C2 12/mar/2018

## Avisos...

① O curso tem uma página - http://angg.twu.net/2018.1-C2.html
O jeito mais fácil de chegar nela é googlar por "eduardo ochs", ir pra qualquer subpágina do http://angg.twu.net/ e clicar em "C2" na barra de navegação...

② Eu fotografo todos os quadros e ponho na página do curso.

③ Visão geral do curso: depois.

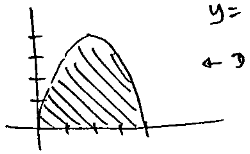
Notação: $\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$

$x \in (3,3]$

$3<x\leq 3$

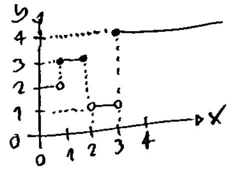
Tema principal do curso: integral - que tem a ver com áreas e num certo sentido é uma operação inversa à derivação...

② "Área sob uma curva"



$y=4-(x-2)^2$ ← difícil

Vamos calcular a área entre $y=4-(x-2)^2$ e $y=0$ entre $x=0$ e $x=4$.




$y=f(x)$ (função descontínua! Em C1 a gente não gosta muito de funções descontínuas)

① Funções escada e funções definidas por casos

No exemplo anterior,

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 0.5 | |
| 1 | |
| 1.5 | |
| 2 | |
| 2.5 | |
| 3 | |
| 3.5 | |
| 4 | |
| 4.5 | |

Definição por casos pra função g

Seja:

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{quando } x\leq 2\\ 2 & \text{quando } 2<x<3\\ 4 & \text{quando } x=3\\ 0 & \text{quando } 3<x\end{cases}$$

Intervalos (consecutivos):
$x\in(-\infty,2]$
$x\in(2,3)$
$x\in[3,3]$ !!
$x\in(3,+\infty)$

Represente g graficamente.

Dêem uma definição por casos pra função f.

## Como calcular áreas?

Métodos:
1) Olhômetro
2) Chutar e testar
3) Teorema fundamental do cálculo e integração.

Notação:

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y=f(x)$ (isto é, abaixo de $y=f(x)$ e acima de $y=0$) entre $x=a$ e $x=b$

extremidade esquerda do intervalo de integração

extremidade direita.

## Exercícios:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$,

b) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$,

c)

| $b$ | $\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

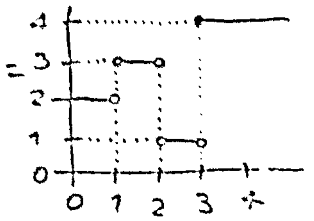
d)

| $b$ | $\int_{x=0}^{x=b} g(x)\,dx$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

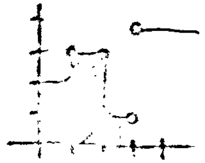
[C2 12/mar/2018]

e)

| $b$ | $\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$ | $\int_{x=b}^{x=4} f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 0.1 | | |
| 0.2 | | |
| 0.3 | | |
| 0.5 | | |
| 1 | | |
| 1.1 | | |
| 1.2 | | |
| 1.3 | | |
| 2 | | |
| 2.1 | | |
| 2.2 | | |
| 2.3 | | |
| 3 | | |
| 3.1 | | |
| 3.2 | | |
| 3.3 | | |
| 4 | | |

$f(x) =$ 

DICA:

$$\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx =$$ 

$$= (1-0)\cdot 2 + (2-1)\cdot 3 + (2.5-2)\cdot 1$$

SE VOCÊS JÁ FIZERAM O e VOCÊS JÁ DEVEM SER CAPAZES DE CALCULAR

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

MAIS OU MENOS RÁPIDO PARA QUALQUER $b \in [0,4]$...

EXERCÍCIO:

f) REPRESENTE GRAFICAMENTE $F(b)$ NO INTERVALO $b \in [0,4]$.

DICA: QUAL É A INCLINAÇÃO - ISTO É, A DERIVADA - DE $F$

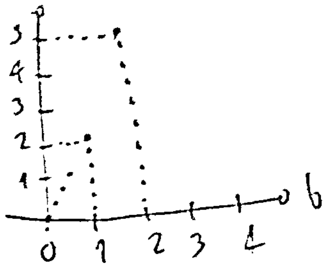
EM $b \in (0,1)$?

E EM $b \in (1,2)$?

E EM $b \in (2,3)$?

$$F(2) = \int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx = 5$$

$F(b)$

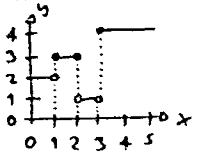


C2 14/mar/2018

Aviso: os quadros da aula passada já estão no site — inclusive PDFizados!

Vamos continuar os exercícios da aula passada...

$f(x) =$



$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \leq 2 \\ 2 & \text{quando } 2 < x < 3 \\ 4 & \text{quando } x = 3 \\ 0 & \text{quando } 3 < x \end{cases}$

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

Exercícios (aula passada):

e)

| $b$ | $\int_{x=2}^{x=b} f(x)\,dx$ | $\int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 0.1 | | |
| 0.2 | | |
| 0.3 | | |
| 0.5 | | |
| 1 | | |
| 1.1 | | |
| 1.2 | | |
| 1.3 | | |
| 2 | | |
| 2.1 | | |
| 2.2 | | |
| 2.3 | | |
| 3 | | |
| 3.1 | | |
| 4 | | |

f) Represente graficamente $F(b)$ no intervalo $b \in [0,4]$.
Dica: qual é a inclinação — isto é, a derivada — de $F$ em $b \in (0,1)$? E em $b \in (1,2)$? E em $b \in (2,3)$? E em $b \in (3,4)$?

Dica: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx = \underbrace{(1-0)}_{\text{base do retângulo}} \cdot \underbrace{2}_{\text{altura do retângulo}} + (2-1)\cdot 3 + (2.5-2)\cdot 1$

## Áreas como somas de retângulos

Repare que podemos calcular

$$\int_{x=0}^{x=2.5} f(x)\,dx = \text{Área}\Big( \Big) = \begin{array}{l} (1-0)\cdot 2 \\ +(2-1)\cdot 3 \\ +(2.5-2)\cdot 1 \end{array}$$

Se a soma à direita estiver escrita numa determinada forma podemos interpretá-la graficamente como uma soma de retângulos...
Truque: uma tabela como esta.

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 4 |

Define $a_1, b_1, c_1,$
$a_2, b_2, c_2,$
$a_3, b_3, c_3,$
$a_4, b_4, c_4.$

Estamos interessados em tabelas como estas que obedecem as seguintes condições:

- as linhas são numeradas de 1 a $N$ — no exemplo temos $N=4$;
- $a_i < b_i$ para $i \in \{1,2,\ldots,N\}$;
- $b_i = a_{i+1}$ para $i \in \{1,2,\ldots,N-1\}$.

Num caso destes podemos interpretar $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\cdot c_i$ como uma soma de retângulos.

Exercício:
Represente graficamente $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\cdot c_i$ para esta tabela:

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 3 |

OBS: $a_i = a_1$, $b_i = b_1$

Definição:
Uma partição do intervalo $[a,b]$ (obs: fica implícito que $a \leq b$) é um subconjunto finito de $[a,b]$ contendo $a$ e $b$.

Uma tabela obedecendo as condições anteriores gera uma partição, e uma partição quase gera uma tabela...

A tabela do último exercício divide o intervalo $[a,b] = [0,4]$ em

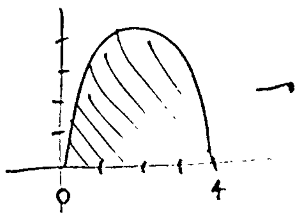
$$\underset{[0,4]}{[a,b]} = \underset{[0,1]}{[a_1,b_1]} \cup \underset{[1,3]}{[a_2,b_2]} \cup \underset{[3,4]}{[a_3,b_3]}$$

Idéia: Se $P$ é uma partição de $[a,b]$ e $P$ tem $N+1$ pontos então

$$P = \{\underset{a}{a_1}, \underset{b_1}{a_2}, \underset{b_2}{a_3}, \ldots, \underset{b_{N-1}}{a_N}, \underset{b_N}{b}\}$$

Exercício:
Seja $P = \{0, 0.5, 1, 2, 3.5, 5\}$.
Isto é uma partição de que intervalo? Quem são $N, a, b, a_1, b_1, a_2, b_2$, etc?
Monte a tabela:

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ |
|---|---|---|

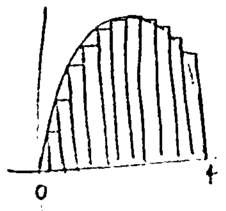


Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $P$ é uma partição de $[a,b]$, vamos ter vários métodos pra calcular uma aproximação para $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ por uma soma de retângulos... o primeiro método é:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\underbrace{f(a_i)}_{c_i}$$

O nosso objetivo agora é aprender a visualizar o que este método "quer dizer".

