

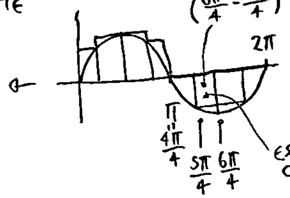
PARA $K = 0,1,2,3,4$.

$K = 4$:



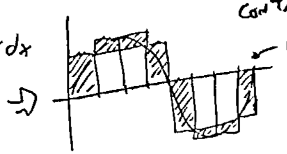
<0

$\overbrace{\underbrace{\left(\frac{6\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{4} > 0} \cdot \overbrace{\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}}^{<0\,!}}^{<0}$



ESTE RETÂNGULO CONTA NEGATIVAMENTE.

TODOS OS RETÂNGULOS CONTAM POSITIVAMENTE!



$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)}_{>0} \cdot \overset{0}{\text{sen}\,2\pi}}_{=0} - \underbrace{\underbrace{\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)}_{>0} \cdot \overbrace{\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}}^{<0}}_{<0}}_{>0}$

$K=3$, $2^K = 8$ (8 SUBINTERVALOS)

$\boxed{\text{DEF:}}$ QUANDO $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

NÓS DIZEMOS QUE:

① $f(x)$ É INTEGRÁVEL NO INTERVALO $[a,b]$

② $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{DEF:}}$ QUANDO: $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \neq \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

NÓS DIZEMOS QUE:

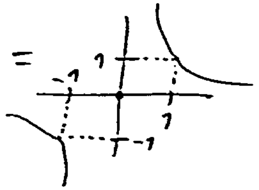
① $f(x)$ NÃO É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$

② $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ NÃO EXISTE.

C2 26/MAR/2018

Exemplos de funções não-integráveis:

(1) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$f(x) =$ 

Função ilimitada

Exercícios:

(a) Represente graficamente:

$$\overline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx$$

para $k=0,1,2$

e descubra porque é que essa diferença nunca vai zerar (para k alto).

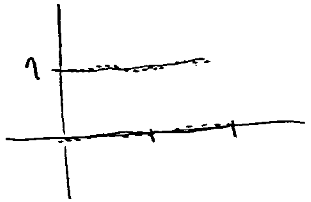
(b) Idem mas para $[-1,1]$.

(Bem depois a gente vai ver uma coisa chamada integral imprópria que vai nos permitir lidar com alguns casos ruins desses)

O exemplo "padrão" de uma função não-integrável é:

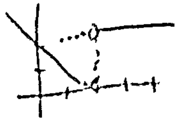
$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Função muito descontínua !!



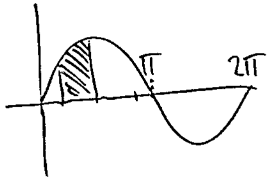
$$\overline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx = 1 \;!!$$

Funções ilimitadas são ruins de integrar,
funções muito descontínuas são ruins de integrar,
funções limitadas são boas,
funções contínuas ou com poucas descontinuidades são boas.

Seja $h(x) =$  , $\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 2+4=6$

Como integrar funções mais complicadas?

Digamos que $f(x)$ é integrável em $[a,b]$. Então ela é integrável em qual subintervalo $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Ex: 

$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen} x\,dx$ existe.

Teorema Fundamental do Cálculo

$\to$ TFC1 e TFC2.

TFC1: Se $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ existe então seja $F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$;

Então: $F(a)=0$, F é contínua, quando $f(x)$ for contínua em c temos $F'(c)=f(x)$.

TFC2:

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ seja contínua e limitada.

Digamos que $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece $F'(x)=f(x)$.

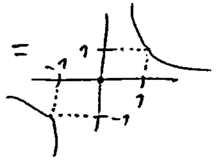
Então:

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)-F(a).$$

$\boxed{\text{C2 26/MAR/2018}}$

EXEMPLOS DE FUNÇÕES NÃO-INTEGRÁVEIS:

① SEJA $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{SE } x \neq 0, \\ 0 & \text{SE } x = 0. \end{cases}$

$f(x) =$ 

FUNÇÃO ILIMITADA

EXERCÍCIOS:

ⓐ REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$$\overline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx$$

PARA $K = 0, 1, 2$

E DESCUBRA PORQUE É QUE ESSA DIFERENÇA NUNCA VAI ZERAR (PARA K ALTO).

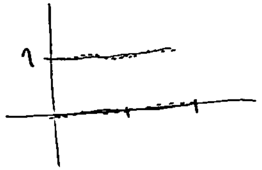
ⓑ IDEM MAS PARA $[-1,1]$.

(BEM DEPOIS A GENTE VAI VER UMA COISA CHAMADA INTEGRAL IMPRÓPRIA QUE VAI NOS PERMITIR LIDAR COM ALGUNS CASOS RUINS DESSES)

O EXEMPLO "PADRÃO" DE UMA FUNÇÃO NÃO-INTEGRÁVEL É:

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

FUNÇÃO MUITO DESCONTÍNUA !!



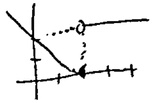
$$\overline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx = 1 \;!!$$

FUNÇÕES ILIMITADAS SÃO RUINS DE INTEGRAR,

FUNÇÕES MUITO DESCONTÍNUAS SÃO RUINS DE INTEGRAR,

FUNÇÕES LIMITADAS SÃO BOAS,

FUNÇÕES CONTÍNUAS OU COM POUCAS DESCONTINUIDADES SÃO BOAS.

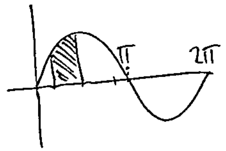
SEJA $h(x) =$ 

$$\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 2 + 4 = 6$$

COMO INTEGRAR FUNÇÕES MAIS COMPLICADAS?

DIGAMOS QUE $f(x)$ É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$.

ENTÃO ELA É INTEGRÁVEL EM QUAL SUBINTERVALO $[c,d] \subseteq [a,b]$.

EX: 

$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen} x\,dx$ EXISTE.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

→ TFC1 E TFC2.

TFC1: SE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ EXISTE

ENTÃO SEJA $F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$;

ENTÃO: $F(a) = 0$, F É CONTÍNUA,

QUANDO $f(x)$ FOR CONTÍNUA EM C TEMOS $F'(c) = f(x)$.

TFC2:

DIGAMOS QUE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ SEJA CONTÍNUA E LIMITADA.

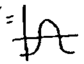
DIGAMOS QUE $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ OBEDECE $F'(x) = f(x)$.

ENTÃO:

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c) - F(a).$$

EXEMPLO:

$f(x) = \operatorname{sen} x$

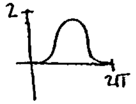
$F(x) = -\cos x =$ 

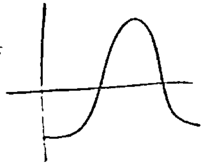
$F'(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(0)$$

OUTRA POSSIBILIDADE:

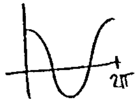
$f(x) = \operatorname{sen} x$

$F(x) = 1 - \cos x =$ 

$-\cos x =$ 

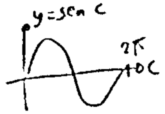
$\int -\cos x$

EXEMPLO:

$f(x) = \cos x$, $f(x) =$ 

$a = 0$, $b = 2\pi$,

$F(c) = \int_{x=0}^{x=c} f(x)\,dx$

$F(c) = \operatorname{sen} c$ $\quad F(c) =$ 

C2 28/mar/2017

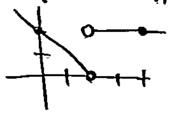
No final da aula passada nós vimos dois teoremas que vão nos ajudar a calcular integrais — o TFC1 e o TFC2 ("TFC" = "Teorema Fundamental do Cálculo")...

A gente vai ver primeiro os enunciados e várias aplicações deles, e só depois a gente vai ver como eles são demonstrados (sem muito detalhe).

TFC1: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada, e ou contínua ou contínua exceto num subconjunto finito $D\subset[a,b]$.
Seja
$$F:[a,b]\to\mathbb{R},\quad c\mapsto\int_{x=a}^{x=c}f(x)\,dx.$$
Então: f é integrável em $[a,b]$,
(a) $F(c)$ existe para todo $c\in[a,b]$,
(b) F é contínua, $F(a)=0$, (c)
(d) e $F'(c)=f(c)$ (para $c\notin D$).

Exemplo:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{quando } x\le 2,\\ 2 & \text{quando } 2<x.\end{cases}$$

f = 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a f acima no intervalo $[a,b]=[0,4]$.

(1) Calcule $F(0), F(0.5), F(1), \ldots, F(4)$.

(2) Faça um gráfico da $F:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(3) Use o método do chutar-e-testar para chutar definições por casos pra essa F — chame seus chutes de $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{20}, \ldots$ — e teste cada uma das suas "F"s pra ver se elas obedecem todas as condições do TFC1.
Obs: $D=\{2\}$.

Dicas (em forma de exercícios):

(4) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=2-x$ para todo x.

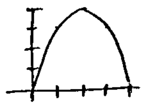
(5) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=2-x$.

(6) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=2$.

(7) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=2$.

Exemplo 2:

$$\begin{aligned}f(x)&=4-(x-2)^2\\&=4-(x^2-4x+4)\\&=4x-x^2\end{aligned}$$

= 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a f acima no intervalo $[a,b]=[0,4]$.

Ainda não sabemos calcular $F(0.5), F(1), \ldots$, mas:

(8) Use o método do chutar-e-testar para chutar definições para essa F — chame os seus chutes de $F_1, F_2, F_3, \ldots$ — e teste cada uma das suas "F"s pra ver se elas obedecem todas as condições do TFC1. Obs: $D=\{\}$.

Dicas:

(9) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=x^2$.

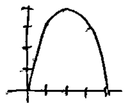
(10) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=4x$.

(11) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=4x-x^2$.

(12) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=4x-x^2$.

Exemplo 3:

$$\begin{aligned}f(x)&=4-(x-2)^2\\&=4x-x^2\end{aligned}$$

= 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a f acima no intervalo $[a,b]=[2,4]$.

(13) Use o método do chutar-e-testar pra encontrar uma F que obedece as condições (a), (b), (c), (d) do TFC1.
Depois calcule:
$$\int_{x=2}^{x=4}f(x)\,dx=F(4).$$
Obs: $[a,b]=[2,4]$.

C2 2/abril/2018

Na aula passada vimos uma versão complicada — mas bem geral e bem poderosa — do TFC1...

Uma versão mais simples, mas que só funciona para f contínua, é:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua.
Seja $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(c) = f(c)$ para todo $c \in (a,b)$ e $F(a) = 0$.
Então para todo c em $[a,b]$ isto vale:
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)$$
Em particular,
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b).$$

Versão alternativa:
Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua.
Seja $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(c) = f(c)$ para todo $c \in (a,b)$.
Seja $F(x) = G(x) + C$, onde esse C é uma constante que faz com que $F(a) = 0$.
Então para todo c em $[a,b]$ isto vale:
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c).$$

Exercícios:
Calcule as seguintes integrais usando a versão alternativa do TFC1:

① $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} e^{3x}\,dx$

② $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 4\cos 5x\,dx$

Lembre que a gente pode tentar encontrar a G pelo chutar-e-testar... Dica: faça uma tabela...

$G(x)$	$G'(x)$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\,g'(x)$
$f(3x)$	$f'(3x)\cdot 3$
e^{3x}	$3e^{3x}$
$\frac{1}{3}e^{3x}$	e^{3x}
$f(5x)$	$f'(5x)\cdot 5$
$\operatorname{sen}(5x)$	$5\cos 5x$
$\frac{4}{5}\operatorname{sen}(5x)$	$4\cos 5x$

③ $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx$

④ $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 5x\,dx$

③ Seja $G(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$.
Então $G'(x) = e^{3x}$
Seja $F(x) = G(x) + C$
onde C é tal que $F(a) = 0$
$$F(a) = G(a) + \underbrace{C}_{-G(a)} = 0$$
$$F(x) = G(x) - G(a) = \tfrac{1}{3}e^{3x} - \tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$F(b) = \tfrac{1}{3}e^{3b} - \tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) = \tfrac{1}{3}e^{3b} - \tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$\| $$
$$\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx$$
$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3b} - \tfrac{1}{3}e^{3a}}$$

TFC2:
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
Exemplo: se $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ então:
$$\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3b} - \tfrac{1}{3}e^{3a}$$

Notação (nova):
$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\text{TFC2:}\quad \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

④

Uma fórmula muito importante:

Integração por substituição!!!

S1:
$$\boxed{\begin{array}{ccc} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}}$$

S2:
$$\boxed{\begin{array}{ccc} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}}$$
(quando $F' = f$)

S3:
$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$$

Exercício ⑤: $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 2x\,\operatorname{sen} x^2\,dx = ?$

[illegible]

$\boxed{S3}\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ g(x) := 2x \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} (\operatorname{sen} 2x)\cdot 2\, dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\, du}$$

... QUE NÃO RESOLVE O (5)...

$\boxed{S3}\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ g(x) := x^2 \\ a := 2 \\ b := 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx = \int_{u=2^2}^{u=3^2} \operatorname{sen} u\, du}$$

$\boxed{\text{TFC 2 (em u)}} = \boxed{\int_{u=a}^{u=b} F'(u)\, du = F(u)\Big|_{u=a}^{u=b}}$

$\boxed{\text{TFC2 (em u)}}\begin{bmatrix} F(u) := -\cos u \\ a = 2^2 \\ b = 3^2 \end{bmatrix} = \boxed{\int_{u=2^2}^{u=3^2} \operatorname{sen} u\, du = (-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2}}$

ENTÃO:

(5) $\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx =$

$\int_{u=2^2}^{u=3^2} \operatorname{sen} u\, du =$

$(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos 3^2) - (-\cos 2^2) =$

$\cos 4 - \cos 9$

OBS: $(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}$

USANDO A OBS...

$\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx =$

$\int_{u=2^2}^{u=3^2} \operatorname{sen} u\, du =$

$(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}$ ... OU SEJA:

(5') $\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}}$

EXERCÍCIO:

(6) MOSTRE QUE (5') PODE SER OBTIDA PELO TFC2 USANDO ALGUMA SUBSTITUIÇÃO... QUAL?

OBS: $\frac{d}{dx}(-\cos x^2) = (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x$

$\boxed{\text{TFC2}}\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x^2 \\ a := 2 \\ b := 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}}$$

$$\boxed{\text{TFC2: } \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\, dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

EXERCÍCIO:

(7) $\boxed{S1}\begin{bmatrix} f(u) = -\cos u \\ g(x) = x^2 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\begin{aligned} -\cos x^2\Big|_{x=2}^{x=3} &= \int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\, dx \\ \parallel \\ -\cos u\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} &= \int_{u=2^2}^{u=3^2} \operatorname{sen} u\, du \end{aligned}}$$

UMA FÓRMULA MUITO IMPORTANTE:

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO!!!

