UFF – PURO – RFM **Matemática Discreta**
Prof. Fernando Náufel **P1 – 16/01/2013**

Gabarito

1. **(1,0 ponto)** A soma de 3 naturais consecutivos é divisível por 3. Formalize e prove este enunciado.

Resposta:

$$\forall n.\mathsf{Div}(n + (n+1) + (n+2), 3)$$

As seguintes igualdades servem como prova:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= 3n + 3 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

---

2. **(2,0 pontos)** O quadrado de um natural ímpar sempre deixa resto 1 na divisão por 8. Formalize e prove este enunciado. Dica: divida a prova em 2 casos.

Resposta:

$$\forall n \exists k.[(2n+1)^2 = 8k + 1]$$

1		
2	$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$	Aritm.
3	Caso 1: n par	
4	$n = 2j$	Def. Par, 3
5	$(2n+1)^2 = (2(2j)+1)^2$	Subst., 2, 4
6	$(2n+1)^2 = 16j^2 + 16j + 1$	Aritm., 5
7	$(2n+1)^2 = 8(2j^2 + 2j) + 1$	Aritm., 6
8	$\exists k.[(2n+1)^2 = 8k+1]$	Exist., 7
9	Caso 2: n ímpar	
10	$n = 2j + 1$	Def. Ímpar, 9
11	$(2n+1)^2 = (2(2j+1)+1)^2$	Subst., 2, 10
12	$(2n+1)^2 = 16j^2 + 24j + 9$	Aritm., 11
13	$(2n+1)^2 = 8(2j^2 + 3j + 1) + 1$	Aritm., 12
14	$\exists k.[(2n+1)^2 = 8k+1]$	Exist., 13
15	$\exists k.[(2n+1)^2 = 8k+1]$	Casos, 3–8, 9–14

3. **(1,0 ponto)** Considere o mapeamento que associa cada pessoa à sua respectiva mãe.

   (a) Se o universo for o conjunto de todas as pessoas atualmente vivas, este mapeamento é uma operação?

   Resposta: Não, pois existem pessoas vivas cujas mães não estão atualmente vivas.

   Para que o mapeamento seja uma operação, todo elemento do universo precisa ser mapeado para algum elemento do universo.

(b) Se o universo for o conjunto de todas as pessoas que já viveram ou que estão atualmente vivas, este mapeamento é uma operação?

Resposta: Ainda não. A menos que você consiga dizer quem foi a mãe da primeira pessoa a viver, ou que você consiga mostrar que nunca existiu uma primeira pessoa a viver (i.e., para toda pessoa que já viveu, existe uma outra pessoa que viveu antes dela e que é a mãe dela).

---

4. **(2,0 pontos)**

(a) Prove que, para quaisquer conjuntos A e B,

$$\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$$

Resposta:

1	$x \in \wp(A) \cup \wp(B)$	
2	$x \in \wp(A) \vee x \in \wp(B)$	Def. $\cup$, 1
3	Caso 1: $x \in \wp(A)$	
4	$x \subseteq A$	Def. $\wp$, 3
5	$x \subseteq A \cup B$	Prop. $\cup$, 4
6	$x \in \wp(A \cup B)$	Def. $\wp$, 5
7	Caso 2: $x \in \wp(B)$	
8	$x \subseteq B$	Def. $\wp$, 7
9	$x \subseteq A \cup B$	Prop. $\cup$, 8
10	$x \in \wp(A \cup B)$	Def. $\wp$, 9
11	$x \in \wp(A \cup B)$	Casos, 2, 3–6, 7–10

(b) O enunciado acima é verdadeiro se "$\subseteq$" for substituído por "$=$"? Prove ou forneça um contra-exemplo.

Resposta: Não. Para $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, temos que

$$\wp(A) \cup \wp(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$$

mas que

$$\wp(A \cup B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

---

5. **(2,0 pontos)** Prove por indução que qualquer natural maior ou igual a 12 pode ser escrito como a soma de parcelas 4 e/ou 5. Dica: use indução forte.

Resposta:

Base:

$$\begin{aligned} 12 =& 4 + 4 + 4 \\ 13 =& 5 + 4 + 4 \\ 14 =& 5 + 5 + 4 \\ 15 =& 5 + 5 + 5 \end{aligned}$$

Passo:

Suponha que qualquer natural entre 12 e k (inclusive) pode ser escrito como a soma de parcelas 4 e/ou 5 (hipótese indutiva).
Vamos mostrar que $k+1$ também pode ser escrito como a soma de parcelas 4 e/ou 5:
$k + 1$ pode ser escrito como $k - 4 + 5$. Pela hipótese indutiva, $k - 4$ pode ser escrito como uma soma S de parcelas 4 e/ou 5. Logo, $k + 1$ pode ser escrito como $S + 5$, que também é uma soma de parcelas 4 e/ou 5.

Perceba que é importante tratar 12, 13, 14 e 15 no caso base, pois no passo indutivo precisamos da informação de que $k-4$ satisfaz o enunciado. Para k variando de 12 a 15 (inclusive), esta informação não está disponível ($k - 4$ variando de 8 a 11, inclusive).

---

6. **(2,0 pontos)** Resolva a relação de recorrência abaixo, usando o método de expandir, achar um padrão e verificar. Prove por indução que sua solução está correta.

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(n) = 2P(n-1) + n2^n \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Resposta:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2P(1) + 2 \cdot 2^2 \\ P(3) &= 2(2P(1) + 2 \cdot 2^2) + 3 \cdot 2^3 \\ P(4) &= 2(2(2P(1) + 2 \cdot 2^2) + 3 \cdot 2^3) + 4 \cdot 2^4 \\ &= 2^3 P(1) + 2^2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 2^1 \cdot 3 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 4 \cdot 2^4 \\ &= 2^3 P(1) + 2^4 \cdot 2 + 2^4 \cdot 3 + 2^4 \cdot 4 \\ &= 2^3 P(1) + 2^4 (2 + 3 + 4) \end{aligned}$$

Aparentemente, o padrão é

$$P(n) = 2^{n-1} P(1) + 2^n (2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$

que pode ser escrito como

$$P(n) = 2^n + 2^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)$$

ou, mais simplesmente, como

$$P(n) = 2^{n-1} n(n+1)$$

Vamos, agora, verificar nosso palpite, provando esta igualdade por indução.

Base: $n = 1$:

Pela definição de P, temos que $P(1) = 2$.

No lado direito, $2^0 \cdot 1 \cdot (2) = 2$.

Passo: Suponha que $P(k) = 2^{k-1} k(k+1)$ (H.I.).

Vamos mostrar que

$$P(k+1) = 2^{k+1-1}(k+1)(k+1+1)$$

i.e.,

$$P(k+1) = 2^k (k+1)(k+2)$$

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 2P(k) + (k+1)2^{k+1} && \text{(def. } P\text{)}\\
&= 2(2^{k-1}k(k+1)) + (k+1)2^{k+1} && \text{(H.I.)}\\
&= 2^k k(k+1) + 2^{k+1}(k+1)\\
&= 2^k(k(k+1) + 2(k+1))\\
&= 2^k(k^2 + k + 2k + 2)\\
&= 2^k(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

As respostas devem ser bem justificadas e expostas com clareza.
2 horas de prova, sem consulta.