[illegible]

[illegible] GOOGLEM POR "EDUARDO OCHS" E EM QUALQUER SUBPÁGINA DO ANGG. LUA, ETC CLIQUEM E "GA" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO...

② IMPRIMAM UMA CÓPIA DO MATERIAL NA PAPELARIA AQUI DEFRONTE NA PROMOSAS TERÇA MALUCA!

AVISO: O CURSO COMPLEMENTA OS LIVROS (VEJAM A PÁGINA DO CURSO).

[illegible]

PRA GENTE AS OPERAÇÕES $=, <, \leq, >, \geq$, ETC, SÃO OPERAÇÕES QUE RETORNAM V OU F.

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot 3}_{6}+\underbrace{4\cdot 5}_{20}}_{26}$$

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot\underbrace{3+4}_{7}}_{14}\cdot 5}_{70}$$

$$\underbrace{1<3}_{V} \qquad \underbrace{4<3}_{F} \qquad \underbrace{3+V}_{\text{ERRO}}$$

a	a>2
0	F
1	F
2	F
3	V
4	V

GA 14/MAR/2018

Hoje: Retas!

(Página 10 do material)

Depois que vocês descobrirem os truques vocês vão ser capazes de fazer outros exercícios parecidos em segundos — mas tentem descobrir os truques vocês mesmos! :)

OBS: $\{0,1,2,3,4,5\}^2 = \{0,1,4,9,16,25\}$???

NÃO!!! DICA: isto está explicado no início da P.P!

Não sejam como as pessoas do semestre passado que até hoje têm certeza de que $\{0,1,2,3,4,5\}^2 = \{0,1,4,9,16,25\}$!

Obrigado! :)

GA 21/MAR/2018

VAMOS CONTINUAR OS EXERCÍCIOS DA AULA PASSADA...

DICA: O PRODUTO

$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$

VAI SERVIR PRA VÁRIAS COISAS DIFERENTES QUE VAMOS ENTENDER AOS POUCOS...

EXERCÍCIOS (PREPARAÇÃO PROS ÚLTIMOS EXERCÍCIOS DE RETAS DA FOLHA 13):

1) ENCONTRE SOLUÇÕES DE

$\overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 4$

PARA:

a) $x = 1$

b) $x = 10$

c) $y = 5$

2) ENCONTRE 5 SOLUÇÕES DIFERENTES PARA

$\overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(1,2)} = 0.$

CHAME-AS DE $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_4}, \vec{V_5}$.

DESENHE NO MESMO GRÁFICO OS VETORES $\overrightarrow{(1,2)}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_4}, \vec{V_5}$ APOIANDO TODOS NO PONTO $(0,0)$.

SEJAM:

$\vec{U_1} = \overrightarrow{(4,5)},$

$\vec{U_2} = \overrightarrow{(6,7)}$

$\vec{U_1} + \vec{U_2} = \overrightarrow{(10,12)}$

$(\vec{U_1})_1 = 4$

$(\vec{U_1})_2 = 5$

GA 26/março/2018

AVISO: EU NÃO TIVE TEMPO DE REESCREVER AS FOLHAS 17, 18 E 20 DO MATERIAL PRA EXERCÍCIOS... HOJE VAMOS TRABALHAR EM CIMA DA VERSÃO VELHA (ATUAL !!) DELAS, E EU VOU MODIFICAR O PDF DEPOIS...

A FOLHA 17 É SOBRE ALGUNS PROBLEMAS QUE EM CASOS SIMPLES A GENTE CONSEGUE RESOLVER NO OLHO, E EM CASOS COMPLICADOS A GENTE VAI TER QUE RESOLVER POR SISTEMAS.

NÃO ESQUEÇAM:

SEMPRE TESTEM AS SOLUÇÕES DE VOCÊS!!!

DEPOIS DA FOLHA 17 A GENTE VAI PULAR PRA 20.

DICAS:

① $\left((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}\right)\begin{bmatrix} O := (3,1) \\ \vec{u} := (2,1) \\ \vec{v} := (-1,1) \end{bmatrix} = ?$

② $\left((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}\right)\begin{bmatrix} a := 3 \\ b := 4 \end{bmatrix} = ?$

③ REPRESENTE GRAFICAMENTE

$(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$,
$(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$,
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$

NUM GRÁFICO SÓ E ESCREVA O NOME DE CADA PONTO — POR EXEMPLO, $(2,1)_\Sigma$ — DO LADO DELE.

SE ALGUÉM TIVER DÚVIDAS NA P.12 VENHA FALAR COMIGO URGENTE! !!

VOU MUDAR A ORDEM DAS FOLHAS NO MATERIAL PARA EXERCÍCIOS...

TÍTULO	PÁGINA HOJE	PÁGINA DEPOIS DA REORGANIZAÇÃO
INTERSEÇÕES DE RETAS PARAMETRIZADAS	17	14
SISTEMAS DE COORDENADAS	20	15
VISUALIZANDO $F(x,y)$	18	17

$$\boxed{\text{GA } 2/\text{abril}/2018}$$

NOTE QUE SE

$$O = (2,3),$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{(4,5)},$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{(6,7)},$$
$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

ENTÃO

$$(a,b)_\Sigma = (2,3) + a\overrightarrow{(4,5)} + b\overrightarrow{(6,7)}$$
$$= (2,3) + \overrightarrow{(4a,5a)} + \overrightarrow{(6b+7b)}$$
$$= (2+4a+6b,\ 3+5a+7b),$$

E SE

$$(a,b)_\Sigma = (x,y)$$

ENTÃO

$$(x,y) = (2+4a+6b,\ 3+5a+7b),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2+4a+6b, \\ y = 3+5a+7b \end{array}\right\} (\star\star\star)$$

ALGUNS DOS PROBLEMAS DAS PÁGINAS 17 E 18 PEDEM PRA VOCÊS OBTEREM EQUAÇÕES DA FORMA

$$a = \_ + \_x + \_y$$
$$b = \_ + \_x + \_y$$

A PARTIR DAS EQUASÕES $(\star\star\star)$.