$\boxed{S1}$: $$\boxed{\begin{aligned} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\, g'(x)\, dx \\ \parallel \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \end{aligned}}$$

$\boxed{S2}$: $$\boxed{\begin{aligned} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\, g'(x)\, dx \\ \parallel \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\, du \end{aligned}}$$ (QUANDO $F' = f$)

$\boxed{S3}$: $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\, du}$$

EXERCÍCIO: (5): $\int_{x=2}^{x=3} 2x \operatorname{sen} x^2\, dx = ?$

C2 4/April/2018

Hoje: uma primeira interpretação para a integral indefinida; exercícios

Relembrando:

[S1]: $f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$

$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$

[S2]: $F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx$

$F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

[S3]: $\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

[TFC2 (em x)]: $\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

Idéia (tosca, que vamos detalhar depois):

Integrais indefinidas são integrais definidas com os limites de integração apagados - e a conta com integrais indefinidas dá pra gente completar os limites de integração apagados...

OBS: [S2] $\left[\begin{array}{l} f(u)=\tan u \\ g(x)=x^3 \end{array}\right] = ?$

[S3] $\left[\begin{array}{l} f(u)=\tan u \\ g(x)=x^3 \end{array}\right] = ?$

Nosso primeiro exemplo preferido de hoje:

$\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx = ?$

$\int_{x=a}^{x=b} \underbrace{(\cos \underbrace{x^3}_{g(x)})}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)}\,dx =$

$\int_{u=a^3}^{u=b^3} \cos u\,du =$

$\operatorname{sen} u\Big|_{u=a^3}^{u=b^3} =$

$\operatorname{sen} x^3\Big|_{x=a}^{x=b}$

Apagar limites (A) $\Rightarrow$

$\int (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx =$

$\int \cos u\,du =$

$\operatorname{sen} u =$

$\operatorname{sen} x^3$

OBS: $u=x^3$

(A) limites de integração e de diferença.

Repare que

$\operatorname{sen} u$ abrevia $\operatorname{sen} u\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$

$\operatorname{sen} x$ abrevia $\operatorname{sen} x\Big|_{x=a}^{x=a}$

$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ é "a diferença de $F(x)$ entre $x=a$ e $x=b$"

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é "a integral de $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$"

OBS: Apagando os limites de integração em S3 temos:

$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int f(u)\,du$

$\frac{du}{dx}$

$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$

du

$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$!!

OBS: $\int (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx = \operatorname{sen} x^3$

(conta anterior sem os passos na variável u)

[TFC2I] $[F(x):=\operatorname{sen} x^3] = ?$

Integral indefinida:

[S3I]: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

OBS: $u=g(x)$

[TFC2I]: $\int F'(x)\,dx = F(x)$

Exercícios:

1. $\int 4\cos(5x+6)\,dx = ?$
2. $\int (4x+5)^{1/2}\,dx = ?$

$\boxed{\text{C2 4/ABRIL/2018}}$

HOJE: UMA PRIMEIRA INTERPRETAÇÃO PARA A INTEGRAL INDEFINIDA; EXERCÍCIOS

RELEMBRANDO:

$\boxed{S1}$: $f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$

$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$

$\boxed{S2}$: $F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx$

$F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

$\boxed{S3}$: $\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$

$\boxed{\text{TFC2 (em } x)}$: $\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

DÁ PRA RESOLVER O ① DE VÁRIOS MODOS...

① $\int \underbrace{4\cos(\underbrace{5x+6}_{g(x)})}_{f(g(x))}\,dx = ?$

CADÊ O $g'(x)$? !!

$g'(x) = 5$

$\int \underbrace{\frac{1}{5}4\cos(\underbrace{5x+6}_{g(x)})}_{f(g(x))}\cdot\underbrace{5}_{g'(x)}\,dx =$

$\int \underbrace{\frac{4}{5}\cos u}_{f(u)}\,du =$

$\frac{4}{5}\int \cos u\,du =$

$\frac{4}{5}\operatorname{sen} u =$

$\frac{4}{5}\operatorname{sen}(5x+6)$

② $\int (\underbrace{4x+5}_{g(x)})^{1/2}\,dx =$

$\int \underbrace{\frac{1}{4}(\underbrace{4x+5}_{g(x)})^{1/2}}_{f(g(x))}\cdot\underbrace{4}_{g'(x)}\,dx =$

$\int \frac{1}{4}u^{1/2}\,du =$

$\frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du =$

$\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}u^{3/2} =$

$\frac{1}{6}(4x+5)^{3/2}$

$\frac{d}{du}u^{3/2} = \frac{3}{2}u^{1/2}$

$\frac{d}{du}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right) = u^{1/2}$

EXERCÍCIOS (STEWART, P. 336):

③ $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx =$

④ $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx =$

⑤ $\int (1-2x)^9\,dx =$

⑥ $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx =$

⑦ $\int x^k \operatorname{sen} x^{k+1}\,dx =$

⑧ $\int (ax+b)^k\,dx =$

⑨ $\int g(x)^k g'(x)\,dx =$

⑩ $\int x f(x^2)\,dx =$

⑪ $\int x^2 f(x^3)\,dx =$

INTEGRAL INDEFINIDA:

$\boxed{S3I}$: $\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$

$\boxed{\text{OBS: } u = g(x)}$

$\boxed{TFC2I}$: $\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x)}$

EXERCÍCIOS:

① $\int 4\cos(5x+6)\,dx = ?$

② $\int (4x+5)^{1/2}\,dx = ?$

$\boxed{\text{C2 11/ABRIL/2018}}$

EXERCÍCIOS DO FINAL DA AULA PASSADA:

(3) $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

(4) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 \, dx$

(5) $\int (1-2x)^9 \, dx$

(6) $\int x\sqrt{1-x^2} \, dx$

(7) $\int x^k \operatorname{sen} x^{k+1} \, dx$

(8) $\int (ax+b)^k \, dx$

(9) $\int g(x)^k g'(x) \, dx$

(10) $\int x f(x^2) \, dx$

(11) $\int x^2 f(x^3) \, dx$

LEMBREM QUE

$\int f'(g(x))g'(x) \, dx = f(g(x)) \ldots \leftarrow \boxed{\text{TFC2I}}$

O QUE A GENTE CONSEGUE FAZER NOS EXERCÍCIOS (9), (10) E (11)?

IMPORTANTE:

A GENTE VAI APRENDER A USAR UM MONTE DE TÉCNICAS QUE NÃO RESOLVEM UMA INTEGRAL, MAS QUE TRANSFORMAM ELA NUMA OUTRA INTEGRAL QUE TALVEZ SEJA MAIS FÁCIL DE RESOLVER...

LEMBREM:

$\boxed{\text{S3I}}: \boxed{\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du}$ $\boxed{\text{OBS: } u = g(x)}$

HOJE:
- INTEGRAÇÃO POR PARTES
- $\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx$

$\int F'(x) \, dx = F(x)$

SE $[F(x) := g(x)h(x)] \ldots$

$\int g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \, dx = g(x)h(x)$

$\int g'(x)h(x) \, dx + \int g(x)h'(x) \, dx = g(x)h(x)$

$\boxed{\int g'(x)h(x) \, dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x) \, dx} : \boxed{\text{IPP}_{g'h}}$

$\boxed{\int g(x)h'(x) \, dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x) \, dx} : \boxed{\text{IPP}_{gh'}}$

EXERCÍCIOS:

(12) $\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx = \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{h(x)} dx$

$= x e^x - \int e^x \, dx$

$= x e^x - e^x$

$\int \underbrace{x e^x}_{F'(x)} dx = \underbrace{x e^x - e^x}_{F(x)}$

(13) $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

(14) $\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$

(15) $\int x^k e^x \, dx = x^k e^x - k\int x^{k-1} e^x \, dx$ ("RECURSIVA")

(16) $\int x \operatorname{sen} x \, dx =$

(17) $\int x \cos x \, dx =$

(18) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx =$

(19) $\int x^2 \cos x \, dx =$

(20) $\int x^k \operatorname{sen} x \, dx =$

(15) $\int \underbrace{x^k}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx = \underbrace{x^k}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{k x^{k-1}}_{g'(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx$

NOS EXERCÍCIOS ACIMA A GENTE VIU COMO REDUZIR UMA INTEGRAL A OUTRA MAIS SIMPLES...
AGORA A GENTE VAI VER UM CASO EM QUE A GENTE PRECISA "REDUZIR UMA INTEGRAL A OUTRA IGUALMENTE COMPLICADA" DUAS VEZES PRA CONSEGUIR RESOLVÊ-LA.

(21) $\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{h} dx = \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{h} - \int \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\cos x}_{h'} dx$

(22) $\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos x}_{h} dx = \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\cos x}_{h} - \int \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{h'} dx$

$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

$= e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx\right)$

$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$

$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x)$

FATO:
INTEGRAÇÃO POR PARTES PARECE SUPER LEGAL MAS RESOLVE POUCA COISA - É POUCO ÚTIL!!

FATO 2:
INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO PARECE MUITO ESQUISITA MAS RESOLVE MUITA COISA!!

C2 16/ABRIL/2018

HOJE: COMO RESOLVER

$$\int (\operatorname{sen} x)^{\alpha} (\cos x)^{\beta} dx$$

EM ALGUNS CASOS

(E GAMBIARRAS ASSOCIADAS)

EXEMPLO:

$$\int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^3 dx =$$

$$\int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2 \cos x \, dx =$$

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2 (1 - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{s^2}) \underbrace{\cos x}_{\frac{ds}{dx}} dx =$$

$$\int s^2 (1 - s^2) \frac{ds}{dx} dx =$$

$$\int s^2 (1 - s^2) \, ds =$$

$$\int s^2 - s^4 \, ds =$$

$$\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} - \frac{(\operatorname{sen} x)^5}{5}$$

EXERCÍCIO:

1 $\int (\operatorname{sen} x)^6 (\cos x)^5 dx =$

$$\int (\operatorname{sen} x)^6 (\cos x)^2 (\cos x)^2 \cos x \, dx =$$

$$\int \underbrace{\underbrace{(\operatorname{sen} x)^6}_{s^6} \underbrace{\underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}_{1-s^2} \underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}_{1-s^2}}_{s^4 - 2s^2 + 1}}_{s^{10} - 2s^8 + s^6} \underbrace{\underbrace{\cos x}_{\frac{ds}{dx}} dx}_{ds} =$$

$$= \int s^{10} - 2s^8 + s^6 \, ds$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \end{array}\right] \quad = \frac{s^{11}}{11} - 2\frac{s^9}{9} + \frac{s^7}{7}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)^{11}}{11} - 2\frac{(\operatorname{sen} x)^9}{9} + \frac{(\operatorname{sen} x)^7}{7}$$

PRIMEIRA GAMBIARRA

NA CAIXINHA QUE INDICA A VARIÁVEL NOVA NA INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO - QUE NOS NOSSOS EXEMPLOS É $s = \operatorname{sen} x$ - ESCREVA TAMBÉM QUEM É $\frac{ds}{dx}$.

UM EXERCÍCIO DE 4/ABRIL...

6 $\int x \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{u} dx =$

$$\left[\begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x \, dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \end{array}\right]$$

$$\int \cancel{x} \sqrt{u} \frac{du}{-2\cancel{x}} =$$

$$\int -\frac{1}{2} \sqrt{u} \, du =$$

$$-\frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{3/2} =$$

$$-\frac{1}{3} u^{3/2} =$$

$$-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2}$$

VERSÃO MAIS LIMPA DA PRIMEIRA GAMBIARRA

É DIFÍCIL FORMALIZAR INTEGRAIS QUE MISTURAM A VARIÁVEL ANTIGA E A NOVA... ENTÃO:

6 (MAIS LIMPO)

$$\int x \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, x \, dx =$$

$$\int \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du =$$

$$-\frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2} =$$

$$-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x \, dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \\ x \, dx = -\frac{du}{2} \end{array}\right]$$

EXERCÍCIO

2 $\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^2 dx =$

$$\int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\int (1 - c^2) \, c^2 \, (-1) \, dc$$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x \, dx \\ \operatorname{sen} x \, dx = -dc \\ (\operatorname{sen} x)^2 = 1 - (\cos x)^2 \\ (\operatorname{sen} x)^2 = 1 - c^2 \end{array}\right]$$

DICA PRA DEIXAR ISSO TUDO UM POUCO MAIS LIMPO

DENTRO DA CAIXINHA DA SUBSTITUIÇÃO USE LINHAS COM "→" PRA INDICAR O QUE VAI SUBSTITUIR E LINHAS COM "=" PRO RESTO.

(OPS: ISSO NÃO É PADRÃO, É O TRUQUE QUE EU USO PRA ERRAR MENOS)

C2 16/ABRIL/2018

HOJE: COMO RESOLVER
$\int (\text{sen } x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$
EM ALGUNS CASOS
(E GAMBIARRAS ASSOCIADAS)

② (DE NOVO)

$\int (\text{sen } x)^3 (\cos x)^2 dx =$

$\int \underbrace{(\text{sen } x)^2}_{1-c^2} \underbrace{(\cos x)^2}_{c^2} \underbrace{\text{sen } x\, dx}_{(-1)dc} =$

$\int (1-c^2)c^2 (-1) dc =$

$\int (c^2-1) c^2 dc =$

$\int c^4 - c^2 dc =$

$\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3} =$

$\frac{(\cos x)^5}{5} - \frac{(\cos x)^3}{3}$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos x \\ \cos x \to c \\ (\text{sen } x)^2 \to 1-c^2 \\ \frac{dc}{dx} = -\text{sen } x \\ \text{sen } x\, dx \to -dc \end{array}\right]$$

OUTRO EXERCÍCIO DE 4/ABRIL:

⑧ $\int (ax+b)^k dx =$

$\int u^k \frac{1}{a} du =$

$\frac{1}{a} \frac{u^{k+1}}{k+1} =$

$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1}$

$$\left[\begin{array}{l} u = ax+b \\ ax+b \to u \\ \frac{du}{dx} = a \\ dx \to \frac{1}{a} du \end{array}\right]$$

VOLTANDO ÀS SUBSTITUIÇÕES
$c = \cos x$ E $s = \text{sen } x$...
PRA CASA:

③ VERIFIQUE QUE
$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^5 dx$ ← ÍMPARES
PODE SER RESOLVIDO POR QUALQUER UMA DAS SUBSTITUIÇÕES

④ VERIFIQUE QUE
$\int (\text{sen } x)^2 (\cos x)^4 dx$ ← PARES
NÃO PODE SER RESOLVIDO POR NENHUMA DAS SUBSTITUIÇÕES.

OBS: O TRUQUE MAIS RÁPIDO PRA RESOLVER $\int (\text{sen } x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$
COM α E β PARES USA $e^{i\theta} = \cos\theta + i \,\text{sen}\, \theta$...
A GENTE VAI VER ISSO PORQUE É MUITO LEGAL!!
MAS VÁRIOS LIVROS DE CÁLCULO 2 EVITAM ESSE ASSUNTO.

EXEMPLO: $360° = 2\pi$ (RADIANOS)
$180° = \pi$
$90° = \pi/2$
$45° = \pi/4$

FAZENDO $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ NA FÓRMULA ACIMA,

$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \,\text{sen}\, \frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS

SE $f(g(x)) = x$
ENTÃO $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{d}{dx} x = 1$
$\| $
$f'(g(x))g'(x)$

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. (☆)

EXERCÍCIO:
⑤ USE (☆) PRA DESCOBRIR $\frac{d}{dx} \ln x$.
DICA: UMA DESSAS DUAS IDÉIAS VAI FUNCIONAR:
$\exp(\ln(x)) = x$,
$\ln(\exp(x)) = x$.

