C2 15/ago/2019

TURMA GRANDE

Hoje: introdução
- ao curso
- a equações diferenciais
- a integrais
- mudar o horário de terça

← Página: http://angg.twu.net/2019.2.html

ou: googlem por Eduardo Ochs, entre em qualquer subpágina do http://angg.twu.net/, clique em "C2" na barra de navegação.

Aviso: a gente vai usar derivadas à beça!

O curso tem duas partes (e alguns tópicos extras):

1. Integração
2. Equações diferenciais ("EDO"s)

	~~2a~~	~~3a~~	4a	5a	6a
7					PODE PÉSSIMO
9		:(			PODE
11			C2 OUTRA	C2	C2 OUTRA
13				C3	C3
14					
16					
18					

EDO: Equação Diferencial Ordinária –

O "ordinária" diferencia EDOs de EDPs – ~~Equações diferenciais~~ parciais, que são bem mais complicadas...

Lembre que em "equações de 2º grau" o "de 2º grau" indica qual é a operação "nova" que torna a equação mais difícil...

Equações diferenciais (EDOs):

$$f'(x) = 4x^3$$

Qual é, aliás, quais são os $f(x)$ que obedecem isso?

Primeiro método: chutar e testar.

Truque: usem uma tabela!

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x) = 4x^3$
x	1	F
e^x	e^x	F

Exercícios

a) $f'(x) = x^5$
b) $f'(x) = 3x$
c) $f'(x) = 2$
d) $f'(x) = 3x + 2$
e) $f'(x) = e^{4x}$
f) $f'(x) = \operatorname{sen} x$
g) $f'(x) = \operatorname{sen} 4x$

C2 15/AGO/2019

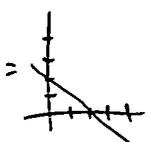
TURMA GRANDE

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- À EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- À INTEGRAIS
- MUDAR O HORÁRIO DE TERÇA

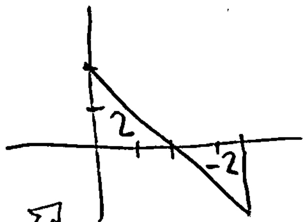
E QUANDO A $f(x)$ FICA NEGATIVA?...

A INTEGRAL MEDE A "ÁREA SOB A CURVA" E NÃO A "ÁREA ENTRE A CURVA E O EIXO HORIZONTAL"

EXEMPLO: SE $f(x) = 2-x =$

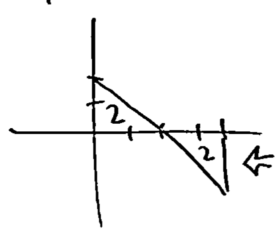


A ÁREA SOB ESSA CURVA ENTRE $x=0$ E $x=4$ É ZERO,



PORQUE A PARTE ABAIXO DO EIXO HORIZONTAL CONTA NEGATIVAMENTE.

A ÁREA ENTRE A CURVA $y=2-x$ E O EIXO HORIZONTAL ENTRE $x=0$ E $x=4$ É 4:



⇐ CONTA POSITIVAMENTE

"A ÁREA SOB A CURVA" (A INTEGRAL) TEM PROPRIEDADES MATEMÁTICAS BEM MELHORES... QUAIS?

EXERCÍCIO: CALCULE:

a) $\int_{x=1}^{x=4} 4-x \, dx$

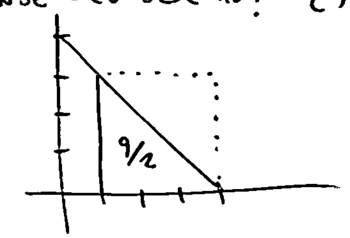
b) $\int_{x=1}^{x=4} 3-x \, dx$

c) $\int_{x=1}^{x=4} 2-x \, dx$

d) $\int_{x=1}^{x=4} 1-x \, dx$

e) $\int_{x=1}^{x=4} 0-x \, dx$

DICA: REPRESENTE GRAFICAMENTE CADA UMA DAS INTEGRAIS DO EXERCÍCIO E INDIQUE NO DESENHO A ÁREA DE CADA PEDAÇO. E VEJA SE O SEU VIZINHO ENTENDE SEU DESENHO!



VARIAÇÃO:

a') $\int_{x=1}^{x=4} 4+x \, dx =$ ÁREA( ) = ÁREA( ) + ( )

b') $\int_{x=1}^{x=4} 3+x \, dx =$ ÁREA( ) = $\underbrace{\text{ÁREA}(\ ) + (\ )}_{\int_{x=1}^{x=4} 4 \, dx + \int_{x=1}^{x=4} -1+x \, dx}$

c') $\int_{x=1}^{x=4} 2+x \, dx =$ ÁREA( )

d') $\int_{x=1}^{x=4} 1+x \, dx$

e') $\int_{x=1}^{x=4} 0+x \, dx$

$$\int_{x=1}^{x=4} 3+x \, dx = \int_{x=1}^{x=4} 4 \, dx + \int_{x=1}^{x=4} -1+x \, dx$$

DÁ PRA GENERALIZAR ISSO?

C2 15/AGO/2019

TURMA GRANDE

HOJE: INTRODUÇÃO

- AO CURSO
- A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- A INTEGRAIS
- MUDAR O HORÁRIO DE TERÇA

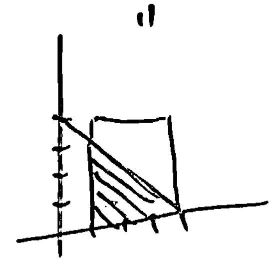
ISTO É VERDADE:

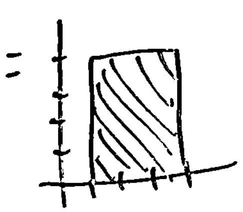
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

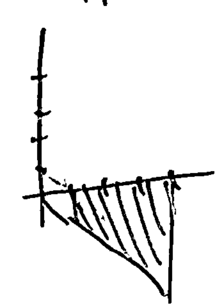
A GENTE VIU UM CASO EM QUE ISSO É FÁCIL DE VISUALIZAR...

NOS ITENS a, b, c, d, e, TEMOS:

$$\int_{x=1}^{x=4} 4-x\,dx = \int_{x=1}^{x=4} 4\,dx + \int_{x=1}^{x=4} -x\,dx$$







A "ÁREA SOB A CURVA" (A INTEGRAL) TEM PROPRIEDADES MATEMÁTICAS BEM MELHORES... QUAIS?

EXERCÍCIO: CALCULE:

a) $\int_{x=1}^{x=4} 4-x\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=4} 3-x\,dx$

c) $\int_{x=1}^{x=4} 2-x\,dx$

d) $\int_{x=1}^{x=4} 1-x\,dx$

e) $\int_{x=1}^{x=4} 0-x\,dx$

DICA:

~~O ...~~

GRAFI

CADA

DAS

DO E

E IN

DESE

ÁREA

CADA

E VE

SEU

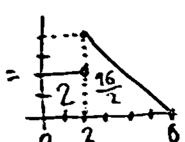
ENTE

C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

Na aula passada nós vimos:

- Que $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é a área sob a curva de $f(x)$ entre $x=a$ e $x=b$
- Como calcular integrais definidas — i.e., $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ — de funções cujos gráficos eram formados por segmentos de retas

EX ⟹ $f(x) =$



$\int_{x=0}^{x=6} f(x)\,dx = 10$

- Algumas propriedades:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

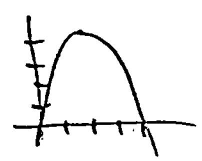
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx$$

Hoje nós vamos começar a ver como integrar (isto é, calcular áreas de) figuras mais complicadas...

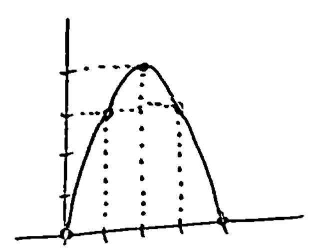
A definição "certa" é complicada — e envolve um limite complicado.

Minha função-exemplo preferida pra esta parte do curso é:

$$f(x) = 4-(x-2)^2$$

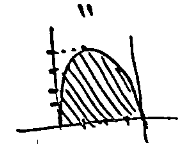


$f(2) = 4$
$f(1) = 3$
$f(3) = 3$
$f(0) = 0$
$f(4) = 0$

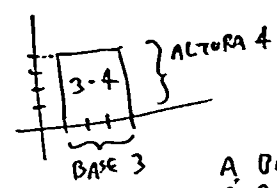


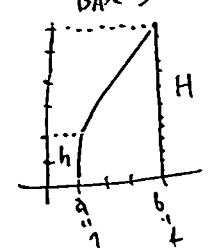
Vamos tentar conseguir aproximações pra $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$...

"



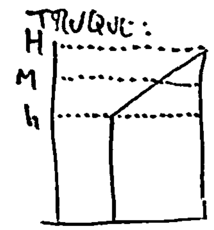
Lembrem que a gente sabe calcular áreas de retângulos e trapézios...

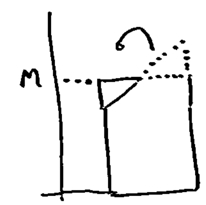




A base dele é o intervalo entre 1 e 4,
A altura menor dele é $h=2$
A altura maior é $H=7$.

Truque:

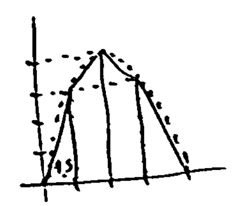




$M = \frac{h+H}{2}$ (média)

A área do trapézio com base $(b-a)$ e alturas h e H é $\frac{h+H}{2}\cdot(b-a)$

Vamos tentar calcular uma primeira aproximação pra $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$:



As nossas aproximações pra $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vão ser somas de retângulos ou somas de trapézios...

A gente precisa ser capaz de visualizar essas somas — isto é, a precisa ser capaz de interpretar coisas como

$$\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(a_i - a_{i-1})$$

como figuras.

Truque (gambiarra!)

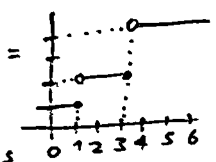
A gente vai interpretar expressões como

$\alpha(\beta-\gamma)$ — γ: extremidade esquerda da base; β: extremidade direita; α: altura

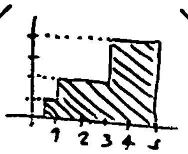
como retângulos...

C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

EXEMPLO:

$g(x) =$ 

$\int_{x=0.5}^{x=5} g(x)\,dx =$

ÁREA () =

$1\cdot(1-0.5)+2(3-1)+4(5-3) =$ ⇐ ESSA EXPRESSÃO TEM UMA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA CLARA

$1\cdot 0.5 \quad + 2\cdot 2 \quad + 4\cdot 2$ = MAS ESSAS NÃO!

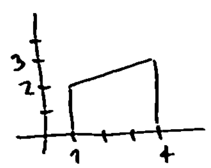
$0.5 \quad + 4 \quad + 8$ =

12.5

E PRA TRAPÉZIOS:

$\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$

EXTR. ESQ.
EXTR. DIR.
ALTURA DIREITA
ALTURA ESQUERDA



$= \frac{2+3}{2}(4-1)$

EXERCÍCIOS:

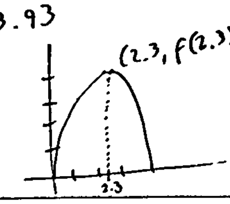
1) REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $2\cdot(4-1)$
b) $3\cdot(5-4)$
c) $2\cdot(4-1)+3\cdot(5-4)$
d) $\frac{5+2}{2}(4-1)+3\cdot(5-4)$

LEMBRE QUE:
$f(x) = 4-(x-2)^2$

TEM DOIS JEITOS DA GENTE DESENHAR O PONTO $(2.3, f(2.3))$...

JEITO BURRO:
$f(2.3) = 4-(2.3-2)^2$
$= 4-(0.3)^2$
$= 4-0.09$
$= 3.93$

JEITO RÁPIDO: 

2) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$f(a_1)\cdot(a_1-a_0)+f(a_2)\cdot(a_2-a_1)$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$
b) $a_0=0.5,\ a_1=1,\ a_2=2.5$

3) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$f(a_0)\cdot(a_1-a_0)+f(a_1)\cdot(a_2-a_1)$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$
b) $a_0=0.5,\ a_1=1,\ a_2=2.5$

4) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\sum_{i=1}^{N} f(a_i)\cdot(a_i-a_{i-1})$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $N=3,\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=2.5$
b) $N=4,\ a_0=0,\ a_1=0.5,\ a_2=1.0,\ a_3=1.5,\ a_4=2.0$

5) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\sum_{i=1}^{N} f(a_{i-1})\cdot(a_i-a_{i-1})$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) (IGUAL AO ITEM a DA 4)
b) (IGUAL AO ITEM b DA 4)

PRÓXIMA IDEIA:
PARTIÇÕES (DE INTERVALOS).

EXEMPLO: $P = \{0.5, 2, 2.5, 3\}$

UMA PARTIÇÃO P É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $\mathbb{R}$ COM PELO MENOS UM ELEMENTO.

A PARTIÇÃO P ACIMA — REPARE QUE ELA TEM 4 PONTOS — VAI SER INTERPRETADA COMO UMA DIVISÃO DO INTERVALO $[0.5, 3]$ EM 3 SUBINTERVALOS: $[0.5, 2]$, (1º), $[2, 2.5]$, (2º), $[2.5, 3]$ (3º)

4-1

C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

UM POUCO MAIS FORMALMENTE,
A PARTIÇÃO $P = \{0.5, 2, 2.5, 3\}$
É UM CONJUNTO DE 4 PONTOS
QUE VAI SER INTERPRETADO
COMO UM MODO DE DIVIDIR O
INTERVALO $I = [0.5, 3]$
EM 3 SUBINTERVALOS:

$$I_1 = [0.5, 2],$$
$$I_2 = [2, 2.5],$$
$$I_3 = [2.5, 3]...$$

NOTE QUE CADA SUBINTERVALO
TEM UM PONTO EM COMUM
COM O SEGUINTE.

⑥ EXERCÍCIO:
PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES
ABAIXO DIGA O "N" DELA -
QUE É O NÚMERO DE SUBINTERVALOS
DELA, QUE VAI SER O NÚMERO
DE PONTOS DELA MENOS 1 - E
DIGA QUEM SÃO I E $I_1, I_2, \ldots, I_N$.

ⓐ $P = \{2, 2.5, 4, 6\}$
$\Rightarrow N = 3,$
$I = [2, 6],$
$I_1 = [2, 2.5],$
$I_2 = [2.5, 4],$
$I_3 = [4, 6].$

ⓑ $P = \{1.5, 2, 2.5, 5, 6\}$

C2 23/AGO/2019
TURMA GRANDE

A AULA DE HOJE VAI SER SOBRE:

- O FINAL DA DEFINIÇÃO DE PARTIÇÕES
- UM EXERCÍCIO MUITO GRANDE - QUE VAI ENSINAR VOCÊS A VISUALIZAREM VÁRIOS DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO QUE VÃO APARECER NUMA MATÉRIA CHAMADA MÉTODOS-ALGUMA-COISA, E VÃO PREPARAR VOCÊS PRA ENTENDEREM O "MÉTODO DO INF" E O "MÉTODO DO SUP"...

AVISO: DAQUI A ALGUMAS AULAS - MAS NUMA QUINTA - VOCÊS VÃO FAZER UM MINI-TESTE SOBRE ISSO NOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS DA AULA.

PARTIÇÕES

EXEMPLO:

SE $P=\{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$

ENTÃO P TEM 4 PONTOS E 3 SUBINTERVALOS,

E P DIVIDE O INTERVALO $I=[0.5, 6]$

EM SUBINTERVALOS $I_1=[0.5, 1.5]$, $I_2=[1.5, 2.5]$, $I_3=[2.5, 6]$.

ALÉM DISSO ESSA P DEFINE OS VALORES DE $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$:

$[a,b]=I \Rightarrow a=0.5,\ b=6$

$[a_1,b_1]=I_1 \Rightarrow a_1=0.5,\ b_1=1.5,$

$[a_2,b_2]=I_2 \Rightarrow a_2=1.5,\ b_2=2.5,$

$[a_3,b_3]=I_3 \Rightarrow a_3=2.5,\ b_3=6$

A GENTE VAI ORGANIZAR ESSES VALORES NUMA TABELA.

SE $P=\{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$ ENTÃO $N=3$, $a=0.5$, $b=6$, E:

i	I_i	a_i	b_i
1	$[0.5, 1.5]$	0.5	1.5
2	$[1.5, 2.5]$	1.5	2.5
3	$[2.5, 6]$	2.5	6

REPARE QUE ASSIM QUE DIZEMOS "$P=\{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$" UM MONTE DE COISAS FICAM AUTOMATICAMENTE DEFINIDAS:

$N, a, b, I_1, \ldots, I_N, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$.

(1) EXERCÍCIO:
PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO DIGA QUEM SÃO O "N", O "a" E O "b" DELA E MONTE A TABELA.

(a) $P=\{2, 3, 4\}$

(b) $P=\{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

VOLTANDO AOS "MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO"...

CADA UM VAI TER UM NOME E UMA FÓRMULA (COMO SOMATÓRIO).

$$[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$$

$$[R] = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i)$$

$$[\min] = \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i-a_i)$$

$$[\max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i-a_i)$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i-a_i)$$

$$[TRAP] = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

(2) EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE $[L]$, $[R]$, $[\min]$, $[\max]$, $[M]$, $[TRAP]$ PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO:

(a) $P=\{2,3\}$

(b) $\{0,1,2,3,4\}$

(c) $\{0,2,4\}$

(d) $\{0,1,3,4\}$

(e) $\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

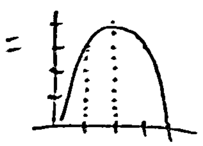
$$\underbrace{\max(\underbrace{f(\underbrace{a_1}_{2})}_{4}, \underbrace{f(\underbrace{b_1}_{3})}_{3})}_{4}$$

$\min(3,1)=1$

$\min(1,3)=1$

$\max(2,8)=8$

LEMBREM QUE

$f(x) =$ 

DIGAMOS QUE $P=\{2,3\}$

ELA TEM $N=1$ E "DIVIDE" $I=[2,3]$ EM UM SUBINTERVALO SÓ: $I_1=[2,3]$

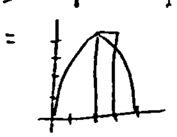
OBS: $a=2$, $b=3$; $a_1=2$, $b_1=3$

i	I_i	a_i	b_i
1	$[2,3]$	2	3

ENTÃO $[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$

$= f(a_1)(b_1-a_1)$

$= f(2)(3-2)$

$=$ 

C2 29/ago/2019
Turma grande

Hoje:

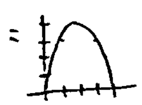
- As coisas que faltam pra gente entender direito como aproximar áreas por retângulos por cima e por baixo
- $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\underline{\int} f(x)\,dx$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Primeiros truques pra gente calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ sem precisar fazer um número infinito de operasões
- Exercícios do APEX Calculus

Na aula passada nós vimos que o método [MAX] nem sempre funciona pra encontrar uma "aproximasão por cima"...