Exercício:
Represente graficamente $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\, f(a_i)$ no caso em que $P = \{0,1,3,4\}$ e $f(x) = 4 - (x-2)^2$.



... e depois no caso em que $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$.

C2 11/MAR/2018

TRUQUE:

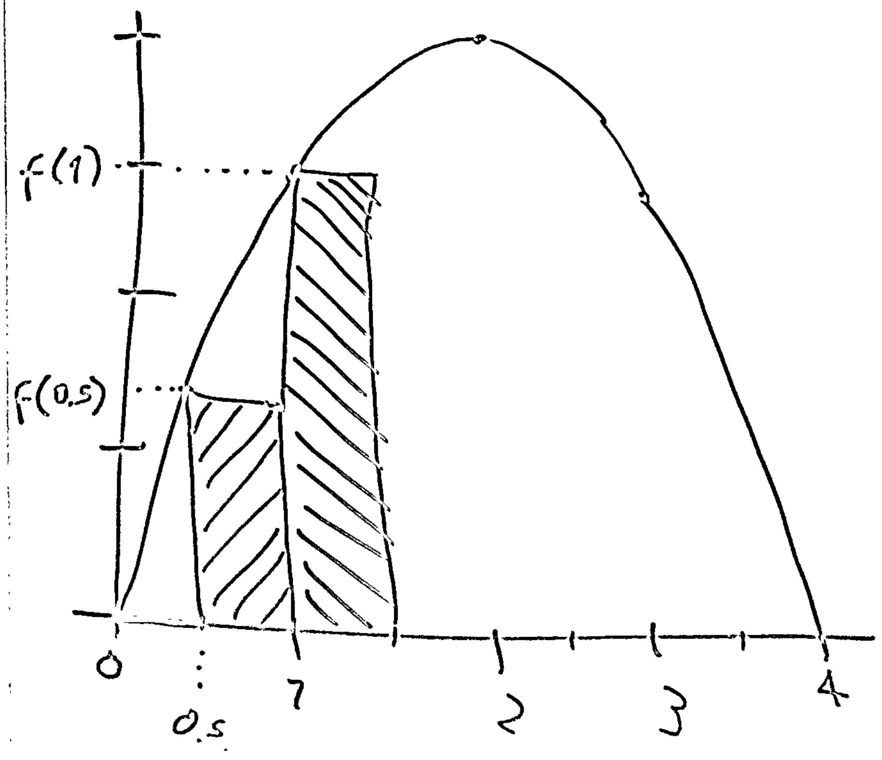
COMO A GENTE SÓ QUER REPRESENTAR GRAFICAMENTE

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) f(a_i)$$

PARA $P = \{0, 0.5, 1, \ldots, 4\}$

A GENTE NÃO PRECISA CALCULAR $f(0), f(0.5), f(1)$, ETC...

A GENTE PODE ENCONTRAR ESSES VALORES PELO GRÁFICO.



C2 19/MAR/2018

NA AULA PASSADA NÓS APRENDEMOS A VISUALIZAR O QUE ISTO AQUI QUERIA DIZER...

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \overbrace{f(a_i)}^{c_i}$$

EM TODOS OS NOSSOS EXEMPLOS POR ENQUANTO NÓS VAMOS USAR $f(x) = 4-(x-2)^2$ E $P$ VAI SER ALGUMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[0,4]$.

HOJE NÓS VAMOS APRENDER A INTERPRETAR – ISTO É, A VISUALIZAR – OUTRAS FÓRMULAS PARECIDAS COM A ACIMA. CADA UMA DELAS VAI TER UM NOME E CORRESPONDER A UM "MÉTODO DE INTEGRAÇÃO" – UM MODO DE CALCULAR UMA APROXIMAÇÃO NO COMPUTADOR (OU NA MÃO).

| | FÓRMULA PRO $c_i$ | NOME DO MÉTODO |
|---|---|---|
| a) | $c_i = f(a_i)$ | "L" |
| b) | $c_i = f(b_i)$ | "R" |
| c) | $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$ | "MAX" |
| d) | $c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$ | "MIN" |
| e) | $c_i = f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$ | "PONTO MÉDIO" |
| f) | $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ | "TRAPÉZIO" |
| g) | $c_i = \sup f([a_i,b_i])$ | "SUP" |
| h) | $c_i = \inf f([a_i,b_i])$ | "INF" |

VAMOS USAR ESTAS PARTIÇÕES:

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$,
$P_2 = \{0,1,3,4\}$,
$P_3 = \{0,4\}$
$P_4 = \{0,2,4\}$
$P_5 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$

EXERCÍCIO:

a) REPRESENTE GRAFICAMENTE $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)\, c_i$ PARA $c_i = f(a_i)$ (MÉTODO (a) - "L") PARA AS PARTIÇÕES $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

E CALCULE O RESULTADO DO SOMATÓRIO EM $P_1, P_2, P_3, P_4$.

b) IDEM, MAS $c_i = f(b_i)$ (MÉTODO (b) - "R")

c) IDEM, MAS $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$

d) MÉTODO (d)

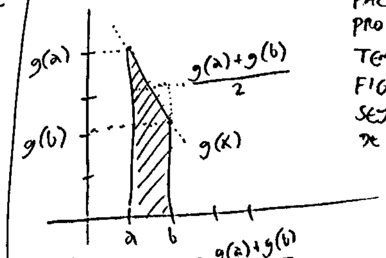
e) MÉTODO (e)

f) MÉTODO (f)

... DEPOIS QUE VOCÊS TERMINAREM OS EXERCÍCIOS ACIMA A GENTE VAI VER IMAGENS DE CONJUNTOS, SUPS E INFS, E AÍ VOCÊS VÃO FAZER EXERCÍCIOS COM OS MÉTODOS g E h.

OBS (PRO MÉTODO (f)):

TRAPÉZIO




ÁREA DO TRAPÉZIO: $(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$

DICA: QUANDO VOCÊS FOREM FAZER AS FIGURAS PRO MÉTODO (f) TENTEM FAZER FIGURAS QUE SEJAM SOMAS DE TRAPÉZIOS.

IMAGENS DE CONJUNTOS

ÀS VEZES A GENTE USA ESTA NOTAÇÃO: $f(\{2,3,4\})$

CONJUNTO DE NÚMEROS AO INVÉS DE UM NÚMERO SÓ!

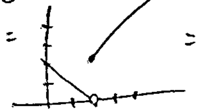
CONVENÇÃO: $f(\{2,3,4\}) = \{f(2), f(3), f(4)\}$

COM A $f$ DOS EXEMPLOS,

$f(\{2,3,4\}) = \{4, 3, 0\}$
$= \{0, 3, 4\}$

EXEMPLO/EXERCÍCIO:

SEJA $g$ ESTA FUNÇÃO:

$g(x) =$  $= \begin{cases} 2-x & \text{QUANDO } x<2, \\ x & \text{QUANDO } x \geq 2. \end{cases}$

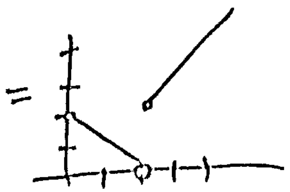
CALCULEM:

a) $g(\{0,1,2,3,4\})$
b) $g(\{1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2\})$

a) $\{2,1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
b) $\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 2, 2.2\} =$
$\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 2.2\} =$ 

$\boxed{\text{C2 } 19/\text{MAR.}/2018}$

SUGESTÃO: EM CASA DÊEM UMA OLHADA NA SEÇÃO 1.1 DO LIVRO (STEWART 7TH ED)

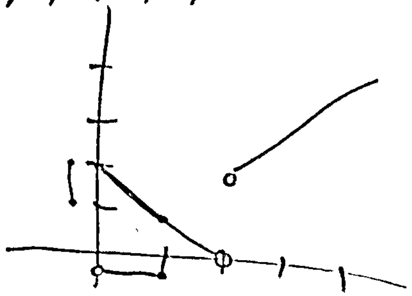
$g(x) =$ 

$g([0,1]) = [1,2]$

$g([1,2]) = (0,1] \cup \{2\}$

$\max(3, 9, 4, 2, 4, 0) = 9 \qquad \min(3, 9, 4, 2, 4, 0) = 0$

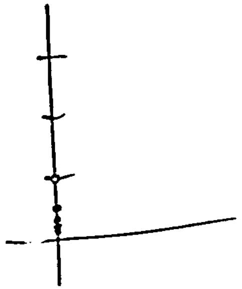
$\sup(\{3, 9, 4, 2, 4, 0\}) = 9 \qquad \inf(\{3, 9, 4, 2, 4, 0\}) = 0$