$\frac{d}{dx}\exp(\ln(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$
$\|$
$\exp'(\ln(x))\ln'(x)$
$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$
USAMOS INFORMAÇÕES SOBRE $\exp' x$...

EXEMPLO:
$\frac{d}{dx} \text{arcsen } x = ?$

$\frac{d}{dx} \text{sen arcsen } x = \frac{d}{dx} x = 1$
$\|$
$(\text{sen}' \text{ arcsen } x)\text{arcsen}' x$

$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\text{sen}' \text{ arcsen } x}$

SE $\text{arcsen } x = a$
$\text{sen}' a = \cos a = \sqrt{1-(\text{sen } a)^2}$
$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen arcsen } x)^2}}$
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\text{C2 /ABRIL/2018}}$

VOLTANDO À FÓRMULA PRA DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA...

(OBS: $\frac{d}{dx}\ln x$ VAI SER MUITO IMPORTANTE AGORA, AS OUTRAS VÃO SER IMPORTANTES DEPOIS...)

SE $f(g(x))=x$,

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\|$$

$$f'(g(x))\,g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \qquad (☆)$$

EXERCÍCIOS:

① USE (☆) E $\frac{d}{dx}\exp x = \exp x$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\ln x$.

② USE (☆) E $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\operatorname{sen}x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$.

③ USE (☆) E $\frac{d}{dx}\cos x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arccos x$.

④ ISTO É VERDADE EM $x=\pi$? $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \sqrt{1-(\operatorname{sen}x)^2}$.

⑤ $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = ?$

⑥ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = ?$

⑦ $\frac{d}{dx}\tan x = ?$ (OBS: $\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$)

⑧ $\frac{d}{dx}\sec x = ?$ (OBS: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$)

⑨ SABEMOS QUE $(\operatorname{sen}x)^2+(\cos x)^2=1$. EXISTE UMA FÓRMULA PARECIDA QUE USA $(\tan x)^2$ E $(\sec x)^2$. QUAL É ESSA FÓRMULA?

⑩ USE QUE $\frac{d}{dx}\tan x = (\tan x)^2+1$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arctan x$.

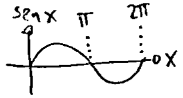
⑪ USE QUE $\frac{d}{dx}\sec x = (\sec x)\sqrt{(\sec x)^2-1}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}x$.

⑫ $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = ?$

⑬ $\frac{d}{dx}\ln(-x) = ?$

4.5 USE (☆) E $\frac{d}{dx}\cos x = -\sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arccos x$.

④ $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x$



$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\pi = \cos\pi = -1$$

$$\sqrt{1-(\operatorname{sen}\pi)^2} = \sqrt{1-0^2} = \sqrt{1} = 1$$

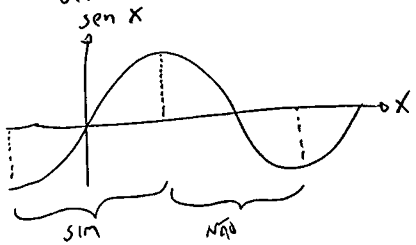
EM $x=\pi$,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x \overset{?}{=} \sqrt{1-(\operatorname{sen}x)^2}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$-1 \neq 1$$

QUANDO É QUE $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \sqrt{1-(\operatorname{sen}x)^2}$?



⑥ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

⑤ SE $f(x)=1$ ENTÃO $f'(x)=0$ E

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{0g(x)}-1g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}g(x)^k = k\,g(x)^{k-1}g'(x)$$

GAMBIARRA

("VERSÃO X")

$s=\operatorname{sen}x$

$c=\cos x$

$t=\tan x=\frac{s}{c}$

$z=\sec x=\frac{1}{c}$

⑦ $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{d}{dx}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{cc-s(-s)}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{c} = z^2$

⑧ $\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{d}{dx}\frac{1}{c} = -\frac{c'}{c^2} = -\frac{(-s)}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$

⑨ $t^2 = \left(\frac{s}{c}\right)^2 = \frac{s^2}{c^2}$ $\quad z^2 = \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2}+\frac{c^2}{c^2} = t^2+1$ $\quad \boxed{z^2=t^2+1}$

$\Rightarrow z=\sqrt{t^2+1}$

$\Rightarrow t=\sqrt{z^2-1}$

C2 /ABRIL/2018

VOLTANDO À FÓRMULA PRA DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA...

(OBS: $\frac{d}{dx} \ln x$ VAI SER MUITO IMPORTANTE AGORA, AS OUTRAS VÃO SER IMPORTANTES DEPOIS...)

SE $f(g(x)) = x$,

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{f'(g(x))\,g'(x)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \qquad (\star)$$

EXERCÍCIOS:

① USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \ln x$.

② USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$.

③ USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx} \cos x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \arccos x$.

④ ISTO É VERDADE EM $x = \pi$? $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$.

⑤ $\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = ?$

⑥ $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

⑦ $\frac{d}{dx} \tan x = ?$ (OBS: $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$)

⑧ $\frac{d}{dx} \sec x = ?$ (OBS: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$)

⑨ SABEMOS QUE $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. EXISTE UMA FÓRMULA PARECIDA QUE USA $(\tan x)^2$ E $(\sec x)^2$. QUAL É ESSA FÓRMULA?

⑩ USE QUE $\frac{d}{dx} \tan x = (\tan x)^2 + 1$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \arctan x$.

⑪ USE QUE $\frac{d}{dx} \sec x = (\sec x)\sqrt{(\sec x)^2 - 1}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x$.

⑫ $\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = ?$

⑬ $\frac{d}{dx} \ln(-x) = ?$

④.5 USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx} \cos x = -\sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx} \arccos x$.

⑫ $$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \ln'(f(x))\, f'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

⑬ $$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

SEJA $h(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{QUANDO } x<0 \\ \ln x & \text{QUANDO } 0<x \end{cases}$

ENTÃO $h'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } x<0 \\ \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } 0<x \end{cases}$

E $h(x) = \ln|x|$!!!

DAÍ $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ PARA TODO $x \neq 0$.

AULA QUE VEM:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x-2| + \ln|x+3|\right) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1(x+3) \quad (x-2)\cdot 1}{(x-2)(x+3)} = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$$

C2 23/ABRIL/2018

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$...

VAMOS COMEÇAR REVENDO A DEMONSTRAÇÃO DISSO.

① $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = ?$

② $\frac{d}{dx}\ln(-x) = ?$

③ $\frac{d}{dx}\begin{cases}\ln(-x) & \text{se } x<0,\\ \ln x & \text{se } 0<x\end{cases} = ?$

DEPOIS (NOVIDADES):

④ $\frac{d}{dx}\ln(x-4) = ?$

⑤ $\frac{d}{dx}\ln|x-4| = ?$ ⇐ $\frac{1}{x-4}$

⑥ $\frac{d}{dx}\ln|x-a| = \frac{1}{x-a}$.

NA AULA DE HOJE A EQUAÇÃO

$\int f(x)\,dx = F(x)$

VAI QUERER DIZER:

$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

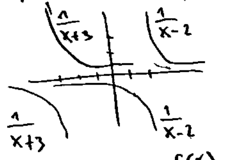
NOS PONTOS EM QUE ISTO FIZER SENTIDO, NÃO

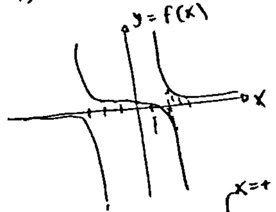
$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.

EXEMPLO:

$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$

REPARE QUE $f(2)$ E $f(-3)$ NÃO ESTÃO DEFINIDAS, E





REPARE QUE $\int_{x=-1}^{x=+1} f(x)\,dx$ NÃO ESTÁ DEFINIDA! EM INTERVALOS $[a,b]$ QUE CONTÉM OU O PONTO -3 OU O PONTO +2

A INTEGRAL $\int_{x=2}^{x=6} f(x)\,dx$ NÃO ESTÁ DEFINIDA.

O MELHOR QUE A GENTE PODE FAZER PRA INTEGRAR FUNÇÕES COMO ESSA $f(x)$ É ENCONTRAR $F(x)$ COM $f(x) = F'(x)$ SEMPRE QUE POSSÍVEL... COM ISSO A GENTE CONSEGUE UMA $F(x)$ QUE SERVE PRA INTEGRAR $f(x)$ PELO TFC2 EM ALGUNS INTERVALOS.

VAMOS VOLTAR PRAS CONTAS!

$$\int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x-2| + \ln|x+3|$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$$

⑦ SE $a,b \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{cx+d}{x^2+x-6}$. QUEM SÃO $c,d \in \mathbb{R}$?

⑧ $\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = ?$

⑨ $\int \frac{x}{x^2+x-6}\,dx = ?$

⑩ $\int \frac{ax+b}{x^2+x-6}\,dx = ?$

⑦ $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(a+b)x+(3a-2b)}{x^2+x-6}$

ENTÃO $c = a+b$ E $d = 3a-2b$.

⑧ FAZENDO $c=0$ E $d=1$

NA ⑦, TEMOS:

$c=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$

$d=1 \Rightarrow 3a-2b=1$, $3a-2b = 3a+2a = 5a$

$\Rightarrow a = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{5}$

$$\overbrace{\frac{a}{x-2}}^{1/5} + \overbrace{\frac{b}{x+3}}^{-1/5} = \frac{\overbrace{c}^{0}x + \overbrace{d}^{1}}{x^2+x-6}$$

$$\frac{1}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x^2+x-6}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx =$$

$\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ NÃÃÃÃO

$\ln(a \cdot b) = (\ln a) + (\ln b)$

$\boxed{\text{C2 2/maio/2018}}$

DIREÇÃO FÁCIL:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+5}=\frac{3(x+5)+4(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\frac{7x+7}{x^2+3x-10}$$

DIREÇÃO DIFÍCIL:

$$\frac{ax+b}{x^2+3x-10}=c\frac{1}{x-2}+d\frac{1}{x+5}$$

SABEMOS a E b E QUEREMOS DETERMINAR c E d — E PRA ISSO PRECISAMOS RESOLVER UM SISTEMA. !!

UM DOS ASSUNTOS DE HOJE É O "MÉTODO DE HEAVISIDE", QUE NOS PERMITE ENCONTRAR c E d EM DETERMINADOS CASOS POR UM TRUQUE COM CONTAS BEM MENORES QUE RESOLVER SISTEMAS.

MAS ANTES DA GENTE VER O MÉTODO DE HEAVISIDE...

NOTE QUE

$$\int\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^2}dx$$
$$=\int ax^2+bx+c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}\,dx$$
$$=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+d\ln|x|+e\frac{x^{-1}}{-1}\quad(+C)$$

$$\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}$$

E DÁ PRA GENTE FAZER ALGO PARECIDO TROCANDO O x POR, DIGAMOS, $x+3$...

$$\int\frac{a(x+3)^4+b(x+3)^3+c(x+3)^2+d(x+3)+e}{(x+3)^2}dx$$
$$=\int\frac{au^4+bu^3+cu^2+du+e}{u^2}du$$
$$=\int au^2+bu+c+\frac{d}{u}+\frac{e}{u^2}\,du$$
$$=a\frac{u^3}{3}+b\frac{u^2}{2}+cu+d\ln|u|+e\frac{u^{-1}}{-1}$$
$$=a\frac{(x+3)^3}{3}+b\frac{(x+3)^2}{2}+c(x+3)+d\ln|x+3|+e\frac{(x+3)^{-1}}{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}u=x+3\\ x+3\to u\\ \frac{du}{dx}=1\\ du=dx\\ dx\to du\end{array}}$$

DIREÇÃO FÁCIL (COM FATORES REPETIDOS):

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{5}{x+5}=$$
$$\frac{3(x-2)(x+5)+4(x+5)+5(x-2)^2}{(x-2)^2(x+5)}=$$
$$\frac{3(x^2+3x-10)+4x+20+5(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(x+5)}=$$
$$\frac{8x^2-7x+10}{x^3+x^2-16x+20}$$

← POLINÔMIO DE GRAU 2

← POLINÔMIO DE GRAU 3

IMPORTANTE

E SE O POLINÔMIO DO NUMERADOR TEM GRAU MAIOR OU IGUAL AO DO DENOMINADOR?

EXEMPLO (DIREÇÃO FÁCIL):

$$2+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+5}=\frac{2(x^2+3x-10)+7x+7}{x^2+3x-10}$$
$$=\frac{2x^2+13x-13}{x^2+3x-10}$$

SE O POLINÔMIO DO NUMERADOR TEM GRAU "GRANDE" ($\geq$ QUE O GRAU DO DENOMINADOR) A GENTE TEM QUE PÔR ALGO PRA FORA...

EXERCÍCIO:

$$\int\frac{x^2}{(x-2)(x+5)}dx=$$
$$\int\frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{(x-2)(x+5)}dx=$$
$$\int\frac{x^2+3x-10}{(x-2)(x+5)}+\frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}dx=$$
$$\int 1+\frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}dx=$$
$$x+\int\frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}dx=\quad\text{(CASA!)}$$

$$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$$

C2 2/maio/2018

Direção fácil:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+5}=\frac{3(x+5)+4(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\frac{7x+7}{x^2+3x-10}$$

Direção difícil:

$$\frac{ax+b}{x^2+3x-10}=c\,\frac{1}{x-2}+d\,\frac{1}{x+5}$$

Sabemos a e b e queremos determinar c e d — e pra isso precisamos resolver um sistema. !! ☹

Um dos assuntos de hoje é o "método de Heaviside", que nos permite encontrar c e d em determinados casos por um truque com contas bem menores que resolver sistemas.

Mas antes da gente ver o método de Heaviside...

Introdução ao método de Heaviside

Digamos que

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c},$$

onde $p(x)$ é um polinômio de grau menor que o $(x-a)(x-b)(x-c)$...

Obs: a,b,c têm que ser diferentes!!!

Introdução ao truque

Se $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-9)}$

Então $f(2)=\dfrac{(2-2)(2+5)}{(2-2)(2-9)}=\dfrac{0(2+5)}{0(2-9)}=\dfrac{0}{0}=$!! ☹

Em princípio $f(2)$ não está definido...

mas

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{(x-2)}(x-9)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x-9}=\frac{2+5}{2-9}=\frac{7}{-7}=-1$$

Sejam $f(x)=\dfrac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

e $g(x)=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$.

A gente sabe a,b,c e o polinômio $p(x)$ (de grau 2 ou menor); além disso $f(x)=g(x)$ e queremos encontrar A, B, C.

Repare que:

$$(x-a)\,g(x)=\frac{x-a}{x-a}A+\frac{x-a}{x-b}B+\frac{x-a}{x-c}C$$

e

$$\lim_{x\to a}(x-a)\,g(x)=\cancel{\frac{x-a}{x-a}}A+\underbrace{\frac{\overbrace{x-a}^{\to 0}}{\underbrace{x-b}_{\not\to 0}}B}_{\to 0}+\underbrace{\frac{x-a}{x-c}C}_{\to 0}$$

$$=A$$

Entããããão

$$\lim_{x\to a}(x-a)f(x)=A\ !!!$$

$$\lim_{x\to b}(x-b)f(x)=B\ !!!$$

$$\lim_{x\to c}(x-c)f(x)=C\ !!!$$

C2 7/maio/2018

Hoje:

- Método de Heaviside na prática
- Introdução ao método de integração por substituição trigonométrica
- Marcar provas

	2ª	4ª	
Maio	7	9	
	14	16	
	21	23	
	28	30	P1: 30/maio
Junho	4	6	
	11	13	
	~~18~~	~~20~~	← vou estar em congresso
	~~25~~	~~27~~	
Julho	2	4	P2: 2/jul
	9	11	VR: 4/jul
			VS: 11/jul

Método de Heaviside

Caso geral (grau 2):

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Conhecemos $p(x)$ (grau <2) e $a,b\in\mathbb{R}$. Obs: $a\neq b$.