Quando $f(x) = 4-(x-2)^2$ ⇐ nosso exemplo preferido

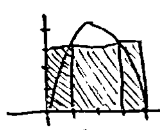
$= \cancel{4} - (x^2-4x+\cancel{4})$

$= -x^2+4x$

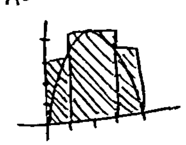
$=$ 

E $P=\{0,1,3,4\}$

A fórmula do [MAX] dá estes retângulos aqui:



ao invés disto:



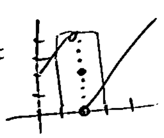
Por isto aqui

$$[\max] = \sum_{i=1}^{N} \underset{\Downarrow}{\max}(f(a_i), f(b_i))\,(b_i-a_i)$$

"não enxerga" os pontos em $(1,3)$...

O jeito de consertar isso tem uma interpretasão visual fácil, mas tecnicamente ele é complicado...

Operasões novas:
"inf" e "sup"
"supremo": generaliza a idéia de "máximo"
"ínfimo": generaliza a idéia de mínimo.

Seja $g(x) =$ 

$P=\{0,1,3,4\}$

Repare que não existe $x\in[1,3]$ com $g(x)=4$!

Uma aproximasão por retângulos por cima daria um retângulo de altura 4 no intervalo do meio...
e esse retângulo não tocaria o gráfico da $g(x)$!

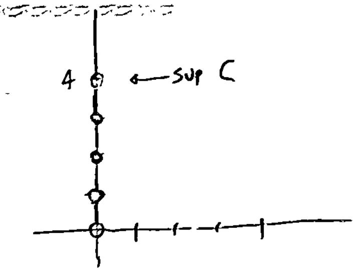
A altura desse retângulo seria uma espécie de máximo das alturas em $x\in[1,3]$...
O "conjunto das alturas" nesse intervalo é a imagem do intervalo...
$\{f(x) \mid x\in[1,3]\}$
que vai dar $(0,1]\cup\{2\}\cup[3,4)$
(ÉÉÉÉ! Confira em casa!)

Seja $C=(0,1]\cup\{2\}\cup[3,4)$

$$(C = f([1,3]) = \{f(x) \mid x\in[1,3]\})$$

$\sup(C) = 4$

Visualmente:



Formalmente (curiosidade!)

Se $A\subset\mathbb{R}$
(ou $A\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$)
o $\sup A$ é calculado em dois passos:
O conjunto dos "pontos à direita" de A é:
$D=\{x\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \mid \forall a\in A.\ a\le x\}$
e $\sup A$ é o menor elemento de D —
formalmente: $s=\sup A$ se e só se $s\in D$ e $\forall d\in D.\ s\le d$.

...Ou seja, a definisão formal é horrível — mas a gente só quer trabalhar com a interpretasão visual dela!

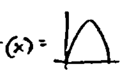
Métodos novos:

(Lembrem que os que a gente já viu se chamavam [L], [R], [MIN], [MAX], [M], [TRAP]):

$$[\inf] = \sum_{i=1}^{N} \inf(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})\,(b_i-a_i)$$

$$[\sup] = \sum_{i=1}^{N} \sup(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})\,(b_i-a_i)$$

Exercício

Usando a $f(x) =$ 
represente graficamente [SUP] e [INF] para:

(a) $P=\{1, 1.5, 3\}$
(b) $P=\{1, 1.5, 3, 4\}$.

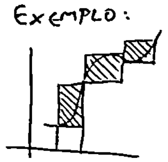
C2 29/Ago/2019
Turma Grande

Hoje:

- As coisas que faltam pra gente entender direito como aproximar áreas por retângulos por cima e por baixo
- $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\underline{\int} f(x)\,dx$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Primeiros truques pra gente calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ sem precisar fazer um número infinito de operações
- Exercícios do Apex Calculus

Repare que é bem fácil representar graficamente a diferença entre duas áreas se uma está sempre acima da outra...

Exemplo:



Continuação do exercício anterior

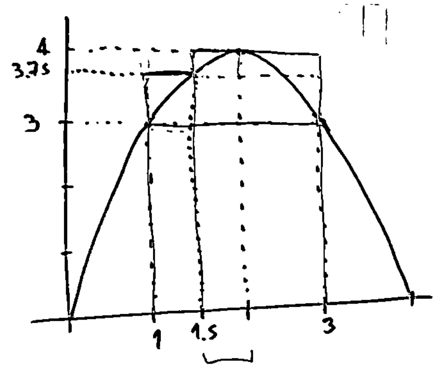
ⓒ Para $f(x) = x-2$ desenhe num gráfico só $f(x)$, [inf] e [sup] para $P = \{3,4,6\}$.

ⓓ Idem, mas para $P = \{3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6\}$.

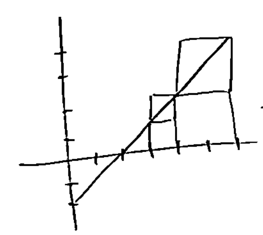
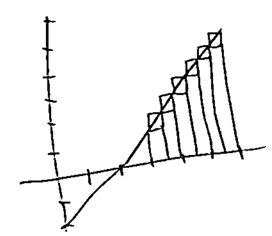
ⓔ Idem, mas para $P = \{0,1,2,3,4\}$

ⓐ $[\sup] = \sum_{i=1}^{N} (\sup(\{f(x) \mid x \in [a_i,b_i]\}))(b_i - a_i)$

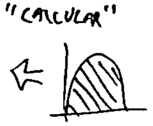
$$= \underbrace{\underbrace{\sup(\{f(x) \mid x\in[1,1.5]\})}_{[3,\ 3.75]}}_{3.75}(1.5-1) + \underbrace{\underbrace{\sup(\{f(x) \mid x\in[1.5,3]\})}_{[3,\ 4]}}_{4}(3-1.5)$$



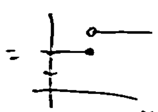
No exercício ⓒ vocês viram duas aproximações por retângulos (por cima e por baixo) e no exercício ⓓ vocês viram aproximações melhores...


⇒


A gente vai definir (amanhã!) a integral como o limite dessas aproximações...

Com essa definição vai dar pra "calcular" $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ ⇐  ← em infinitos passos !!

Truque:

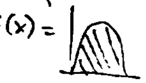
Seja $g(x) =$ 

e seja $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$

(daí $\int_{x=0.5}^{x=10} g(x)\,dx = G(10) - G(0.5)$)

e a gente vai ver que $G'(b) = g(b)$

... e a gente vai usar isso e algumas propriedades extras pra encontrar G...

Isso vai funcionar também pra $f(x) =$ 

$F(x) =$ _ (segredo!)

$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4) - F(0)$

$= \frac{32}{3}$

C2 30/ago/2019

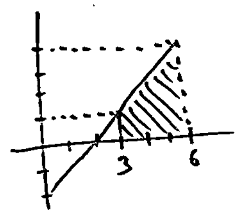
TURMA GRANDE

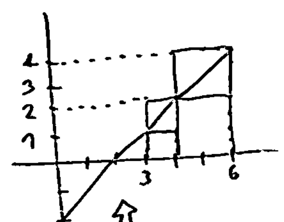
Hoje:

- $\overline{\int_{P}}, \underline{\int_{P}}, \overline{\int_{x=a}^{x=b}}, \underline{\int_{x=a}^{x=b}}$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Propriedades da função $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$
- Como calcular integrais (TFC1 e TFC2)

No final da aula passada nós vimos um exemplo simples em que tínhamos duas partições, P_1 e P_2, que eram divisões do mesmo intervalo...
Algo como:
$P_1=\{3,4,6\}$,
$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$
e a P_2 dava uma aproximação melhor.

Refazendo:
$f(x)=x-2$
Queremos calcular
$\int_{x=3}^{x=6} f(x)\,dx$





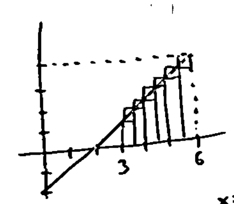
Essa figura mostra ao mesmo tempo
$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ (no meio),
[sup] (por cima)
[inf] (por baixo).

Defs:
$\overline{\int_{P}} f(x)\,dx$ é a aproximação por retângulos de $f(x)$ por cima usando a partição P;
$\underline{\int_{P}} f(x)\,dx$ é a aproximação por baixo.

Exercício:
Calcule:
$\overline{\int_{\{3,4,6\}}} x-2\ dx$,
$\overline{\int_{x=3}^{x=6}} x-2\ dx$,
$\underline{\int_{\{3,4,6\}}} x-2\ dx$.

Se P_1 e P_2 são partições do mesmo intervalo e $P_1 \subset P_2$ então dizemos que P_2 é mais fina do que P_1.

Exemplo:
$P_1=\{3,4,6\}$,
$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$
P_2 é mais fina que P_1



$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\int_{P_1}} f(x)\,dx & \le & \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & \le & \overline{\int_{P_1}} f(x)\,dx \\
\rotatebox{90}{$\ge$} & & \| & & \rotatebox{90}{$\le$} \\
\underline{\int_{P_2}} f(x)\,dx & \le & \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & \le & \overline{\int_{P_2}} f(x)\,dx
\end{array}$$

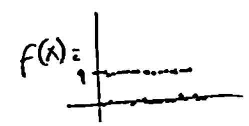
Def:
Sejam $P_1, P_2, P_3, \ldots$ partições cada vez mais finas do intervalo $[a,b]$, tais que o "diâmetro" delas tende a zero.
(o "diâmetro" de uma partição P é a largura do maior intervalo dela. Exemplo: $\mathrm{diam}(\{3,4,6\})=2$)

OBS: Por um teorema complicado qualquer sequência $P_1, P_2, \ldots$ obedecendo isso aí serve e dá os mesmos resultados no final!

Def: $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \overline{\int_{P_i}} f(x)dx$
$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \underline{\int_{P_i}} f(x)dx$

Às vezes $\overline{\int_{x=a}^{x=b}}$ e $\underline{\int_{x=a}^{x=b}}$ não coincidem!!

Exemplo:
Seja $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{quando } x\in\mathbb{Q} \\ 1 & \text{quando } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$



$\overline{\int_{x=3}^{x=6}} f(x)\,dx = \text{Área}(\ldots) = 3$
$\underline{\int_{x=3}^{x=6}} f(x)\,dx = \text{Área}(\ldots) = 0$

DEF: Quando $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx$
nós dizemos que:
- $f(x)$ é integrável no intervalo $[a,b]$
- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ existe
- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx$

C2 30/ago/2019

Turma grande

Hoje:

- $\overline{\int}_{P_1}$, $\underline{\int}_{P_1}$, $\overline{\int}_{x=a}^{x=b}$, $\underline{\int}_{x=a}^{x=b}$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Propriedades da função $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$
- Como calcular integrais (TFC1 e TFC2)

No final da aula passada nós vimos um exemplo simples em que tínhamos duas partições, P_1 e P_2, que eram divisões do mesmo intervalo... Algo como:

$P_1=\{3,4,6\}$,

$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$

e a P_2 dava uma aproximação melhor.

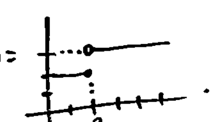
Fato:

(Teorema que a gente não vai demonstrar)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua então $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ existe.

Intervalo fechado!

Além disso funções cujos gráficos são feitos de segmentos de retas são integráveis.

Seja $g(x)=$ 

Seja $G(b)=\int_{x=1}^{x=b} g(x)dx$.

Exercício: Calculem:

(a) $G(2)=\int_{x=1}^{x=2} g(x)dx =$

(b) $G(3) =$

(c) $G(4) =$

Repare que sabendo a função G a gente sabe calcular $\int_{x=a}^{x=b} g(x)dx$ pra quaisquer $a \in b$!

Exemplos:

$$\int_{x=5}^{x=6} g(x)dx = \underbrace{\int_{x=1}^{x=6} g(b)}_{G(6)} - \underbrace{\int_{x=1}^{x=5} g(b)\,dx}_{G(5)}$$

$$\int_{x=-2}^{x=-1} g(x) = G(-1)-G(-2)$$

(pensem em casa!)

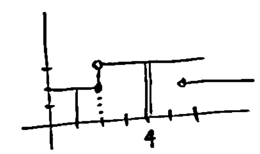
Se a gente sabe calcular $G(b)$ num número finito de passos então a gente sabe calcular qualquer $\int_{x=a}^{x=b} g(x)dx$ num número finito de passos!

Quais são as propriedades dessa $G(b)$?

① Derivada

$$G'(b)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{G(b+\varepsilon)-G(b)}{\varepsilon}$$

O que é, por exemplo, $G(4+\frac{1}{10})-G(4)$?



Diferença: 3, $1/10$

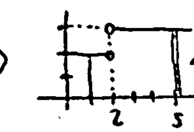
$$\frac{G(4+\frac{1}{10})-G(4)}{1/10}=3$$

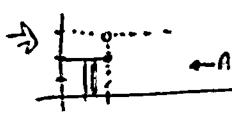
Altura

Base

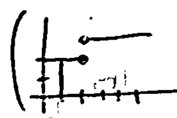
Área do retângulo: base · altura

Exercícios: Calculem:

(a) $\frac{G(5+\frac{1}{100})-G(5)}{1/100}$ ⇒  ← altura 3

(b) $\frac{G(1.23+\frac{1}{1000})-G(1.23)}{1/1000}$ ⇒  ← altura 2

Mais propriedades:

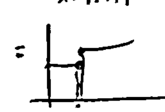
② $G(1)=$ Área () $= 0$

③ G não é derivável em $b=2$, mas é contínua! Porque?

Digamos que seja descontínua.

Digamos que $G(1.999)=\alpha$ e $G(2.001)=\alpha+1$

mas $G(2.001)-G(1.999)=\int_{x=1.999}^{x=2.001} g(x)dx = 1$

$=$  $\neq$ Pensem em casa!

$\boxed{\text{C2 30/AGO/2019}}$

$\boxed{\text{TURMA GRANDE}}$

HOJE:

- $\overline{\int}_P, \underline{\int}_P, \overline{\int}_{x=a}^{x=b}, \underline{\int}_{x=a}^{x=b}$
- FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO-INTEGRÁVEIS
- PROPRIEDADES DA FUNÇÃO $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$
- COMO CALCULAR INTEGRAIS (TFC1 e TFC2)

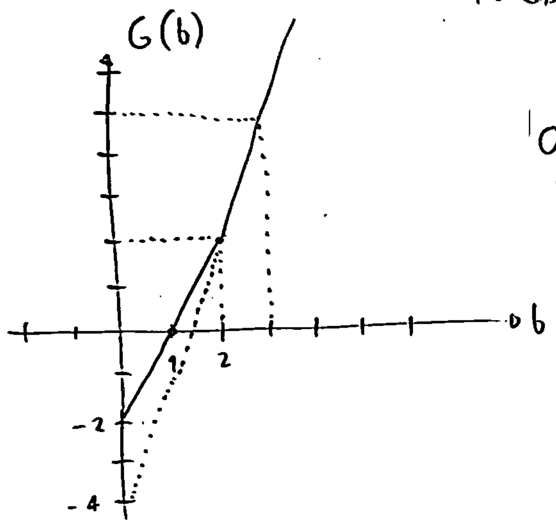
EXERCÍCIO:

(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA $G(x)$ QUE OBEDECE:

- $G'(x) = 2$ PARA $x < 2$,
- $G'(x) = 3$ PARA $x > 2$,
- $G(1) = 0$

(b) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PRA ELA (POR CASOS).

$$G(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{QUANDO } x \leq 2 \\ 3x-4 & \text{QUANDO } 2 < x \end{cases}$$



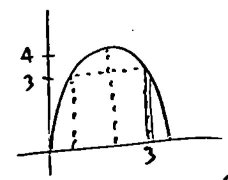
COMO CALCULAR

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

NO CASO EM QUE $f(x) = 4 - (x-2)^2$
$= 4 - (x^2 - 4x + 4)$
$= -x^2 + 4x$?

O QUE É $F'(3)$?

VAMOS VISUALIZAR $\dfrac{F(3+\frac{1}{10}) - F(3)}{1/10}$.



$F(3+\frac{1}{10}) - F(3)$ NÃO É UM RETÂNGULO...

MAS $F(3+\frac{1}{1000000}) - F(3)$ É QUASE UM RETÂNGULO,

E $\dfrac{F(3+\frac{1}{1000000}) - F(3)}{1/1000000} \approx f(3)$

QUE PROPRIEDADES ESSA $F(b)$ TEM?

- DERIVADA: $F'(x) = f(x)$ PARA TODO x
- $F(0) = 0$

... SÓ EXISTE UMA $F(x)$ QUE OBEDECE ESSAS DUAS PROPRIEDADES:

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} -\frac{x^3}{3} + 2x^2$$

EXERCÍCIO:

(a) ENCONTRE UMA FUNÇÃO $g(x)$ TAL QUE $g'(x) = -x^2 + 4x$. $\Rightarrow g(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

(b) ENCONTRE UMA $h(x)$ TAL QUE $h'(x) = -x^2 + 4x$ E $h \neq g$ $\Rightarrow h(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 99$

(c) ENCONTRE UMA $m(x)$ TAL QUE $m'(x) = -x^2 + 4x$ E $m(0) = 0$. $\Rightarrow m(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

ENTÃO $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \left(-\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4^2\right) - (0)$
$= -\frac{64}{3} + 32$
$= \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10{,}6666...$

$\boxed{\text{C2 5/set/2019}}$

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER UMA TÉCNICA QUE NOS PERMITE RESOLVER UM MONTE DE INTEGRAIS... POR EXEMPLO, PRA RESOLVER

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$$

NÓS ENCONTRAMOS UMA FUNÇÃO $F(x)$ TAL QUE $F'(x)=4-(x-2)^2$, E USAMOS:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$\Uparrow$

TFC2.

HOJE VAMOS COMEÇAR A VER COMO O TFC GERA UM MONTE DE OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO, INCLUSIVE UMA IMPORTANTÍSSIMA - INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO - QUE COSTUMA SER APRESENTADA DE UM JEITO QUE METADE DAS PESSOAS ACHA ÓBVIO E A OUTRA METADE ACHA ROUPALHEIRA.

UM EXEMPLO DO LIVRO (SEÇÃO 6.1):

$$\int \cos\underbrace{(x^2+5)}_{u}\cdot\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int \cos u\,du$$

PORQUE $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$.

OBS: A PARTIR DE HOJE EU VOU COMEÇAR A FAZER MUITAS REFERÊNCIAS AO LIVRO - E ALGUMAS A UMAS LISTAS DE EXERCÍCIOS DE NITERÓI QUE EU PUS NO SITE.

A INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO ELA É UM PASSO PRA RESOLVER INTEGRAIS... ELE TRANSFORMA INTEGRAIS MAIS COMPLICADAS - OU MAIS ESTRANHAS - EM INTEGRAIS MAIS SIMPLES E MAIS FAMILIARES.

EXEMPLO DE COMO FAZER OS EXERCÍCIOS:

$$(\text{TFC2})\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{sen}\,x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

EM PORTUGUÊS:

O TFC2 NOS DIZ QUE:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

PARA QUAISQUER $a,b\in\mathbb{R}$ E QUALQUER $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DERIVÁVEL. SUBSTITUINDO a POR 0, b POR π, $F(x)$ POR $\mathrm{sen}\,x$ ACIMA, OBTEMOS:

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{sen}'x\,dx = \mathrm{sen}\,x\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$= \mathrm{sen}\,\pi - \mathrm{sen}\,0$ $\Leftarrow$ PASSOS EXTRAS!