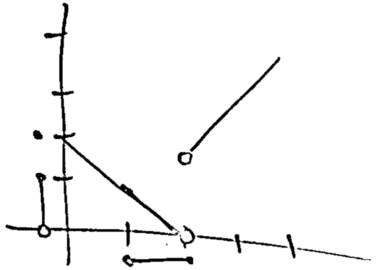


$\inf(\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}) = 0$

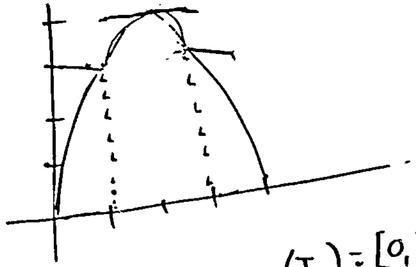
$\cancel{\in}$

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$





PRÓXIMO PASSO:



$I_1 = [0,1] \qquad f(I_1) = [0,3] \qquad \sup(f(I_1)) = 3$

$I_2 = [1,3] \qquad f(I_2) = [3,4] \qquad \sup(f(I_2)) = 4$

$I_3 = [3,4] \qquad f(I_3) = [0,3] \qquad \sup(f(I_3)) = 3$

C2 21/mar/2018

Lembrem que estamos usando esta função nos exercícios

$f(x) = 4-(x-2)^2$

e estas partições,

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$
$P_2 = \{0,1,3,4\}$
$P_3 = \{0,4\}$
$P_4 = \{0,2,4\}$
$P_5 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$

e estes métodos para calcular os "$c_i$"s:

a) $c_i = f(a_i)$ ("L")
b) $c_i = f(b_i)$ ("R")
c) $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$ ("max")
d) $c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$ ("min")
e) $c_i = f(\frac{a_i+b_i}{2})$ ("ponto médio")
f) $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ ("trapézio")
g) $c_i = \sup(f([a_i,b_i]))$ ("sup")
h) $c_i = \inf(f([a_i,b_i]))$ ("inf")

Lembre que a gente pode interpretar $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ quando $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ como uma soma de trapézios.

Hoje:

1) Vamos rever os métodos do trapézio, do sup e do inf
2) Refinamentos de partições, largura de uma partição, $\lim\limits_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ \|P\| \to 0}}$
3) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\int_{x=a}^{x=b} f(x)$.
4) Funções integráveis e não-integráveis

Exercícios:

1) Represente graficamente $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ para os métodos do trapézio, do sup e do inf e para as partições $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

$\boxed{\text{Defs:}}$

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\sup f([a_i,b_i])$$
$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\inf f([a_i,b_i])$$

2) Represente graficamente todas as expressões abaixo e veja se você consegue interpretar o que os "⊂"s querem dizer.

$$P_3 \subset P_2 \subset P_1 \subset P_5 \subset [0,4]$$

$$\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_5} f(x)\,dx \geq \int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$$
$$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$$
$$\underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_5} f(x)\,dx \leq$$

3) Seja $g(x) = x$. Represente graficamente

$\overline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$.

Compare com

$\overline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$.

$\boxed{\text{Def:}}$ A largura de uma partição $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ (obs: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$) é $\max(x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{N+1}-x_N)$.

Notação: $\|P\|$.

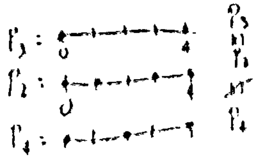
4) Exercício: calcule $\|P_1\|, \|P_2\|, \|P_3\|, \|P_4\|, \|P_5\|$.

$\boxed{\text{Def:}}$ Se $Q_1, Q_2, \ldots$ são partições do mesmo intervalo $[a,b]$, dizemos que $Q_1, Q_2, \ldots$ convergem para $[a,b]$ quando:

- $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \ldots$
- $\lim_{i\to\infty} \|Q_i\| = 0$.

5) Exercício: Para cada uma das sequências (finitas!) de partições abaixo verifique se $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_N$ é verdade e calcule $\|Q_1\|, \|Q_2\|, \ldots, \|Q_N\|$.

a) $P_3, P_2, P_1, P_5$
b) $P_4, P_2, P_3, P_4, P_5$
c) $P_3, P_4, P_1, P_5$
d) $P_3, P_2, P_4, P_1, P_5$




$\boxed{\text{Def:}}$ Seja $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ alguma sequência de partições de $[a,b]$ que converge para $[a,b]$.

Então: $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$

e $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$.

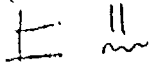
$\boxed{\text{Teorema:}}$ ← difícil!

O resultado de $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não depende da escolha da sequência $Q_1, Q_2, \ldots$ — todas as escolhas dão o mesmo resultado!

E idem para $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

$\|P_1\| = 1$
$\|P_2\| = 2$ ← não-trivial
$\|P_3\| = 4$
$\|P_4\| = 2$
$\|P_5\| = 0.5$

Obs: Seja $h(x)$:
$\begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$h(x) =$ 

$\boxed{\text{C2 21/MAR/2018}}$

Lembrem que estamos usando esta função nos exercícios,

$f(x) = 4-(x-2)^2$

e estas partições,

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$
$P_2 = \{0,1,3,4\}$
$P_3 = \{0,4\}$
$P_4 = \{0,2,4\}$
$P_5 = \{0,0.5,1,1.5,\ldots,4\}$

e estes métodos para calcular os "$c_i$"s:

a) $c_i = f(a_i)$ ("L")
b) $c_i = f(b_i)$ ("R")
c) $c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$ ("max")
d) $c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$ ("min")
e) $c_i = f(\frac{a_i+b_i}{2})$ ("ponto médio")
f) $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ ("trapézio")
g) $c_i = \sup(f([a_i,b_i]))$ ("sup")
h) $c_i = \inf(f([a_i,b_i]))$ ("inf")

Lembre que a gente pode interpretar $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ quando $c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$ como uma soma de trapézios.

Hoje:

① Vamos rever os métodos do trapézio, do sup e do inf

② Refinamentos de partições, largura de uma partição, $\lim_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ \|P\| \to 0}}$

③ $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, $\int_{x=a}^{x=b} f(x)$.

④ Funções integráveis e não-integráveis

Exercícios:

① Represente graficamente $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)c_i$ para os métodos do trapézio, do sup e do inf e para as partições $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

$\boxed{\text{DEFS:}}$

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\sup f([a_i,b_i])$$

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\inf f([a_i,b_i])$$

② Represente graficamente todas as expressões abaixo e veja se você consegue interpretar o que os "$\leq$"s querem dizer.

$$P_3 \subset P_2 \subset P_1 \subset P_5 \subset [0,4]$$

$$\overline{\int}_{P_3} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_1} f(x)dx \geq \overline{\int}_{P_5} f(x)dx \geq \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \quad \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \quad \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \quad \text{\rotatebox{90}{$\leq$}}$$

$$\underline{\int}_{P_3} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_1} f(x)dx \leq \underline{\int}_{P_5} f(x)dx \leq \int_{x=0}^{x=4} f(x)dx$$

③ Seja $g(x)=x$. Represente graficamente

$\overline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1,0,1,2\}} g(x)\,dx$.

Compare com

$\overline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{\{-2,-1.5,-1,\ldots,2\}} g(x)\,dx$.

$\boxed{\text{DEF:}}$ A largura de uma partição $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ (obs. $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+1}$) é $\max(x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{N+1}-x_N)$.

Notação: $\|P\|$.

④ Exercício: calcule $\|P_1\|, \|P_2\|, \|P_3\|, \|P_4\|, \|P_5\|$.

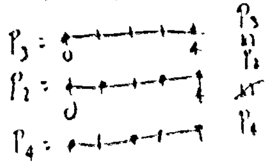
$\boxed{\text{DEF:}}$ Se $Q_1, Q_2, \ldots$ são partições do mesmo intervalo $[a,b]$, dizemos que $Q_1, Q_2, \ldots$ convergem para $[a,b]$ quando:

- $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \ldots$
- $\lim_{i\to\infty} \|Q_i\| = 0$.