Queremos descobrir $A,B\in\mathbb{R}$.

Sejam:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)}, \quad g(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Truque: $(x-a)g(x) = \frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}} + \frac{(x-a)B}{x-b}$

$$\lim_{x\to a}(x-a)g(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}} + \frac{(x-a)B}{x-b}\right) = A + \frac{\cancel{(a-a)}B}{a-b} = A$$

Obs: se $h(x) = \frac{x-42}{x-42}\operatorname{sen} x$

então $h(42) = \frac{42-42}{42-42}\operatorname{sen} 42 = \frac{0}{0}\operatorname{sen} 42 = \text{erro}$

mas $\lim_{x\to 42} h(x) = \operatorname{sen} x$

Continuando...

Como $f(x)=g(x)$,

$$\lim_{x\to a}(x-a)f(x) = \lim_{x\to a}(x-a)g(x) = A$$

$$\| \quad \lim_{x\to a}\cancel{(x-a)}\frac{p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)} \quad \| \quad \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{x-b} \quad \| \quad \frac{p(a)}{a-b}$$

Caso particular (grau 2).

Digamos que:

$$\frac{3x+4}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

Exercícios:

a) Descubra A

b) Descubra B (Dica: $\lim_{x\to b}(x-b)\ldots$)

c) Verifique seus resultados.

Caso particular (grau 3).

Digamos que

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}$$

Exercícios:

d) Descubra A.

e) Descubra B.

f) Descubra C.

Exercício (sobre uma das minhas pegadinhas preferidas):

Digamos que

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} + C.$$

g) Descubra A, B, C.

h) Verifique seus resultados.

Uma notação (não-padrão!) pra lidar com polinômios

Exemplo:

$$3x^5+6x^4-2x^2+\tfrac{1}{3} = 3x^5+6x^4+0x^3-2x^2+0x+\tfrac{1}{3} = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}3&6&0&-2&0&1/3\end{array}}$$

coef. do x^5 — coef. do x^0

Exemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|}1&2&3\end{array} + \begin{array}{|c|c|}40&50\end{array} = (x^2+2x+3)+(40x+50) = x^2+42x+53 = \begin{array}{|c|c|c|}1&42&53\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|c|}1&2&3\end{array} \\ + \begin{array}{|c|c|}40&50\end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|}1&42&53\end{array}\end{array}$$

Multiplicação:

$$\begin{array}{|c|c|c|}1&2&3\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}10&100\end{array} = (x^2+2x+3)\cdot(10x+100) =$$
$$10x(x^2+2x+3) + 100\cdot(x^2+2x+3) =$$
$$(10x^3+20x^2+30x)+(100x^2+200x+300) =$$
$$10x^3+120x^2+230x+300 =$$
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}10&120&230&300\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|c|}1&2&3\end{array} \\ \cdot \begin{array}{|c|c|}10&100\end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|}100&200&300\end{array} \\ + \begin{array}{|c|c|c|}10&20&30\end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|}10&120&230&300\end{array}\end{array}$$

$\boxed{\text{C2 7/MAIO/2018}}$

HOJE:

- MÉTODO DE HEAVISIDE NA PRÁTICA
- INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA
- MARCAR PROVAS

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} + C = \frac{A(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+5)} + \frac{C(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+5)}$$

$$= \frac{A(x+5) + B(x-2) + C(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+5)}$$

$$= \frac{A\,\boxed{1|5} + B\,\boxed{1|-2} + C\,\boxed{1|3|-10}}{\boxed{1|3|-10}}$$

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x+5)} = \frac{\boxed{3|4|5}}{\boxed{1|3|-10}}$$

IDÉIA:

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x+5)} - 3 = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

$$= \frac{\boxed{3|4|5} - 3\,\boxed{1|3|-10}}{\boxed{1|3|-10}} = \frac{\boxed{-5|35}}{\boxed{1|3|-10}}$$

$$\frac{9\,\boxed{1|5} + 42\,\boxed{1|-2} + 200\,\boxed{1|3|-10}}{\boxed{1|3|-10}} = \frac{\boxed{200|\text{[illegible]}|\text{[illegible]}}}{\boxed{1|3|-10}}$$

MORAL: $C=3$!!!!!

CONTINUANDO...

Como $f(x)=g(x)$,

$$\lim_{x\to a}(x-a)f(x) = \lim_{x\to a}(x-a)g(x) = A$$

$$\lim_{x\to a}\cancel{(x-a)}\frac{p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)} = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{x-b} = \frac{p(a)}{a-b}$$

C2 9/maio/2018

Hoje: substituição trigonométrica! (que é algo que parece ser complicado demais pra ser útil, mas acaba sendo útil em muitas situações)

Exemplo:

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

Truque:

$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$

$\int \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\theta\, d\theta =$

$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \cos\theta \to c \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ dc = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$

$\int c^2(-1)\,dc =$

$-\int c^2\,dc =$

$-\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos\theta)^3}{3} = -\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}$

Será que isto está certo?

$\underbrace{\int s\sqrt{1-s^2}\,ds}_{f(s)} = \underbrace{-\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}}_{F(s)}$

Será que $\frac{d}{ds}F(s) = f(s)$?

Lembre que se $g(h(x)) = x$

então $\frac{d}{dx}g(h(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$

$\quad \| $

$g'(h(x))h'(x)$

e $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$

Tentem usar isto pra calcular $\frac{d}{ds}\operatorname{arcsen} s$!!

Dicas: $\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \sqrt{(\cos\theta)^2}$
$= \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}$.

$\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta = \theta$

$\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s = s$

(um desses dois vai nos ajudar, o outro não)

$\frac{d}{d\theta}\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{d\theta}\theta = 1$

$\quad \|$

$\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}'\theta$

$\Rightarrow \operatorname{sen}'\theta = \frac{1}{\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}\theta)}$

$\frac{d}{ds}\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s = \frac{d}{ds}s = 1$

$\quad \|$

$\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} s)\operatorname{arcsen}' s$

$\Rightarrow \operatorname{arcsen}' s = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} s)}$

$\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} s) = ? \quad = \sqrt{1-s^2}$

$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}$

$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} s) = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s)^2}$
$= \sqrt{1-s^2}$

Ops: $\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen} 42 = \sqrt{1-(\operatorname{sen} 42)^2}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{arcsen}' s = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} s)} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}}$

$\underbrace{\int s\sqrt{1-s^2}\,ds}_{f(s)} \overset{?}{=} \underbrace{-\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}}_{F(s)}$

Será que $\frac{d}{ds}F(s) = f(s)$?

$\frac{d}{ds}\cos\operatorname{arcsen} s = ?$

$\quad \|$

$(\cos'(\operatorname{arcsen} s))\cdot(\operatorname{arcsen}' s)$

$\quad \|$

$(-\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

$\quad \|$

$(-s)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

$\quad \|$

$-\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$

$\frac{d}{ds}(\cos\operatorname{arcsen} s)^3 = ?$

$\quad \|$

$3(\cos\operatorname{arcsen} s)^2\frac{d}{ds}(\cos\operatorname{arcsen} s)$

$\quad \|$

$3(\cos\operatorname{arcsen} s)^2\left(-\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)$

Truque:

$\cos\operatorname{arcsen} s = ?$

$\cos A = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}$

$\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s = s$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\operatorname{arcsen} s &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} s)} \\ &= \sqrt{1-(\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s)^2} \\ &= \sqrt{1-s^2}\end{aligned}}$$!!

Esse tipo de fórmula simplifica coisas tipo $-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3}$!

$F(s) = -\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3} = ?$

$\quad \|$

$-\frac{\sqrt{1-s^2}^{\,3}}{3} = -\frac{1}{3}(1-s^2)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{2}(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{d}{ds}(1-s^2)}_{-2s}$

$= \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}(1-s^2)^{\frac{1}{2}}(\cancel{-}\cancel{2}s)$

$= s(1-s^2)^{\frac{1}{2}} = s\sqrt{1-s^2}$!!

C2 9/MAIO/2018

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!
(QUE É ALGO QUE PARECE SER COMPLICADO DEMAIS PRA SER ÚTIL, MAS ACABA SENDO ÚTIL EM MUITAS SITUAÇÕES)

EXEMPLO:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

TRUQUE:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \cos\theta \to c \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ dc = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$$

$$\int c^2(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos\theta)^3}{3} = -\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3}$$

... DE SUI ... ESSE TIPO SER ÚTIL.

$$\cos(\operatorname{arcsen} s) = \sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} s))^2} = \sqrt{1-s^2}.$$

TEM UM OUTRO JEITO DA GENTE LEMBRAR E DEDUZIR ESSE TIPO DE FÓRMULA, MAS NÃO SEI SE É FÁCIL DE FORMALIZAR...

TRUQUE: "VARIÁVEIS VARIANDO JUNTAS"

NO CASO: θ, s, c

$s = \operatorname{sen}\theta \quad \theta = \operatorname{arcsen} s \quad c^2+s^2=1$

$c = \cos\theta \quad \theta = \arccos c \quad c = \sqrt{1-s^2}$

$\cos\operatorname{arcsen} s = ? \quad s = \sqrt{1-c^2}$

$\cos\theta = c = \sqrt{1-s^2}$

OBS:
NO EXEMPLO LÁ À ESQUERDA,

$$\int s\sqrt{1-s^2} =$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta =$$

$$\int c^2(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc$$

$$= -\frac{c^3}{3} = \frac{-(\cos\theta)^3}{3} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-s^2}^{\,3}}{3}$$

OBS: LÁ NO 1º BLOCO DE SUBSTITUIÇÃO TINHA "$\sqrt{1-s^2} \to \cos\theta$"... ENTÃO $\cos\theta \to \sqrt{1-s^2}$!

ALGO UM POUCO MAIS GERAL...

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta}\,ds = ? \quad \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$= \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha(\cos\theta)^\beta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha(\cos\theta)^{\beta+1}\,d\theta$$

ISSO VAI SERVIR PRA BASTANTE COISA - ATÉ EM ALGUNS CASOS COM α OU β NEGATIVOS! (EXEMPLOS DEPOIS!)

OUTRAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMETRICAS

... ELAS USAM $\tan\theta$ E $\sec\theta$ AO INVÉS DE $\operatorname{sen}\theta$ E $\cos\theta$!

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$$

$t = \tan\theta, \quad z = \sec\theta$

$t = \frac{s}{c}, \quad z = \frac{1}{c}, \quad z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2+1$

$z^2 = t^2+1$

$z = \sqrt{t^2+1}$

$t^2 = z^2-1$

$t = \sqrt{z^2-1}$

$$\int \underbrace{x}_{t}\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{x^2}_{t}}}_{\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{z}}\,\underbrace{dx}_{\underbrace{dt}_{\underbrace{=}_{z^2 d\theta}}} = ?$$

$dt \to ?$

$\frac{dt}{d\theta} = z^2, \quad dt \to z^2\,d\theta$

EXERCÍCIO:

$$\int t\sqrt{1+t^2}\,dt = ?$$

C2 9/MAIO/2018

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

(QUE É ALGO QUE PARECE SER COMPLICADO DEMAIS PRA SER ÚTIL, MAS ACABA SENDO ÚTIL EM MUITAS SITUAÇÕES)

EXEMPLO:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

TRUQUE:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \cos\theta \to c \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ dc = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$$

$$\int c^2(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos\theta)^3}{3} = -\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}$$

$$\int t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left[\begin{array}{l} t \to \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} \to \sec\theta \\ dt \to \sec^2\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int \tan\theta \sec\theta \sec^2\theta\, d\theta =$$

$$\int \tan\theta \sec^3\theta\, d\theta =$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta =$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta =$$

$$\int \cos^{-4}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \left[\begin{array}{l} \cos\theta \to c \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta \to (-1)\,dc \end{array}\right]$$

$$\int c^{-4}(-1)\,dc =$$

$$-\int c^{-4}\,dc =$$

$$-\frac{c^{-3}}{-3} =$$

... E COMO É QUE A GENTE VOLTA PRA VARIÁVEL t?

$$\frac{c^{-3}}{3} =$$

$$\frac{1}{3}z^3 = \frac{1}{3}\sqrt{t^2+1}^{\,3}$$

← THX TO EMERSON

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}^{\,3}$$

C2 14/MAIO/2018

HOJE: MAIS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS!

LEMBREM QUE O TRUQUE PRA RESOLVER ALGO COMO

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta dx$$

É

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

(...)

AS OUTRAS DUAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS SÃO BASEADAS EM $t \to \tan\theta$ E EM $z \to \sec\theta$...

EXERCÍCIO: MONTE O BLOQUINHO DE INSTRUÇÕES PARA SUBSTITUIÇÃO PARA $t \to \tan\theta$ E PARA $z \to \sec\theta$.

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1+t^2$$

$$z^2 = 1+t^2$$

$$z = \sqrt{1+t^2}$$

$$t^2 = z^2-1$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

$$\frac{dz}{d\theta} = zt$$

$$dt \to z^2 d\theta$$

$$dz \to zt\, d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} t \to \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} \to z \\ \frac{dt}{d\theta} = z^2 \\ dt \to z^2 d\theta \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} z \to \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} \to t \\ \frac{dz}{d\theta} = zt \\ dz \to zt\, d\theta \end{array}\right]$$

EXERCÍCIOS:

(1) $\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta dt = ?$

(2) $\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^\beta dz = ?$

(1) $\ldots = \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta$

$= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta$

(2) $\ldots = \int (\sec\theta)^\alpha (\tan\theta)^\beta (\sec\theta \tan\theta)\, d\theta$

$= \int (\sec\theta)^{\alpha+1} (\tan\theta)^{\beta+1} d\theta$

ÀS VEZES ESSAS SUBSTITUIÇÕES VÃO SER ÚTEIS MESMO QUANDO NÃO HÁ UMA "$\sqrt{\ }$" VISÍVEL... EXERCÍCIOS:

(3) $\int \underbrace{t^0 \sqrt{1+t^2}^{-2}}_{\frac{1}{1+t^2}} dt = ? = \int \underbrace{(\tan\theta)^0}_{1} \underbrace{(\sec\theta)^{-2+2}}_{1} d\theta$

$= \int d\theta$

$= \theta$

$= \arctan t$

(4) $\int \underbrace{t^1 \sqrt{1+t^2}^{-2}}_{\frac{t}{1+t^2}} dt = ?$

(4) $\int t^1 \sqrt{1+t^2}^{-2} dt =$

$\int (\tan\theta)^1 \underbrace{(\sec\theta)^{-2+2}}_{1} d\theta =$

$\int \tan\theta\, d\theta =$

$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} d\theta =$

$\int (\cos\theta)^{-1} \underbrace{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{} = \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$

$\int c^{-1}(-1)\, dc =$

$-\int \frac{1}{c} dc =$

$-\ln|c| =$

$-\ln|\cos\theta| =$

$-\ln|\cos \arctan t| =$

!! COMO SIMPLIFICAR ISSO?