$= 0-0=0$

EXERCÍCIO (i):

$$(S1)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{l} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \qquad\parallel \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{sen}(3x+4)\Big|_{x=1}^{x=2} = \displaystyle\int_{x=1}^{x=2} \mathrm{sen}'(3x+4)\,3\,dx \\ \qquad\parallel \\ \mathrm{sen}(u)\Big|_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} = \displaystyle\int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \mathrm{sen}'(u)\,du \end{array}\right)$$

$$\left(\underbrace{f'(\underline{g(x)})}\,\underline{g'(x)}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \dots \\ g(x) := \dots \end{bmatrix}$$

$$f(g(x))\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen} \\ g(x) := 4x \end{bmatrix}$$

$f(u) = \mathrm{sen}(u)$

$f(42) = \mathrm{sen}\,42$

$f(a+b+x+y) = \mathrm{sen}(a+b+x+y)$

$f(g(x)) = \mathrm{sen}(g(x))$

$\mathrm{sen}(4x)$

$$\left(f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 4x \end{bmatrix} = \cos(4x)\cdot 4$$

$f'(u) = \cos u$

$g'(x) = 4$

C2 5/set/2019

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER UMA TÉCNICA QUE NOS PERMITE RESOLVER UM MONTE DE INTEGRAIS... POR EXEMPLO, PRA RESOLVER

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$$

NÓS ENCONTRAMOS UMA FUNÇÃO $F(x)$ TAL QUE $F'(x)=4-(x-2)^2$, E USAMOS:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$\Uparrow$ TFC.

HOJE VAMOS COMEÇAR A VER COMO O TFC GERA UM MONTE DE OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO, INCLUSIVE UMA IMPORTANTÍSSIMA — INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO — QUE COSTUMA SER APRESENTADA DE UM JEITO QUE METADE DAS PESSOAS ACHA ÓBVIO E A OUTRA METADE ACHA ROUBALHEIRA.

UM EXEMPLO DO LIVRO (SEÇÃO 6.1):

$$\int \cos(\underbrace{x^2+5}_{u})\cdot\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int \cos u\,du$$

PORQUE $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$.

OBS: A PARTIR DE HOJE EU VOU COMEÇAR A FAZER MUITAS REFERÊNCIAS AO LIVRO — E ALGUMAS A UMAS LISTAS DE EXERCÍCIOS DE NITERÓI QUE EU PUS NO SITE.

A INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO ELA É UM PASSO PRA RESOLVER INTEGRAIS... ELE TRANSFORMA INTEGRAIS MAIS COMPLICADAS — OU MAIS ESTRANHAS — EM INTEGRAIS MAIS SIMPLES E MAIS FAMILIARES.

~~Exemplo~~ EXEMPLO DE COMO FAZER OS EXERCÍCIOS:

$$(\text{TFC2})\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

EM PORTUGUÊS:
O TFC2 NOS DIZ QUE:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

PARA QUAISQUER $a,b\in\mathbb{R}$ E QUALQUER $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DERIVÁVEL. SUBSTITUINDO a POR 0, b POR π, $F(x)$ POR $\operatorname{sen} x$ ACIMA, OBTEMOS:

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen}' x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$= \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0$
$= 0 - 0 = 0$ ⇐ PASSOS EXTRAS!

EXERCÍCIO (l):

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(x)=f(x) \text{ então:} \\ F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \quad \| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \sqrt{u} \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(x)=\sqrt{x} \text{ então:} \\ F(3x+4)\Big|_{x=1}^{x=2} = \int_{x=1}^{x=2} \sqrt{3x+4}\cdot 3\,dx \\ \quad \| \\ F(u)\Big|_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \sqrt{u}\,du \end{array}\right)$$

MAIS EXERCÍCIOS (EXTRAS):

n) $(\text{TFC2})\,[F(x) := f(g(x))]$

o) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)\left[k := \frac{1}{2}\right] =$

p) $\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}x^k\right) = x^{k-1}\right)\left[k := \frac{3}{2}\right]$

C2 6/set/2019

Hoje:
Continuação dos exercícios de ontem (e dúvidas) e algumas aplicações:
- Integração por partes
- Integração de certas potências de senos e cossenos.

n) $(TFC2)\left[F(x) := f(g(x))\right]$

Em português:
O TFC2 diz que:
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
substituindo $F(x)$ por $f(g(x))$ acima obtemos:
$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$
ou:
$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Obs: substituição muitas vezes vai ser usada pra transformar algo que a gente ainda não entende porque está muito abstrato em algo mais familiar e mais concreto...

Por exemplo, algumas pessoas não conseguem pensar em termos de "F é uma função qualquer".

Às vezes a substituição vai ser usada pra transformar uma expressão que a gente (ainda) não entende em outra expressão que a gente (ainda) não entende.

Um exemplo que eu costumava dar quando eu comecei a ensinar substituição nos meus cursos era esse aqui:

$$\begin{pmatrix}\text{Vanessão} \\ 20 \text{ reais}\end{pmatrix}\left[a := \begin{pmatrix}☆0 \\ \square\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}V\binom{☆0}{\square}\text{ness}\widetilde{\binom{☆0}{\square}}\text{o} \\ 20 \text{ re}\binom{☆0}{\square}\text{is}\end{pmatrix}$$

As pessoas que achavam que toda expressão tinha que poder ser calculada até o resultado dar um número ficavam meio desesperadas - mas no fim entendiam.

Integração por partes

9) $(TFC2)\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$
$$= \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}(g(x)h(x))\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

Em português:
Se substituirmos $F(x)$ por $g(x)h(x)$ na fórmula do TFC2 obtemos:
$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$
E aí:
$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

(IP1): $\boxed{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx}$

(IP2): $\boxed{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx}$

Exercício:
Integração por partes pode ser usada pra calcular $\int_{x=a}^{x=b} x e^x\,dx$...
Mas vocês vão ter que descobrir se a fórmula que funciona é a (IP1) ou a (IP2).

$$(IP1)\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$$
$$(IP2)\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$$

...Agora que você já sabe calcular $\int_{x=a}^{x=b} x e^x\,dx$ calcule $\int_{x=a}^{x=b} x^2 e^x\,dx$.

C2 6/SET/2019

HOJE:
CONTINUAÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE ONTEM (E DÚVIDAS) E ALGUMAS APLICAÇÕES:
- INTEGRAÇÃO POR PARTES
- INTEGRAÇÃO DE CERTAS POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS.

NAS NOSSAS CONTAS PRA RESOLVER $\int_{x=2}^{x=6} xe^x dx$ NÓS TÍNHAMOS "$\int_{x=2}^{x=6}$" E "$\Big|_{x=2}^{x=6}$" EM TODO LUGAR... O QUE ACONTECE SE A GENTE APAGA ESSES LIMITES DE INTEGRAÇÃO?

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

EXERCÍCIO:
$\int x^2 e^x dx = ?$

SEM OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO! DICA: (IP2) PRA TRANSFORMAR ISSO EM ALGO QUE SABEMOS CALCULAR ...
OBS: ESTOU PEDINDO PRA VOCÊS FAZEREM ALGO DESTA FORMA:
(IP2)[...]
MAS EU NÃO VOU DIZER QUAL É A SUBSTITUIÇÃO - VOCÊS VÃO DESCOBRIR SOZINHOS.

$$\int x^2 e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

$$(TFC2)[F(x):=e^x] \int_{x=2}^{x=6} e^x dx = e^x \Big|_{x=2}^{x=6}$$

INTEGRAÇÃO DE CERTAS POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS

OBS: VAMOS TRABALHAR SEM OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO NO INÍCIO!

$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx$?

AO INVÉS DE USAR A LETRA U PRA VARIÁVEL NOVA VOU USAR S...

$s = \text{sen } x$

$\frac{ds}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = ds$ ⇐ GAMBIARRA

O QUE É $\frac{ds}{dx}$ SE $s = \text{sen } x$?

$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} s = \frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x$

$$\boxed{\frac{ds}{dx} dx = ds, \quad \frac{ds}{dx} = \cos x, \quad \cos x \, dx}$$

$$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx$$
$$= \int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^2 \cos x \, dx$$
$$= \int (\text{sen } x)^5 (1 - (\text{sen } x)^2) \cos x \, dx$$
$$= \int s^5 \quad (1 - s^2) \quad \frac{ds}{\cancel{dx}} \cancel{dx}$$
$$= \int s^5 (1 - s^2) ds$$
$$= \int s^5 - s^7 ds$$

... E AÍ $\int s^5 - s^7 ds$
$$= \frac{1}{6} s^6 - \frac{1}{8} s^8$$
$$= \frac{1}{6} (\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8} (\text{sen } x)^8$$

EXERC:
$\int x^5 - x^7 dx = ?$
$\int_{x=2}^{x=6} x^5 - x^7 dx = ?$
$\int_{x=2}^{x=6} x^7 dx = ?$
$(TFC2)[F(x) := x^8] = ?$
$(TFC2)[F(x) := \frac{1}{8} x^8] = ?$
$(TFC2I)[F(x) := \frac{?}{?} x^?] = ?$

OBS: DÁ PRA VERIFICAR QUE ISTO É VERDADE
$$\int_{x=2}^{x=6} (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx = \left(\frac{1}{6}(\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8}(\text{sen } x)^8\right)\Big|_{x=2}^{x=6}$$
FAZENDO:
$[TFC2]\left[F(x) := \frac{1}{6}(\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8}(\text{sen } x)^8\right]$

C2 12/set/2019

TURMA GRANDE

HOJE: COMO INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS - ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO!

CASO MAIS SIMPLES:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$

VAMOS COMEÇAR REVENDO ALGUMAS COISAS DE CÁLCULO 1...

LEMBRE QUE SE f E g SÃO INVERSAS, ENTÃO

$$f(g(x)) = x$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\| $$

$$f'(g(x))g'(x)$$

E PORTANTO

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

LEMBRE QUE "$\exp x$" É UMA OUTRA NOTAÇÃO PARA e^x.

(1) EXERCÍCIO:

SUBSTITUA $f(u) := \exp u$

E $g(x) := \ln x$

EM

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

E DESCUBRA $\ln' x$.

$$\left(g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \exp u \\ g(x) := \ln x \end{bmatrix}$$

$$= \left(\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)}\right)$$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)}$$

$$= \frac{1}{\exp(\ln x)}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

(2) DESCUBRA

$$\frac{d}{dx}\ln -x.$$

DICA: $\frac{d}{dx} f(g(x))$,

COM $f = \ln$

E $g(x) = -x$.

... ENTÃO:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\ln -x = \frac{1}{x},$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}.$$

AGORA PEGUE

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

E SUBSTITUA $F(x) := \ln|x|$

NISTO... USANDO "$[:=]$":

$$\left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)\left[F(x) := \ln|x|\right]$$

$$= \left(\int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \ln|x|\right)$$

EM PORTUGUÊS:

O TFC2 NOS DIZ QUE:

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

SUBSTITUINDO $F(x)$ POR $\ln|x|$ NA FÓRMULA ACIMA OBTEMOS:

$$\int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \ln|x|$$

$$\|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|}$$

LEMBREM QUE ESTAMOS USANDO A INTEGRAL <u>INDEFINIDA</u> - SEM LIMITES DE INTEGRAÇÃO - COMO <u>ABREVIAÇÃO</u> PRA INTEGRAL DEFINIDA...

ENTÃO DEVEMOS TER:

$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

E SE $a = -1$ E $b = 1$,

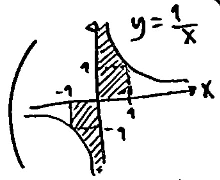
$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \ln|1| - \ln|-1|$$

$$= \ln 1 - \ln 1$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \text{ÁREA}\Big($$  $$\Big)$$

SERÁ QUE ISSO AÍ É INTEGRÁVEL?

LEMBREM QUE inf E sup TÊM DEFINIÇÕES <u>FORMAIS</u> BEM COMPLICADAS MAS TÊM INTERPRETAÇÕES GRÁFICAS SIMPLES...

$$\sum_{i=1}^{N} \sup(\{f(x) \mid x \in [a_i, b_i]\})(b_i - a_i) = \overline{\int_P} f(x)\,dx$$

É A "MELHOR APROXIMAÇÃO POR RETÂNGULOS POR CIMA".

EXERCÍCIOS:

(3) REPRESENTE GRAFICAMENTE E CALCULE:

(a) $\overline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$ NO CASO $P = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$

(b) $\underline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$, P IGUAL AO ACIMA.

(c) $\overline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$, $P = \{-1, -0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 1\}$.

ESSES EXERCÍCIOS PODEM CAIR NO MINI-TESTE!

C2 12/set/2019

TURMA GRANDE

HOJE: COMO INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS - ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO!

$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x} dx$ NÃO EXISTE!

A FUNÇÃO $\frac{1}{x}$ NÃO É INTEGRÁVEL NESSE INTERVALO - ALIÁS,

$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{x=a}^{x=b}$

NÃO VALE QUANDO $0 \in [a,b]$...

MAS MESMO ASSIM VAMOS CONTINUAR DIZENDO QUE:

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ ...

SABEMOS INTEGRAR POLINÔMIOS - $\int 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7\, dx$,

E SABEMOS INTEGRAR $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$.

$\int \frac{1}{2x+3} dx =$

$\int \frac{1}{u} \frac{1}{2} du =$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$

$\frac{1}{2} \ln|u| =$

$\frac{1}{2} \ln|2x+3|$

$\left[\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2\,dx \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array}\right]$

$\int \frac{4}{2x+3} dx =$

$4 \int \frac{1}{2x+3} dx =$

$4 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+3|$

$\int \frac{2x}{2x+3} dx = \int \frac{(2x+3)-3}{2x+3} dx$

$= \int \frac{2x+3}{2x+3} + \frac{-3}{2x+3} dx$

$= \int 1 + \frac{-3}{2x+3} dx$ (SABEMOS INTEGRAR ISSO!)

PRÓXIMO PASSO: DENOMINADOR SENDO UM POLINÔMIO COM GRAU MAIOR QUE 1.

$\int \frac{1}{x^2} dx = ?$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\int x^{-2} dx = ?$

$\boxed{\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}}$ (☆)

4 EXERCÍCIO: USE (☆) PRA CALCULAR $\int \frac{1}{x^2} dx$.

(☆)$[k:=-2]$ =

$\left(\int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right)$

$\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} = -\frac{1}{x}$

SERÁ QUE ESSA FÓRMULA SERVE PRA CALCULAR $\int \frac{1}{x} dx$?

VAMOS TENTAR!

(☆)$[k:=-1]$ = $\left(\int x^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} \right)$

$\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{0} x^0$, com $\underbrace{\tfrac{1}{0}}_{\infty}$ e $\underbrace{x^0}_{1}$

??? !!

VAMOS VER O QUE ACONTECE NO CASO DA INTEGRAL DEFINIDA...

$\int_{x=a}^{x=b} x^k dx = \left(\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$

$\int_{x=2}^{x=3} x^k dx = \left(\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right) \Big|_{x=2}^{x=3}$

$\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x} dx = \left(\frac{1}{0} x^0 \right) \Big|_{x=2}^{x=3} = \infty \cdot 3^0 - \infty \cdot 2^0$

$= \infty - \infty$

= INDEFINIDO!

NO CASO $k=-1$ A FÓRMULA (☆) É INÚTIL!

VOLTANDO...

$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} dx =$

$\int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx =$

$\ln|x+2| + \ln|x-3|$

VAMOS TRABALHAR FORA DO SINAL DE INTEGRAL UM POUCO...

$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} =$

$\frac{x-3}{(x+2)(x-3)} + \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} =$

$\frac{(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} =$

$\frac{2x-1}{x^2-x-6}$

$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} dx$

$= \ln|x+2| + \ln|x-3|$

C2 12/set/2019

TURMA GRANDE

Hoje: Como integrar funções racionais - isto é, quocientes de um polinômio por outro!

CASO GERAL:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=$$

$$\frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)}=$$

$$\frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}=$$

$$\frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\boxed{\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}} \quad (AA)$$

Obs: $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x-1}{x^2-x-6}$ (FÁCIL →, ← DIFÍCIL)

Em programas que sabem fazer computação simbólica ("contas com letras") essas operações têm nomes:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3} \underset{\text{APART}}{\overset{\text{TOGETHER}}{\rightleftarrows}} \frac{2x-1}{x^2-x+6}$$

Exercício:

ⓐ Calcule together $\left(\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+5}\right)$,

ⓑ together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)$,

ⓒ apart $\left(\frac{1}{(x+2)(x+5)}\right)$

ⓓ $\int \frac{1}{(x+2)(x+5)}\,dx = ?$

Dica: use (AA) e encontre A e B resolvendo um sistema.

Grupo do Telegram: calculo II 20192

$$(AA)\begin{bmatrix}a:=-2\\ b:=-5\end{bmatrix} = \left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}=\frac{(A+B)x+(-A(-5)-(-2)B)}{(x+2)(x+5)}\right)$$

Queremos:

$$\frac{1}{(x+2)(x+5)}=\frac{(A+B)x+(-A(-5)-(-2)B)}{(x+2)(x+5)}=\frac{(A+B)x+(5A+2B)}{(x+2)(x+5)}$$

$$\Rightarrow A+B=0$$
$$5A+2B=1$$
$$B=-A$$
$$5A+2(-A)=1$$
$$5A-2A=1$$
$$3A=1$$
$$A=\tfrac{1}{3}$$
$$B=-\tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+2)(x+5)}=\frac{1/3}{x+2}+\frac{-1/3}{x+5}$$

Isso está certo? É fácil conferir!

$$\text{together}\left(\frac{1/3}{x+2}+\frac{-1/3}{x+5}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(x+5)+-\frac{1}{3}(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}{(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{1}{(x+2)(x-5)}$$

Amanhã:

- Método de Heaviside - um método pra resolver isto sem sistemas
- Vários truques com polinômios, e como simplificar coisas como $\frac{4x^4+5x^3+6x^2+7x+8}{x^2+2x+3}$

C2 13/out/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
COMO SIMPLIFICAR FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS;
TRUQUES COM POLINÔMIOS...

NO FINAL DA ÚLTIMA AULA VIMOS QUE O TRUQUE PRA INTEGRAR ALGO COMO

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

ERA TRANSFORMAR A FUNÇÃO RACIONAL

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)}$$ ⇐ GRAU 2 ⇐ GRAU 2

EM UMA "PRÓPRIA", ISTO É, UMA EM QUE O GRAU DO NUMERADOR É ESTRITAMENTE MENOR QUE O GRAU DO DENOMINADOR...

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10} = \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10} = 1 + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10} = 1 + \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}$$

VAI TER TRÊS PONTOS DO CURSO EM QUE A GENTE VAI TER QUE MANIPULAR POLINÔMIOS GRANDES... VAMOS VER UM JEITO VISUAL DE FAZER ISSO, QUE EM ALGUNS CASOS VAI NOS PERMITIR ATÉ FAZER ALGUMAS CONTAS DE CABEÇA.

IDÉIA:
SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS SÃO PRATICAMENTE IGUAIS À SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS, MAS SEM "VAI UM"!

NOTAÇÃO (INFORMAL):

EXEMPLO:

$3x^4 + 5x^3 + 6x + 7$

COEF DO x^4 — COEF DO x^3 — COEF DO x^1 — COEF DO x^0

E O COEFICIENTE DO x^2 É 0.

"A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS" VAI NOS PERMITIR ESCREVER SÓ OS COEFICIENTES...

O EXEMPLO ACIMA VIRA:

[3|5|0|6|7]

COEF DO x^4 — COEF DO x^0

A ÚLTIMA CAIXINHA É SEMPRE O COEF. DO x^0.