⑤ Exercício:

Para cada uma das sequências (finitas!) de partições abaixo verifique se $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_N$ é verdade e calcule $\|Q_1\|, \|Q_2\|, \ldots, \|Q_N\|$.

a) $P_3, P_2, P_1, P_5$
b) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$
c) $P_3, P_4, P_1, P_5$
d) $P_3, P_2, P_4, P_1, P_5$



$\boxed{\text{DEF:}}$ Seja $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ alguma sequência de partições de $[a,b]$ que converge para $[a,b]$.

Então: $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$

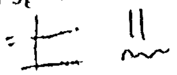
e $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int}_{Q_j} f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{TEOREMA:}}$ ← difícil!

O resultado de $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não depende da escolha da sequência $Q_1, Q_2, \ldots$ – todas as escolhas dão o mesmo resultado! E idem para $\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

$\|P_1\| = 1$ ← não-trivial
$\|P_2\| = 2$
$\|P_3\| = 4$
$\|P_4\| = 2$
$\|P_5\| = 0.5$

Obs: seja $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$h(x) =$ 

C2 26/MAR/2018

ALGUMAS COISAS DA ÚLTIMA AULA...

DEFS: $\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \sup(f([a_i,b_i]))$

$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \inf(f([a_i,b_i]))$

SEJA $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ ALGUMA SEQUÊNCIA DE PARTIÇÕES DE $[a,b]$ QUE CONVERGE PARA $[a,b]$. ENTÃO:

$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \overline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$

$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \underline{\int_{Q_j}} f(x)\,dx$

TEOREMA: ← DIFÍCIL!

O RESULTADO DE $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$ NÃO DEPENDE DA ESCOLHA DA SEQUÊNCIA $Q_1, Q_2, \ldots$ — TODAS AS ESCOLHAS DÃO O MESMO RESULTADO!

IDEM PARA $\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$.

DEF.:

(NOVA, E SÓ VAI VALER PARA A AULA DE HOJE):

$[a,b]/N$ É A PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ EM $N$ SUBINTERVALOS IGUAIS.

EXEMPLOS:

$[0,4]/1 = \{0,4\}$

$[0,4]/2 = \{0,2,4\}$

$[0,4]/4 = \{0,1,2,3,4\}$

$[0,4]/8 = \{0, 0.5, 1, \ldots, 4\}$

$[0,4]/N = \{0, 0+\frac{4}{N}, 0+2\frac{4}{N}, 0+3\frac{4}{N}, \ldots, 4\}$

$[a,b]/N = \{a, a+1\frac{b-a}{N}, a+2\frac{b-a}{N}, \ldots, \underset{a+N\frac{b-a}{N}}{\overset{\shortparallel}{b}}\}$

TRUQUE:

PRA ENTENDER $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$

VAMOS OLHAR PARA $\overline{\int_{[a,b]/1}} f(x)\,dx$, $\overline{\int_{[a,b]/2}} f(x)\,dx$, $\overline{\int_{[a,b]/4}} f(x)\,dx$, ETC.

EXERCÍCIOS:

① REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int_{[0,\pi]/N}} \operatorname{sen} x\,dx$ E $\underline{\int_{[0,\pi]/N}} \operatorname{sen} x\,dx$

PARA $N = 1, 2, 4, 8, 16$.

② REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int_{[0,2\pi]/2^K}} \operatorname{sen} x\,dx$ E $\underline{\int_{[0,2\pi]/2^K}} \operatorname{sen} x\,dx$

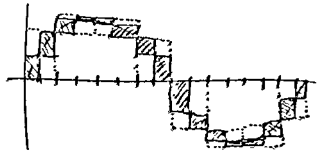
PARA $K = 0,1,2,3,4$.

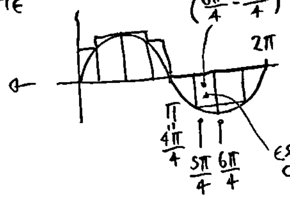
③ REPRESENTE GRAFICAMENTE

$\overline{\int_{[0,2\pi]/2^K}} \operatorname{sen} x\,dx - \underline{\int_{[0,2\pi]/2^K}} \operatorname{sen} x\,dx$

PARA $K = 0,1,2,3,4$.

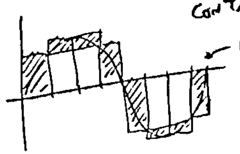
$K = 4$:






$\overbrace{\underbrace{\left(\frac{6\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{4}>0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}}_{<0\,!}}^{<0}$

TODOS OS RETÂNGULOS CONTAM POSITIVAMENTE!



$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)}_{>0} \cdot \overset{0}{\operatorname{sen} 2\pi}}_{=0} - \underbrace{\underbrace{\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)}_{>0} \cdot \overbrace{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}}^{<0}}_{<0}}_{>0}$

$K=3$, $2^K = 8$ (8 SUBINTERVALOS)

DEF.: QUANDO $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$

NÓS DIZEMOS QUE:

① $f(x)$ É INTEGRÁVEL NO INTERVALO $[a,b]$

② $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$.

DEF.: QUANDO: $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx \neq \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$

NÓS DIZEMOS QUE:

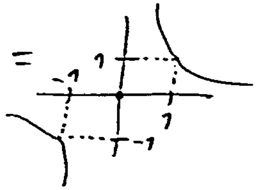
① $f(x)$ NÃO É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$

② $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ NÃO EXISTE.

C2 26/MAR/2018

EXEMPLOS DE FUNÇÕES NÃO-INTEGRÁVEIS:

(1) SEJA $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{SE } x \neq 0, \\ 0 & \text{SE } x = 0. \end{cases}$

$f(x) =$ 

FUNÇÃO ILIMITADA

EXERCÍCIOS:

(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE:

$\overline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx$

PARA $k = 0, 1, 2$

E DESCUBRA PORQUE É QUE ESSA DIFERENÇA NUNCA VAI ZERAR (PARA $k$ ALTO).

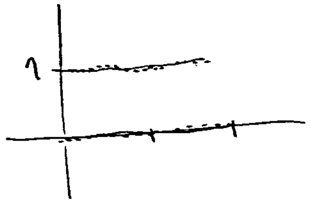
(b) IDEM MAS PARA $[-1,1]$.

(BEM DEPOIS A GENTE VAI VER UMA COISA CHAMADA INTEGRAL IMPRÓPRIA QUE VAI NOS PERMITIR LIDAR COM ALGUNS CASOS RUINS DESSES)

O EXEMPLO "PADRÃO" DE UMA FUNÇÃO NÃO-INTEGRÁVEL É:

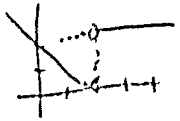
$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

FUNÇÃO MUITO DESCONTÍNUA !!



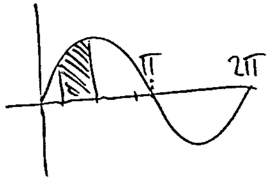
$\overline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx = 1$ !!

FUNÇÕES ILIMITADAS SÃO RUINS DE INTEGRAR,
FUNÇÕES MUITO DESCONTÍNUAS SÃO RUINS DE INTEGRAR,
FUNÇÕES LIMITADAS SÃO BOAS,
FUNÇÕES CONTÍNUAS OU COM POUCAS DESCONTINUIDADES SÃO BOAS.

SEJA $h(x) =$  . $\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 2 + 4 = 6$

COMO INTEGRAR FUNÇÕES MAIS COMPLICADAS?

DIGAMOS QUE $f(x)$ É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$. ENTÃO ELA É INTEGRÁVEL EM QUALQUER SUBINTERVALO $[c,d] \subseteq [a,b]$.

EX: 

$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen} x\,dx$ EXISTE.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

→ TFC1 E TFC2.

TFC1: SE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ EXISTE

ENTÃO SEJA $F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$;

ENTÃO: $F(a) = 0$, $F$ É CONTÍNUA,

QUANDO $f(x)$ FOR CONTÍNUA EM $c$ TEMOS $F'(c) = f(x)$.

TFC2:

DIGAMOS QUE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ SEJA CONTÍNUA E LIMITADA.

DIGAMOS QUE $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ OBEDECE $F'(x) = f(x)$.

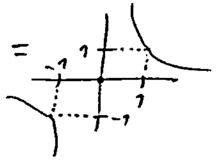
ENTÃO:

$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c) - F(a)$.