$s = \operatorname{sen}\theta \quad \theta = \operatorname{arcsen} s$

$c = \cos\theta \quad \theta = \arccos c$

$t = \tan\theta \quad \theta = \arctan t$

$z = \sec\theta \quad \theta = \operatorname{arcsec} z$

QUAL A RELAÇÃO ENTRE c E t?

$\tan \underbrace{\arctan t}_{\theta} = t$

$\cos \underbrace{\arctan t}_{\theta} = c$

$z = \frac{1}{c} \quad z^2 = 1+t^2, \quad z^2 = \frac{1}{c^2}$

$\frac{1}{c^2} = 1+t^2$

$c^2 = \frac{1}{1+t^2}$

$t^2 = \frac{1}{c^2} - 1 = \frac{1-c^2}{c^2}$

VOU FICAR DEVENDO !!

C2 14/MAIO/2018

HOJE: MAIS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS!

LEMBREM QUE O TRUQUE PRA RESOLVER ALGO COMO

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta dx$$

É

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta ds = \left[\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

(...)

AS OUTRAS DUAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS SÃO BASEADAS EM $t \to \tan\theta$ E EM $z \to \sec\theta$...

EXERCÍCIO: MONTE O BLOQUINHO DE INSTRUÇÕES PARA SUBSTITUIÇÃO PARA $t \to \tan\theta$ E PARA $z \to \sec\theta$.

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1+t^2$$

$$z^2 = 1+t^2$$

$$z = \sqrt{1+t^2}$$

$$t^2 = z^2-1$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

$$\frac{dz}{d\theta} = zt$$

$$dt \to z^2 d\theta$$

$$dz \to zt\,d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} t \to \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} \to z \\ \frac{dt}{d\theta} = z^2 \\ dt \to z^2 d\theta \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} z \to \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} \to t \\ \frac{dz}{d\theta} = zt \\ dz \to zt\,d\theta \end{array}\right]$$

EXERCÍCIOS:

① $\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta dt = ?$

② $\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^\beta dz = ?$

① $\ldots = \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta$

$= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta$

② $\ldots = \int (\sec\theta)^\alpha (\tan\theta)^\beta (\sec\theta\tan\theta)\, d\theta$

$= \int (\sec\theta)^{\alpha+1} (\tan\theta)^{\beta+1} d\theta$

ÀS VEZES ESSAS SUBSTITUIÇÕES VÃO SER ÚTEIS MESMO QUANDO NÃO HÁ UMA "$\sqrt{\ }$" VISÍVEL... EXERCÍCIOS:

③ $\int \underbrace{t^0 \sqrt{1+t^2}^{-2}}_{\frac{1}{1+t^2}} dt = ? = \int \underbrace{(\tan\theta)^0}_{1} \underbrace{(\sec\theta)^{-2+2}}_{1} d\theta$

$= \int d\theta$

$= \theta$

$= \arctan t$

④ $\int \underbrace{t^1 \sqrt{1+t^2}^{-2}}_{\frac{t}{1+t^2}} dt = ?$

④ $\int t^1 \sqrt{1+t^2}^{-2} dt =$

$\int (\tan\theta)^1 \underbrace{(\sec\theta)^{-2+2}}_{1} d\theta =$

$\int \tan\theta\, d\theta =$

$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} d\theta =$

$\int (\cos\theta)^{-1} \underbrace{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{} = \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta \to (-1)dc \end{array}\right]$

$\int c^{-1}(-1)\, dc =$

$-\int \frac{1}{c} dc =$

$-\ln|c| =$

$-\ln|\cos\theta| =$

$-\ln|\cos\arctan t| =$

!! COMO SIMPLIFICAR ISSO?

$$\begin{array}{ll} s = \operatorname{sen}\theta & \theta = \operatorname{arcsen} s \\ c = \cos\theta & \theta = \arccos c \\ t = \tan\theta & \theta = \arctan t \\ z = \sec\theta & \theta = \operatorname{arcsec} z \end{array}$$

QUAL A RELAÇÃO ENTRE c E t?

$\tan \underbrace{\arctan t}_{\theta} = t$

$\cos \underbrace{\arctan t}_{\theta} = c$

$z = \frac{1}{c}$ $\quad z^2 = 1+t^2$ $\quad t^2 = \frac{1}{c^2} - 1 = \frac{1-c^2}{c^2}$

$z^2 = \frac{1}{c^2}$

$\frac{1}{c^2} = 1+t^2$

$c^2 = \frac{1}{1+t^2}$

VOU FICAR DEVENDO !!

C2 17/MAIO/2018

HOJE: MAIS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS!

LEMBREM QUE O TRUQUE PRA RESOLVER ALGO COMO

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta dx$$

É

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta ds = \begin{bmatrix} s \to \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds \to \cos\theta \, d\theta \end{bmatrix}$$

(...)

AS OUTRAS DUAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS SÃO BASEADAS EM $t \to \tan\theta$ E EM $z \to \sec\theta$...

EXERCÍCIO: MONTE O BLOQUINHO DE INSTRUÇÕES PARA SUBSTITUIÇÃO PARA $t \to \tan\theta$ E PARA $z \to \sec\theta$.

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1+t^2$$

$$z^2 = 1+t^2$$

$$z = \sqrt{1+t^2}$$

$$t^2 = z^2-1$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

$$\frac{dz}{d\theta} = zt$$

$$dt \to z^2 d\theta$$

$$dz \to zt\, d\theta$$

$$\begin{bmatrix} t \to \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} \to z \\ \frac{dt}{d\theta} = z^2 \\ dt \to z^2 d\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \to \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} \to t \\ \frac{dz}{d\theta} = zt \\ dz \to zt\, d\theta \end{bmatrix}$$

A GENTE JÁ SABE SE LIVRAR DE TERMOS COMO $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ NO INTEGRANDO...

E ISTO AQUI?

$$\int x^\alpha \sqrt{4-9x^2}^\beta dx = ?$$

TRUQUE (EM TRÊS PASSOS):

$$\sqrt{4-4x^2} = \sqrt{4(1-x^2)} = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-9x^2} = \sqrt{1-(3x)^2} = \sqrt{1-u^2} \qquad [u=3x]$$

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4(1-\frac{9}{4}x^2)} = 2\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2} = 2\sqrt{1-(\frac{3}{2}x)^2} = 2\sqrt{1-u^2} \qquad [u=\tfrac{3}{2}x]$$

$$\sqrt{a^2-b^2x^2} = a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2} = a\sqrt{1-(\frac{b}{a}x)^2} = a\sqrt{1-u^2} \qquad [u=\tfrac{b}{a}x]$$

AULA QUE VEM:

- ESSE TRUQUE EM DETALHES,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$
- $\operatorname{sen} x = \ldots$

$$e^{2+3i} = \ldots$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

$\boxed{\text{C2 16/maio/2018}}$

Hoje:

Aproximações por polinômios, série de Taylor (introdução), fórmulas pra calcular e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\ln x$, números complexos...

Idéia:

Vamos dizer que $f \underset{2}{\approx} g$ — pronúncia: f e g são iguais até a segunda derivada em $x=0$ — quando

$f(0)=g(0)$,
$f'(0)=g'(0)$,
$f''(0)=g''(0)$.

Similarmente, $f \underset{3}{\approx} g$ quando

$f(0)=g(0)$,
$f'(0)=g'(0)$,
$f''(0)=g''(0)$,
$f'''(0)=g'''(0)$.

Obs: $f \underset{0}{\approx} g$ quer dizer $f(0)=g(0)$.

Aproximações polinomiais

Oops, antes disso...

Exercícios:

(1) Se $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
Calculem: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, $f'''''(x)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f''''(0)$, $f'''''(0)$.

(2) Mesma coisa com outra notação:
Seja $g(x)=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$.
Calculem $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$, $g''''(x)$, $g'''''(x)$, $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$, $g'''(0)$, $g''''(0)$, $g'''''(0)$.

Notação:

$\operatorname{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \ldots)$
$\operatorname{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Repare que a operação "derivs" recebe uma função e retorna uma sequência infinita de funções, e a operação "derivs_0" recebe uma função e retorna uma sequência infinita de números.

(3) $\operatorname{derivs}(e^x) = ?$
(4) $\operatorname{derivs}_0(e^x) = ?$
(5) $\operatorname{derivs}(e^{2x}) = ?$
(6) $\operatorname{derivs}_0(e^{2x}) = ?$
(7) $\operatorname{derivs}(\cos x) = ?$
(8) $\operatorname{derivs}_0(\cos x) = ?$
(9) $\operatorname{derivs}(\operatorname{sen} x) = ?$
(10) $\operatorname{derivs}_0(\operatorname{sen} x) = ?$

Mais notação:

$f_3 = a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3$,
$f_4 = a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$,
etc.

Repare que: $f \underset{4}{\approx} g$ é verdade se e só se $\operatorname{derivs}_0(f)$ e $\operatorname{derivs}_0(g)$ coincidem nos 5 primeiros termos.

Uma aproximação polinomial "de grau 4", ou "até a 4ª derivada", para g é um polinômio f_4 tal que $f_4 \underset{4}{\approx} g$...

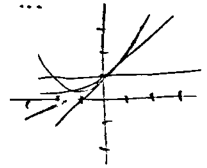
"Encontre f_4 tal que $f_4 \underset{4}{\approx} g$" na verdade quer dizer "Encontre os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 de f_4".

(11) Encontre f_4 tal que $f_4 \underset{4}{\approx} e^x$.
(12) Encontre f_6 tal que $f_6 \underset{6}{\approx} \cos x$.
(13) Encontre f_8 tal que $f_8 \underset{8}{\approx} \operatorname{sen} x$.

As aproximações polinomiais (em torno de $x=0$) para uma função g são funções $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tais que: $f_0 \underset{0}{\approx} g$, $f_1 \underset{1}{\approx} g$, $f_2 \underset{2}{\approx} g$, etc.

(14) Encontre as aproximações polinomiais para e^x.
(15) Encontre as aproximações polinomiais para $\cos x$.

Obs: No exercício (14) as funções $f_0, f_1, f_2, \ldots$ são aproximações cada vez melhores para e^x...



Idéia (série de Taylor): $e^x = f_\infty(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

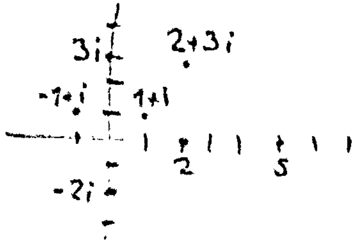
(16) (com calculadora) Comparem e^1 com $f_4(1)$, $f_5(1)$, $f_6(1)$.

$\boxed{\text{C2 16/maio/2013}}$

Revisão de complexos (parte 1)

Todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma $a+ib$, onde $a,b \in \mathbb{R}$.

Dá pra representar cada $z \in \mathbb{C}$ como um ponto no plano complexo.

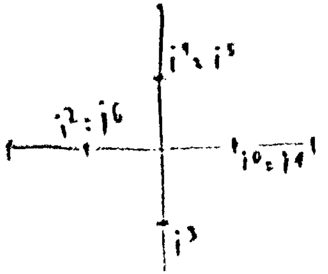


Soma: $(2+3i)+(4+5i) = 6+8i$

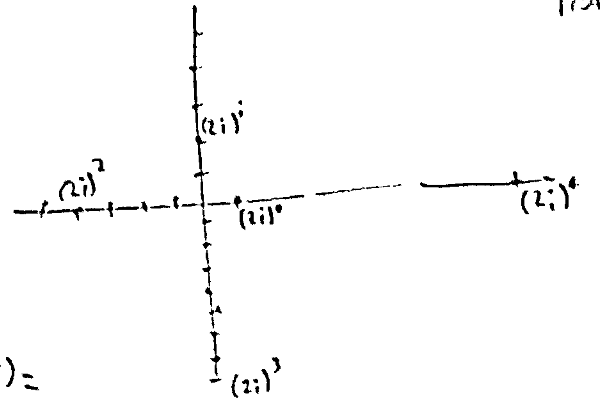
Multiplicação: $(2+3i)\cdot(4+5i) = \underbrace{2\cdot 4}_{8} + \underbrace{3i\cdot 4}_{12i} + \underbrace{2\cdot 5i}_{10i} + \underbrace{3i\cdot 5i}_{\underbrace{15i^2}_{-15}} = -7+22i$

Calcule e represente graficamente:

a) $\underbrace{i^0}_{1}, \underbrace{i^1}_{i}, \underbrace{i^2}_{-1}, \underbrace{i^3}_{-i}, \underbrace{i^4}_{1}, \underbrace{i^5}_{i}, \underbrace{i^6}_{-1}, \ldots$



b) $(2i)^0, (2i)^1, (2i)^2, \ldots$



Idéia:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Isso dá um método pra gente calcular e^x...

Se a gente fingir que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ é a nossa definição pra função exp...

Então coisas como e^{2+3i} fazem sentido...

(Sugestão: calcule $\sum_{k=0}^{10} \frac{(2+3i)^k}{k!}$)

Vamos calcular: $e^{i\theta}$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\theta^1}{1} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

$$e^{i\theta} = \frac{(i\theta)^0}{0!} + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \ldots$$

$$= \underbrace{i^0}_{1}\frac{\theta^0}{0!} + \underbrace{i^1}_{i}\frac{\theta^1}{1!} + \underbrace{i^2}_{-1}\frac{\theta^2}{2!} + \underbrace{i^3}_{-i}\frac{\theta^3}{3!} + \ldots$$

$$= \frac{\theta^0}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots + i\left(\frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

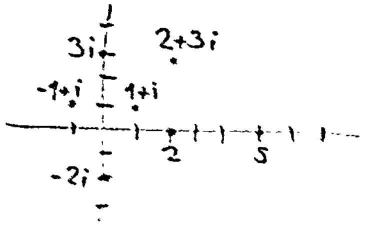
$$= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

C2 16/maio/2018

Revisão de complexos (parte 1)

Todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma $a+ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Dá pra representar cada $z \in \mathbb{C}$ como um ponto no plano complexo.

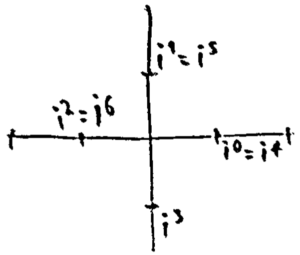


Soma: $(2+3i)+(4+5i) = 6+8i$

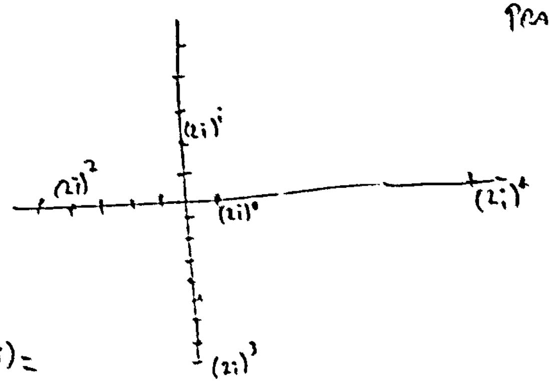
Multiplicação: $(2+3i)\cdot(4+5i) = \underbrace{2\cdot 4}_{8} + \underbrace{3i\cdot 4}_{12i} + \underbrace{2\cdot 5i}_{10i} + \underbrace{3i\cdot 5i}_{\underbrace{15i^2}_{-15}} = -7+22i$

Calcule e represente graficamente:

a) $\underbrace{i^0}_{1}, \underbrace{i^1}_{i}, \underbrace{i^2}_{-1}, \underbrace{i^3}_{-i}, \underbrace{i^4}_{1}, \underbrace{i^5}_{i}, \underbrace{i^6}_{-1}, \ldots$



b) $(2i)^0, (2i)^1, (2i)^2, \ldots$



Idéia:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Isso dá um método pra gente calcular e^x...