GA /ABRIL/2018

HOJE VAMOS DAR UMA PAUSA NA MATÉRIA DE ~~VETORES~~ E COORDENADAS E VER COMO "ENTENDER" FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS...

SLOGAN:
"WHEN IN DOUBT USE BRUTE FORCE"
(QUANDO VOCÊ ESTIVER EM DÚVIDA USE FORÇA BRUTA")

ESSE SLOGAN É DE UM DOS PAIS DA TEORIA DA COMPUTAÇÃO - O QUE ELE QUIS DIZER É:
QUANDO VOCÊ NÃO SOUBER RESOLVER UMA EQUAÇÃO CALCULE MILHARES DE VALORES.

AVISO: ATÉ AGORA A GENTE SÓ VIU RETAS MAS A 2ª PARTE DO CURSO VAI INCLUIR FIGURAS MAIS COMPLICADAS COMO ELIPSES, PARÁBOLAS, HIPÉRBOLES...

GA 11/ABRIL/2018

HOJE: VÁRIOS ASSUNTOS, ~~...~~ MAS O MAIS IMPORTANTE É DEMONSTRAÇÕES.

SE VOCÊS APRENDEREM A FAZER DEMONSTRAÇÕES VOCÊS VÃO APRENDER A FAZER CONTAS COM PONTOS, VETORES, ETC, RÁPIDO E BEM. !!!!!!.

HOJE: COMECEM PELA P.23.

A PARTE SOBRE DEMONSTRAÇÕES COMEÇA NA P.24.

DICA: TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS DAS FOLHAS 24 A 27 EM CASA!

TRADICIONALMENTE EM MATÉRIAS DE FACULDADE A GENTE EXPÕE ESSE CONTEÚDO EM 15 MINUTOS E DIZ "ISSO VOCÊS DEVERIAM TER APRENDIDO NO ENSINO MÉDIO — VIREM-SE" E OS ALUNOS OU GASTAM MILHARES DE HORAS APRENDENDO ISSO EM CASA SOZINHOS OU SE FERRAM.

GA 15/[illegible]/20[illegible]

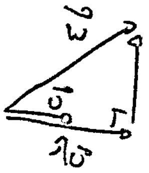
~~[illegible]~~ Demonstrações!

Façam os exercícios das folhas 24 a 27 e eu vou tirar as dúvidas de vocês! :)

O objetivo das folhas 24 a 27 é vocês aprenderem a fazer contas com pontos e vetores do "jeito curto"... Quem tiver curiosidade sobre o que é o "jeito curto" pode olhar os problemas da p.28 (que é nova e eu não imprimi), e a gente vai aprender a lidar com coisas como isso aqui:

Se $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$

então $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.



As dicas da p.26 são **muito** importantes!

Vejam o exemplo no meio da p.25 – ele é um exemplo de uma demonstração que um leitor burro entende e aceita.

OBS: o exercício 5 da p.25 é muito importante. Tentem fazê-lo!

Hoje:
Mais sobre demonstrações!
Discussão das dúvidas das páginas 27 e 28!
Exemplos!

P.2, exercício 5!
V/F/Justifique...

Queremos ver se esta proposição é sempre verdadeira:

$$(AM)\begin{bmatrix} A:=\overrightarrow{(a,b)}\\ B:=\overrightarrow{(c,d)}\\ C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{bmatrix}$$

Repare que esta proposição é

$$((A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C))\begin{bmatrix} A:=\overrightarrow{(a,b)}\\ B:=\overrightarrow{(c,d)}\\ C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{bmatrix},$$

que é:

$$((\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)})\cdot\overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{(a,b)}\cdot(\overrightarrow{(c,d)}\cdot\overrightarrow{(e,f)}) \qquad (\star)$$

Calculando o lado esquerdo de $(\star)$, temos:

$$((\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)})\cdot\overrightarrow{(e,f)} = (ac+bd)\cdot\overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{((ac+bd)e,\ (ac+bd)f)},$$

que dá um vetor.

E calculando o lado direito de $(\star)$, temos:

$$\overrightarrow{(a,b)}\cdot(\overrightarrow{(c,d)}\cdot\overrightarrow{(e,f)}) = \overrightarrow{(a,b)}\cdot\underbrace{(ce+df)}_{\text{número!}} = \text{erro}$$

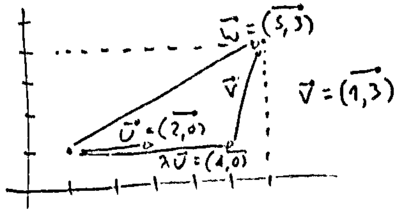
Portanto a igualdade $(\star)$ é falsa — o lado esquerdo dela dá um vetor e o lado direito dá erro.

"Pr"

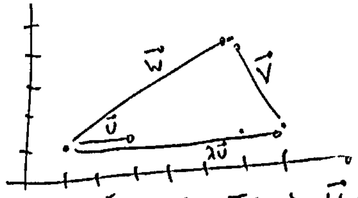
Digamos que $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(5,3)}$, e $\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$.