SOMA DE POLINÔMIOS

PRA SOMAR O POLINÔMIO ANTERIOR COM

[9999|999|99|9],

ISTO É,

$9999x^3 + 999x^2 + 99x + 9$,

FAZEMOS:

  [3|5|0|6|7]
+ [9999|999|99|9]
= [3|10004|999|105|16]

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

  [1|2|3|4]
· [10|2|100]

[100|200|300|400]
[2|4|6|8]
+ [10|20|30|40]
[10|22|134|246|308|400]

TRUQUE:
TODA VEZ QUE VOCÊ NÃO SOUBER COMO FAZER ALGUMA OPERAÇÃO COM A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS CONVERTA TUDO PRA POLINÔMIOS NA NOTAÇÃO USUAL E DEPOIS CONVERTA PRA CAIXINHAS CADA PASSO E CADA RESULTADO INTERMEDIÁRIO.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS COM RESTO

$$\frac{P(x)}{q(x)} = ?$$

EXEMPLO SIMPLES:

  [1|1|1|1|1]
× [1|-1]

[-1|-1|-1|-1|-1]
+ [1|1|1|1|1]
[1|0|0|0|0|-1] ⇐ $x^5 - 1$

$$\frac{x^5}{x-1} = ?$$

NA VERDADE QUEREMOS DIVISÃO COM RESTO...

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \gamma(x)$$

E QUANDO TEM RESTO?

$\underbrace{\alpha(x) - r(x)}_{\text{NOVIDADE}} = \gamma(x)\beta(x)$

O GRAU DO RESTO $r(x)$ SEJA ≤ GRAU DO POLINÔMIO DO DENOMINADOR...

$\alpha(x)$ ⇒ [1|0|0|0|0|0] | [1|-1] ⇐ $\beta(x)$
[1|1|1|1|1] ⇐ $\gamma(x)$

- [1|-1]
[1|0|0|0|0]
- [1|-1]
[1|0|0|0]
- [1|-1]
[1|0|0]
- [1|-1]
[1|0]
- [1|-1]
[1] ⇐ $r(x)$

EXERCÍCIO:

$\alpha(x) =$ [1|3|5|7] | [1|0|2] $= \beta(x)$
[1|3] $= \gamma(x)$

- [1|0|2]
[3|3|7]
- [3|0|6]
[3|1] "$r(x)$"

COMO CONFERIR?
DEVEMOS TER:

$$\frac{\alpha(x) - r(x)}{\beta(x)} = \gamma(x)$$

$\alpha(x) - r(x) = \gamma(x)\beta(x)$

C2 13/out/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
Como simplificar funções racionais impróprias;
truques com polinômios...

Vamos agora tentar isso num problema mais "realista"...

$\alpha(x) = \boxed{1\,|\,3\,|\,5\,|\,7} = x^3+3x^2+5x+7$

$\beta(x) = \boxed{1\,|\,0\,|\,2} = x^2+0x+2$

$\gamma(x) = \boxed{1\,|\,3} = x+3$

$r(x) = \boxed{3\,|\,1} = 3x+1$

$\gamma(x)\cdot\beta(x) = \boxed{1\,|\,3}\cdot\boxed{1\,|\,0\,|\,2}$ ($= x^2+0x+2$)

$= \boxed{1\,|\,3\,|\,2\,|\,6} = x^3+3x^2+2x+6$

$\gamma(x)\cdot\beta(x)+r(x) =$

$\boxed{1\,|\,3\,|\,2\,|\,6}$
$+\boxed{3\,|\,1}$
$= \boxed{1\,|\,3\,|\,5\,|\,7}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+5x+7 & x^2+0x+2 \\
\underline{-(x^3+0x^2+2x)} & x+3 \\
\quad 3x^2+3x+7 & \\
\quad \underline{-(3x^2+0x+6)} & \\
\qquad 3x+1 &
\end{array}
$$

Digamos que queremos resolver

$$\int \frac{x^5}{(x-2)(x+5)(x+10)}\,dx = ?$$

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{1\,|\,-2}\cdot\boxed{1\,|\,5}}_{\boxed{1\,|\,3\,|\,-10}}\cdot\boxed{1\,|\,10}}_{\boxed{1\,|\,13\,|\,20\,|\,-100}} = \boxed{1\,|\,13\,|\,20\,|\,-100}$$

$$\frac{x^5}{(x-2)(x+5)(x+10)} = x^2-13x+149+\frac{1777x^2-4280x-14900}{(x-2)(x+5)(x+10)} \quad (?)$$

No fim da aula passada vimos uma fórmula pra obter um sistema que nos permitia resolver o "apart"...

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c} = \frac{\begin{pmatrix}A(x-b)(x-c)+\\(x-a)B(x-c)+\\(x-a)(x-b)C\end{pmatrix}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

O método de Heaviside vai nos permitir resolver o "apart" sem resolver sistema.

Avisos: 1) Ele só funciona quando a, b, c são diferentes,
2) Ele também funciona para 4 frações, 5, 6, etc, e 2.

Recapitulando:

Queremos resolver isto,

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c} = \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad (\star)$$

onde a, b, c são números que já conhecemos, $p(x)$ é um polinômio de grau ≤ 2 que já conhecemos, e queremos descobrir os valores de A, B, C que fazem $(\star)$ ser verdadeira.

OBS: Queremos A, B, C que fazem $(\star)$ ser verdadeira pra todo x exceto $x=a$, $x=b$ ou $x=c$, porque nesses casos a gente tem divisão por 0.

C2 13/out/2019
TURMA GRANDE

Hoje:
Como simplificar funções racionais infinitas;
truques com polinômios...

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}}+\frac{(x-a)B}{x-b}+\frac{(x-a)C}{x-c}\right) \quad \left(\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{(x-b)(x-c)}\right) = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$\| \quad = A$$

PORQUE
$$(=0)\Rightarrow\frac{(a-a)B}{(a-b)}\begin{matrix}\Leftarrow(\in\mathbb{R})\\ \Leftarrow(\neq 0)\end{matrix}$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$A \qquad\qquad \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$A=\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

E fazendo a mesma coisa pra b e c obtemos:

$$B=\frac{p(b)}{(b-a)(b-c)}$$

$$C=\frac{p(c)}{(c-a)(c-b)}$$

Exercício: digamos que

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x+10}=\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)(x+10)}.$$

Encontre A, B, C.

Aula que vem:
Pra integrar algo como

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$$

nós temos que fatorar $q(x)$...
Heaviside só funciona quando todas as raízes do $q(x)$ são diferentes e vimos por alto como lidar com alguns casos com raízes repetidas...
E os casos com raízes complexas?

$$(x-i)(x+i)=x^2+(i-i)x+(-i)i = x^2+1$$

$$\int\frac{1}{x^2+1}dx=?$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=?$$

Idéia (ruim): $\alpha\ln|x-i|+\beta\ln|x+i|$

Idéia (boa): $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=?$

Se $x=\operatorname{sen}\theta$, $\int \operatorname{sen}\theta\underbrace{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}}_{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta$

C2 19/set/2019
TURMA GRANDE

- Aviso sobre datas de provas e mini-testes:
  - Precisamos confirmar que a P1 não cai na semana acadêmica
  - Eu não lembrava se o mini-teste ia ser hoje, olhei as fotos dos quadros e não achei um aviso de que seria hoje. Os mini-testes vão ser em dias marcados claramente - e em quintas-feiras.

Hoje: substituição trigonométrica!

Idéia geral: como é que a gente integra coisas em que $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$,

Em que o "termo ruim" do integrando é algo como $\sqrt{1-x^2}$?

Truque (versão simples): fazendo a substituição $x = \operatorname{sen}\theta$ temos:

$$\int \underbrace{x}_{\operatorname{sen}\theta} \underbrace{\sqrt{\underbrace{1 - \underbrace{x^2}_{\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{(\operatorname{sen}\theta)^2}}}_{(\cos\theta)^2}}}_{\cos\theta} \underbrace{dx}_{\underbrace{?}_{\cos\theta\,d\theta}}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$
$$dx \qquad = \cos\theta\,d\theta$$

Ou seja,

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \qquad \begin{bmatrix} x = \operatorname{sen}\theta \\ dx = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta)^2\,d\theta =$$

Um truque extra: algumas variáveis - letras - vão ter significados default pra gente:

$$s = \operatorname{sen}\theta \qquad c = \cos\theta$$
$$t = \tan\theta$$
$$z = \sec\theta$$

Quando a gente usar "s" ao invés de "x" a gente vai estar deixando claro que substituição a gente vai fazer...

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds =$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta$$

Quando o "termo ruim" for $\sqrt{1-x^2}$ a gente usa seno.
(Vamos ver os casos com tan e sec daqui a pouco).

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} s = x \\ dx = ds \end{bmatrix}$$
$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta)^2\,d\theta =$$
$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)dc \end{bmatrix} \Leftarrow \frac{dc}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)\,dc$$
$$\int c^2\,(-1)\,dc =$$
$$-\int c^2\,dc =$$
$$-\frac{c^3}{3} =$$
$$-\frac{(\cos\theta)^3}{3} =$$
$$-\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3} = -\frac{(\cos \operatorname{arcsen} x)^3}{3}$$

Esse modo funciona (!!!) e isto é verdade:

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\text{Será que } F'(x) \text{ é isto? Se for, funcionou...}} = \underbrace{-\frac{(\cos \operatorname{arcsen} x)^3}{3}}_{\text{Seja } F(x) \text{ igual a isto}}$$

C2 19/set/2019
Turma grande

- Aviso sobre datas de provas e mini-testes:
  - Precisamos confirmar que a P1 não cai na semana acadêmica
  - Eu não lembrava se o mini-teste ia ser hoje, olhei as fotos dos quadros e não achei um aviso de que seria hoje. Os mini-testes vão ser em dias marcados claramente - e em quintas-feiras.

P1: 31/out
Primeiro mini-teste: 26/set.

~~Para conferir~~

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{3}(\cos \operatorname{arcsen} x)^3}_{F(x)}$$

Pelo TFC2...
Como a gente calcula $F'(x)$?
Lembre de como a gente descobriu que

$\ln' x = \frac{1}{x}$ ...

Se $f(g(x)) = x$
Então $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

e portanto

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Dá pra usar isso pra calcular $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$ ...
Mas dá pra fazer algo melhor.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad [x=s]$$
$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \quad [s=\operatorname{sen}\theta]$$
$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \quad [c=\cos\theta]$$
$$\int -c^2\,dc =$$
$$-\frac{c^3}{3} =$$
$$-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3} =$$
$$-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$$

Lembre que
$c^2+s^2=1$
$c^2=1-s^2$
$c=\sqrt{1-s^2}$

Ou seja:

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\text{Será que } F'(x) \text{ é isto?}} = \underbrace{-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}}_{\text{Seja } F(x) \text{ igual a isto.}}$$

Como conferir esse "="?
Pelo TFC2! Nessa ordem:

Exercício:

1. Seja $F(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$.

Calcule $F'(x)$.

Dica:
Faça uma tabela com as derivadas das subexpressões de $F(x)$:

$\frac{d}{dx}(1-x^2) =$

$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} =$

$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}^3 =$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3\right) =$

Casa! Importante!

A gente viu como calcular

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ ...

Em geral a gente vai usar substituição trigonométrica em coisas desta forma:

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta\,dx$$

(embora ela funcione também pra algumas expressões mais complicadas).

2. Exercício:
Faça o primeiro passo da S.T. aqui:

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta\,ds =$$
$$\int k(\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta\,d\theta$$

Descubra k, γ, δ.

C2 19/set/2019

TURMA GRANDE

- AVISO SOBRE DATAS DE PROVAS E MINI-TESTES:
- PRECISAMOS CONFIRMAR QUE A P1 NÃO CAI NA SEMANA ACADÊMICA
- EU NÃO LEMBRAVA SE O MINI-TESTE IA SER HOJE, OLHEI AS FOTOS DOS QUADROS E NÃO ACHEI UM AVISO DE QUE SERIA HOJE. OS MINI-TESTES VÃO SER EM DIAS MARCADOS CLARAMENTE - E EM QUINTAS-FEIRAS.

P1: 31/OUT

PRIMEIRO MINI-TESTE: 26/SET.

FATO IMPORTANTE (QUE A GENTE NÃO COSTUMA VER EM CÁLCULO 1):

SECANTE E TANGENTE OBEDECEM COISAS PARECIDAS COM:

$c^2+s^2=1$

$c=\sqrt{1-s^2}$

$s=\sqrt{1-c^2}$

$\frac{ds}{d\theta}=c \Rightarrow ds=c\,d\theta$

$\frac{dc}{d\theta}=-s \Rightarrow dc=-s\,d\theta$

LEMBRE:

$t=\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{s}{c}$

$z=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{c}$

$t^2=\frac{s^2}{c^2}$

$z^2=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$

$t^2=z^2-1$

$z=\sqrt{1+t^2}$

$t=\sqrt{z^2-1}$

E DAÍ:

$\int x\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{"TERMO RUIM"}}dx = \left[t=x\right]$

$\int \underbrace{\underbrace{t}_{\tan\theta}}_{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} \underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\underbrace{t^2}_{\tan\theta}}_{(\tan\theta)^2}}}_{\sec\theta}}_{1/\cos\theta} \underbrace{dt}_{?} = \left[t=\tan\theta\right]$

FALTA A GENTE SABER COMO LIDAR COM O dt!

$\frac{dt}{d\theta}=?$

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$\frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}'\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos'\theta}{(\cos\theta)^2}$

$\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c}=\frac{s'c-sc'}{c^2}=\frac{cc-s(-s)}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=z^2$

$\frac{dz}{d\theta}=?$

$\frac{d}{d\theta}z=\frac{d}{d\theta}\frac{1}{c}=\frac{1'c-1\cdot c'}{c^2}=\frac{0-(-s)}{c^2}=\frac{s}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{s}{c}=zt$

$\boxed{\begin{array}{l}\frac{dt}{d\theta}=z^2\\ \frac{dz}{d\theta}=zt\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}dt=z^2\,d\theta\\ dz=zt\,d\theta\end{array}}$

$\int \underbrace{t}_{\tan\theta}\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\sec\theta}\underbrace{dt}_{(\sec\theta)^2d\theta} = \left[\begin{array}{l}t=\tan\theta\\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta\\ dt=(\sec\theta)^2d\theta\end{array}\right]$

$\int \tan\theta(\sec\theta)^3d\theta=\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^3d\theta$

3) EXERCÍCIO:

DESCUBRA K, γ, δ EM:

$\int t^\alpha\sqrt{1+t^2}^{\,\beta}dt = \int K(\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta d\theta$

C2 19/SET/2019

TURMA GRANDE

- AVISO SOBRE DATAS DE PROVAS E MINI-TESTES:
  - PRECISAMOS CONFIRMAR QUE A P1 NÃO CAI NA SEMANA ACADÊMICA
  - EU NÃO LEMBRAVA SE O MINI-TESTE IA SER HOJE, OLHEI AS FOTOS DOS QUADROS E NÃO ACHEI UM AVISO DE QUE SERIA HOJE. OS MINI-TESTES VÃO SER EM DIAS MARCADOS CLARAMENTE - E EM QUINTAS-FEIRAS

P1: 31/OUT

PRIMEIRO MINI-TESTE: 26/SET.

$$\boxed{\begin{array}{l} s=\operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2}=c \\ ds=c\,d\theta \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t=\tan\theta \\ \sqrt{1+t^2}=z \\ dt=z^2\,d\theta \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z=\sec\theta \\ \sqrt{z^2-1}=t \\ dz=zt\,d\theta \end{array}}$$

A MAIORIA DOS PROBLEMAS SOBRE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA EM LISTAS DE EXERCÍCIOS SUPÕEM QUE VOCÊS SAIBAM O SEGUNDO PASSO:

COMO É QUE A GENTE LIDA COM "TERMOS RUINS" COMO POR EXEMPLO ISTO?

$$\sqrt{\underset{\text{NÃO É 1}}{4} - \underset{\text{NÃO É 1}}{9}x^2}$$

$$\sqrt{4-9x^2} =$$
$$\sqrt{4\left(1-\tfrac{9}{4}x^2\right)} =$$
$$\sqrt{4}\,\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} =$$
$$2\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} =$$
$$2\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2} = \qquad \left[u=\tfrac{3}{2}x\right]$$
$$2\sqrt{1-u^2}$$

$$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx =$$
$$\int \underbrace{x}_{\frac{2}{3}u}\cdot 2\sqrt{1-(\underbrace{\tfrac{3}{2}x}_{u})^2}\,\underbrace{dx}_{\frac{2}{3}du} = \qquad \left[\begin{array}{l} u=\tfrac{3}{2}x \\ x=\tfrac{2}{3}u \\ dx=\tfrac{2}{3}du \end{array}\right]$$
$$\int \tfrac{2}{3}u\cdot 2\sqrt{1-u^2}\cdot\tfrac{2}{3}du =$$
$$\tfrac{8}{9}\int u\sqrt{1-u^2}\,du = \qquad [s=u]$$
$$\tfrac{8}{9}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

NA PÁGINA DO CURSO TEM LINKS PRA LISTAS ANTIGAS DE C2 DO GMA (UM DEPARTAMENTO DA UFF DE NITERÓI)...

ALGUNS DOS PROBLEMAS DIZEM CLARAMENTE "RESOLVA POR SUBST. TRIGONOMÉTRICA" -

DICAS:

(I) COMECEM POR ESSES PROBLEMAS,

(II) SEMPRE VERIFIQUEM AS RESPOSTAS DE VOCÊS POR TFC2,

(III) TREINEM MUITO.

OBS: A GENTE VIU NA AULA SOBRE FRAÇÕES PARCIAIS QUE PRA RESOLVER COISAS COMO:

$$\int \frac{1}{(x-i)(x+i)}\,dx = ?$$
$$\parallel$$
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

TRUQUE:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}\,dx =$$
$$\int \sqrt{x^2+1}^{\,(-2)}\,dx$$

SOBRE A AULA DE AMANHÃ:

$$\int \underbrace{(\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2}_{\text{AMBOS PARES}}\,d\theta = ?\ !!$$

MÉTODO TRADICIONAL: VÁRIAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS (DIFÍCEIS, ARBITRÁRIAS)

VAMOS USAR UM MÉTODO BASEADO EM

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$

AMANHÃ: VAMOS COMEÇAR A VER ISSO.

C2 20/SET/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- Introdução à série de Taylor
- Como calcular boas aproximações para e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ na mão
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$
- Como usar isso pra resolver todos os problemas que exigem identidades trigonométricas!!

(E aí vocês vão aprender um método que quando vocês fizerem na prova vai ser muito mais fácil de corrigir do que as contas com identidades trigonométricas!)

Como recuperar um polinômio a partir das suas derivadas?