Se a gente fingir que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ é a nossa definição pra função exp...

Então coisas como e^{2+3i} fazem sentido...

(sugestão: calcule $\sum_{k=0}^{10} \frac{(2+3i)^k}{k!}$)

A partir de agora θ vai ser sempre um número real - dica: se as contas ficarem muito abstratas finja que $\theta = \pi$.

Vamos calcular: $e^{i\theta}$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\theta^1}{1} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

$$e^{i\theta} = \frac{(i\theta)^0}{0!} + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \ldots$$

$$= \underbrace{i^0}_{1}\frac{\theta^0}{0!} + \underbrace{i^1}_{i}\frac{\theta^1}{1!} + \underbrace{i^2}_{-1}\frac{\theta^2}{2!} + \underbrace{i^3}_{-i}\frac{\theta^3}{3!} +$$

$$= \frac{\theta^0}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$+ i\left(\frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

C2 21/MAIO/2018

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE DÁ PRA GENTE (TENTAR) CALCULAR CERTAS FUNÇÕES USANDO APROXIMAÇÕES POLINOMIAIS...

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

(ou: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$).

Aí eu disse que a gente ia considerar o limite das aproximações polinomiais como DEFINIÇÕES de e^x, sen x e cos x...

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

E A GENTE VIU QUE
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$
O TRUQUE É CALCULAR $e^{i\theta}$ E PÔR AS POTÊNCIAS DE i PRA FORA:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$
$$\quad + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$
$$= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

MAIS TRUQUES

SEJA $E = e^{i\theta}$ ("E" maiúsculo)...

ENTÃO $E^2 = e^{i\theta}\cdot e^{i\theta} = e^{i(2\theta)} = \cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$
$$E^3 = \ldots = \cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta$$
$$E^{-1}\cdot E^1 = E^0 = 1$$
$$E^{-1} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)$$
$$= \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

LEMBREM QUE A GENTE TAMBÉM USAVA
$$c = \cos\theta,$$
$$s = \operatorname{sen}\theta$$

... E A GENTE NÃO VAI TER LETRAS (ABREVIATURAS) PRA COISAS TIPO $\cos 2\theta$, $\operatorname{sen} 4\theta$, $e^{i3\theta}$ ...
A GENTE VAI FAZER TUDO USANDO E, c, s.

$$E = c + is$$
$$E^2 = (c+is)(c+is) = c^2 + 2ics - s^2$$
$$\| $$
$$\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$$

VAMOS USAR POTÊNCIAS DE E PRA TRANSFORMAR COISAS COMO $(\cos\theta)^4$, QUE SÃO DIFÍCEIS DE INTEGRAR, E COISAS FÁCEIS DE INTEGRAR...

MAIS TRUQUES

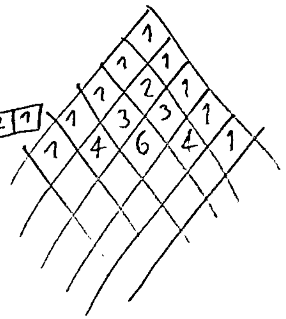
$$E = c + is$$
$$E^{-1} = c - is$$
$$E + E^{-1} = 2c \qquad E - E^{-1} = 2is$$
$$\frac{E+E^{-1}}{2} = c \qquad \frac{E-E^{-1}}{2i} = s$$
$$c = \frac{E+E^{-1}}{2} \qquad s = \frac{E-E^{-1}}{2i}$$

$$\int (\cos\theta)^4 d\theta = ?\ !!$$
$$\int c^4 d\theta = \int \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^4 d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (E+E^{-1})^4 d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int E^4 + 4E^3E^{-1} + 6E^2E^{-2} + 4EE^{-3} + E^{-4}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int E^4 + 4E^2 + 6 + 4E^{-2} + E^{-4}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (\cos 4\theta + i\operatorname{sen} 4\theta) + 4(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta) + \ldots\, d\theta$$
$$= (\text{exercício})!$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$(a+b)^0 =$ 1
$(a+b)^1 =$ $a \quad b$
$(a+b)^2 =$ $a^2 \quad 2ab \quad b^2$
$(a+b)^3 =$ $a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2 \quad b^3$
$(a+b)^4 =$ $a^4 \quad 4a^3b \quad 6a^2b^2 \quad 4ab^3 \quad b^4$
$(a+b)^5 =$

PORQUÊ?
SE $b=1$ E $a=x$,
$(x+1)^0 =$
$(x+1)^1 = \boxed{1|1}$
$(x+1)^2 = \boxed{1|1}\cdot\boxed{1|1} = \boxed{1|2|1}$
$(x+1)^3 = \boxed{1|1}\cdot\boxed{1|2|1} = \boxed{1|3|3|1}$
$(x+1)^4 = \boxed{1|1}\cdot\boxed{1|3|3|1} = \boxed{1|4|6|4|1}$



C2 21/maio/2018

Deixa eu introduzir mais uma abreviação...

$c = \cos\theta \qquad s = \operatorname{sen}\theta$

$c_2 = \cos 2\theta \qquad s_2 = \operatorname{sen} 2\theta$

$c_3 = \cos 3\theta \qquad s_3 = \operatorname{sen} 3\theta \ldots$

$$\int c^4\,d\theta = \int \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^4 d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (E+E^{-1})^4\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int E^4 + 4E^2 + 6 + 4E^{-2} + E^{-4}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (E^4+E^{-4}) + 4(E^2+E^{-2}) + 6\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (2\cos 4\theta) + 4(2\cos 2\theta) + 6\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\,\frac{\operatorname{sen}4\theta}{4} + 4\left(2\,\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right) + 6\theta\right)$$
$$= \frac{\operatorname{sen}4\theta}{32} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + \frac{3}{8}\theta$$

Truque novo:

$E + E^{-1} = 2c = 2\cos\theta$

$E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$

$E^3 + E^{-3} = 2\cos 3\theta$

$E^4 + E^{-4} = (\cos 4\theta + i\operatorname{sen} 4\theta)$
$\quad + (\cos -4\theta + i\operatorname{sen} -4\theta)$
$\quad = (\cos 4\theta + i\cancel{\operatorname{sen} 4\theta})$
$\quad + (\cos 4\theta - i\cancel{\operatorname{sen} 4\theta})$
$\quad = 2\cos 4\theta$

As identidades trigonométricas que os livros usam são consequências dessas que a gente viu...

P.ex.: Hernandez, p. 47 ("Aula 6"):

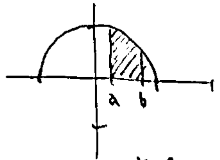
1) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
2) $\tan^2 x = 1 + \sec^2 x$
3) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
4) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
5) $\operatorname{sen} mx \cos nx = \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(n-m)x}{2}$

Exercício: Demonstre (3) e (4). (A (5) é mais difícil.)

Exercício (grande):

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

PRA CASA!



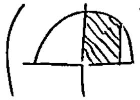
OBS:

$$\int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{Área}\left(\right) = \frac{\pi}{2}$$


$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{Área}\left(\right) = \frac{\pi}{4}$$


$$\int_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{Área}\left(\right) = \frac{1}{8}\text{pizza}$$


Área  − Área 

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{Área}\left(\right) = \frac{1}{8}\text{pizza}$$


Área  + Área 

Dicas:

Seja $F(b) = \displaystyle\int_{x=0}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$;

Calculem $F(0)$, $F(\frac{1}{2})$, $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(1)$, $F(b)$ — para $b \in [0,1]$ qualquer

usando um argumento de pizza + triângulo;

Calculem $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ algebricamente;

Testem pra ver se os dois métodos dão resultados compatíveis.

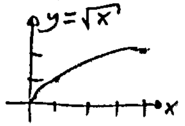
$\boxed{\text{C2 23/maio/2018}}$

Hoje: algumas variações da idéia da série de Taylor...

Lembre que

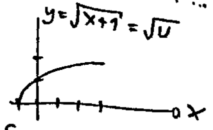
$f(x) \text{ "=" } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

Digamos que $f(x) = \sqrt{x}$.



A derivada disso em $x=0$ é $+\infty$, e $\sqrt{x}$ não está definida para x negativo...

Vamos adaptar essa idéia pra $u = x-a$ e $x = u+a$...



Seja $g(x) = \sqrt{x+1}$.

$g(x) \text{ "=" } g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

Melhor: vamos comparar f e g.

$g(x) \text{ "=" } g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

$g(u-1) \text{ "=" } g(0) + g'(0)(u-1) + \frac{g''(0)}{2!}(u-1)^2 + \ldots$

Aliás...

Seja $f(x) = \sqrt{x}$.

Calculem $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$.

$f(x) = x^{1/2}$ $\quad f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $\quad f'(1) = 1/2$

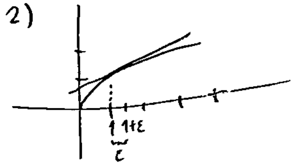
$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ $\quad f''(1) = -1/4$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$ $\quad f'''(1) = 3/8$

$f(1+\varepsilon) = f(1) + f'(1)\varepsilon + \frac{f''(1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots$

Idéias: 1) isso aqui deve dar boas aproximações para $\sqrt{\ }$ pra ε pequeno.

2)



$f(1) + f'(1)\varepsilon$ dá uma aproximação linear pra raiz quadrada... Isso (qual isso?) já é uma reta tangente ao gráfico da $\sqrt{\ }$ em $x=1$.

Por partes...

(1) Pra cada uma das funções f abaixo e pros valores de a dados desenhe uma reta tangente à curva de f em $x=a$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a=1$ $\quad f(a) = 1$ $\quad f'(a) = 1/2$ $\quad$ Reta: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \underbrace{f(a)}_{1} + \underbrace{f'(a)}_{1/2}(x - \underbrace{a}_{1}) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

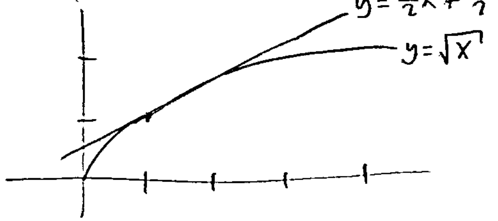
(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a=4$ $\quad f(a) = 2$ $\quad f'(a) = 1/4$ $\quad y = \quad = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a=0$ $\quad f(a) = 0$ $\quad f'(a) = 1$ $\quad y = \quad = 0 + 1(x-0)$

(d) $f(x) = e^x$, $a=0$ $\quad f(a) = 1$ $\quad f'(a) = 1$ $\quad y = \quad = 1 + 1(x-0)$

(e) $f(x) = 1/x$, $a=1$ $\quad f(a) = 1$ $\quad f'(a) = -1$ $\quad y = \quad = 1 - 1(x-1)$

(f) $f(x) = 1/x$, $a=2$ $\quad f(a) = \frac{1}{2}$ $\quad f'(a) = -\frac{1}{4}$ $\quad y = \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)$

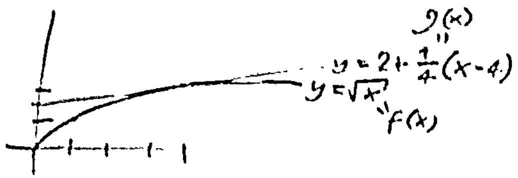


(2) Encontre a equação de cada uma destas retas.

C2 23/maio/2018

Quão boas são essas aproximações lineares?

Exemplo:



Onde é que $g(x) - f(x)$ é pequena? Onde ela fica grande demais?

$h(x) = g(x) - f(x)$ "erro"

Repare que $h(4) = 0$

$h(4 + \frac{1}{1000})$ é bem pequeno

("da ordem de $\frac{1}{1000000}$")

$h(4 - \frac{1}{2})$

$h(8)$

$h(0)$

$h(-1)$

Uma gambiarra importante

(em cada de física - físicos adoram aproximações)

Definições:

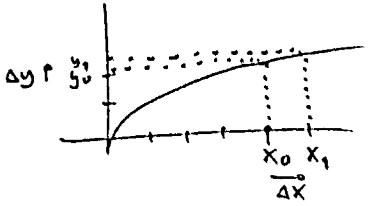
x_0, x_1 ← escolhemos

$\Delta x = x_1 - x_0$

$y_0 = f(x_0)$,

$y_1 = f(x_1)$

$\Delta y = y_1 - y_0$



Idéia: Fixe x_0;

fora ε variar,

seja $x_1 = x_0 + \varepsilon$ obs: $\varepsilon = \Delta x$

então y_0 fica fixo,

y_1 varia (e tende a y_0)

Δy varia também,

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ por definição.

Físicos:

Quando $\varepsilon \approx 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$,

$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

$y_1 - y_0 \approx f'(x_0)\Delta x$

$y_1 \approx y_0 + \underbrace{f'(x_0)}\underbrace{\Delta x}$

$f(a) + f'(a)(x-a)$ = aproximação linear!

Gambiarra

Vamos definir $dy = \frac{dy}{dx} dx$

Como assim? $\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x$

$= \frac{d}{dx} f(x_0) \Delta x$

$= f'(x_0)\Delta x$

dx vai passar a ser uma variável, e dy vai passar a ser uma outra variável que é função de dx...

$dy \underset{\text{def!}}{=} \frac{dy}{dx} dx = f'(x_0) dx$

Exercício:

Sejam $f(x) = \sqrt{x}$,

$g(y) = y^2$,

$x_0 = 4$

Complete: $dy = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{1/4} dx = \underbrace{f'(\underbrace{x_0}_{4})}_{\frac{1}{4}} dx$

Sejam $y_0 = f(x_0)$

$z = g(y)$,

$dz = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{4} dy = \underbrace{g'(\underbrace{y_0}_{2})}_{4} dy$

$dy = \frac{1}{4} dx$,

$dz = 4\, dy$

$dz = dx$

Idéia (aula que vem): $\frac{ds}{d\theta} = 1 / \frac{d\theta}{ds}$

C2 4/jun/2018

- Hoje: decidir data da P1
- Alguns truques com dx, dy, dz
- "Aplicações de integrais": comprimento de arco, áreas, volumes...

Dica pra estudar pra P1: listas de exercícios do GMA.

Lembre que na última aula a gente viu algumas gambiarras pra definir mais ou menos formalmente...

Se $y=f(x)$
e $z=g(y)$

A gente pode definir algumas coisas a partir de x_0 e x_1...