C2 26/MAR/2018

Exemplos de funções não-integráveis:

① Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$f(x) =$  ⇦ Função ilimitada

Exercícios:

ⓐ Represente graficamente:

$$\overline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/2^k} f(x)\,dx$$

para $k = 0, 1, 2$

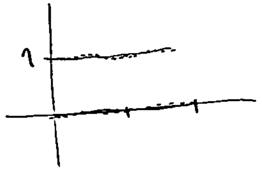
e descubra porque é que essa diferença nunca vai zerar (para $k$ alto).

ⓑ Idem mas para $[-1,1]$.

(Bem depois a gente vai ver uma coisa chamada integral imprópria que vai nos permitir lidar com alguns casos ruins desses)

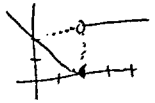
O exemplo "padrão" de uma função não-integrável é:

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ ⇦ Função muito descontínua !!



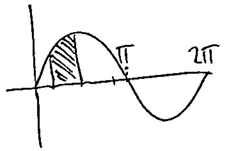
$$\overline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx - \underline{\int}_{[0,1]/4} g(x)\,dx = 1 \text{ !!}$$

Funções ilimitadas são ruins de integrar,
funções muito descontínuas são ruins de integrar,
funções limitadas são boas,
funções contínuas ou com poucas descontinuidades são boas.

Seja $h(x) =$  . $\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 2+4=6$

Como integrar funções mais complicadas?

Digamos que $f(x)$ é integrável em $[a,b]$. Então ela é integrável em qual subintervalo $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Ex: 

$\int_{x=1}^{x=2} \operatorname{sen} x\,dx$ existe.

Teorema Fundamental do Cálculo

→ TFC1 e TFC2.

TFC1: Se $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ existe

então seja $F(c) = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$;

Então: $F(a) = 0$, $F$ é contínua,

quando $f(x)$ for contínua em $c$ temos $F'(c) = f(x)$.

TFC2:

Digamos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua e limitada.

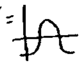
Digamos que $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ obedece $F'(x) = f(x)$.

Então:

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c) - F(a).$$

Exemplo:

$f(x) = \operatorname{sen} x$

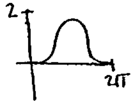
$F(x) = -\cos x =$ 

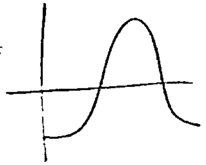
$F'(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int_{x=0}^{x=2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(0)$$

Outra possibilidade:

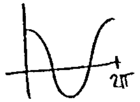
$f(x) = \operatorname{sen} x$

$F(x) = 1 - \cos x =$ 

$-\cos x =$ 

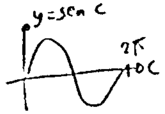
$\int -\cos x$

⇦ Exemplo:

$f(x) = \cos x$, $f(x) =$ 

$a = 0$, $b = 2\pi$,

$F(c) = \int_{x=0}^{x=c} f(x)\,dx$

$F(c) = \operatorname{sen} c$ $F(c) =$ 

## C2 28/mar/2017

No final da aula passada nós vimos dois teoremas que vão nos ajudar a calcular integrais — o TFC1 e o TFC2 ("TFC" = "Teorema Fundamental do Cálculo")...

A gente vai ver primeiro os enunciados e várias aplicações deles, e só depois a gente vai ver como eles são demonstrados (sem muito detalhe).

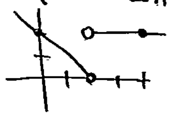
**TFC1:** Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada, e ou contínua ou contínua exceto num subconjunto finito $D\subset[a,b]$.

Seja $F:[a,b]\to\mathbb{R}$
$$c \mapsto \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx.$$

Então: $f$ é integrável em $[a,b]$,
ⓐ $F(c)$ existe para todo $c\in[a,b]$,
ⓑ $F$ é contínua, ⓒ $F(a)=0$,
ⓓ e $F'(c)=f(c)$ (para $c\notin D$).

## Exemplo:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{quando } x\le 2,\\ 2 & \text{quando } 2<x.\end{cases}$$

$f =$ 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a $f$ acima no intervalo $[a,b]=[0,4]$.

(1) Calcule $F(0)$, $F(0.5)$, $F(1)$, ..., $F(4)$.

(2) Faça um gráfico da $F:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(3) Use o método do chutar-e-testar para chutar definições por casos pra essa $F$ — chame seus chutes de $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{20}, \ldots$ — e teste cada uma das suas "$F$"s pra ver se elas obedecem todas as condições do TFC1.

Obs: $D=\{2\}$.

## Dicas (em forma de exercícios):

(4) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=2-x$ para todo $x$.

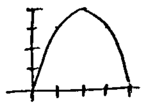
(5) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=2-x$.

(6) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=2$.

(7) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=2$.

## Exemplo 2:

$$\begin{aligned}f(x) &= 4-(x-2)^2\\ &= 4-(x^2-4x+4)\\ &= 4x-x^2\end{aligned}$$

$=$ 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a $f$ acima no intervalo $[a,b]=[0,4]$.

Ainda não sabemos calcular $F(0.5)$, $F(1)$, ..., mas:

(8) Use o método do chutar-e-testar para chutar definições para essa $F$ — chame os seus chutes de $F_1, F_2, F_3, \ldots$ — e teste cada uma das suas "$F$"s pra ver se elas obedecem todas as condições do TFC1. Obs: $D=\{\}$.

## Dicas:

(9) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=x^2$.

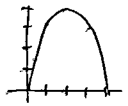
(10) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=4x$.

(11) Encontre $F(x)$ tal que $F'(x)=4x-x^2$.

(12) Encontre outra $F(x)$ tal que $F'(x)=4x-x^2$.

## Exemplo 3:

$$\begin{aligned}f(x) &= 4-(x-2)^2\\ &= 4x-x^2\end{aligned}$$

$=$ 

Vamos tentar aplicar o TFC1 para a $f$ acima no intervalo $[a,b]=[2,4]$.

(13) Use o método do chutar-e-testar pra encontrar uma $F$ que obedece as condições ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ do TFC1.

Depois calcule:
$$\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx = F(4).$$

Obs: $[a,b]=[2,4]$.

**C2 2/abril/2018**

Na aula passada vimos uma versão complicada — mas bem geral e bem poderosa — do TFC1...

Uma versão mais simples, mas que só funciona para $f$ contínua, é:

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua.
Seja $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $F'(c)=f(c)$ para todo $c\in(a,b)$ e $F(a)=0$.
Então para todo $c$ em $[a,b]$ isto vale:
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)$$
Em particular,
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b).$$

Versão alternativa:
Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua.
Seja $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $G'(c)=f(c)$ para todo $c\in(a,b)$.
Seja $F(x)=G(x)+C$, onde esse $C$ é uma constante que faz com que $F(a)=0$.
Então para todo $c$ em $[a,b]$ isto vale:
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c).$$

Exercícios:
Calcule as seguintes integrais usando a versão alternativa do TFC1:

① $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} e^{3x}\,dx$

② $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 4\cos 5x\,dx$

③ $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx$

④ $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 4\cos 5x\,dx$

Lembre que a gente pode tentar encontrar a $G$ pelo chutar-e-testar... Dica: faça uma tabela...

| $G(x)$ | $G'(x)$ |
|---|---|
| $f(g(x))$ | $f'(g(x))g'(x)$ |
| $f(3x)$ | $f'(3x)\cdot 3$ |
| $e^{3x}$ | $3e^{3x}$ |
| $\frac{1}{3}e^{3x}$ | $e^{3x}$ |
| $f(5x)$ | $f'(5x)\cdot 5$ |
| $\operatorname{sen}(5x)$ | $5\cos 5x$ |
| $\frac{4}{5}\operatorname{sen}(5x)$ | $4\cos 5x$ |

③ Seja $G(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$.
Então $G'(x)=e^{3x}$.
Seja $F(x)=G(x)+C$
onde $C$ é tal que $F(a)=0$
$$F(a)=G(a)+\underbrace{C}_{-G(a)}=0$$
$$F(x)=G(x)-G(a) = \tfrac{1}{3}e^{3x}-\tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$F(b)=\tfrac{1}{3}e^{3b}-\tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) = \tfrac{1}{3}e^{3b}-\tfrac{1}{3}e^{3a}$$
$$\parallel$$
$$\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx$$
$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3b}-\tfrac{1}{3}e^{3a}}$$

**TFC2:**
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$
Exemplo: se $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ então:
$$\int_{x=a}^{x=b} e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{3b}-\tfrac{1}{3}e^{3a}$$

Notação (nova):
$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$$

$$\boxed{\text{TFC2: } \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

④

Uma fórmula muito importante:

Integração por substituição!!!