Figuras:

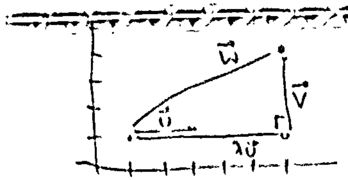
Se $\lambda=2$,



Se $\lambda=3$,



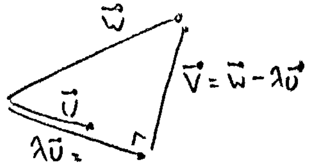
Se além disso temos $\vec{u}\perp\vec{v}$ (e portanto $\lambda\vec{u}\perp\vec{v}$) então neste caso teremos $\lambda=2.5$...



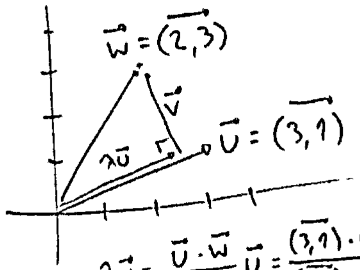
Vamos agora pra um caso mais geral. Digamos que $\vec{u},\vec{w}$ são vetores, que $\lambda\in\mathbb{R}$, e que $\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ e que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Então:
$\vec{v}=\vec{w}-\lambda\vec{u}$,
$\vec{u}\perp\vec{w}-\lambda\vec{u}$,
$\vec{u}\cdot(\vec{w}-\lambda\vec{u})=0$,
$\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{u}\cdot\lambda\vec{u}=0$,
$\vec{u}\cdot\vec{w}-\lambda(\vec{u}\cdot\vec{u})=0$
$\vec{u}\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{u})$
$\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\lambda$.

Figura (geral):



$\lambda\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = Pr_{\vec{u}}\vec{w}$



$$\lambda\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{\overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}}{\overrightarrow{(3,1)}\cdot\overrightarrow{(3,1)}}\cdot\overrightarrow{(3,1)} = \frac{9}{10}\overrightarrow{(3,1)} = \overrightarrow{(2.7,\ 0.9)}$$

"

$Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

$$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\cancel{\vec{u}}\cdot\vec{w}}{\cancel{\vec{u}}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\cancel{\vec{u}}}\cdot\cancel{\vec{u}} = \vec{w} \quad !!$$

$$Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \overset{\text{não!}}{=} \frac{(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \frac{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}}{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\cdot\vec{w} = \vec{w} \quad !!$$

GA25/ABRIL/2018

SUGESTÃO:

- LEIAM A FOLHA COM A DEMONSTRAÇÃO COMENTADA
- FAÇAM UM POUCO DOS EXERCÍCIOS DE DEMONSTRAÇÃO
- COMECEM A PARTE DE PROJEÇÕES

DICA IMPORTANTÍSSIMA

A VERSÃO NOVA DA P.26 FALA SOBRE USAR AS PROPRIEDADES "EM FORMA CURTA" DAS OPERAÇÕES SOBRE PONTOS E VETORES, QUE VOCÊ DEVE TER DEMONSTRADO NOS EXERCÍCIOS DA P.27...

FAÇA OS EXERCÍCIOS DA P.27 E APRENDA A USAR ESSAS "PROPRIEDADES EM FORMA CURTA", SEM "ABRIR OS VETORES"!

TEM ALGUMAS OPERAÇÕES - COMO MÓDULO E RAIZ QUADRADA - CUJAS PROPRIEDADES A GENTE NÃO VAI DISCUTIR EM DETALHES... A GENTE VAI FINGIR QUE ISSO É MATÉRIA DE CÁLCULO 1, !! E VOCÊ VAI TER QUE DESCOBRIR QUE REGRAS VALEM E USÁ-LAS DE ACORDO COM AS DICAS DA P.26.

ALGUMAS PROPRIEDADES DE RAÍZES QUADRADAS E MÓDULOS SÓ VALEM SE OS ARGUMENTOS SÃO MAIORES OU IGUAIS A ZERO. EXEMPLO:

$$-3 \neq \sqrt{(-3)^2}$$

$$5 = \sqrt{5^2} \qquad \text{(PORQUE } 5 \geq 0\text{)}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \qquad \text{(PORQUÊ? !!)}$$

$$\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

GA 2/maio/2018

Uma combinação linear de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é uma soma
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v},$$
onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Por exemplo,
$$3\overrightarrow{(2,0)} - 4\overrightarrow{(1,1)}$$
é uma combinação linear de $\overrightarrow{(2,0)}$ e $\overrightarrow{(1,1)}$.

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

SUGESTÃO

Parem tudo e façam os exercícios de projeções!

DATAS DAS PROVAS

	2ª	4ª
MAIO:	28	30
JUNHO:	4	6
	11	13
	~~18~~	~~20~~
	~~25~~	~~27~~
JULHO:	2	4
	9	11

← VOU ESTAR NUM CONGRESSO

SUGESTÃO:

P1: 30/MAIO

P2: ~~25/JUNHO~~ (NÃO DÁ) 2/JULHO

VR: 4/JULHO

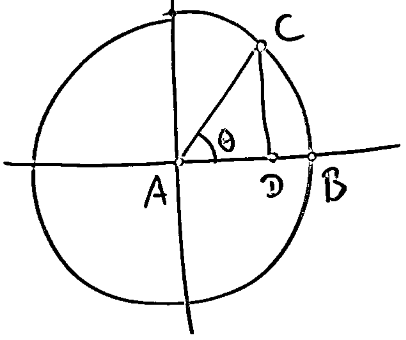
VS: 9/JULHO

GA 7/maio/2018

HOJE: PROJEÇÕES (TIRAR DÚVIDAS), INTRODUÇÃO A COSSENOS (QUE VÃO SER USADOS NUMA FÓRMULA SOBRE PROJEÇÃO E NA "REGRA DO COSSENO" DO PRODUTO INTERNO)

NA AULA QUE VEM VAMOS VER DUAS FÓRMULAS QUE SÓ FAZEM SENTIDO SE SOUBERMOS VISUALIZAR PROJEÇÕES MUITO BEM...