$y_0=f(x_0)$ $\quad y_1=f(x_1)$ $\quad \Delta x = x_1 - x_0$

$z_0=g(y_0)$ $\quad z_1=g(y_1)$ $\quad \Delta y = y_1 - y_0$

$\Delta z = z_1 - z_0$

Idéia:

1) Fixe f e g.
2) Fixe x_0. (Temos y_0, z_0).
3) Fixe x_1 (temos $y_1, z_1, \Delta x, \Delta y, \Delta z$)

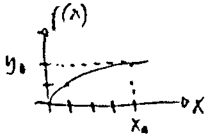
Repita o passo 3 várias vezes, cada vez escolhendo um x_1 mais próximo de x_0.

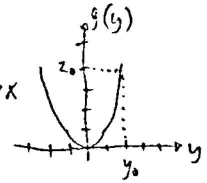
Aí:
$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x \qquad \Delta z \approx \frac{dz}{dy}\Delta y$$

No limite temos:
$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x \qquad \Delta z = \frac{dz}{dy}\Delta y$$

Gambiarra: dx é uma variável e
$$dy = \frac{dy}{dx}dx \qquad dz = \frac{dz}{dy}dy$$

Exercícios (revisão):





(1) Sejam $f(x)=\sqrt{x}$, $g(y)=y^2$, $x_0=4$.

(b) Complete (converta os "?"s para números):
$$dy = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{?} dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x_0)$$
$$dz = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{?} dy$$

(c) Faça o mesmo para $x_0=3$.

Repare que $y_1 = f(x_1) = \sqrt{x_1}$
$$z_1 = g(y_1) = y_1^2 = \sqrt{x_1}^2 = x_1$$

Nesse caso $z_0 = x_0$
e $z_1 = x_1$
e $\Delta z = \Delta x$
e $dz = dx$...
$$\underset{\substack{\| \\ dx}}{dz} = \frac{dz}{dy}dy = \underbrace{\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}_{1} dx$$

Traduzindo pra notação antiga...
$$dz = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{g'(y_0)} dy = \underbrace{\underbrace{\frac{dz}{dy}}_{g'(f(x_0))}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x_0)}}_{1} dx$$

$g'(f(x_0))\,f'(x_0) = 1$ para qualquer x_0...

Isso é bem parecido com a nossa fórmula pra derivada de função inversa.

Aplicação (com gambiarra extra):

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad a = \operatorname{arcsen} s$ (caso simples)

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad \theta = \operatorname{arcsen} s$ (gambiarra extra)

$a = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta$

$da = d\theta$

(...)

$\frac{da}{ds}\frac{ds}{d\theta} = 1$

$\theta = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta$

$d\theta = d\theta$ ‖

$\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\theta} = 1$

$$\underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\frac{d}{ds}\operatorname{arcsen} s}\underbrace{\frac{ds}{d\theta}}_{\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta} = 1$$

Pra casa: acostumar-se com os detalhes.

"Aplicações da integral"

- Comprimento de arco
- Área
- Volume (em geral)
- Volume de sólidos de rotação (por dois métodos)
- Área da superfície de sólidos de rotação.

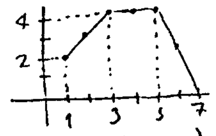
Algumas idéias são comuns a todos eles...

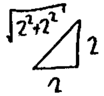
Base: $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

Comprimento de arco

Exemplo simples:

$f =$

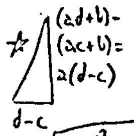




$\text{Comprimento}(f,1,7) = \sqrt{8} + \sqrt{4} + \sqrt{20}$

(2) $\text{Comprimento}(y=ax+b, c, d) = \underbrace{\sqrt{1+a^2}}_{\text{coef ang}}\underbrace{|d-c|}_{\text{contra base}}$

☆



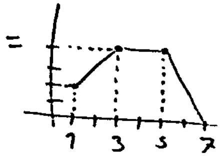
$$☆ = \sqrt{(d-c)^2 + a^2(d-c)^2} = \sqrt{(1+a^2)(d-c)^2} = \sqrt{1+a^2}\,|d-c|$$

C2 4/jun/2018

• Hoje: decidir data da P1

$\boxed{\text{P1: dia 11/ junho}}$

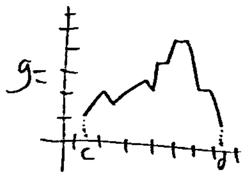
Usando essa fórmula no exemplo simples...

$f =$ 

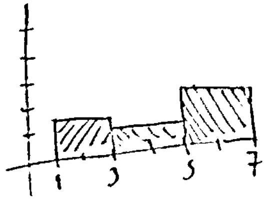
$\text{comprimento}(f,1,7) =$
$\sqrt{1+1^2}(3-1) +$
$\sqrt{1+0^2}(5-3) +$
$\sqrt{1+(-2)^2}(7-5) =$
$\sum_{i=1}^{3} \sqrt{1+f'(..)^2}(x_i - x_{i-1}) \overset{11}{=}$
$\int_{x=1}^{x=7} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Obs: $P = \{1,3,5,7\}$, $x_0 \ldots x_3$

... e agora a gente generaliza! Em dois passos: Se g é contínua e o gráfico dela é formado só por segmentos de reta, por exemplo:

$g =$ 

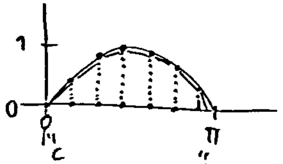
$\text{comprimento}(g,c,d) = \int_{x=c}^{x=d} \sqrt{1+g'(x)^2}\,dx$

$=$ 

Gambiarra

Se h é contínua, p.ex., $h(x) = \operatorname{sen} x$, a gente pode escolher uma partição do intervalo $[c,d]$...

$\text{comprimento}(h, \underset{c}{0}, \underset{d}{\pi})$



A partir dessa função h e da partição P a gente vai criar uma aproximação pra h chamada g, feita de segmentos de reta...

...à medida que escolhermos partições mais finas o comprimento dessa g vai ficar cada vez mais próximo do de h...

$h =$ 

Um intervalo:

$g =$ 

Dois intervalos:

$g =$ 

Quatro intervalos:

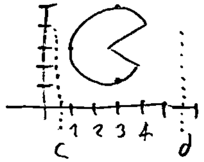
$g =$ 

Fazendo o limite...

$\text{comprimento}(h,c,d) = \int_{x=c}^{x=d} \sqrt{1+h'(x)^2}\,dx.$

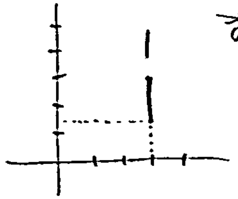
Áreas

Exemplo:

Conjunto S: 

$\text{Área}(S,c,d) =$ (soma de retângulos)...

$\text{Área}(S,3,3.1) \approx$ (quantidade de pac-man em $x=3$)$\cdot(3.1-3)$

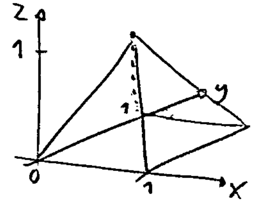


$\text{Área}(S,c,d) \approx \sum_{i=1}^{N} (\text{qtd pac man})(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$

$\text{Área}(S,c,d) = \int_{x=c}^{x=d} (\text{qtd pac man})(x)\,dx$

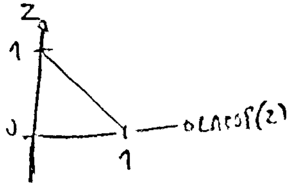
Volumes

Exemplo: volume de uma pirâmide.



Se cortarmos a pirâmide por um plano horizontal em z vamos obter um quadrado de lado $\text{ladoP}(z)$ e área $\text{áreaP}(z) = \text{ladoP}(z)^2$.

Obs: $\text{ladoP}(1) = 0$, $\text{ladoP}(0) = 1$



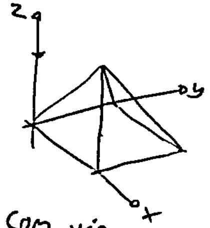
Volume total da pirâmide $=$
$\int_{z=0}^{z=1} \text{áreaP}(z)\,dz =$
$\int_{z=0}^{z=1} \text{ladoP}(z)^2\,dz =$

$\text{ladoP}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z<0, \\ 1-z & \text{se } 0 \le z \le 1, \\ 0 & \text{se } 1<z. \end{cases}$

C2 6/JUN/2018

Hoje: continuação das "Aplicações da Integral"... A mais importante hoje vai ser calcular volumes.

Na aula passada a gente viu como calcular o volume desta pirâmide:



com vértices em $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$.

Truque: se a gente cortar a pirâmide por um plano horizontal – p.ex., $z=0.234$, a gente obtém um quadrado de lado $=$ LADO(0.234) e ÁREA $=$ ÁREA$(0.234)=$ LADO$(0.234)^2$...

Definimos as funções
$$\text{LADO}(z)=\begin{cases}1-z & \text{se } z\in[0,1],\\ 0 & \text{se } z\notin[0,1]\end{cases}$$

e calculamos
$$\text{VOLUME}=\int_{z=0}^{z=1}\text{ÁREA}(z)\,dz$$
$$=\int_{z=0}^{z=1}\text{LADO}(z)^2\,dz$$
$$=\int_{z=0}^{z=1}(1-z)^2\,dz$$
$$=\frac{1}{3}.$$

Agora a gente vai usar essa mesma ideia pra sólidos de rotação.

Primeiro exemplo/exercício:

Seja $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

Isso é a esfera de raio 1 centrada na origem.

Se cortamos ela no plano $x=k$ (k constante) vamos ter um círculo de raio RAIO(k) e área ÁREA(k),

e vamos ter $\text{VOLUME}=\int_{x=-1}^{x=1}\text{ÁREA}(x)\,dx$.

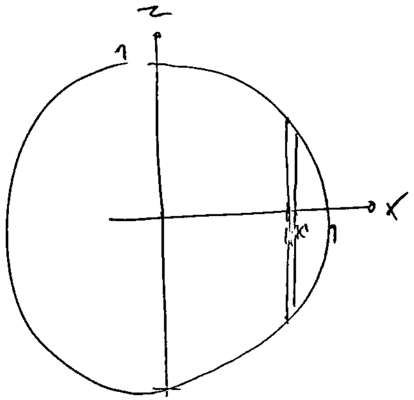
Exercícios:

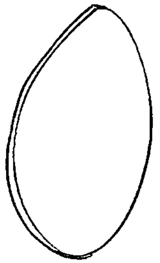
1. Encontre a função RAIO(x).
2. Encontre a função ÁREA(x).
3. Calcule $\text{VOLUME}=\int_{x=-1}^{x=1}\text{ÁREA}(x)$.

Dica: RAIO$(-1)=?$
RAIO$(0)=?$
RAIO$(1)=?$
RAIO$(\frac{1}{2})=?$

4. Agora faça a mesma coisa para este cone:
$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq z^2\}$$
Qual é o volume dele entre os planos $z=0$ e $z=1$?

5. ... e faça o mesmo para este paraboloide:
$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq z\}$$





$\boxed{\text{C2 6/JUN/2018}}$

DÚVIDAS

① $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^3}\,dx$

② QUE SUBSTITUIÇÃO A GENTE USA PRA RESOLVER ISTO AQUI?

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$

③ QUE SUBSTITUIÇÃO A GENTE USA PRA TRANSFORMAR A ① EM ALGO PARECIDO COM A ②?

$$\int \frac{x\ \arctan(x)}{(x^2+1)^3}\,dx = ?$$

$$\int \underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^3}}_{f'(x)} \underbrace{\arctan x}_{g(x)}\,dx = \text{(USAR PARTES)}$$

OUTRA IDÉIA:

$t = \tan\theta$

$\theta = \arctan t$

$\displaystyle\int \frac{t\ \arctan t}{(t^2+1)^3}\,dt = ?$ $\qquad \frac{dt}{d\theta} = z^2$

$\qquad dt = z^2 d\theta$

$$= \int \frac{t\ \theta}{(t^2+1)^3} z^2 d\theta$$

$$= \int \frac{t\ \theta}{(z^2)^3} z^2 d\theta$$

$$= \int \frac{t\theta}{z^4} d\theta = \int \frac{s}{c} c^4 \theta\, d\theta = \int \underbrace{sc^3}_{f'} \underbrace{\theta}_{g}\, d\theta = f\theta - \int f g' d\theta$$

$$= f\theta - \int f\, d\theta$$

C2 13/jun/2018

Provas:

Atual: 2/jul ???

Plano A (sem prorrogação):

P2: 4/jul

VR: 9/jul

VS: 11/jul

Plano B: (uma semana a mais de aula):

Vamos pensar depois.

Posso dar aulas de reposição - de dúvidas, sem matéria nova - nas 2as, 3as e 4as a partir das 18:00.

EDOs

Não vamos ver "classificação".

Hoje: EDOs lineares com coeficientes constantes

Exemplo:

$$f'' + f' - 6f = 0 \qquad (*)$$

Como é que a gente começa?

Chutar e testar!!

Vou dar várias "f"s pra vocês e vocês vão testar se elas obedecem (*).

a) e^{2x}

b) e^{-2x}

c) e^{3x}

d) e^{-3x}

Obs: (*) tem que ser verdadeira em todo x.

a) Se $f(x) = e^{2x}$

Então $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$,

$$\underbrace{f''}_{4e^{2x}} + \underbrace{f'}_{2e^{2x}} - 6\underbrace{f}_{e^{2x}} \overset{\text{sim!}}{=} 0$$

"ELCC"

Uma EDO linear com coefs constantes é uma da forma

$a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = 0$ grau 2

ou

$a_3 f''' + a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = 0$ grau 4

onde cada $a_i \in \mathbb{R}$.

Repare que isso aqui não é uma ELCC:

$x f'' + \operatorname{sen} x\, f' - 3f = 0.$

Truque:

Vamos ver f como um vetor (!) e a derivada como uma matriz (ou melhor: como transformação linear).

Mudança de notação

Vamos usar temporariamente a notação λ pra descrever funções.

$(\lambda x.\ 10x+4)(3) = 10 \cdot 3 + 4$

$(\lambda x.\ e^x)(\ln 2) = 2$

$$\underbrace{(\lambda x.\ 10x+4)(\underbrace{(\lambda x.\ x^2)(3)}_{9})}_{94}$$

Obs: isso é o λ "não tipado".

Em algumas linguagens (formais) a gente usaria isto: $(\lambda x{:}\mathbb{R}.\ 10x+4)$

Repare que

$(\lambda x.\ 10x+4) =$

$(\lambda y.\ 10y+4)$

como funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

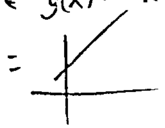
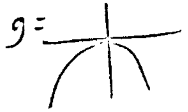
Lembre que às vezes a notação $\frac{d}{dx}$ é meio confusa... $\frac{d}{dx} f(34)$ ou $\frac{d}{dx} f(x+2)$

Novidade: operador D.

$Df = f'$

Mas antes: funções "são" vetores.

Sejam $f(x) = 2 + x$ e $g(x) = -x^2$

f = , g = 

$f+g = ?$

Idéia: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemplo: $(f+g)(3) = 5 - 9 = -4$

$(f+f)$: ok

$(2f)(x) = 2(f(x))$

Também dá pra definir $(fg)(x) = f(x)g(x)$ mas não vai ser tão útil.

Será que vocês conseguem se virar com o D sem uma definição formal dele?