S1: $$\boxed{\begin{array}{ccc} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}}$$

S2: $$\boxed{\begin{array}{ccc} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}}$$ (Quando $F'=f$)

S3: $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$$

Exercício ⑤: $\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} 2x\operatorname{sen} x^2\,dx = ?$

[illegible]

$\boxed{S3}\begin{bmatrix} f(u) := \text{sen}\, u \\ g(x) := 2x \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} (\text{sen}\, 2x)\cdot 2\, dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \text{sen}\, u\, du}$$

... QUE NÃO RESOLVE O (5)...

$\boxed{S3}\begin{bmatrix} f(u) := \text{sen}\, u \\ g(x) := x^2 \\ a := 2 \\ b := 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx = \int_{u=2^2}^{u=3^2} \text{sen}\, u\, du}$$

$\boxed{\text{TFC2 (em u)}} = \boxed{\int_{u=a}^{u=b} F'(u)\,du = F(u)\Big|_{u=a}^{u=b}}$

$\boxed{\text{TFC2 (em u)}}\begin{bmatrix} F(u) := -\cos u \\ a := 2^2 \\ b := 3^2 \end{bmatrix} = \boxed{\int_{u=2^2}^{u=3^2} \text{sen}\, u\, du = (-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2}}$

ENTÃO:

(5) $\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx =$

$\int_{u=2^2}^{u=3^2} \text{sen}\, u\, du =$

$(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos 3^2) - (-\cos 2^2) =$

$\cos 4 - \cos 9$

OBS: $(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}$

USANDO A OBS...

$\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx =$

$\int_{u=2^2}^{u=3^2} \text{sen}\, u\, du =$

$(-\cos u)\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} =$

$(-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}$ ... OU SEJA:

(5') $\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}}$

EXERCÍCIO:

(6) MOSTRE QUE (5') PODE SER OBTIDA PELO TFC2 USANDO ALGUMA SUBSTITUIÇÃO... QUAL?

OBS: $\frac{d}{dx}(-\cos x^2) = (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x$

$\boxed{\text{TFC2}}\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x^2 \\ a := 2 \\ b := 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx = (-\cos x^2)\Big|_{x=2}^{x=3}}$$

$$\boxed{\text{TFC2: } \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

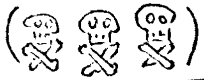
EXERCÍCIO:

(7) $\boxed{S1}\begin{bmatrix} F(u) = -\cos u \\ g(x) = x^2 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{bmatrix} =$

$$\boxed{\begin{aligned} -\cos x^2\Big|_{x=2}^{x=3} &= \int_{x=2}^{x=3} (\text{sen}\, x^2)\cdot 2x\, dx \\ \| \quad & \\ -\cos u\Big|_{u=2^2}^{u=3^2} &= \int_{u=2^2}^{u=3^2} \text{sen}\, u\, du \end{aligned}}$$

UMA FÓRMULA MUITO IMPORTANTE:

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO!!!



$\boxed{S1}:$
$$\boxed{\begin{aligned} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| \quad & \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{aligned}}$$

$\boxed{S2}:$
$$\boxed{\begin{aligned} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| \quad & \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{aligned}}$$ (QUANDO $F' = f$)

$\boxed{S3}: \boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$

EXERCÍCIO (): $\int_{x=2}^{x=3} 2x\, \text{sen}\, x^2\, dx = ?$

(5):

$\boxed{\text{C2 4/abril/2018}}$

Hoje: uma primeira interpretação para a integral indefinida; exercícios

Relembrando:

$\boxed{S1}$: $$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx$$ $$\overset{\shortparallel}{f(u)}\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

$\boxed{S2}$: $$F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx$$ $$\overset{\shortparallel}{F(u)}\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

$\boxed{S3}$: $$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

$\boxed{\text{TFC2 (em x)}}$: $$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$$

Idéia (tosca, que vamos detalhar depois):

Integrais indefinidas são integrais definidas com os limites de integração apagados - e em toda conta com integrais indefinidas dá pra gente completar os limites de integração apagados...

OBS: $\boxed{S2}\left[\begin{array}{l} f(u)=\tan u \\ g(x)=x^3 \end{array}\right] = ?$

$\boxed{S3}\left[\begin{array}{l} f(u)=\tan u \\ g(x)=x^3 \end{array}\right] = ?$

Nosso primeiro exemplo preferido de hoje:

$$\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx = ?$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \underbrace{(\cos \underbrace{x^3}_{g(x)})}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)}\,dx =$$
$$\int_{u=a^3}^{u=b^3} \cos u\,du =$$
$$\operatorname{sen} u\Big|_{u=a^3}^{u=b^3} =$$
$$\operatorname{sen} x^3\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Apagar limites (!!)

$\Rightarrow$
$$\int (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx =$$
$$\int \cos u\,du =$$
$$\operatorname{sen} u =$$
$$\operatorname{sen} x^3$$

OBS: $u=x^3$

(A) Limites de integração e de diferença.

Repare que

$\operatorname{sen} u$ abrevia $\operatorname{sen} u\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$

$\operatorname{sen} x$ abrevia $\operatorname{sen} x\Big|_{x=a}^{x=a}$

$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ é "a diferença de $F(x)$ entre $x=a$ e $x=b$"

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é "a integral de $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$"

OBS:

Apagando os limites de integração em S3 temos:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int f(u)\,du$$

$$\underbrace{\frac{du}{dx}}$$
$$\underbrace{\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}}_{du}$$

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du \;\;!!$$

OBS: $$\boxed{\int (\cos x^3)\cdot 3x^2\,dx = \operatorname{sen} x^3}$$

(conta anterior sem os passos na variável u)

$\boxed{\text{TFC2I}}\left[F(x):=\operatorname{sen} x^3\right] = ?$

Integral indefinida:

$\boxed{\text{S3I}}$: $$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$$

OBS: $u=g(x)$

$\boxed{\text{TFC2I}}$: $$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x)}$$

Exercícios:

1. $\int 4\cos(5x+6)\,dx = ?$
2. $\int (4x+5)^{1/2}\,dx = ?$

$\boxed{\text{C2 4/ABRIL/2018}}$

HOJE: UMA PRIMEIRA INTERPRETAÇÃO PARA A INTEGRAL INDEFINIDA; EXERCÍCIOS

RELEMBRANDO:

$\boxed{S1}$: $$\boxed{\begin{aligned} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{aligned}}$$

$\boxed{S2}$: $$\boxed{\begin{aligned} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{aligned}}$$

$\boxed{S3}$: $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du}$$

$\boxed{\text{TFC2 (em } x)}$: $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

DÁ PRA RESOLVER O ① DE VÁRIOS MODOS...

① $\int \underbrace{4\cos(\underbrace{5x+6}_{g(x)})}_{f(g(x))}\,dx = ?$

CADÊ O $g'(x)$? !!

$g'(x) = 5$

$$\int \underbrace{\tfrac{1}{5}4\cos(\underbrace{5x+6}_{g(x)})}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{5}_{g'(x)}\,dx =$$

$$\int \underbrace{\tfrac{4}{5}\cos u}_{f(u)}\,du =$$

$$\tfrac{4}{5}\int \cos u\,du =$$

$$\tfrac{4}{5}\operatorname{sen} u =$$

$$\tfrac{4}{5}\operatorname{sen}(5x+6)$$

② $\int (\underbrace{4x+5}_{g(x)})^{1/2}\,dx =$

$$\int \underbrace{\tfrac{1}{4}(\underbrace{4x+5}_{g(x)})^{1/2}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{4}_{g'(x)}\,dx =$$

$$\int \tfrac{1}{4}u^{1/2}\,du =$$

$$\tfrac{1}{4}\int u^{1/2}\,du =$$

$$\tfrac{1}{4}\,\tfrac{2}{3}u^{3/2} =$$

$$\tfrac{1}{6}(4x+5)^{3/2}$$

$$\frac{d}{du}u^{3/2} = \frac{3}{2}u^{1/2}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right) = u^{1/2}$$

EXERCÍCIOS (STEWART, P. 336):

③ $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx =$

④ $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx =$

⑤ $\int (1-2x)^9\,dx =$

⑥ $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx =$

⑦ $\int x^k \operatorname{sen} x^{k+1}\,dx =$

⑧ $\int (ax+b)^k\,dx =$

⑨ $\int g(x)^k g'(x)\,dx =$

⑩ $\int x f(x^2)\,dx =$

⑪ $\int x^2 f(x^3)\,dx =$

INTEGRAL INDEFINIDA:

$\boxed{S3I}$: $$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$$

$\boxed{\text{OBS: } u = g(x)}$

$\boxed{TFC2I}$: $$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x)}$$

EXERCÍCIOS:

① $\int 4\cos(5x+6)\,dx = ?$

② $\int (4x+5)^{1/2}\,dx = ?$

$\boxed{\text{C2 11/ABRIL/2018}}$

EXERCÍCIOS DO FINAL DA AULA PASSADA:

3) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$

4) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx$

5) $\int (1-2x)^9 dx$

6) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

7) $\int x^k \operatorname{sen} x^{k+1} dx$

8) $\int (ax+b)^k dx$

9) $\int g(x)^k g'(x) dx$

10) $\int x f(x^2) dx$

11) $\int x^2 f(x^3) dx$

LEMBREM QUE

$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) \ldots \leftarrow \boxed{\text{TFC2I}}$

O QUE A GENTE CONSEGUE FAZER NOS EXERCÍCIOS 9, 10 E 11?