1ª FÓRMULA, CASO FÁCIL:



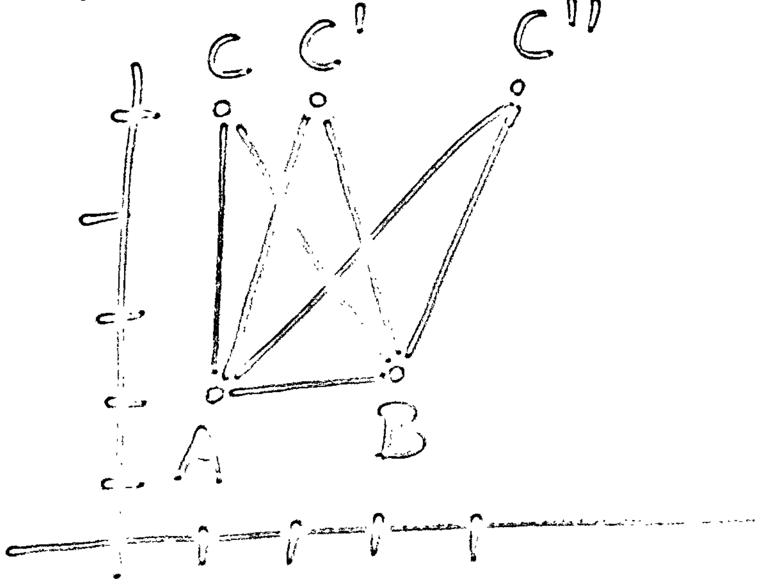
$A=(0,0)$
$B=(1,0)$
CÍRCULO: RAIO 1
$C=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

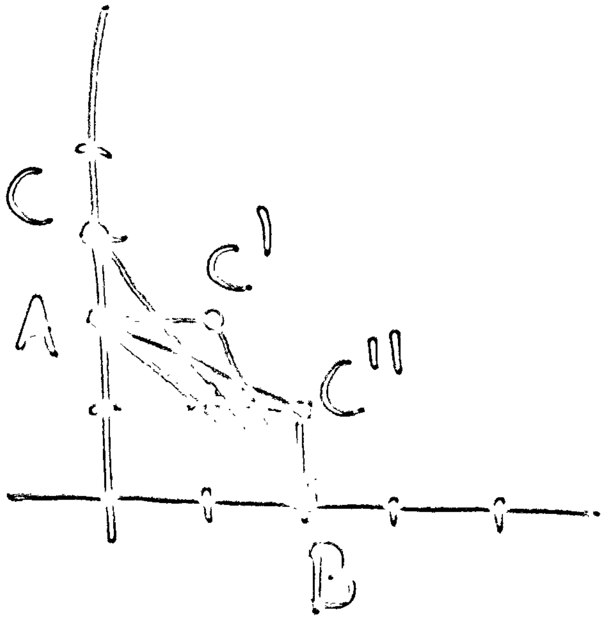
$$\frac{\|Pr_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \cos\theta$$

GA 9/MAIO/2018

ÁREAS E DETERMINANTES
EM $\mathbb{R}^2$ (P. 34)

FIGURAS:

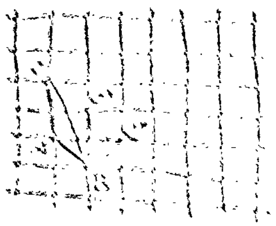


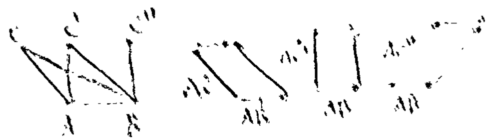


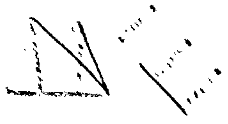
|GA [illegible]/2018|

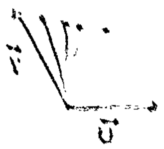
Hoje:
Áreas e determinantes
Até 15:15; depois
Pontos mais próximos
e pontos simétricos
(com [illegible] mais [illegible]
e com [illegible] os exercícios
no [illegible])

Deslizamentos









área$((\overline{3,1}),(\overline{1,4}))$ =
det$((\overline{3,1}),(\overline{1,4}))$ =
$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 1\cdot 1 = 11$

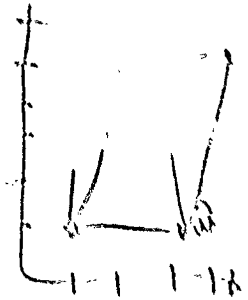
Pontos mais próximos
e pontos simétricos

Exercícios

1) Sejam $A=(2,3)$,
$\vec{u}=(\overline{1,0})$,
$r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$B=(4,0)$.
Seja B' o ponto de r
mais próximo de B
e $B''=B'+\overline{BB'}$.
Represente graficamente
$A, \vec{u}, r, B, B', B''$.

2) Sejam $A, \vec{u}, r$ como
no exercício anterior.
Seja $C=(5,1)$.
Seja C' o ponto de r
mais próximo de C e
$C''=C'+\overline{CC'}$.
Represente graficamente
C, C', C'' no gráfico do
exercício anterior.

3) Vamos usar a mesma
convenção dos exercícios
anteriores para as letras
$D, E, \ldots$ — D' é o ponto de
r mais próximo de D,
$D''=D'+\overline{DD'}$, etc.
Sejam $D=(4,2)$ e $E=(3,3)$.
Represente graficamente
D, D', D'', E, E', E'' no mesmo
gráfico dos exercícios 1 e 2.