Exercícios:

a) $D(\lambda x.x^2) =$

b) $D(\lambda x.e^x) =$

c) $D(\lambda x.e^{3x}) =$

d) $D(\lambda x.4) =$

$\boxed{\text{C2 13/JUN/2018}}$

$$\underbrace{f''}_{D(Df)}+\underbrace{f'}_{Df}-6f=0 \quad (☆)$$

Vamos pensar no D como matriz, no seguinte sentido...

f "como vetor" tem componentes/coordenadas

$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$
$f(-1), \quad f(0.5) \quad f(\pi)$

f é vetor de dimensão infinita.

O "D" em "Df" recebe um vetor de dimensão ∞ e retorna outro vetor de dimensão ∞...

D é como uma matriz de dimensão infinita.

Obs: essa soma de vetores obedece às propriedades esperadas, tudo é "linear"...

Então, usando idéias de A.L.,

$$\underbrace{D(Df)}_{f''} = (DD)f = DDf = D^2 f$$

$$
\begin{aligned}
f''+f'-6f &= 0 \quad (☆)\\
&= D^2 f + Df - 6f\\
&= (D^2+D-6I) f\\
&= (D^2+D-6) f\\
&= (D+3)(D-2) f\\
&= (D-2)(D+3) f
\end{aligned}
$$

Isso vai nos ajudar a encontrar soluções pro (☆)...

Se $f=e^{-3x}$ $(f=\lambda x.e^{-3x})$

$$\underbrace{(D-2)\underbrace{(D+3)(\lambda x.e^{-3x})}_{(\lambda x.0)}}_{(\lambda x.0)}$$

Dá pra procurar as soluções "óbvias" de

$$(D^2+D-6)f=0$$

Fatorando

$$(D^2+D-6)=(D+3)(D-2)$$

e encontrando as soluções óbvias de $(D+3)f=0$

e $(D-2)f=0$

As soluções óbvias são da forma e^{ax}.

Exercício.

a) Encontre um $a\in\mathbb{R}$ tal que $f=e^{ax}$ seja solução de

$$(D-4)f=0.$$
$$= f'-4f$$

Quando é que $ae^{ax}-4e^{ax}=0$ em todo x?

Exercício:

b) Encontre $a,b\in\mathbb{R}$ tais que e^{ax} e e^{bx} sejam soluções disto:

$$
\begin{aligned}
f''-2f'-15f &= 0. \quad (☆☆)\\
&= D^2f-2Df-15f\\
&= (D^2-2D-15)f\\
&= (D-5)(D+3)f
\end{aligned}
$$

Soluções básicas:
$f=e^{-3x}$,
$f=e^{5x}$.

Próximo truque: combinações lineares!

Se e^{-3x} e e^{5x} são soluções de (☆☆) então qualquer combinação linear delas também é...

$$(D^2-2D-15)(2e^{-3x}+4e^{5x}) =$$
$$\underbrace{\underbrace{2\underbrace{(D^2-2D-15)e^{-3x}}_{0}}_{0} + \underbrace{4\underbrace{(D^2-2D-15)e^{5x}}_{0}}_{0}}_{0}$$

Nessas duas semanas em que eu estiver no congresso peguem as P2s, VRs e VSs dos semestres anteriores e façam os exercícios de ELCCs.

Alguns exercícios pedem pra vocês encontrarem soluções de uma ELCC (combinações lineares) que obedeçam por exemplo: $f(0)=0$, $f'(0)=1$;
ou $f(0)=1$, $f'(0)=0$;
ou $f(0)=42$, $f'(0)=99$.

Próxima idéia importante (aparece em Física!)

O seno obedece que ELCC?

$sen' = cos$
$sen'' = cos' = -sen$
$sen''+sen=0$

$$
\begin{aligned}
f''+f &= 0\\
&= D^2f+f\\
&= (D^2+1)f\\
&= (D+i)(D-i)f
\end{aligned}
$$

Soluções básicas:
e^{ix}, e^{-ix}

$\boxed{\text{C2 13/jun/2018}}$

E isto aqui?

$(D^2+4)f = f''+4f=0$

$\quad\quad \parallel$

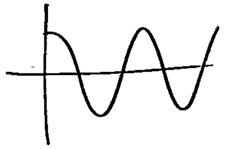
$(D-2i)(D+2i)f$

Quais são as soluções básicas dela?

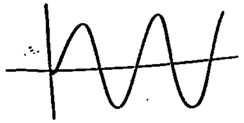
e^{2ix}, e^{-2ix}

Estas combinações lineares de e^{2ix} e e^{-2ix} também são soluções da mesma ELCC...

$$\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \cos 2x$$

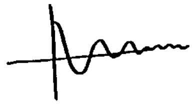


$$\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = \text{sen}\, 2x$$

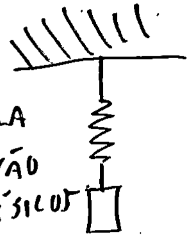


Próximo passo (importante em Física):

Como é que a gente monta uma ELCC que tenha estas soluções básicas?

$e^{-2x}\cos 3x =$ 

$e^{-2x}\,\text{sen}\, 3x$



Sistema massa-mola

Em Física vocês vão ver argumentos físicos que dizem que um sistema massa-mola obedece uma EDO como $f''+kf=0$...

... Em Física vocês vão ver argumentos que dizem que quando tem atrito a equação é ...

$e^{-2x}\cos 3x =$

$e^{-2x}\left(\dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(e^{(-2+3i)x}+e^{(-2-3i)x}\right)$

$e^{-2x}\,\text{sen}\, 3x =$

$(\dots)$

outra combinação linear de $e^{(-2+3i)x}$ e $e^{(-2-3i)x}$.

$e^{(-2+3i)x}$ é solução de $(D-a)f=0$ pra que $a\in\mathbb{C}$?

$a = 2-3i$

$e^{(-2-3i)x}$ é solução de $(D-(-2-3i))f=0$.

$(D-(-2-3i))(D-(-2+3i))f=0$

$\quad\quad \parallel$

$(D^2-(-2-\cancel{3i})D-(-2+\cancel{3i})D+(-2-3i)(-2+3i))f$

$\quad\quad \parallel$

$(D^2+4D + \underbrace{(4+\underbrace{(-3i)(3i)}_{9})}_{13})f$

$\quad\quad \parallel$

$(D^2+4D+13)f$

C2 2/JUL/2018

HOJE: OUTRO TIPO DE EDO - "VARIÁVEIS SEPARÁVEIS"!

EXEMPLO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (*)$$

1) CAMPOS DE DIREÇÕES
2) SOLUÇÃO VIA CONTAS

UMA SOLUÇÃO $y = f(x)$ DE (*) OBEDECE ISTO:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{-\frac{x}{f(x)}}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

E SE A GENTE ENTENDE dx E dy COMO "DESLOCAMENTOS INFINITESIMAIS" -

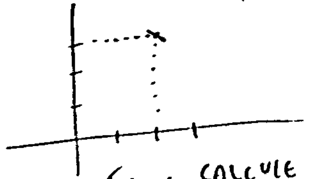
LEMBRE: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$

A GENTE VAI PODER PENSAR QUE $\frac{dy}{dx}$, $(= f'(x))$ É A INCLINAÇÃO (COEF. ANGULAR) DA f NAQUELE x...

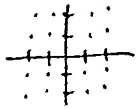
P. EX., SE $x=2$ E $y=3$

A CONDIÇÃO $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{COEF ANG}} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$

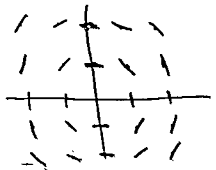
QUER DIZER...



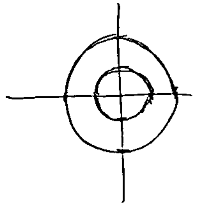
EXERCÍCIO: CALCULE $\frac{dy}{dx}$ $\left(= -\frac{x}{y}\right)$ E REPRESENTE GRAFICAMENTE, NESTES PONTOS:



RESP:



O QUE SUGERE QUE AS SOLUÇÕES DE (*) PERCORREM CÍRCULOS COM CENTRO EM (0,0)...



P.EX., $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

SÃO (CANDIDATOS A) SOLUÇÕES DE (*)...

2) SOLUÇÃO VIA CONTAS (COM GAMBIARRA NOS "d"s)

IDÉIA: PASSAR OS "x"zes PRA UM LADO E TUDO QUE TEM "y" PRO OUTRO...

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow dy = -\frac{x}{y}\,dx$$

$$\Rightarrow y\,dy = -x\,dx$$

E AGORA A GENTE INTEGRA!!!!!!

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 \qquad -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_2 - C_1$$

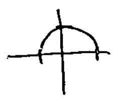
$$x^2 + y^2 = \underbrace{2(C_2 - C_1)}_{C_3}$$

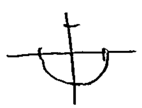
O QUE ACONTECE SE $C_3 = 1$? E SE $C_3 = 4$?

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{1-x^2}$





3) CASO GERAL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$\Rightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G(y) + C_1 \qquad F(x) + C_2$$

$$G(y) = F(x) + \underbrace{C_2 - C_1}_{C_3}$$

$$y = G^{-1}(F(x) + C_3)$$

EXEMPLOS/EXERCÍCIOS:

4) RESOLVA $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{3y^2}$ (**)

$$3y^2\,dy = (x+1)\,dx$$

$$\int 3y^2\,dy = \int x+1\,dx$$

$$y^3 + C_1 \qquad \frac{x^2}{2} + x + C_2$$

$$y^3 = \frac{x^2}{2} + x + C_3$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + x + C_3}$$

(DÁ PRA FAZER PROBLEMAS DO TIPO: QUAL É A SOLUÇÃO DA (**) QUE PASSA PELO PONTO $(x,y) = (3,4)$? $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + x + C_3}$ QUE OBEDEÇA $y = f(x)$, $f(3) = 4$?...)

$y = 4$, $x = 3$

$\boxed{\text{C2 2/jul/2018}}$

As soluções de (★★) são curvas de nível...

$$\underbrace{y^3}_{G(y)} = \underbrace{\frac{x^2}{2}+x}_{F(x)} + C_3$$

$$G(y)-F(x) = C_3$$

Pra cada escolha de $C_3 \in \mathbb{R}$ temos uma solução...

Ideia:

$H(x,y)=G(y)-F(x)$

e queremos procurar as curvas nas quais $H(x,y)$ = constante...

$C_3=5 \Rightarrow H(x,y)=5$

Dica pra como estudar isto em casa (com exercício pra agora!)

Tentem fazer tudo na direção contrária!

P.ex.:
Quais são as curvas de nível de $x-y^2=C_3$?

Representem graficamente

a) $x-y^2=0$,

b) $x-y^2=1$.

Pontos fáceis:

a) $x=y^2$

x	y
4	2
1	1
0	0
1	-1
4	-2

b) $x=y^2+1$

x	y
5	2
2	1
1	0
2	-1
5	-2

$$\underbrace{-y^2}_{G(y)} + \underbrace{x}_{F(x)} = C_3$$

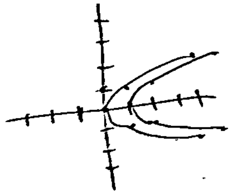
... e agora obtenham $g(y)$, $f(x)$, e a EDO com variáveis separáveis

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G(y)+C_1 \qquad F(x)+C_2$$

$$\int 2y\,dy = \int 1\,dx$$

$$y^2+C_1 \qquad x+C_2$$



$$2y\,dy = dx$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \quad (★★★)$$

$$x-y^2=C_3$$

$$\Rightarrow -y^2 = C_3 - x$$

$$y^2 = x - C_3$$

$$y = \pm\sqrt{x-C_3}$$

... e agora (casa!)

teste se as soluções $y=\pm\sqrt{x-C_3}$ obedecem a EDO (★★★), e depois finja que você não sabe as soluções e tente resolver (★★★) !!.

EDOs exatas

(não vai cair na prova!)

Os livros apresentam EDOs exatas de um jeito bem geral - eu acho mais fácil começar com polinômios.

Em variáveis separáveis as soluções eram curvas de nível de funções tipo $H(x,y)=G(y)-F(x)$...

Nem toda $H(x,y)$ pode ser posta nessa forma!

Exemplo: $H(x,y)=xy$

Quais são as EDOs cujas soluções são as curvas de nível de $H(x,y)$?

Ideia: soluções: $H(x,y)=C_3$.

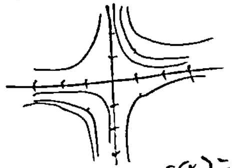
Se $y=f(x)$ percorre uma curva de nível $H(x,y)=C_3$,

$H(x,f(x))=C_3$ ⇐ constante!

$\frac{d}{dx}H(x,f(x))=0$ ...

Se $H(x,y)=xy+C_3$

curvas de nível:



Soluções: $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{4}{x}$

$\frac{d}{dx}H(x,\frac{4}{x})=0$

$$0=\frac{d}{dx}H(x,f(x))$$

$$=H_x(x,f(x))+H_y(x,f(x))f'(x)$$

$$=H_x(x,y)+H_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{H_x(x,y)dx+H_y(x,y)dy=0}$$

Isto é uma EDO exata cujas soluções são as curvas de nível de $H(x,y)$...

Exercício:

Seja $H(x,y) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x^2 & & \\ \hline 2x & 3xy & \\ \hline 4 & 5y & 6y^2 \\ \hline \end{array}$

Calcule $H_x(x,y)$ e $H_y(x,y)$.

$H_x(x,y)=2x+2+3y$

$H_y(x,y)=3x+5+12y$

EDO:

$(2x+2+3y)dx+(3x+5+12)dy=0$

C2 2/JUL/2018

DÚVIDAS:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$E = c + is$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$E^{-1} = c - is$

$E + E^{-1} = 2c \Rightarrow c = \frac{E + E^{-1}}{2}$

$E - E^{-1} = 2is \Rightarrow s = \frac{E - E^{-1}}{2i}$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\cos 4\theta = \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2}$

DÁ PRA FAZER UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE $e^{(3+4i)\theta}$ E $e^{(3-4i)\theta}$ QUE DÊ ALGO REAL...

2017.2-C2-P2, QUESTÃO 2:

$-3+2i$

$-3-2i$

$f'' + 6f' + 13f \overset{?}{=} 0$

$D^2 + 6D + 13 = 0$

$((D+3-2i)(D+3+2i))f = 0$

b) $e^{(-3+2i)x}$ e $e^{(-3-2i)x}$

c)

$f_3 = a.e^{(-3+2i)x} + b.e^{(-3-2i)x}$

$f_3 = a.e^{-3x+2ix} + b.e^{-3x-2ix}$

$f_3 = e^{-3x}(a.e^{2ix} + b.e^{-2ix}) \Longrightarrow e^{-3x}\left(\frac{1}{2i}.e^{2ix} + \left(-\frac{1}{2i}\right)e^{-2ix}\right)$

$f_3 = e^{-3x}.\left(\frac{1}{2}e^{2ix} + \frac{1}{2}.e^{-2ix}\right)$

$e^{-3x}\left(\frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix}\right)$

$f_3 = \underbrace{e^{-3x}}_{g}.\left(\underbrace{\cos 2x}_{h}\right)$

$g' = -3g$

$h' =$

$h' = \mathrm{sen}\,2x$

h''

$e^{-3x}(\mathrm{sen}\,2x)$