↑ no ponto $x=0$

DEFS: $\operatorname{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', f'''', f^{(5)}, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Exemplos:

Se $f(x) = 4x^2+5x+6$

Então $f'(x) = 8x+5$

$f''(x) = 8$

$f'''(x) = 0$

$f''''(x) = 0$

Se $g(x) = e^x$

$g'(x) = e^x$

$g''(x) = e^x$

$g'''(x) = e^x$

$\operatorname{derivs}(f) = (4x^2+5x+6,\ 8x+5,\ 8,\ 0,\ 0, \ldots)$

$\operatorname{derivs}(g) = (e^x, e^x, e^x, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(f) = (6, 5, 8, 0, 0, 0, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(g) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

Exercícios:

Calcule:

1. $\operatorname{derivs}(100x^3 + 1000x^2 + 10000x + 100000)$
2. derivs_0 da função acima
3. $\operatorname{derivs}(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$
4. derivs_0 da função acima
5. $\operatorname{derivs}(\operatorname{sen} x)$
6. $\operatorname{derivs}_0(\operatorname{sen} x)$
7. $\operatorname{derivs}(\cos x)$
8. $\operatorname{derivs}_0(\cos x)$
9. Se $\operatorname{derivs}_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, quem são a, b, c, d, e?

Dica: seja $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Calculem $f'(x), f''(x), \ldots$ $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$

Lembre que usamos "$p(x)$" pra denotar um polinômio...

Se $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

Então $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

Isto aqui é mais claro:

Se $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0, 0, 0, \ldots)$

Então $p(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{24}x^4 + \frac{a_5}{120}x^5$

$0! = 1$, $1! = 1$, $\leftarrow 2!$, $\leftarrow 3!$, $\leftarrow 4!$, $\leftarrow 5!$

E se a gente fingir que já pode fazer isso com "polinômios infinitos"?

Se $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

Então $p(x) = 1x^0 + 1x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$

$p(0.1) = 1 + 1\cdot 0.1 + \frac{1}{2}\cdot 0.01 + \frac{1}{6}\cdot 0.001 + \frac{1}{24}\cdot 0.0001 + \ldots$

As pessoas viram que os termos dessa série, isto é, deste somatório, vão ficando cada vez melhores...

C2 20/SET/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- INTRODUÇÃO À SÉRIE DE TAYLOR
- COMO CALCULAR BOAS APROXIMAÇÕES PARA e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ NA MÃO
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
- COMO USAR ISSO PRA RESOLVER TODOS OS PROBLEMAS QUE EXIGEM IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS !!

(E AÍ VOCÊS VÃO APRENDER UM MÉTODO QUE QUANDO VOCÊS FIZEREM NA PROVA VAI SER MUITO MAIS FÁCIL DE CORRIGIR DO QUE AS CONTAS COM IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS!)

A SÉRIE DE TAYLOR DO e^x (OBS: "EM $x=0$") É:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \Leftarrow ?$$

A SÉRIE DE TAYLOR DO e^x TRUNCADA EM GRAU N É:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k$$

VERSÃO FORMAL:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

EM PORTUGUÊS: PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ ESSE LIMITE EXISTE E É IGUAL A e^x.

DÁ PRA FAZER ISSO TAMBÉM PRA SEN X E COS X... MAS AS FÓRMULAS SÃO UM POUCO MAIS COMPLICADAS.

$$\operatorname{derivs}_0(\cos x) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$$
$$\operatorname{derivs}_0(\operatorname{sen} x) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$$

SÉRIES DE TAYLOR:

$$\cos x = 1x^0 + 0x^1 - \tfrac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots$$
$$= 1 \quad -\tfrac{1}{2}x^2 \quad + \tfrac{1}{4!}x^4 \quad - \tfrac{1}{6!}x^6 + \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = \quad x \quad -\tfrac{1}{3!}x^3 \quad + \tfrac{1}{5!}x^5 \quad - \ldots$$

A PARTIR DE AGORA VAMOS ACREDITAR QUE

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \ldots,$$
$$\cos x = 1 \quad - \tfrac{1}{2!}x^2 \quad + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = \quad x \quad - \tfrac{1}{3!}x^3 \quad + \tfrac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

VALEM SEMPRE.

X REAL: OK.

X COMPLEXO: NOVIDADE, VAMOS TENTAR ENTENDER!

UM CASO SIMPLES:

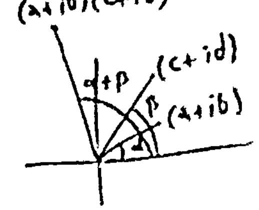
$$e^i = ?$$

$$(a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad - bd$$
$$= \underbrace{(ac-bd)}_{\text{PARTE REAL}} + i\underbrace{(bc+ad)}_{\text{PARTE IMAGINÁRIA}}$$

$i^0 = 1$
$i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$i^7 = -i$
$i^8 = 1$

$$e^i = 1 + i + \tfrac{1}{2!}i^2 + \tfrac{1}{3!}i^3 + \tfrac{1}{4!}i^4 + \ldots$$
$$= 1 + i - \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!}i + \tfrac{1}{4!} - $$

MICRO-REVISÃO DE COMPLEXOS (SÓ PRA VOCÊS ACREDITAREM QUE $(a+ib)(c+id)$ SOMA ÂNGULOS)



EXERCÍCIO:

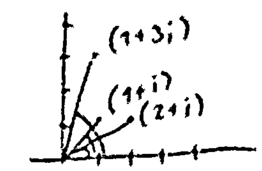
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO REPRESENTE GRAFICAMENTE $(a+ib)$, $(c+id)$, O PRODUTO $(a+ib)(c+id)$, E OS ÂNGULOS QUE ELES FORMAM COM O VETOR $\overline{(1+0i)}$ =

ⓐ $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = i$

ⓑ $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = 1+i$,

ⓒ $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = -i$

ⓑ $(2+i)(1+i) = 1+3i$



C2 26/set/2019

Turma grande

Na aula passada nós vimos estas fórmulas aqui:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \Leftarrow \boxed{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{2}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{3}$$

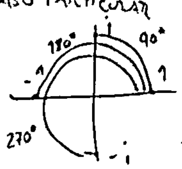
Hoje vamos entender porque é que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

E vamos ver como isso pode ser usado pra provar um monte de identidades trigonométricas... Por exemplo as da folha do APEX Calculus que eu trouxe hoje, que vem logo depois do índice.

Lembre que o produto complexo "soma ângulos". Um caso particular disso é:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



Truque: Lembre que quando a gente faz contas com complexos a gente separa a parte real e a parte imaginária no final... Ex:

$(2+3i)(4+5i) =$
$2\cdot4 + 3i\cdot4 + 2\cdot5i + 3i\cdot5i =$
$(2\cdot4 + 3i\cdot5i) + i(3\cdot4 + 2\cdot5) =$
$(2\cdot4 - 3\cdot5) + i(3\cdot4 + 2\cdot5) =$
$-7 + 22i$

O que acontece se fazemos a substituição $[x := i\theta]$ na fórmula 1 e depois separamos a parte real da imaginária?

(Suponha que θ é real)

Vamos usar $\boxed{2}[x := \theta]$, $\boxed{3}[x := \theta]$.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) \Leftarrow \boxed{\cos\theta}$$

$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right) \Leftarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Ou seja:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

A gente tem "significados preferidos" pra algumas letras...

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad c = \cos\theta$
$t = \tan\theta$ $\quad z = \sec\theta$

Novidade: $E = e^{i\theta}$

Obs: $\boxed{E = c + is}$

Lembre que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Dá pra provar – mas acreditem! – que isso continua valendo pro e^x definido por $\boxed{1}$, que aceita argumentos complexos...

Por exemplo:

$$e^{(2+3i)+(4+5i)} = e^{(2+3i)} \cdot e^{(4+5i)}$$

Então, por exemplo:

$e^{42i+99i} = e^{42i} \cdot e^{99i}$
$e^{i\theta - i\theta} = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$
$e^{0} = 1$
$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$
$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = E^{-1}$
$e^{-i\theta} = E^{-1}$
$e^{42\theta} = (e^{\theta})^{42} = E^{42}$

Obs: a gente pode escrever $e^{42i\theta}$ como E^{42} e $e^{-99i\theta}$ como E^{-99}. Mas a gente não vai ter uma notação curta pra coisas como $\cos 42\theta$ e $\operatorname{sen} 99\theta$.

C2 26/SET/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ESTAS FÓRMULAS AQUI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \Leftarrow \boxed{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{2}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{3}$$

HOJE VAMOS ENTENDER PORQUE É QUE

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

$E = c + is$

$e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k = E^k$

LEMBRE QUE $\cos x$ É UMA "FUNÇÃO PAR" (COMO x^2)
E $\operatorname{sen} x$ É UMA "FUNÇÃO ÍMPAR" (COMO x, x^3)

DAÍ: $\cos -\theta = \cos\theta$
$\operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$

SE FIZERMOS A SUBSTITUIÇÃO $[\theta := -\theta]$ EM $\boxed{4}$
OBTEMOS:

$$\underbrace{e^{-i\theta}}_{E^{-1}} = \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = c - is$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= c + is \\ E^{-1} &= c - is \end{aligned}}$$

$$E + E^{-1} = (c + \cancel{is}) + (c - \cancel{is}) = 2c$$

$$\boxed{E + E^{-1} = 2c} \Rightarrow \boxed{c = \frac{E + E^{-1}}{2}}$$

$$E - E^{-1} = (\cancel{c} + is) - (\cancel{c} - is) = is + is = 2is$$

$$\boxed{E - E^{-1} = 2is} \Rightarrow \boxed{s = \frac{E - E^{-1}}{2i}}$$

SUGESTÃO:
DEPOIS VEJAM AS PROVAS DE C2 DOS ÚLTIMOS SEMESTRES... NO RODAPÉ DELAS EU SEMPRE PONHO ALGUMAS DESSAS FÓRMULAS.

LEMBREM:
TRIÂNGULO DE PASCAL:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

BINÔMIO DE NEWTON:

$$(A+B)^6 = A^6B^0 + 6A^5B^1 + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6A^1B^5 + 1A^0B^6$$

EXERCÍCIOS:

(1) CALCULE $(E + E^{-1})^5$.

(2) CALCULE $(E - E^{-1})^6$.

(3) CALCULE $(\cos\theta)^5$.
DICA: $\left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right)^5$.

(4) CALCULE $(\operatorname{sen}\theta)^6$.
DICA: $\left(\frac{E - E^{-1}}{2i}\right)^6$.

$$\Rightarrow (E + E^{-1})^5 = 1E^5(E^{-1})^0 + 5E^4(E^{-1})^1 + 10E^3(E^{-1})^2 + 10E^2(E^{-1})^3 + 5E^1(E^{-1})^4 + 1E^0(E^{-1})^5 = E^5 + 5E^3 + 10E + 10E^{-1} + 5E^{-3} + E^{-5}$$

(5) $(E\ \ + E\ \ ) = K\cos 42\theta$.
DESCUBRA PORQUÊ E DESCUBRA O VALOR DE K.

(6) $(E^{99} - E^{-99}) = K \operatorname{sen} 99\theta$.
DESCUBRA PORQUÊ E DESCUBRA O VALOR DE K.

(7) DEMONSTRE A SEGUNDA "DOUBLE ANGLE FORMULA" DA FOLHA:

$$\cos 2\theta = 1 - 2(\operatorname{sen}\theta)^2$$

TRUQUE:

$$\boxed{\begin{aligned} c &\to \frac{E + E^{-1}}{2} \\ s &\to \frac{E - E^{-1}}{2i} \end{aligned}} \Leftarrow \text{USE ESTAS PRIMEIRO}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E^k + E^{-k} &\to \ldots \\ E^k - E^{-k} &\to \ldots \end{aligned}} \Leftarrow \text{E ESTAS DEPOIS.}$$

C2 26/SET/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ESTAS FÓRMULAS AQUI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad [1]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad [2]$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad [3]$$

HOJE VAMOS ENTENDER PORQUE É QUE

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \quad [4]$$

MINI-TESTE

SEJAM $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

$P = \{-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 1\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE E CALCULE

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx - \underline{\int_P} f(x)\,dx.$$

C2 27/SET/2019

TURMA GRANDE

HOJE:

- ALGUMAS DICAS SOBRE OS EXERCÍCIOS DE ONTEM E SOBRE EXERCÍCIOS QUE A GENTE PODE FAZER USANDO $E = C + iS$
- ÁREAS ENTRE CURVAS ⇐ SEÇÃO 7.1 DO APEX
- $\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$ ⇐ FICARAM PRA AULA QUE VEM

NO FINAL DA AULA DE ONTEM EU DISSE "DEDUZA AS FÓRMULAS DA SEÇÃO "DOUBLE ANGLE FORMULAS" DA PÁGINA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DO APEX"... É MAIS FÁCIL COMEÇAR PELA SEÇÃO "POWER-REDUCING FORMULAS"!

SUGESTÃO: DÊEM UMA OLHADA NA PÁGINA SOBRE "FOURIER SERIES" NA WIKIPEDIA EM INGLÊS... AS FIGURAS MOSTRAM COMO FUNÇÕES PERIÓDICAS PODEM SER APROXIMADAS POR SOMAS DE SENOS E COSSENOS (DE VELOCIDADES DIFERENTES).

① EXERCÍCIO

(PRA QUEM QUISER APRENDER A DECORAR AS FÓRMULAS PARA $(\cos\theta)^2$ E $(\operatorname{sen}\theta)^2$)...

DESENHE OS GRÁFICOS DE:

ⓐ $\cos x$
ⓑ $\operatorname{sen} x$
ⓒ $\cos 2x$
ⓓ $\operatorname{sen} 2x$
ⓔ $1+\cos 2x$ ⓔ' $\frac{1+\cos 2x}{2}$
ⓕ $1+\operatorname{sen} 2x$ ⓕ' $\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{2}$
ⓖ $1-\cos 2x$ ⓖ' $\frac{1-\cos 2x}{2}$
ⓗ $1-\operatorname{sen} 2x$ ⓗ' $\frac{1-\operatorname{sen} 2x}{2}$
ⓘ $(\cos x)^2$
ⓙ $(\operatorname{sen} x)^2$

DICA:

$\int f(x)g(x)\,dx$ É DIFÍCIL DE INTEGRAR,

$\int f(x)+g(x)\,dx$ É FÁCIL DE INTEGRAR...

O MÉTODO DO $E = C + iS$ TRANSFORMA COISAS DIFÍCEIS DE INTEGRAR — PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS ("DE DIFERENTES VELOCIDADES" — P.EX.: $(\cos 2\theta)^3(\operatorname{sen} 4\theta)^5 \operatorname{sen} 6\theta$) EM SOMAS DE SENOS E COSSENOS ("DE DIFERENTES VELOCIDADES", COMO NA SÉRIE DE FOURIER)...

ENTÃO COMECE POR $(\cos\theta)^2$ ⇐ UM PRODUTO! $(\cos\theta)(\cos\theta)$

E TENTE TRANSFORMÁ-LO NUMA SOMA DA FORMA

$\alpha \cos 0\theta$ ⇐ $\cos 0\theta = \cos 0 = 1$
$+ \beta \cos 2\theta$
$+ \gamma \operatorname{sen} 2\theta \ldots$

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (E+E^{-1})^2$$
$$= \frac{1}{4}(E^2+2+E^{-2})$$
$$= \frac{1}{4}((E^2+E^{-2})+2)$$
$$= \frac{1}{4}(2\cos 2\theta + 2)$$
$$= \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 = \left(\frac{E-E^{-1}}{2i}\right)^2 =$$

$$(\cos\theta)^3 =$$

$$(\cos 42\theta)(\cos 99\theta) = \left(\frac{E^{42}+E^{-42}}{2}\right)\left(\frac{E^{99}+E^{-99}}{2}\right)$$

$$\int (\cos 42\theta)(\cos 99\theta)\,d\theta =$$

$$(\operatorname{sen} 3\theta)^2(\cos 4\theta)^2 = \left(\frac{E^3-E^{-3}}{2i}\right)^2\left(\frac{E^4+E^{-4}}{2}\right)^2 = \frac{1}{(-4)4}(E^6-2+E^{-6})(E^8+2+E^{-8})$$
$$= \frac{1}{-16}(E^{14}-2E^8+2E^6-\ldots)$$

$$C = \frac{E+E^{-1}}{2}$$
$$2C = E+E^{-1}$$
$$E+E^{-1} = 2C$$
$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad (*)$$

FAZENDO $(*)[\theta := 73\theta]$ OBTEMOS:

$$e^{i73\theta}+e^{-i73\theta} = 2\cos 73\theta$$
$$E^{73}+E^{-73} = 2\cos 73\theta$$

$\boxed{\text{C2. 1/out/2019}}$

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !! ← SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

ASSUNTOS PRINCIPAIS: ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!

EXEMPLO 7.1.2:

$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{(x^3-7x^2+14x-8)}_{h(x)}\,dx = H(x)\Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{x^3}_{m(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{M(x)}\Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$M'(x)=m(x)$$

$$H(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}+7x^2-8x$$

$$H(2)=4-\frac{56}{3}+28-16=\underbrace{\underbrace{28+4}_{32}-16}_{16}-\frac{56}{3}=\frac{48}{3}-\frac{56}{3}=-\frac{8}{3}=-\frac{32}{12}$$

$$H(1)=\frac{1}{4}-\frac{7}{3}+7-8=\frac{3}{12}-\frac{28}{12}-\frac{12}{12}=-\frac{37}{12}$$

$$H(2)-H(1)=\frac{5}{12}$$

$$\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

$$\int 42f(x)+99g(x)\,dx=\int 42f(x)\,dx+\int 99g(x)\,dx=42\int f(x)\,dx+99\int g(x)\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2\pi}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\frac{x^2}{4}+3x-\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+x\right)=$$

$$\frac{x^2}{4}+3x-\frac{\operatorname{sen}x}{2}-x=$$

$$\frac{x^2}{4}+2x-\frac{\operatorname{sen}x}{2}\Bigg|$$

$x=2\pi \rightarrow \dfrac{(2\pi)^2}{4}+2(2\pi)-\dfrac{\operatorname{sen}2\pi}{2} = \dfrac{4\pi^2}{4}+4\pi-0 = \pi^2+4\pi=$

$x=0 = 0$

$$① \int f(x)\,dx=\int \frac{1}{2}x+3\,dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+3\int 1\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}+3x=\frac{x^2}{4}+3x$$

$$E=c+is$$

$$② \int g(x)\,dx=\frac{\cos x}{2}+1=\int\frac{\cos x}{2}\,dx+\int 1\,dx=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx+\int 1\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+x$$

C2 4/out/2019

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !! ⇦ SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

ASSUNTOS PRINCIPAIS: ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!