4) Sejam $A=(1,1)$, $\vec{u}=(\overline{0,1})$,
$r=\{A+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$B=(1,0)$, $C=(2,2)$, $D=(4,3)$, $E=(5,4)$.
Represente graficamente num
gráfico só (separado do anterior!)
$A, \vec{u}, r, B, B', B''$,
C, C', C'',
D, D', D'',
E, E', E''.

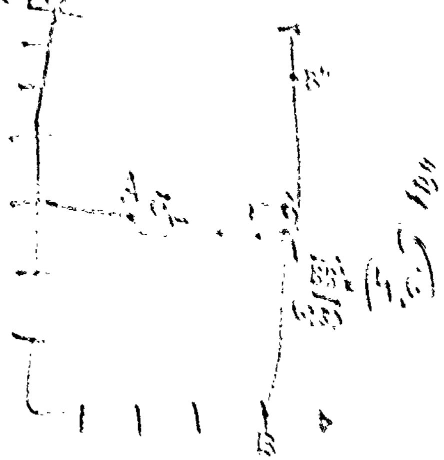
5) Idem, mas agora $A=(0,4)$,
$\vec{u}=(\overline{1,-1})$, $B=(1,4)$, $C=(2,4)$,
$D=(2,1)$, $E=(4,1)$.

$r = (1,3) + t(\overline{1,0})$

$r \ni (2,3)$

$r \ni (3,3)$

$B'=($



$\boxed{\text{GA 1/maio/2018}}$

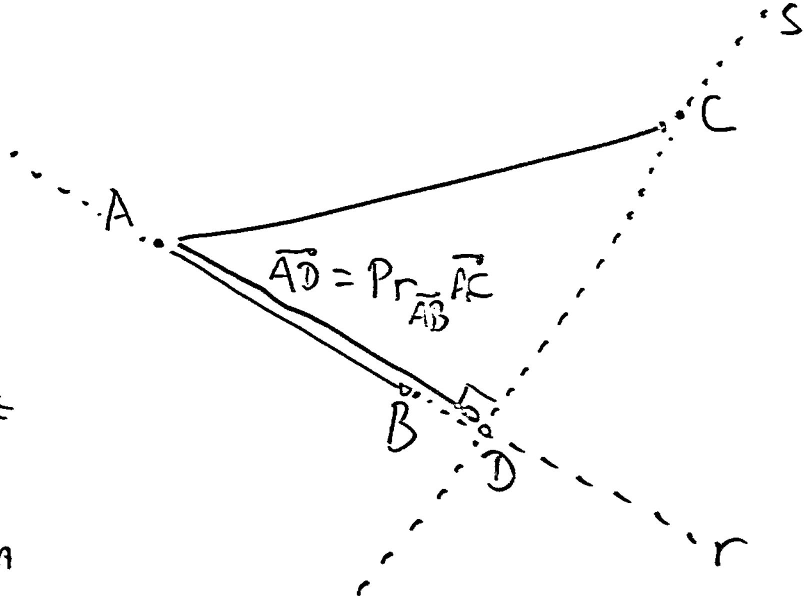
HOJE: p. 36!

PONTO DE r MAIS PRÓXIMO A UM PONTO B DADO!

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA!

EXERCÍCIOS SOBRE COEFICIENTES!

$Pr_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$



TRUQUE NOVO:

SEJA r A RETA QUE PASSA POR A E B,

SEJA s UMA RETA ORTOGONAL A r QUE PASSA POR C.

SEJA D ∈ r ∩ s.

ENTÃO $Pr_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

$\boxed{\text{GA: 29/MAIO/2018}}$

VOCÊS CONSEGUIRAM FAZER ~~OS~~ "EXERCÍCIOS SOBRE COEFICIENTES" DO FIM DA P.36?

ELES TÊM ALGUMAS IDÉIAS <u>BEM</u> IMPORTANTES... FAÇAM!

HOJE: FOLHAS 37 E 38.

DICA PRA INTERSEÇÃO DE CÍRCULO E RETA:

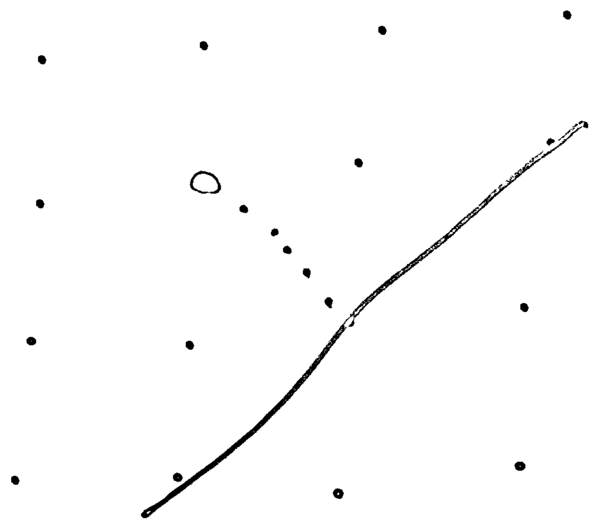
COMECE COM ESTES EXERCÍCIOS AQUI, EM QUE AS CONTAS VÃO SER BEM SIMPLES:

8) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25\}$,
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$,

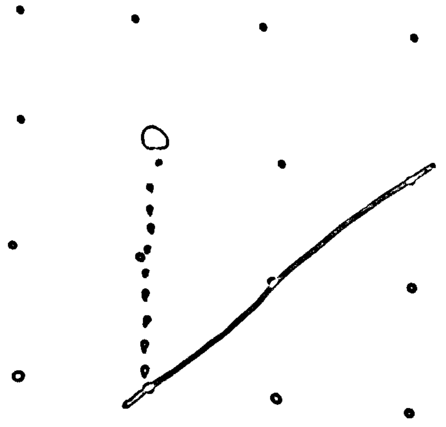
9) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25\}$,
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - 3x\}$.