IMPORTANTE:

A GENTE VAI APRENDER A USAR UM MONTE DE TÉCNICAS QUE NÃO RESOLVEM UMA INTEGRAL, MAS QUE TRANSFORMAM ELA NUMA OUTRA INTEGRAL QUE TALVEZ SEJA MAIS FÁCIL DE RESOLVER...

LEMBREM:

$\boxed{\text{S3I}}: \boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$ $\boxed{\text{OBS: } u=g(x)}$

HOJE:
- INTEGRAÇÃO POR PARTES
- $\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$

$\int F'(x)\,dx = F(x)$

SE $[F(x) := g(x)h(x)]\ldots$

$\int g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x)$

$\int g'(x)h(x)\,dx + \int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x)$

$\boxed{\int g'(x)h(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx} : \boxed{\text{IPP}_{g'h}}$

$\boxed{\int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,dx} : \boxed{\text{IPP}_{gh'}}$

EXERCÍCIOS:

12) $\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx = \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{h(x)} dx$

$= x e^x - \int e^x dx$

$= x e^x - e^x$

$\underbrace{\int x e^x dx}_{F(x)} = \underbrace{x e^x - e^x}_{F(x)}$

13) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

14) $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$

15) $\int x^k e^x dx = x^k e^x - k\int x^{k-1} e^x dx$ ("RECURSIVA")

16) $\int x \operatorname{sen} x\, dx =$

17) $\int x \cos x\, dx =$

18) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx =$

19) $\int x^2 \cos x\, dx =$

20) $\int x^k \operatorname{sen} x\, dx =$

15) $\int \underbrace{x^k}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx = \underbrace{x^k}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{k x^{k-1}}_{g'(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx$

NOS EXERCÍCIOS ACIMA A GENTE VIU COMO REDUZIR UMA INTEGRAL A OUTRA MAIS SIMPLES...

AGORA A GENTE VAI VER UM CASO EM QUE A GENTE PRECISA "REDUZIR UMA INTEGRAL A OUTRA IGUALMENTE COMPLICADA" DUAS VEZES PRA CONSEGUIR RESOLVÊ-LA.

21) $\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{h} dx = \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{h} - \int \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\cos x}_{h'} dx$

22) $\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos x}_{h} dx = \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{\cos x}_{h} - \int \underbrace{e^x}_{g} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{h'} dx$

$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

$= e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx\right)$

$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$

$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right)$

FATO:

INTEGRAÇÃO POR PARTES PARECE SUPER LEGAL MAS RESOLVE POUCA COISA - É POUCO ÚTIL !!

FATO 2:

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO PARECE MUITO ESQUISITA MAS RESOLVE MUITA COISA !!

C2 16/ABRIL/2018

Hoje: como resolver

$\int (\text{sen } x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$

em alguns casos

(e gambiarras associadas)

Exemplo:

$\int (\text{sen } x)^2 (\cos x)^3 dx =$

$\int (\text{sen } x)^2 (\cos x)^2 \cos x \, dx =$

$\int (\underbrace{\text{sen } x}_{s})^2 (1 - \underbrace{\text{sen}^2 x}_{s^2}) \underbrace{\cos x}_{\frac{ds}{dx}} dx =$

$\int s^2 (1-s^2) \frac{ds}{dx} dx =$

$\int s^2 (1-s^2) ds =$

$\int s^2 - s^4 ds =$

$\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5} =$

$\frac{(\text{sen } x)^3}{3} - \frac{(\text{sen } x)^5}{5}$

Exercício:

① $\int (\text{sen } x)^6 (\cos x)^5 dx =$

$\int (\text{sen } x)^6 (\cos x)^2 (\cos x)^2 \cos x \, dx =$

$\int \underbrace{\underbrace{(\text{sen } x)^6}_{s^6} \underbrace{\underbrace{(1-\text{sen}^2 x)}_{1-s^2} \underbrace{(1-\text{sen}^2 x)}_{1-s^2}}_{s^4 - 2s^2 + 1}}_{s^{10} - 2s^8 + s^6} \underbrace{\underbrace{\cos x}_{\frac{ds}{dx}} dx}_{ds} =$

$\left[\begin{array}{l} s = \text{sen } x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \end{array}\right]$

$= \int s^{10} - 2s^8 + s^6 ds$

$= \frac{s^{11}}{11} - 2\frac{s^9}{9} + \frac{s^7}{7}$

$= \frac{(\text{sen } x)^{11}}{11} - 2\frac{(\text{sen } x)^9}{9} + \frac{(\text{sen } x)^7}{7}$

PRIMEIRA GAMBIARRA

Na caixinha que indica a variável nova na integração por substituição — que nos nossos exemplos é $s = \text{sen } x$ — escreva também quem é $\frac{ds}{dx}$.

Um exercício de 4/abril...

⑥ $\int x \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{u} dx =$

$\left[\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x \, dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \end{array}\right]$

$\int \cancel{x} \sqrt{u} \frac{du}{-2\cancel{x}} =$

$\int -\frac{1}{2} \sqrt{u} \, du =$

$-\frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$

$-\frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{3/2} =$

$-\frac{1}{3} u^{3/2} =$

$-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2}$

VERSÃO MAIS LIMPA DA PRIMEIRA GAMBIARRA

É difícil formalizar integrais que misturam a variável antiga e a nova... então:

6 (mais limpo)

$\int x \sqrt{1-x^2} dx =$

$\int \sqrt{1-x^2} \, x \, dx =$

$\int \sqrt{u} (-\tfrac{1}{2}) du =$

$-\frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$

$-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2} =$

$-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2}$

$\left[\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x \, dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \\ x \, dx = -\frac{du}{2} \end{array}\right]$

Exercício

② $\int (\text{sen } x)^3 (\cos x)^2 dx =$

$\int (\text{sen } x)^2 (\cos x)^2 \text{sen } x \, dx =$

$\int (1-c^2) c^2 (-1) dc$

$\left[\begin{array}{l} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = -\text{sen } x \\ dc = -\text{sen } x \, dx \\ \text{sen } x \, dx = -dc \\ (\text{sen } x)^2 = 1 - (\cos x)^2 \\ (\text{sen } x)^2 = 1 - c^2 \end{array}\right]$

DICA PRA DEIXAR ISSO TUDO UM POUCO MAIS LIMPO

Dentro da caixinha da substituição use linhas com "→" pra indicar o que vai substituir e linhas com "=" pro resto.

(Ops: isso não é padrão, é o truque que eu uso pra errar menos)

C2 16/ABRIL/2018

HOJE: COMO RESOLVER

$$\int (\text{sen } x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$$

EM ALGUNS CASOS
(E GAMBIARRAS ASSOCIADAS)

② (DE NOVO)

$$\int (\text{sen } x)^3 (\cos x)^2 dx =$$

$$\int \underbrace{(\text{sen } x)^2}_{1-c^2} \underbrace{(\underbrace{\cos x}_{c})^2}_{c^2} \underbrace{\text{sen } x\, dx}_{(-1)dc} =$$

$$\int (1-c^2)c^2(-1)dc =$$

$$\int (c^2-1)c^2 dc =$$

$$\int c^4 - c^2 dc =$$

$$\frac{c^5}{5} - \frac{c^3}{3} =$$

$$\frac{(\cos x)^5}{5} - \frac{(\cos x)^3}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos x \\ \cos x \to c \\ (\text{sen } x)^2 \to 1-c^2 \\ \frac{dc}{dx} = -\text{sen } x \\ \text{sen } x\, dx \to -dc \end{array}\right]$$

OUTRO EXERCÍCIO DE 4/ABRIL:

⑧ $$\int (ax+b)^k dx = \int u^k \frac{1}{a} du = \frac{1}{a}\frac{u^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = ax+b \\ ax+b \to u \\ \frac{du}{dx} = a \\ dx \to \frac{1}{a} du \end{array}\right]$$

VOLTANDO ÀS SUBSTITUIÇÕES
$c = \cos x$ E $s = \text{sen } x$...