$f(x) = \sqrt{x} + 1 \therefore y - 1 = x^{1/2} = (y-1)^2 = x$

$g(x) = \sqrt{2-x} + 1 \therefore y - 1 = (2-x)^{1/2}$

$(y-1)^2 = 2 - x$

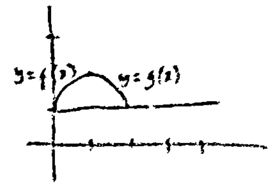
$-(y-1)^2 + 2 = x$

$\int (f(y) - g(y))\, dy \therefore$ 1º - DESCOBRIR $f(y)$

$\int (y-1)^2\, dy \quad [(y-1) = u]$

$= \int u^2\, du$

$= \frac{u^3}{3} = \frac{(y-1)^3}{3}$



$f(x) = \sqrt{x} + 1$

$g(x) = \sqrt{2-x} + 1$

$y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x}$

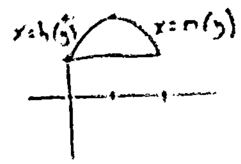
$\Rightarrow (y-1)^2 = x$

$\Rightarrow x = (y-1)^2$

$y = \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{2-x}$

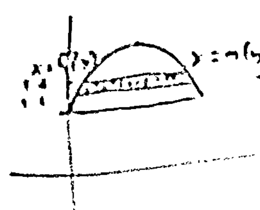
$\Rightarrow (y-1)^2 = 2 - x$

$x = 2 - (y-1)^2$

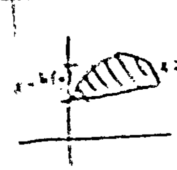


$h(y) = (y-1)^2$

$m(y) = 2 - (y-1)^2$



$\Rightarrow \int_{y=1.2}^{y=1.4} m(y) - h(y)\, dy$



$\Rightarrow \int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy$

$\int m(y)\, dy = M(y) = \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right)$

$= \int 2 - (y-1)^2\, dy =$

$\int 2 - (y^2 - 2y + 1)\, dy =$

$\int -y^2 + 2y + 1\, dy =$

$-\frac{y^3}{3} + y^2 + y$

$\int h(y)\, dy = H(y) = \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + y\right)$

$= \int (y-1)^2\, dy$

$= \int y^2 - 2y + 1\, dy$

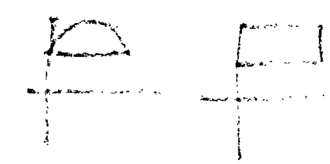
$= \frac{y^3}{3} - y^2 + y$

$\int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy = \left(M(y) - H(y)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$

$= \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + \cancel{y} - \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + \cancel{y}\right)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$

$= \left(-2\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$

$= 2\left(-\frac{y^3}{3} + y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2} = 2\left(\left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right)\right) = 2\left(-\frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right) = 2\left(-\frac{9}{3} + 5\right) = 2(-3+5) = 2 \cdot 2 = 4$!!

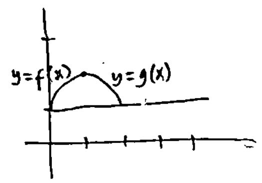


C2 4/OUT/2019

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !!

← SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

ASSUNTOS PRINCIPAIS: ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!



$f(x)=\sqrt{x}+1$

$g(x)=\sqrt{2-x}+1$

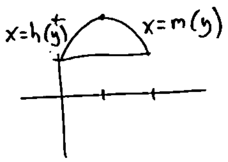
$y=\sqrt{x}+1 \Rightarrow y-1=\sqrt{x}$
$\Rightarrow (y-1)^2=x$
$\Rightarrow x=(y-1)^2$

$y=\sqrt{2-x}+1 \Rightarrow y-1=\sqrt{2-x}$
$\Rightarrow (y-1)^2=2-x$
$x=2-(y-1)^2$

$h(y)=(y-1)^2$
$m(y)=2-(y-1)^2$

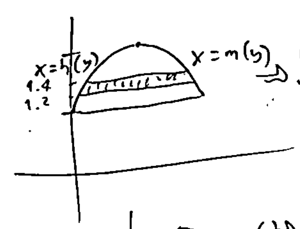
$f(x)=\sqrt{x}+1 \therefore y-1 = x^{1/2} = (y-1)^2 = x$

$g(x)=\sqrt{2-x}+1 \therefore y-1=(2-x)^{1/2}$
$(y-1)^2 = 2-x$
$-(y-1)^2+2=x$

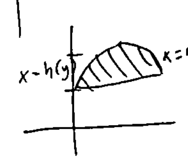


$\int (f(y)-g(y))\,dy$ $\therefore$ 1º - DESENV. $f(y)$.

$\int (y-1)^2\,dy \quad [(y-1):=u]$
$= \int u^2\,du$
$= \frac{u^3}{3} = \frac{(y-1)^3}{3}$



$\Rightarrow \int_{y=1.2}^{y=1.4} m(y)-h(y)\,dy$



$\Rightarrow \int_{y=1}^{y=2} m(y)-h(y)\,dy$

$\int m(y)\,dy = M(y) = \left(-\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)$

$= \int 2-(y-1)^2\,dy =$

$\int 2-(y^2-2y+1)\,dy =$

$\int -y^2+2y+1\,dy =$

$-\frac{y^3}{3}+y^2+y$

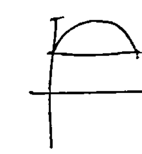
$\int h(y)\,dy = H(y) = \left(\frac{y^3}{3}-y^2+y\right)$

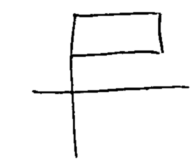
$= \int (y-1)^2\,dy$

$= \int y^2-2y+1\,dy$

$= \frac{y^3}{3}-y^2+y$

$$\int_{y=1}^{y=2} m(y)-h(y)\,dy = \left(M(y)-H(y)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$$
$$= \left(-\frac{y^3}{3}+y^2+\cancel{y}-\left(\frac{y^3}{3}-y^2+\cancel{y}\right)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$$
$$= \left(-2\frac{y^3}{3}+2y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$$
$$= 2\left(-\frac{y^3}{3}+y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2} = 2\left(\left(-\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+1^2\right)\right) = 2\left(-\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right) = 2\left(-\frac{9}{3}+5\right) = 2(-3+5)$$
$$= 2\cdot 2 = 4 \;!!$$





C2 10/out/2019

Turma grande

Hoje: Somas de Riemann; Volumes; Discussão sobre o mini-teste.

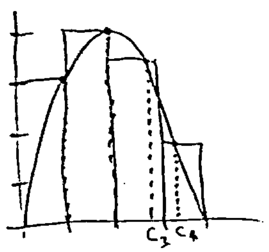
DICA: Leiam o cap. 7 do Apex Calculus!!!

Ele começa relembrando algo que eu resolvi deixar pra apresentar só agora: Somas de Riemann.

Exemplo:

$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$ ...

Visualmente:



Se $f(x) = 4-(x-2)^2$,

$P = \{0,1,2,3,4\}$,

$c_1 = 1$,
$c_2 = 2$,
$c_3 = 2.7$,
$c_4 = 3.3$,

} Dados extras! Restrisão: $\forall i .\ c_i \in [a_i, b_i]$

$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x =$

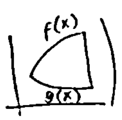
$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)(b_i - a_i) =$

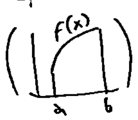
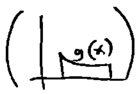
$f(\underbrace{c_1}_{1})\underbrace{(\underbrace{b_1}_{1}-\underbrace{a_1}_{0})}_{1} + f(\underbrace{c_2}_{2})\underbrace{(\underbrace{b_2}_{2}-\underbrace{a_2}_{1})}_{1} + f(\underbrace{c_3}_{2.7})\underbrace{(\underbrace{b_3}_{3}-\underbrace{a_3}_{2})}_{1} + f(\underbrace{c_4}_{3.3})\underbrace{(\underbrace{b_4}_{4}-\underbrace{a_4}_{3})}_{1}$

Se escolhermos os "c_i"s do jeito certo (e se $f(x)$ for contínua!) conseguimos fazer com que $\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$ seja igual a qualquer um dos métodos de integrasão que a gente viu:

[L], [R], [M], [min], [máx], [inf], [sup], [TRAP] !!! ...

A primeira aplicação disso (somas de Riemann) no cap. 7 é calcular áreas...

Área () =

Área () − Área () =

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$

Na hora de discutir como usar retângulos pra medir essas áreas ele usa dois truques...

TRUQUE ①

A área sob essa curva entre a_i e b_i é exatamente a área de <u>algum</u> retângulo $f(c_i)(b_i - a_i)$ — existe $c_i \in [a_i, b_i]$ etc etc.

Truque ②

"The approximation becomes exact by taking the limit $\boxed{\lim_{N\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$"

Esse limite daqui é algo <u>bem</u> complicado — limite entre todas as partições de $[a,b]$ "à medida que elas ficam infinitamente finas"...

Vimos que

$\lim_{\substack{P\ \text{part}\ [a,b] \\ \|P\|\to 0}} \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i)} = [L]$

$= \lim_{\substack{P\ \text{part}\ [a,b] \\ \|P\|\to 0}} \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i)} = [R]$

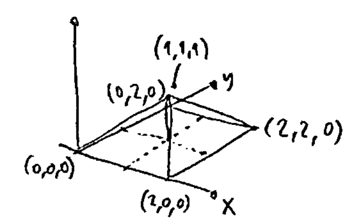
... nesse trecho do livro fica implícito que estamos escolhendo os "c_i"s de qualquer jeito, não do jeito mágico do truque ① que faz os resultados serem exatos.

A gente já viu (numa aula às 7:00 num dia que quase todo mundo esforçou !!) um pouco sobre áreas... então quem não veio pfavor (re)veja isto em casa...

Vamos passar direto pra volumes.

Exemplo:

Seja P esta pirâmide:



Exercícios:

Se cortarmos essa pirâmide por um plano horizontal vamos obter um quadrado "flutuando no ar"... Dê as coordenas dos quatro vértices destes quadrados nos casos:

ⓐ $z = 0.5$

ⓑ $z = 0.1$

ⓒ $z = 0.9$

ⓓ caso geral, $z \in [0,1]$

C2 10/OUT/2019

TURMA GRANDE

HOJE: SOMAS DE RIEMANN; VOLUMES; DISCUSSÃO SOBRE O MINI-TESTE.

LEMBREM QUE DÁ PRA ENCONTRAR PONTOS NAS ARESTAS DA PIRÂMIDE P USANDO RETAS PARAMETRIZADAS...

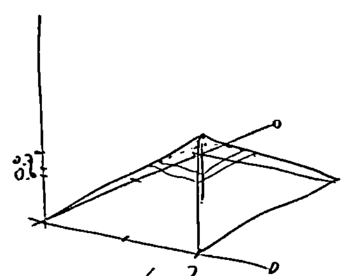
SE $A=(2,2)$
E $B=(1,1)$
ENTÃO TODOS OS PONTOS DA FORMA $A+t\overrightarrow{AB}$ ESTÃO NA RETA QUE PASSA POR A E B.

SE $A=(2,2,0)$
E $B=(1,1,1)$
ENTÃO $A+t\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B-A}=(2,2,0)+t(-1,-1,1)$
$=(2-t,2-t,t)$

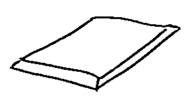
O QUE ACONTE SE A GENTE FATIA ESSE PIRÂMIDE USANDO VÁRIOS PLANOS HORIZONTAIS?

$P=\{0,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 1\}$

ENTRE $z=0.6$
E $z=0.7$,



$z=0.7$
$z=0.6$



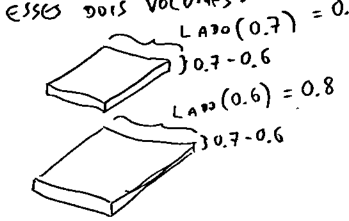
ESSA FATIA TEM UM QUADRO MAIOR EMBAIXO E UM QUADRADO MENOR EM CIMA...

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

CADA CORTE DA PIRÂMIDE P POR UM PLANO Z CONSTANTE DÁ UM QUADRADO...
DESCUBRA O LADO E A ÁREA DESSE QUADRADO.

(e) LADO(0.5), ÁREA(0.5) $\Rightarrow 1,\ 1^2$
(f) LADO(0.1), ÁREA(0.1) $\Rightarrow 1.8,\ 1.8^2$
(g) LADO(0.9), ÁREA(0.9) $\Rightarrow 0.2,\ 0.2^2$
(h) LADO(z), ÁREA(z) $\Rightarrow (2-2z),\ (2-2z)^2$

O VOLUME DESSE OBJETO 3D AQUI ESTÁ ENTRE ESSES DOIS VOLUMES:



VOLUME: $\underbrace{\text{ÁREA}(0.7)}_{0.6^2}\cdot\underbrace{\text{ALTURA}}_{0.1}$

VOLUME: $\underbrace{\text{ÁREA}(0.6)}_{0.8^2}\cdot\underbrace{\text{ALTURA}}_{0.1}$

USANDO UM DOS TRUQUES (1) OU (2) (QUAL? EU APAGUEI! !!) DESCOBRIMOS QUE O VOLUME DO OBJETO 3D COMPLICADO É

$\text{ÁREA}(c_i)\cdot(\underbrace{b_i}_{0.7}-\underbrace{a_i}_{0.6})$

c_i: ALGUM VALOR ENTRE 0.6 E 0.7

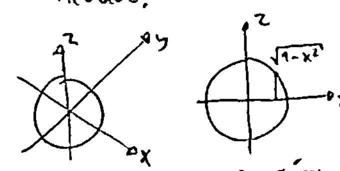
E USANDO O OUTRO TRUQUE A GENTE DESCOBRE QUE

$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME TOTAL}\\ \text{DA PIRÂMIDE P}\end{pmatrix}=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{f(c_i)}_{\text{ÁREA}(c_i)}(b_i-a_i)$$
$$=\int_{z=0}^{z=1}\text{ÁREA}(z)\,dz$$
$$=\int_{z=0}^{z=1}(2-2z)^2\,dz$$
$$=\int_{z=0}^{z=1}4-8z+4z^2\,dz$$

A GENTE JÁ VIU (NUMA AULA ÀS 7:00 NUM DIA QUE QUASE TODO MUNDO ENFORCOU !!) UM POUCO SOBRE ÁREAS... ENTÃO QUEM NÃO VEIO PFAVOR (RE)VEJA ISTO EM CASA... VAMOS PASSAR DIRETO PRA VOLUMES.

TENTEM CALCULAR EM CASA O VOLUME DA ESFERA DE RAIO 1!

TRUQUE:



COMPLICADO!! MAIS FÁCIL !!

CORTANDO A ESFERA EM PLANOS COM X CONSTANTE OBTEMOS CÍRCULOS DE RAIO $\sqrt{1-x^2}$...

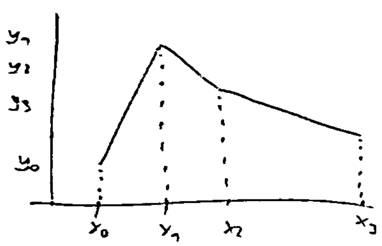
$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\ \text{TOTAL}\\ \text{DA}\\ \text{ESFERA}\end{pmatrix}=\int_{x=-1}^{x=1}\text{ÁREA}(x)\,dx$$

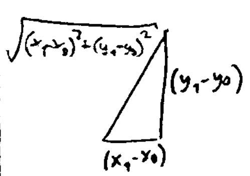
C2 11/OUT/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
MAIS MODOS DE CALCULAR VOLUMES(?),
COMO CALCULAR COMPRIMENTOS DE CURVAS.

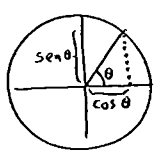
IDÉIA:

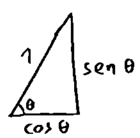




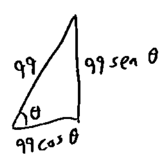
O COMPRIMENTO DESSA CURVA PODE SER CALCULADO POR UMA SOMA DE "$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$"S.

LEMBRANDO TRIGONOMETRIA...

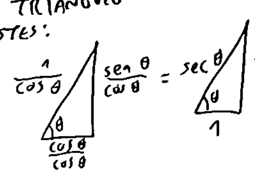




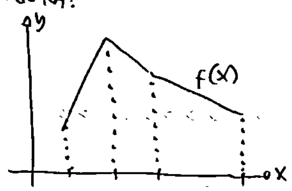
NO CÍRCULO DE RAIO 1 A HIPOTENUSA É 1
NO CÍRCULO DE RAIO 99 A HIPOTENUSA É 99 E:



UM TRIÂNGULO SIMILAR A ESTES:

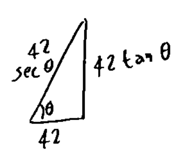


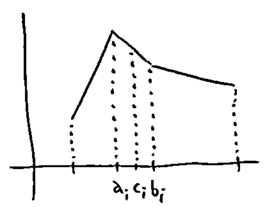
LEMBRE QUE NA FIGURA:



ESSA CURVA É FORMADA POR SEGMENTOS DE RETA, E EM CADA UM DESSES SEGMENTOS A DERIVADA $f'(x)$ É CONSTANTE...
$f'(x)$ NÃO EXISTE NOS "BICOS" — OU SEJA, EM x_0, x_1, x_2, x_3.

OUTRO:

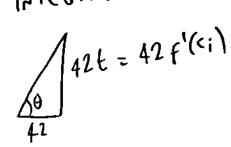




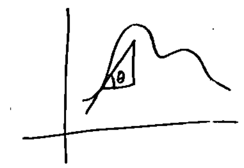
USANDO A IDÉIA DA SOMA DE RIEMANN, MAS AGORA COM $a_i < c_i < b_i$ AO INVÉS DE $a_i \le c_i \le b_i$...

$f'(c_i)$ VAI SER INDEPENDENTE DA ESCOLHA DO c_i, NO SEGUINTE SENTIDO:
$\forall c,d \in (a_i,b_i).\ f'(c)=f'(d)$.

E VOLTANDO ÀS IDENTIDADES SOBRE c,s,z,t QUE A GENTE APRENDEU NA PARTE SOBRE INTEGRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA...



OBS: RELEMBRE A RELAÇÃO ENTRE DERIVADA, COEFICIENTE ANGULAR, E A TANGENTE DESTE ÂNGULO:

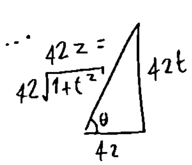


QUAL É A RELAÇÃO ENTRE z E t?

$z=\frac{1}{c}$ $\quad z^2=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$

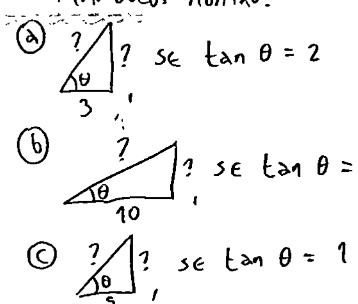
$t=\frac{s}{c}$ $\quad t^2=\frac{s^2}{c^2}$

$z^2=1+t^2$
$z=\sqrt{1+t^2}$



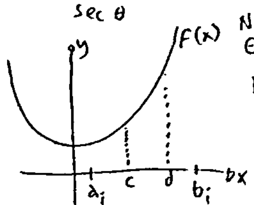
MINI-EXERCÍCIO:

CALCULE A HIPOTENUSA E O CATETO OPOSTO DOS TRIÂNGULOS ABAIXO:



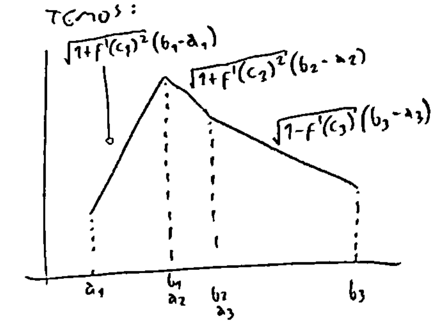
QUAL É A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE

$$\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{f'(c_i)}_{\tan\theta}{}^2}}_{\sec\theta}\,(b_i-a_i)\ ?$$



NESSE EXEMPLO
$f'(c)=1$
$f'(d)=2$.

PERA, ACHO QUE EU PULEI UM PASSO!
NO CASO DE CURVAS FORMADAS POR SEGMENTOS DE RETAS, COM $c_i \in (a_i,b_i)$, TEMOS:



C2 11/out/2019

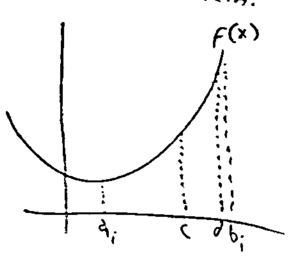
TURMA GRANDE

Hoje:

Mais modos de calcular volumes (?),

Como calcular comprimentos de curvas.