$\boxed{\text{GA 4/jun/2018}}$

Hoje: última aula com matéria nova pra P1!



A P1 foi transferida pra segunda 11/junho, mas na quarta (6/junho) a gente vai começar a ver a matéria da P2!



$\boxed{\text{GA 4/JUN/2017}}$

(AULA DE DÚVIDAS)

P1 DE 2017.2:

(1a) PROVE QUE

SE $\vec{v} \perp \vec{w}$ ENTÃO

$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|w\|^2$

$\sqrt{(\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})}^{\,2} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}^{\,2} + \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}^{\,2}$

$\vec{v}\vec{v} + \cancel{\vec{v}\vec{w}}^{0} + \cancel{\vec{w}\vec{v}}^{0} + \vec{w}\vec{w}$ $\quad \vec{v}\vec{v} + \vec{w}\vec{w}$

$\vec{v}\vec{v} + \vec{w}\vec{w}$ ✓

(1c) SE $k<0$ ENTÃO

$\underbrace{\cos(\text{ang}(k\vec{v},\vec{w}))}_{\text{I}} = -\underbrace{\cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w}))}_{\text{II}}$. (??)

DICA: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v}))\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

$\cos(\text{ang}(\vec{u},\vec{v})) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ (☆)

$(☆)\begin{bmatrix}\vec{u} := (\vec{a,b}) \\ \vec{v} := (\vec{c,d})\end{bmatrix} = \left(\cos(\text{ang}((\vec{a,b}),(\vec{c,d}))) = \dfrac{(\vec{a,b})\cdot(\vec{c,d})}{\|(\vec{a,b})\cdot(\vec{c,d})\|}\right)$

$(☆)\begin{bmatrix}\vec{u} := k\vec{v} \\ \vec{v} := \vec{w}\end{bmatrix} = \left(\cos(\text{ang}(k\vec{v},\vec{w})) = \dfrac{k\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|k\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$

$(☆)\begin{bmatrix}\vec{u} := \vec{v} \\ \vec{v} := \vec{w}\end{bmatrix} = \left(\cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w})) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right)$

$-\cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w})) \overset{(ok)}{=} -\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$

$$\begin{aligned}\cos(\text{ang}(k\vec{v},\vec{w})) &\overset{(ok)}{=} \frac{k\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|k\vec{v}\|\cdot\vec{w}} \\ &\overset{(ok)}{=} \frac{k\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})}{|k|\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} \\ &\overset{(ok)}{=} \frac{k(\vec{v}\cdot\vec{w})}{-k\,\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \\ &\overset{ok}{=} \frac{k}{-k}\cdot\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \\ &\overset{ok}{=} -\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \\ &\overset{ok}{=} -\cos(\text{ang}(\vec{v},\vec{w}))\end{aligned}$$

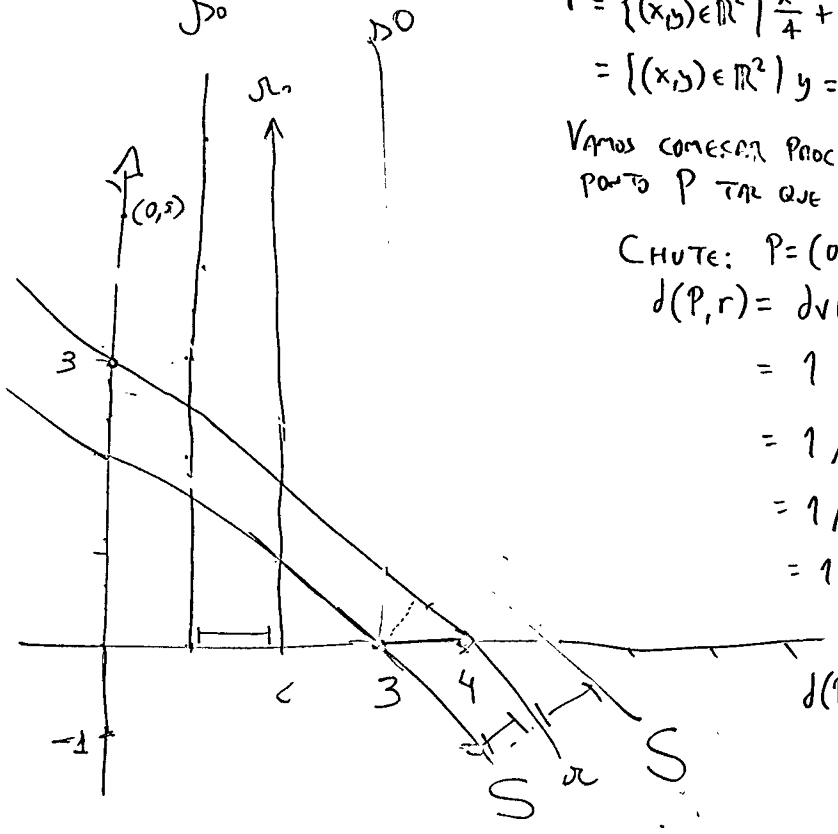
SE $k<0$

ENTÃO $|k| = -k$

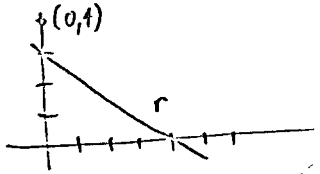
$\boxed{\text{GA } 4/\text{JUN}/2017}$

(AULA DE DÚVIDAS)

P1 DE 2017.2:



$$r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 3 - \frac{3}{4}x\right\}$$



VAMOS COMEÇAR PROCURANDO UM PONTO P TAL QUE $d(P,r)=1$.