PRA CASA:

③ VERIFIQUE QUE ÍMPARES
$$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^5 dx$$
PODE SER RESOLVIDO POR QUALQUER UMA DAS SUBSTITUIÇÕES

④ VERIFIQUE QUE PARES
$$\int (\text{sen } x)^2 (\cos x)^4 dx$$
NÃO PODE SER RESOLVIDO POR NENHUMA DAS SUBSTITUIÇÕES.

OBS: O TRUQUE MAIS RÁPIDO PRA RESOLVER $\int (\text{sen } x)^\alpha (\cos x)^\beta dx$
COM $\alpha$ E $\beta$ PARES USA $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen }\theta$...
A GENTE VAI VER ISSO PORQUE É MUITO LEGAL!!
MAS VÁRIOS LIVROS DE CÁLCULO 2 EVITAM ESSE ASSUNTO.

EXEMPLO: $360° = 2\pi$ (RADIANOS)
$180° = \pi$
$90° = \pi/2$
$45° = \pi/4$

FAZENDO $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ NA FÓRMULA ACIMA,

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen }\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS

SE $f(g(x)) = x$
ENTÃO $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{d}{dx}x = 1$

$$\| \quad f'(g(x))g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \quad (★)$$

EXERCÍCIO:

⑤ USE (★) PRA DESCOBRIR $\frac{d}{dx}\ln x$.

DICA: UMA DESSAS DUAS IDÉIAS VAI FUNCIONAR:
$\exp(\ln(x)) = x$,
$\ln(\exp(x)) = x$.

$$\frac{d}{dx}\exp(\ln(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\| \quad \exp'(\ln(x))\ln'(x)$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

USAMOS INFORMAÇÕES SOBRE $\exp' x$...

EXEMPLO:
$\frac{d}{dx}\text{arcsen } x = ?$

$$\frac{d}{dx}\text{sen arcsen } x = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\| \quad (\text{sen}' \text{ arcsen } x)\text{arcsen}' x$$

$$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\text{sen}' \text{ arcsen } x}$$

SE $\text{arcsen } x = a$
$\text{sen}' a = \cos a = \sqrt{1-(\text{sen } a)^2}$

$$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen arcsen } x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

C2 /ABRIL/2018

VOLTANDO À FÓRMULA PRA DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA...

(OBS: $\frac{d}{dx}\ln x$ VAI SER MUITO IMPORTANTE AGORA, AS OUTRAS VÃO SER IMPORTANTES DEPOIS...)

SE $f(g(x))=x$,

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dx}x=1$$

$$\overset{\shortparallel}{f'(g(x))g'(x)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}. \qquad (\star)$$

EXERCÍCIOS:

① USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\exp x=\exp x$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\ln x$.

② USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x=\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$.

③ USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\cos x=\sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arccos x$.

④ ISTO É VERDADE EM $x=\pi$? $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x=\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$.

⑤ $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}=?$

⑥ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=?$

⑦ $\frac{d}{dx}\tan x=?$ $\quad$ (OBS: $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$)

⑧ $\frac{d}{dx}\sec x=?$ $\quad$ (OBS: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$)

⑨ SABEMOS QUE $(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2=1$. EXISTE UMA FÓRMULA PARECIDA QUE USA $(\tan x)^2$ E $(\sec x)^2$. QUAL É ESSA FÓRMULA?

⑩ USE QUE $\frac{d}{dx}\tan x=(\tan x)^2+1$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arctan x$.

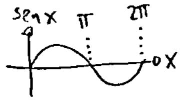
⑪ USE QUE $\frac{d}{dx}\sec x=(\sec x)\sqrt{(\sec x)^2-1}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x$.

⑫ $\frac{d}{dx}\ln(f(x))=?$

⑬ $\frac{d}{dx}\ln(-x)=?$

4.5 USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\cos x=-\sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arccos x$.

④ $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x=\cos x$




$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\pi=\cos\pi=-1$$

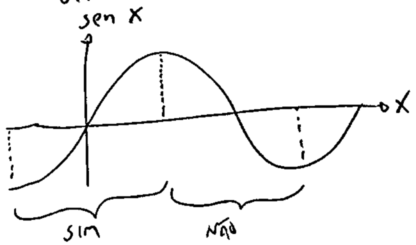
$$\sqrt{1-(\operatorname{sen}\pi)^2}=\sqrt{1-0^2}=\sqrt{1}=1$$

EM $x=\pi$,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\overset{?}{=}\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$\overset{\shortparallel}{-1}\quad\neq\quad\overset{\shortparallel}{1}$$

QUANDO É QUE $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x=\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$ ?




⑥ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

⑤ SE $f(x)=1$ ENTÃO $f'(x)=0$ E

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}=\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\cancel{0g(x)}-\cancel{1}g'(x)}{g(x)^2}=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}g(x)^k=k\,g(x)^{k-1}g'(x)$$

GAMBIARRA

("VERSÃO X")

$s=\operatorname{sen} x$

$c=\cos x$

$t=\tan x=\frac{s}{c}$

$z=\sec x=\frac{1}{c}$

⑦ $\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{d}{dx}\frac{s}{c}=\frac{s'c-sc'}{c^2}=\frac{cc-s(-s)}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{1}{c}=z^2$

⑧ $\frac{d}{dx}\sec x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}=\frac{d}{dx}\frac{1}{c}=-\frac{c'}{c^2}=-\frac{(-s)}{c^2}=\frac{s}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{s}{c}=zt$

⑨ $t^2=\left(\frac{s}{c}\right)^2=\frac{s^2}{c^2}$ $\quad$ $z^2=\left(\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{c^2}=\frac{s^2+c^2}{c^2}=\frac{s^2}{c^2}+\frac{c^2}{c^2}=t^2+1$ $\quad$ $\boxed{z^2=t^2+1}$

$\Rightarrow z=\sqrt{t^2+1}$

$\Rightarrow t=\sqrt{z^2-1}$

C2 /ABRIL/2018

VOLTANDO À FÓRMULA PRA DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA...
(OBS: $\frac{d}{dx}\ln x$ VAI SER MUITO IMPORTANTE AGORA, AS OUTRAS VÃO SER IMPORTANTES DEPOIS...)

SE $f(g(x)) = x$,

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\| $$

$$f'(g(x))g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \quad (\star)$$

EXERCÍCIOS:

① USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\exp x = \exp x$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\ln x$.

② USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$.

③ USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\cos x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arccos} x$.

④ ISTO É VERDADE EM $x=\pi$? $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$.

⑤ $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = ?$

⑥ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = ?$

⑦ $\frac{d}{dx}\tan x = ?$ (OBS: $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$)

⑧ $\frac{d}{dx}\sec x = ?$ (OBS: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$)

⑨ SABEMOS QUE $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. EXISTE UMA FÓRMULA PARECIDA QUE USA $(\tan x)^2$ E $(\sec x)^2$. QUAL É ESSA FÓRMULA?

⑩ USE QUE $\frac{d}{dx}\tan x = (\tan x)^2 + 1$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\arctan x$.

⑪ USE QUE $\frac{d}{dx}\sec x = (\sec x)\sqrt{(\sec x)^2 - 1}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x$.

⑫ $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = ?$

⑬ $\frac{d}{dx}\ln(-x) = ?$

④.5 USE $(\star)$ E $\frac{d}{dx}\cos x = -\sqrt{1-(\cos x)^2}$ PARA OBTER $\frac{d}{dx}\operatorname{arccos} x$.

⑫ 
$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \ln'(f(x))\,f'(x) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

⑬ 
$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

SEJA $h(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{QUANDO } x<0 \\ \ln x & \text{QUANDO } 0<x \end{cases}$

ENTÃO $h'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } x<0 \\ \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } 0<x \end{cases}$

E $h(x) = \ln|x|$ !!!

DAÍ $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ PARA TODO $x \neq 0$.

AULA QUE VEM:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x-2| + \ln|x+3|\right) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1(x+3) + (x-2)\cdot 1}{(x-2)(x+3)} = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$$