Voltando...
Considere esta figura aqui, que é uma "curva curva" e não uma curva formada de segmentos de reta:



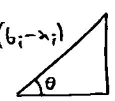
Digamos que $f'(c)=1$, $f'(d)=2$.

Qual é a interpretação geométrica de $\sqrt{1+f'(c)^2}\,(b_i-a_i)$? ⇐ triângulo com $\tan\theta=1$

e a de $\sqrt{1+f'(d)^2}\,(b_i-a_i)$? ⇐ triângulo com $\tan\theta=2$

1º caso ("c"):

$\tan\theta = 1$



2º caso ("d"):

$\tan\theta = 2$

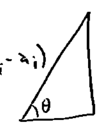
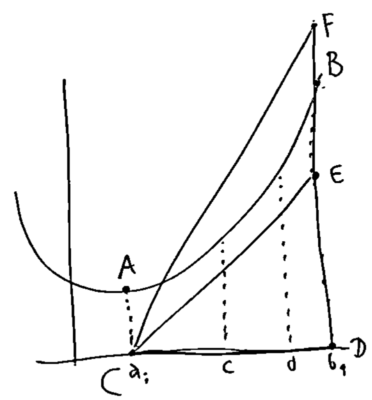
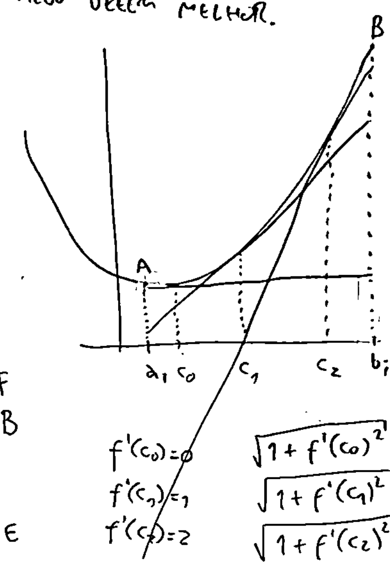


Figura com a curva original e os dois triângulos:



No olhômetro o comprimento da curva entre A e B está entre os comprimentos de CE e CF...

Aliás vamos fazer algo beeem melhor.

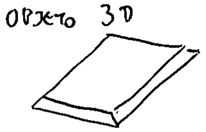


$f'(c_0)=0$ $\quad \sqrt{1+f'(c_0)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1}\,(b_i-a_i)$

$f'(c_1)=1$ $\quad \sqrt{1+f'(c_1)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1+1^2}\,(b_i-a_i)$

$f'(c_2)=2$ $\quad \sqrt{1+f'(c_2)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1+2^2}\,(b_i-a_i)$

Vamos lembrar dos truques ① e ② da aula passada... Um deles nos dizia que o volume desse objeto 3D



Era área$(c_i)(b_i-a_i)$ para algum c_i...

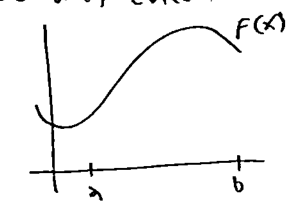
Adaptando esse truque pra comprimentos de curvas,

⇐ o comprimento da curva do exemplo entre A e B vai ser

$$\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

para algum $c_i \in (a_i, b_i)$.

O outro truque nos dizia que pra calcular o comprimento total de uma curva



entre a e b podemos calculá-lo assim:

$$\begin{pmatrix}\text{comprimento}\\ \text{total}\end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i) = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

C2 11/OUT/2019

TURMA GRANDE

HOJE:

MAIS MODOS DE CALCULAR VOLUMES(?),

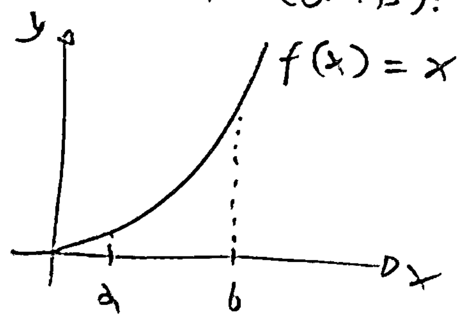
COMO CALCULAR COMPRIMENTOS DE CURVAS.

$$\int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx =$$

$$\int \sqrt{1+\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx =$$

$$\int \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \quad \left[\begin{array}{l} u = 1+\tfrac{9}{4}x \\ x = \tfrac{4}{9}(u-1) \\ dx = \tfrac{4}{9}du \end{array}\right]$$

PRIMEIRO EXEMPLO DO LIVRO (EM QUE ELE FAZ TODAS AS CONTAS):



$= x\sqrt{x}$

$f(x) = x^{3/2}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = ?$$

$$\int_{x=0}^{x=4} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = ?$$

C2 17/out/2019

Turma grande

Hoje: EDOs com variáveis separáveis!

A gente ainda tem que ver uma "aplicação da integral", que é o método para calcular áreas de certas figuras 3D, mas vamos deixar isso pra amanhã...

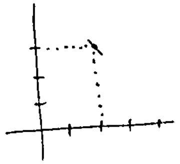
Vamos usar esta EDO como nosso primeiro exemplo:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{-\frac{x}{f(x)}} \qquad (\star)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (\star\star)$$

Obs: Lembrem que resolvemos $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+5}dx$ de um jeito totalmente diferente de: $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$... Com EDOs é a mesma coisa.

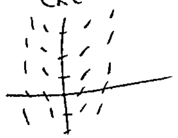
Lembre que $f(2)=3$, $f'(2)=-1$ nos dá um pouquinho de informação gráfica sobre o gráfico da f...



O gráfico da f passa pelo ponto $(2,3)$ com coef. ang. -1.

A EDO $(\star)$ – ou, equivalentemente, $(\star\star)$, vai ter várias soluções... cada uma delas é uma curva, e se desenharmos todas elas, ou muitas delas, vamos ter um "campo de direções"... que diz para cada ponto de $\mathbb{R}^2$ uma direção.

Exemplo:



Repare que

$$(\star\star) \quad f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

nos permite descobrir a "direção" (o coeficiente angular!) das soluções da $(\star\star)$ em cada ponto de $\mathbb{R}^2$...

Exemplo: No ponto $(4,1)$?

Uma solução de $(\star\star)$ é uma $f(x)$ que obedece $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ para todo x; sabemos testar se uma $f(x)$ dada obedece $(\star\star)$... por exemplo, se $f(x)=x$ temos $f'(x)=1$,

$$\boxed{f'(x) \overset{?}{=} -\frac{x}{f(x)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \overset{?}{=} -\frac{x}{1}}$$

$\Rightarrow$ Falso em geral!

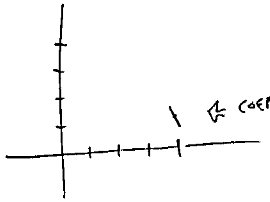
Voltando: Se a nossa solução passa pelo ponto $(4,1)$ é porque $(4,1) \in (\text{gráfico da } f)$,
$ = (x, f(x))$

então quando $x=4$ temos $f(x)=1$...

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right)[x:=4] =$$

$$\left(f'(4) = -\frac{4}{f(4)}\right), \text{ ou seja,}$$

$$f'(4) = -\frac{4}{1}, \text{ ou seja,}$$



$\Leftarrow$ coef. ang. $= -4$.

Exercício:

1) Façam esse diagrama de tracinhos para EDO $(\star)$ nos pontos onde $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

2) Esse diagrama ("campo de direções") te permite chutar uma função que tem cara de ser solução de $(\star)$?

$\boxed{\text{Façam em casa!}}$

Como a gente resolve $(\star)$ algebricamente? Vamos usar umas gambiarras não confiáveis e testar os nossos resultados no final.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 = -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2}+C_2-C_1$$

$$y^2 = -x^2+2(C_2-C_1)$$

$$y^2 = -x^2+C_3$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = C_3$$

ou: $y = \pm\sqrt{C_3-x^2}$

$f(x) = \pm\sqrt{C_3-x^2}$

3) Exercício: Testem essas possíveis soluções:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{C_3-x^2}$

e) $f(x) = -\sqrt{C_3-x^2}$

C2 17/out/2019

Turma grande

Hoje: EDOs com variáveis separáveis!

A gente ainda tem que ver uma "aplicação da integral", que é o método para calcular áreas de certas figuras 3D, mas vamos deixar isso pra amanhã...

Vamos usar esta EDO como nosso primeiro exemplo:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{-\frac{x}{f(x)}} \qquad (\star)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (\star\star)$$

Agora vamos generalizar isso, "começando pelo meio"...

Caso particular:

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad \frac{x^2}{2}+C_2$$

Caso geral:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$
$$H(y)+C_1 \qquad G(x)+C_2$$

Caminho 1:

$$H(y)+C_1 = G(x)+C_2$$
$$H(y) = G(x)+C_2-C_1$$
$$\underbrace{H^{-1}(H(y))}_{y} = H^{-1}(G(x)+C_2-C_1)$$

Caminho 2:

$$H(y)+C_1 = G(x)+C_2$$
$$H(y)-G(x) = C_2-C_1$$

Ou seja, as nossas soluções vão ser as curvas

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(y)-G(x) = \underbrace{C_3}_{C_2-C_1}\}$$

("curvas de nível").

(4) Exercício

(a) Resolva esta EDO:

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx \qquad (\star\star\star)$$

(b) Traduza ela pra um formato fácil de testar, como fizemos com

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

(c) Teste as soluções que você obteve no item (a) ("as soluções" porque mudando o C_3 a gente obtém várias soluções diferentes).

(d) Descubra o valor de C_3 que faz a sua solução passar pelo ponto $(42,99)$. ⇐ Casa!

(a)
$$\int e^{2y}\,dy = \int x^3\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}e^{2y}+C_1 \qquad \tfrac{1}{4}x^4+C_2$$
$$\tfrac{1}{2}e^{2y} = \tfrac{1}{4}x^4+C_2-C_1$$
$$e^{2y} = \tfrac{1}{2}x^4+2(C_2-C_1) = \tfrac{1}{2}x^4+C_3$$
$$\ln(e^{2y}) = \ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3)$$
$$2y = \ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3)$$
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3)$$

(c)
$$e^{2f(x)} = e^{2(\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}x^4+C_3))} = e^{(\ln(\frac{1}{2}x^4+C_3))} = \tfrac{1}{2}x^4+C_3$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\tfrac{1}{2}x^4+C_3) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^4+C_3)}{\frac{1}{2}x^4+C_3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3} = \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3}$$

(b)
$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx$$
$$e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{e^{2y}}$$
$$f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}$$

(c) (cont.)

$$\boxed{f'(x) \overset{?}{=} \frac{x^3}{e^{2f(x)}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3} \overset{?}{=} \frac{x^3}{\frac{1}{4}x^4+C_3}}$$

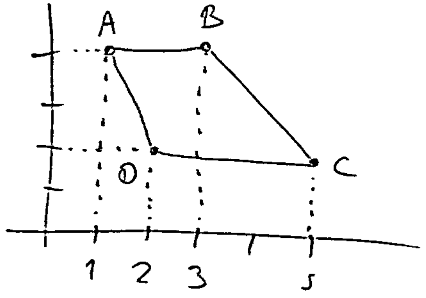
⇒ Sim!!!

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \ln'(g(x))g'(x) = \frac{1}{g(x)}g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

C2 17/out/2019

TURMA GRANDE

Acabei de distribuir uma folha com uns exercícios sobre áreas de polígonos...



$$\alpha(t) = \left(\begin{array}{l}\text{Área de } Q \\ \text{entre } x=1 \\ \text{e } x=t\end{array}\right)$$

No olhômetro,

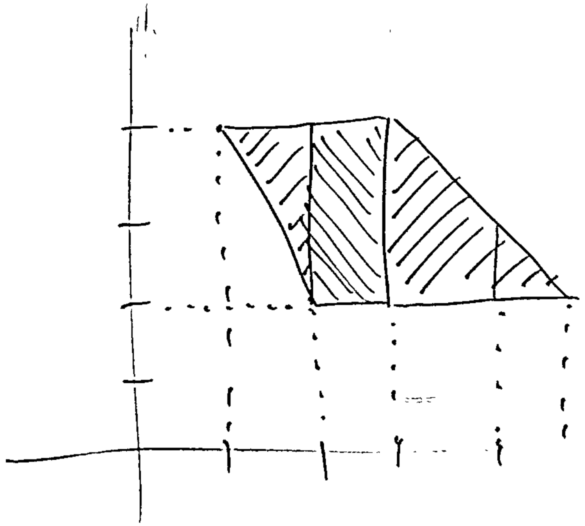
$\alpha(1) = 0$

$\alpha(2) = 1$

$\alpha(3) = 3$

$\alpha(4) = 4.5$

$\alpha(5) = 5$

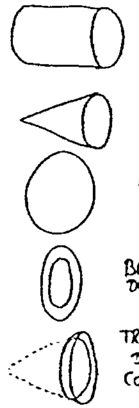


C2 18/out/2019

Turma grande

Hoje: Áreas de superfícies de revolução!

Exemplos:



cilindros,

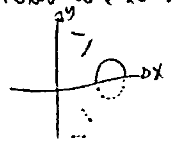
cones,

esferas,

bordas de pizzas,

troncos de cones

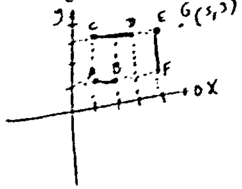
Pra gerar uma superfície de revolução a gente pega uma figura no plano xy e rotaciona ela em torno do eixo y.



Exercícios:

① Você encomendou uma pizza de raio 4 mas a borda dela era muito ruim e você não comeu, você só comeu o miolo dela, de raio 3. Qual é a área da borda que sobrou?

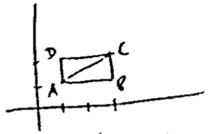
② Qual é a área do cilindro que a gente obtém rotacionando estes segmentos em torno do eixo x?



Notação:
Rot(AB), ou:
$Rot_x(AB)$;
Área(Rot(AB))

③ Calcule:
Área(Rot(AB)),
Área(Rot(CD)),
Área(Rot(EF))

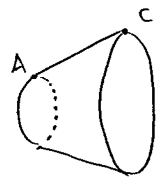
④ Como a gente calcula Área(Rot(AC)) nesta figura?



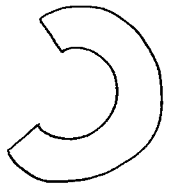
Tem vários jeitos, e alguns livros e vídeos usam um jeito desonesto...

Um jeito honesto difícil:
Faça Rot(AC) em papel e abra ele.

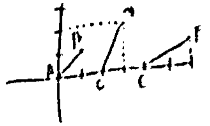
Rot(AC) =



Abrindo, vamos obter algo como:



⑤ Planifique Rot(AB), Rot(CD), Rot(DE) na figura abaixo:

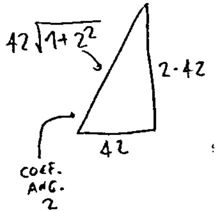


Dica:
Plan(Rot(AB)) =

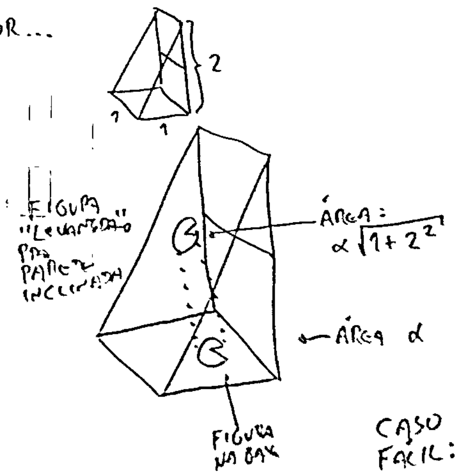
← esta circunferência externa é a circunferência de Rot(B)

este comprimento é AD

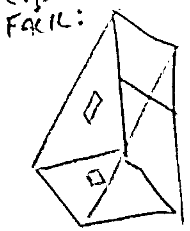
Na aula sobre comprimentos de curvas a gente interpretou o $\sqrt{1+f'(x)^2}$ como um "fator multiplicador"...



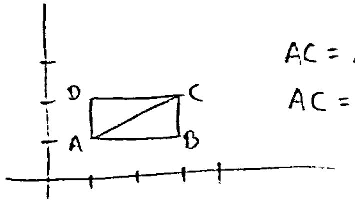
Esse fator multiplicador também vai servir pra áreas!



Caso fácil:



Voltando ao problema ④...



$AC = AB\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

$AC = DC\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

E se a gente rotacionar tudo isso?

Se a gente dividir as "versões rotacionadas" em, digamos, 360 pedaços de 1° cada um, vamos ter a impressão de que $\text{Área}\left(\frac{Rot(AC)}{360}\right) = \text{Área}\left(\frac{Rot(AB)}{360}\right)\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$...

E além disso $\text{Área}\left(\frac{Rot(DC)}{360}\right) = \text{Área}\left(\frac{Rot(AB)}{360}\right)\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$...

C2 1º/nov/2019

Hoje: o método pra resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (\star)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes")

A gente vai ver a versão "álgebra linear" desse método, que usa matrizes, vetores e funções da forma $f(x) = e^{\alpha x}$.

Alguns livros dão uma prova que não dá pra gente entender como alguém descobriu aquilo.

A gente sabe procurar soluções de $(\star)$ por chutar e testar...

1. Teste se as funções abaixo são soluções da $(\star)$:
   - (a) $f(x) = x$
   - (b) $f(x) = e^{2x}$
   - (c) $f(x) = e^{-2x}$
   - (d) $f(x) = e^{5x}$
   - (e) $f(x) = e^{-5x}$

Dica (pra derivar funções complicadas):

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = \frac{d}{dx} g(2x) = g'(2x)\frac{d}{dx}(2x) = g(2x)\cdot 2 = e^{2x}\cdot 2$$

Seja $g(y) = e^y$, então $g'(y) = e^y$

__Vetores__ são __funções__ escritas de um jeito especial...

Se $\vec{v} = (10, 20, 30)$

então $\vec{v}_1 = 10$, $\vec{v}_2 = 20$, $\vec{v}_3 = 30$, $\vec{v}_{42} =$ erro.

Se $\vec{v}_i$ é só sintaxe para $\vec{v}(i)$, então $\vec{v} : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$...

Mais precisamente:

$\vec{v} = \{(1,10), (2,20), (3,30)\}$

Temos jeitos "padrão" de definir somas de vetores e produto de vetor por escalar...

Se $\vec{w} = (100, 200, 300) = \{(1,100), (2,200), (3,300)\}$

$\vec{v} + \vec{w} = (110, 220, 330) = \{(1,110), (2,220), (3,330)\}$

$2\vec{v} = (20, 40, 60) = \{(1,20), (2,40), (3,60)\}$

Um vetor de tamanho k pode ser visto como uma função com domínio $\{1, 2, \ldots, k\}$...

Vamos ver (gambiarra!) funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ como vetores que têm infinitas componentes...

Exemplo: $f(x) = x^2$, $f(0.1) = 0.01$, $f_{0.1} = 0.01$

$f(-2) = 4$, $f_{-2} = 4$

...e podemos adaptar os nossos modos de somar vetores e multiplicar vetores por escalares pra essas funções disfarçadas de vetores...