CHUTE: $P=(0,4)$.

$$d(P,r) = dv(P,r)/\sqrt{1+m^2}$$
$$= 1/\sqrt{1+\left(-\tfrac{3}{4}\right)^2}$$
$$= 1/\sqrt{1+\tfrac{9}{16}}$$
$$= 1/\sqrt{\tfrac{25}{16}}$$
$$= 1/\tfrac{5}{4}$$
$$= \tfrac{4}{5}$$
$$d(P,r) = \tfrac{4}{5} \neq 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$$

CHUTE $P=(0,3+h)$

$$d(P,r) = dv(P,r)/\tfrac{5}{4}$$
$$= |h|/\tfrac{5}{4}$$

CHUTE: $P=(0,3+\tfrac{5}{4})$

$$d(P,r) = dv(P,r)/\tfrac{5}{4}$$
$$= \tfrac{5}{4}/\tfrac{5}{4}$$
$$= 1$$

SEJA r_1 UMA RETA PARALELA A r QUE PASSA PELO PONTO $(0,3+\tfrac{5}{4})$. ENTÃO A EQUAÇÃO DE r_1 É ... .

$$\boxed{d(P,r) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mP_x + b - P_y|}$$

$$1 = \frac{1}{\frac{5}{4}} \left|-\tfrac{3}{4}\cdot P_x + 3 - P_y\right|$$

$$-\tfrac{3}{4}\cdot P_x + 3 - P_y = \tfrac{5}{4}$$

$$P_y = -\tfrac{3}{4}P_x + 3 - \tfrac{5}{4}$$

$$P_y = -\tfrac{3}{4}P_x + \tfrac{7}{4}$$

$$\left(0, \tfrac{7}{4}\right) = (0, 1{,}75)$$

GA /JUN/2018

Hoje: Cônicas!

Grande truque: Se a gente sabe coordenadas e a gente sabe desenhar essas figuras aqui a gente sabe cônicas:

$$E_C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$$P_C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$$

$$H_C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$$

⇧ Essa são a "elipse canônica", a "parábola canônica" e a "hipérbole canônica".

...Aí a gente vai usar coordenadas (u,v) para definir "elipses tortas", "parábolas tortas" e "hipérboles tortas":

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$$

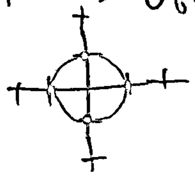
$$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid v=u^2\}$$

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=1\}$$

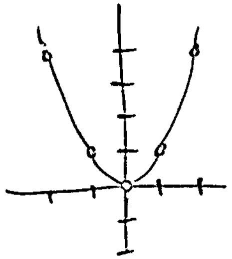
$$H_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid uv=k\}$$

Ponto óbvios

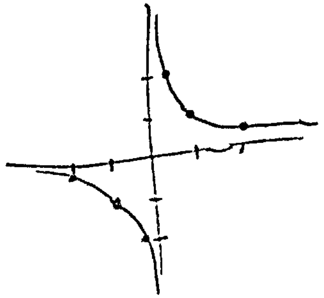
Em E_C (círculo) os pontos óbvios são:



Em P_C os pontos óbvios são estes:



Em H_C os pontos óbvios são:

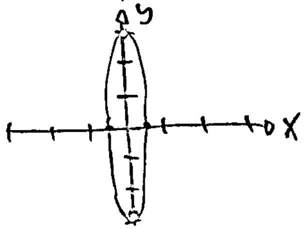


Exemplos:

$u=2x$, $v=\frac{y}{3}$

Em E os pontos óbvios vão ser:

u	v	x	y
-1	0	$-\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	3
0	-1	0	-3



Como é que isso vira uma equação de cônica?

Equação disso daí:

$$\underbrace{u}_{2x}{}^2+\underbrace{v}_{y/3}{}^2=1$$

$$(2x)^2+(y/3)^2=1$$

Lembrando:

Uma equação de cônica é uma equação da forma:

$$ax^2+bx+c+dxy+ey+fy^2=0$$

Exercício:

(1) $u=x+y$, $v=x-y$

Represente graficamente a "hipérbole torta"

$$\underbrace{x^2-y^2-1=0}$$

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{u}_{x+y}\underbrace{v}_{x-y}=1\} \overset{?}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overbrace{(x+y)(x-y)}^{x^2-y^2}=1\}$$

Pontos óbvios:

u	v	x	y
1	1		
2	$1/2$		
$\frac{1}{2}$	2		
-1	-1		
-2	$-\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$	-2		

Hoje:

- Decidir datas da P2, VR, VS (plano A, plano B, etc)
- Gabarito da P1
- Começar $\mathbb{R}^3$
- Coisas pra vocês fazerem nas próximas semanas
- Uma fofoca acadêmica (5 mins)

$\mathbb{R}^3$ (plano A)

Hoje: áreas, volumes e "×"

Estudem sozinhos: pontos, retas e planos em $\mathbb{R}^3$.

(1,2,3)
(1,3,2)
(2,1,3)
(2,3,1)
(3,1,2)
(3,2,1)

Lembrem que em $\mathbb{R}^2$ temos a operação "·" (entre vetores) que parecia muito abstrata no início mas acabou tendo várias utilidades...

Em $\mathbb{R}^3$ temos o "×" – um produto de dois vetores que retorna outro vetor!

Definição: p.6.

Intuição: $\vec{u}\times\vec{v}$ retorna um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e de comprimento Área$(\vec{u},\vec{v})$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i} \\ +(u_3v_1-u_1v_3)\,\vec{j} \\ +(u_1v_2-u_2v_1)\,\vec{k} \end{array}$$

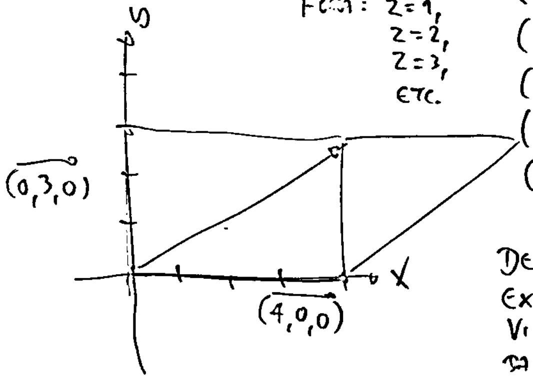
$$= (\quad , \quad , \quad)$$

Visualização

Obs: aqui não é GD

e vocês não vão precisar desenhar nada em 3D na prova.

Quadro: $z=0$
Fora: $z=1$, $z=2$, $z=3$, etc.

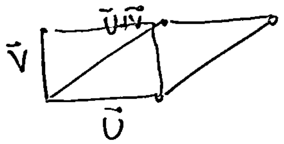


Exercício: Descubra onde estão os seguintes pontos de $\mathbb{R}^3$ e aponte eles.

(2,1,0)
(2,1,1)
(2,1,2)
(3,1,2)
(3,2,2)

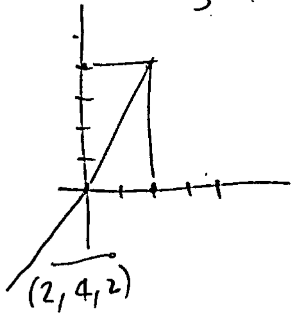
Depois: façam os exercícios de visualizar retas da p.2.

$$\text{Área}((4,0,0),(3,2,0)) = \text{Área}((4,0,0),(0,2,0))$$

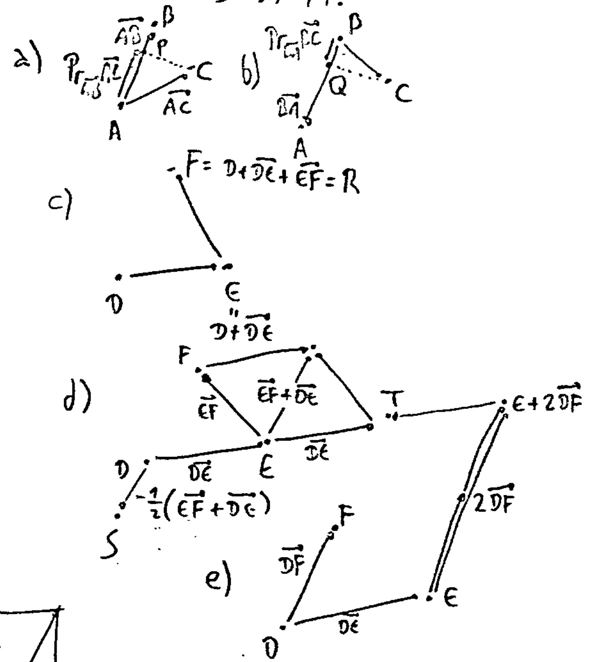


$\vec{u}\perp\vec{v}$

$$\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}+\vec{u}) = \text{Área}(\vec{u},\vec{v})$$



Questão 3 da P1:



... TEM UMA COISA
IMPORTANTE QUE
A GENTE SÓ VIU
MUITO POR ALTO:
VETORES NORMAIS.

SE $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$
E $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$
ENTÃO $\overrightarrow{(a,b)}$ É UM VETOR NORMAL
À RETA r, E $\overrightarrow{(a,b,c)}$ É UM
VETOR NORMAL AO PLANO π.
TODO VETOR PARALELO A r É
ORTOGONAL A $\overrightarrow{(a,b)}$.
TODO VETOR PARALELO A π É
ORTOGONAL A $\overrightarrow{(a,b,c)}$.

EXERCÍCIO:
DIGAMOS QUE $\vec{u} = \overrightarrow{(1,2,3)}$
E $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1,0)}$.
DÊ A EQUAÇÃO DE UM
PLANO $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$
QUE PASSA PELO PONTO $(2,3,4)$
E É PARALELO A $\vec{u}$ E $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 0i + 6j + 1k - 4k - 3i - 0j$$

$$-3i + 6j - 3k$$

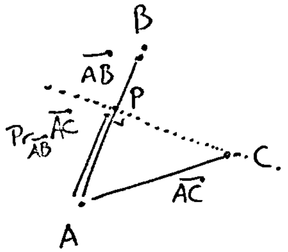
$$-3x + 6y - 3z - d = 0$$

$$-3(2) + 6(3) - 3(4) - d = 0$$

$$-6 + 18 - 12 = d$$

$$d = 0$$

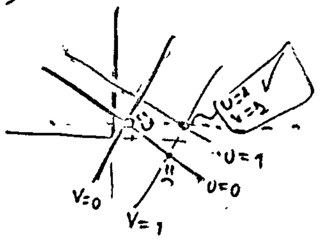
$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 6y - 3z = 0\}$$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 = v^2\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid v(v-1) = 0\}$

HIP

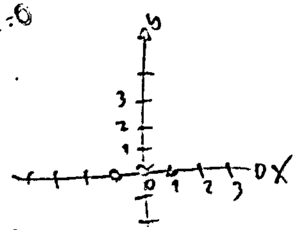


$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(x-1) = 0\}$

$x^2 - x = 0$

$y = x^2$

3.8



$\boxed{v = u^2}$

$\{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid x(x-1) = 0\}$ é zero