$g(x) = 10x$

$f(2) = 4 \qquad f_2 = 4$

$g(2) = 20 \qquad g_2 = 20$

$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2, \vec{v}_3 + \vec{w}_3)$$

$(\vec{v} + \vec{w})_i = \vec{v}_i + \vec{w}_i$

$(2\vec{v})_i = 2\vec{v}_i$

$$(f+g)_2 = f_2 + g_2 = f(2) + g(2) = 4 + 20 = 24$$

$$(f+g)_x = f_x + g_x = f(x) + g(x) = x^2 + 10x$$

Os próximos passos vão ficar menos confusos se a gente introduzir uma notação (temporária!!!) pra distinguir __números__ de funções constantes — e números de vetores...

__Notação lambda__

```
int f(int a) {
  return a*a;
}
```

Em linguagens funcionais a gente tem jeitos de definir funções sem nome. Em Lua,

```
function f(a) return a*a end
f = function(a) return a*a end
```

Em λ-cálculo,

$f = (\lambda a.\, a \cdot a)$

$f(10) = 10 \cdot 10 = 100$

Mais passo a passo:

$$f(10) = (\lambda a.\, a\cdot a)(10) = (a \cdot a)[a := 10] = 10 \cdot 10 = 100$$

$$(\lambda a.\, 3)(4) = ? = 3$$

Essa notação vai nos permitir distinguir o número 4 da função constante $(\lambda a.\, 4)$.

"escalar" "vetor"

C2 1º/nov/2019

Hoje: o método pra resolver EDOs como esta aqui:

$f''(x)+7f'(x)+10f(x)=0$ (☆)

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes")

Def: (obs: a gente vai precisar melhorar ela depois!)

$Df = f'$

Exemplos:

$D(\lambda x. x^4) = (\lambda x. 4x^3)$

Uma sintaxe um pouco mais precisa:

$Df = \left(\lambda x. \frac{d}{dx} f(x)\right)$

② Calcule:

ⓐ $D(\lambda x. \operatorname{sen} x) = ?$

ⓑ $D(\lambda x. e^x) = ?$

ⓒ $D(\lambda x. e^{4x}) = ?$

ⓓ $D(\lambda x. f(x)+g(x)) = ?$

ⓔ $D(\lambda x. 200f(x)) = ?$

Essa operação D recebe uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (escrita em notação λ, que a gente trata como vetor) e retorna outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (idem!)

$D(f+g) = Df + Dg$

$D(200f) = 200\,Df$

Obs: $(\lambda x. f(x)) + (\lambda x. g(x)) = (\lambda x. f(x)+g(x))$

$(f+g) = (\lambda x. f(x)+g(x))$

D é linear! Ela se comporta como matriz!

Se $f = (\lambda x. e^{200x})$

$Df = (\lambda x. 200e^{200x})$

$= 200\,(\lambda x. e^{200x})$

$= 200\,f$

Esse $f = (\lambda x. e^{200x})$ é um autovetor da operação D associado ao autovalor 200...

$Df = 200f$

$T\vec{v} = 200\vec{v}$

Se $f = (\lambda x. e^{\alpha x})$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lembre que

(☆) $f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0$.

Dá pra reescrever isto...

(☆') $D(Df) + 7Df + \underbrace{10f}_{\text{mult. por escalar}} = 0$

$M(M\vec{v}) + 7M\vec{v} + 10\vec{v} = \vec{0}$ (☆☆)

$= (MM)\vec{v} + (7M)\vec{v} + (10I)\vec{v}$

$= (MM + 7M + 10I)\vec{v}$

Resolver (☆☆) é a mesma coisa que resolver

$(M^2 + 7M + 10)\vec{v} = \vec{0}$ (☆☆')

Se $f = (\lambda x. e^{\alpha x})$ então $Df = \alpha f$...

Vamos reescrever (☆') como:

$(D^2 + 7D + 10)f = \vec{0}$ (☆'')

③ Exercício:

Seja $f = (\lambda x. e^{\alpha x})$.

Então: $(D^2 + 7D + 10)f = \beta f$.

Calcule β.

$(D^2 + 7D + 10)f = D^2f + 7Df + 10f$

$= \alpha^2 f + 7\cdot\alpha f + 10f$

$= (\alpha^2 + 7\alpha + 10)f$

④ Exercício:

Use o que obteve no ③ pra calcular $(D^2 + 7D + 10)f$ para os seguintes valores de α:

ⓐ $\alpha = 2$

ⓑ $\alpha = -2$

ⓒ $\alpha = 5$

ⓓ $\alpha = -5$

⑤ Sejam $g = (\lambda x. e^{-2x})$ e $h = (\lambda x. e^{-5x})$.

Nós vimos no exercício 4 que $(D^2 + 7D + 10)g = 0$ e $(D^2 + 7D + 10)h = 0$.

Mostre - usando truques de Álgebra Linear - que

$(D^2 + 7D + 10)(42g + 99h) = 0$.

C2 7/NOV/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO RESOLVER EDOS COMO ESTA AQUI

$$f'' + 7f' + 10f = 0 \qquad (\star)$$

USANDO TRUQUES DE ÁLGEBRA LINEAR.

O MÉTODO É:

$$f'' + 7f' + 10f = 0$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 7D + 10)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+2)(D+5)f$$

E AS SOLUÇÕES "BÁSICAS" DISTO SÃO ESTAS AQUI:

$(D+2)f = 0 \quad \Rightarrow f_1 = e^{-2x}$

$(D+5)f = 0 \quad \Rightarrow f_1 = e^{-5x}$

...E VIMOS QUE O CONJUNTO DESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS, $\{f_1, f_2\}$ É A BASE DO ESPAÇO VETORIAL DAS SOLUÇÕES DE $\star$:

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' + 7f' + 10f = 0\}$$

(OBS: FALTAM UNS DETALHES AÍ - POR EXEMPLO, SÓ ESTAMOS INTERESSADOS NAS FUNÇÕES $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SUAVES...)

HOJE:

- $\boxed{\text{O QUE ACONTECE QUANDO AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?}}$

- PROBLEMAS DE VALOR INICIAL
- MARCAR P2, VR, VS
- DISCUSSÃO DA LISTA QUE VAI VIRAR O MINI-TESTE.

EXEMPLO:

$$f'' + f = 0 \qquad (\star\star)$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 1)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+i)(D-i)f$$

① EXERCÍCIO: QUAIS DESTAS FUNÇÕES SÃO SOLUÇÕES DE $(\star\star)$?

ⓐ e^x
ⓑ $\operatorname{sen} x$
ⓒ $\cos x$
ⓓ e^{ix}
ⓔ e^{-ix}

UMA COISA QUE FALTOU:

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

ISTO VALE PRA $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$...

$$e^{3+4i} = e^3 e^{4i}$$
$$= e^3(\cos 4 + i \operatorname{sen} 4)$$

DÁ PRA CALCULAR ISSO EM QUALQUER CALCULADORA QUE TENHA exp, cos, sen, MESMO QUE ELA NÃO SUPORTE COMPLEXOS!

$$\underbrace{e^3}_{20}\Big(\underbrace{\cos 4}_{-0.6} + i \underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7}\Big)$$

$$= \underbrace{\underbrace{e^3}_{20} \underbrace{\cos 4}_{-0.6}}_{-12} + i \underbrace{\underbrace{e^3}_{20} \underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7}}_{-14}$$

EXERCÍCIOS:

② $(2+3i)(4-5i) = ?$

③ QUAIS SÃO AS RAÍZES DISTO?
$x^2 + 8x + 25 = 0$

④ CALCULEM: $(a+ib)^2 + 8(a+ib) + 25$

⑤ TESTE AS SUAS RESPOSTAS PRA ③.

$$1x^2 + 8x + 25 = 0$$

$a = 1$, $b = 8$, $c = 25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$
$$= 64 - 100$$
$$= -36$$

RAÍZES:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-8 \pm 6i}{2}$$
$$= -4 \pm 3i$$

RAÍZES:

$x_1 = -4 + 3i$

$x_2 = -4 - 3i$

TESTANDO:

$$x_1^2 + 8x_1 + 25 \overset{?}{=} 0$$

$$(a+ib)^2 = (a+ib)(a+ib)$$
$$= a^2 + (ib)^2 + 2aib$$
$$= a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(-4+3i)^2 = (-4)^2 - 3^2 + 2(-4)\cdot 3 \cdot i$$
$$= 16 - 9 - 24i$$
$$= 7 - 24i$$

$$(a+ib)^2 + 8(a+ib) + 25 =$$
$$(a^2 - b^2 + 2abi) + 8a + 8bi + 25 =$$
$$(a^2 - b^2 + 8a + 25) + (2ab + 8b)i$$

SUBSTITUINDO $a := -4$ E $b := 3$ ACIMA, OBTEMOS:

$$(16 - 9 - 32 + 25) + (-24 + 24)i = 0 + 0i = 0$$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{36}$$
$$= i\,6$$

C2 7/NOV/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO RESOLVER EDOS COMO ESTA AQUI

$$f'' + 7f' + 10f = 0 \qquad (☆)$$

USANDO TRUQUES DE ÁLGEBRA LINEAR.

O MÉTODO É:

$$f'' + 7f' + 10f = 0$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 7D + 10)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+2)(D+5)f$$

E AS SOLUÇÕES "BÁSICAS" DISTO SÃO ESTAS AQUI:

$$(D+2)f = 0 \Rightarrow f_1 = e^{-2x}$$
$$(D+5)f = 0 \Rightarrow f_1 = e^{-5x}$$

...E VIMOS QUE O CONJUNTO DESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS, $\{f_1, f_2\}$ É A BASE DO ESPAÇO VETORIAL DAS SOLUÇÕES DE ☆:

$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' + 7f' + 10f = 0\}$$

(OBS: FALTAM UNS DETALHES AÍ - POR EXEMPLO, SÓ ESTAMOS INTERESSADOS NAS FUNÇÕES $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SUAVES ...)

HOJE:

- O QUE ACONTECE QUANDO AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

- PROBLEMAS DE VALOR INICIAL
- MARCAR P2, VR, VS
- DISCUSSÃO DA LISTA QUE VAI VIRAR O MINI-TESTE.

EXEMPLO:

$$f'' + f = 0 \qquad (☆☆)$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 1)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+i)(D-i)f$$

(1) EXERCÍCIO: QUAIS DESTAS FUNÇÕES SÃO SOLUÇÕES DE (☆☆)?

(a) e^x
(b) $\operatorname{sen} x$
(c) $\cos x$
(d) e^{ix}
(e) e^{-ix}

UMA COISA QUE FALTOU:

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

ISTO VALE PRA $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$...

$$e^{3+4i} = e^3 e^{4i}$$
$$= e^3(\cos 4 + i \operatorname{sen} 4)$$

DÁ PRA CALCULAR ISSO EM QUALQUER CALCULADORA QUE TENHA exp, cos, sen, MESMO QUE ELA NÃO SUPORTE COMPLEXOS!

$$\underbrace{e^3}_{20}\Big(\underbrace{\cos 4}_{-0.6} + i\underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7}\Big)$$
$$= \underbrace{\underbrace{e^3}_{20}\underbrace{\cos 4}_{-0.6}}_{-12} + i\underbrace{\underbrace{e^3}_{20}\underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7}}_{-14}$$

EXERCÍCIOS:

(2) $(2+3i)(4-5i) = ?$

(3) QUAIS SÃO AS RAÍZES DISTO? $x^2 + 8x + 25 = 0$

(4) CALCULEM: $(a+ib)^2 + 8(a+ib) + 25$

(5) TESTE AS SUAS RESPOSTAS PRA (3).

NO EXERCÍCIO (1) VIMOS QUE TODAS ESTAS FUNÇÕES SÃO SOLUÇÕES DA (☆☆)...

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \operatorname{sen} x \\ f_2 = \cos x \end{array}\right\} \text{SOLUÇÕES REAIS}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_3 = e^{ix} \\ f_4 = e^{-ix} \end{array}\right\} \text{SOLUÇÕES COMPLEXAS}$$

... COMBINAÇÕES LINEARES DELAS TAMBÉM SÃO SOLUÇÕES DA (☆☆)!

EXEMPLOS:

$$f_2 + if_1 = \cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix} = f_3$$
$$f_2 - if_1 = \cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix} = f_4$$
$$\frac{f_3}{2} + \frac{f_4}{2} = \frac{f_3 + f_4}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x = f_2$$
$$\frac{f_3 - f_4}{2i} = \operatorname{sen} x = f_1$$

$$e^{(3+4i)x} = e^{3x+4ix}$$
$$= e^{3x} \cdot e^{4ix}$$
$$= e^{3x}(\cos 4x + i \operatorname{sen} 4x)$$

COMO É A QUE A GENTE ENCONTRA UMA EDO DA FORMA

$$f'' + \alpha f' + \beta f = 0$$

QUE TENHA SOLUÇÕES

$$e^{3x}\cos 4x,$$
$$e^{3x}\operatorname{sen} 4x \; ?$$

(6) EXERCÍCIO:

SEJAM

$$f_1 = e^{(3+4i)x},$$
$$f_2 = e^{(3-4i)x},$$
$$f_3 = e^{3x}\cos 4x$$
$$f_4 = e^{3x}\operatorname{sen} 4x.$$

EXPRESSE f_3 COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE f_1 E f_2.

(7) VERIFIQUE QUE

$$(D-(3+4i))(D-(3-4i))f = 0 \qquad (☆☆☆)$$

TEM SOLUÇÕES

$$f_1 = e^{(3+4i)x},$$
$$f_2 = e^{(3-4i)x}.$$

(8) REESCREVA A EDO (☆☆☆) NA FORMA

$$f'' + \alpha f' + \beta f = 0.$$

TODAS AS P2, VRs E VSs DOS ÚLTIMOS SEMESTRES TEM ALGUM PROBLEMA DA FORMA $f'' + \alpha f' + \beta f = 0$ COM RAÍZES COMPLEXAS...

EXEMPLO: CONSIDERE ESTA EDO:

$$f'' - 6f' + 25f = 0 \qquad (☆☆☆☆)$$

(9) ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE (☆☆☆☆).

(10) ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS DE (☆☆☆☆).

C2 8/nov/2019

TURMA GRANDE

Estamos adiantados na matéria! A gente teve uma aula que a outra turma ainda não teve - a de 17/out, sobre EDOs com variáveis separáveis - então:

Hoje:
Problemas de valor inicial, revisão, exercícios!

Digamos que queremos uma solução para

$f''+7f'+10f=0$ (☆)

que obedeça isto:
$f(0)=3$,
$f'(0)=4$.

Sabemos que as soluções de (☆) são todas da forma:

$f(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$
$\quad=\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$

Então:
$f(0)=\alpha+\beta$
$f'(0)=-2\alpha-5\beta$

E queremos
$\alpha+\beta=3$
$-2\alpha-5\beta=4$. $\Rightarrow$

$\alpha=3-\beta$
$-2(3-\beta)-5\beta=4$
$-6+2\beta-5\beta=4$
$-3\beta=10$
$\beta=-\frac{10}{3}$

$\alpha=3+\frac{10}{3}$
$\alpha=\frac{19}{3}$

$\alpha+\beta\stackrel{?}{=}3$!!
$\frac{19}{3}-\frac{10}{3}=\frac{9}{3}$

$-2\alpha-5\beta\stackrel{?}{=}4$!!
$-2\frac{19}{3}-5(-\frac{10}{3})=-\frac{38}{3}+\frac{50}{3}=\frac{12}{3}$

Como fatorar alguns polinômios bem rápido

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Exercício:
Fatorem por chutar-e-testar:
(a) $x^2+7x+12$
(b) $x^2+2x-24$
(c) $x^2-2x-24$
(d) $x^2-7x+10$

...E no caso com raízes complexas?
Se $ax^2+bx+c=0$ é uma equação de 2º grau em que a,b,c são reais então as raízes disso vão ser dois números complexos conjugados...!
P.ex.: $3+4i$, $3-4i$

Digamos que
$x^2+bx+c=0$
$(x+\alpha)(x+\beta)$

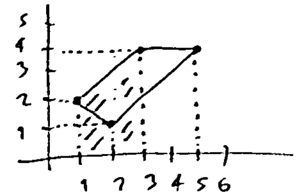
Aliás:
Digamos que α e β são complexos conjugados:
$\alpha=a+ib$
$\beta=a-ib$.
Então
$(x+\alpha)(x+\beta)=$
$(x+(a+ib))(x+(a-ib))=$
$=x^2+((a+ib)+(a-ib))x+(a+ib)(a-ib)$
$=x^2+2ax+(a^2+b^2)$

Exercício:
Fatorem por chutar-e-testar:
(a) $x^2-8x+25$
(b) $x^2-6x+25$
(c) $x^2+6x+25$
(d) $x^2+8x+25$

$x^2\underbrace{-8x}_{\substack{2a=-8\\ a=-4}}+\underbrace{25}_{\substack{a^2+b^2=25\\ 16+b^2=25\\ b^2=9\\ b=\pm3}}$

$\Rightarrow a=-4,\ b=\pm3$,
$x^2-8x+25=$
$(x+(-4+3i))(x+(-4-3i))$

Seja P este polígono:



Seja $f(x)$ a função que dá a borda superior de P, e $g(x)$ a função que dá a borda inferior de P.
Seja $H(t)=\int_{x=1}^{x=t} f(x)-g(x)\,dx$.

Dê uma definição por casos para $H(t)$ que seja fácil de calcular - como a da dica da lista.

$x+1-(-x+3)$

C2 14/NOV/2019

TURMA GRANDE

Hoje:
EDOS EXATAS!

MINI-TESTE NOS ÚLTIMOS 30 MINUTOS DA AULA!
MARCAR P2, VR, VS!

P2: 12/DEZ
VR: 13/DEZ
VS: 19/DEZ

OBS: EU COSTUMO APRESENTAR EDOs EXATAS DE UM JEITO QUE EU ACHO MAIS SIMPLES DO QUE O USUAL DOS LIVROS – EU COMEÇO PELO CASO POLINOMIAL E EM GERAL NÃO TENHO TEMPO DE PASSAR PRO CASO GERAL...

(AH, EU PUS UM LINK PRAS NOTAS DE AULA DA CRISTIANE HERNÁNDEZ NA PÁGINA, E, VOCÊS PODEM TENTAR PIRATEAR O BOYCE-DIPRIMA!)

LEMBRE QUE NÓS RESOLVÍAMOS EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS ASSIM:

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx$$

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{G(y)+C_1} \qquad \overset{\shortparallel}{H(x)+C_2}$$

$$G(y)-H(x) = C_2-C_1 = C_3$$

A SOLUÇÕES DE UMA EDO COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA FUNÇÃO $\underset{M(x,y)}{\underset{\shortparallel}{G(y)-H(x)}} = \text{const}$

EM EDOS SEPARÁVEIS A GENTE SEMPRE OBTINHA UMA $M(x,y)$ QUE PODIA SER "SEPARADA" EM $M(x,y) = G(y)-H(x)$...

VAMOS VER AGORA O CASO GERAL – AS EDOS CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO $M(x,y)$ QUALQUER

NÃO! VAMOS COMEÇAR COM O CASO EM QUE $M(x,y)$ É UM POLINÔMIO EM x E y!

LEMBREM QUE EM EDO A GENTE SEMPRE COMEÇA PELO MEIO...

SE A GENTE TEM UMA FUNÇÃO $M(x,y)$ AS SOLUÇÕES DA EDO VÃO SER AS CURVAS DE NÍVEL DELA...

MAS QUAL EDO??? !!

FIXE UMA $M(x,y)$.
QUAL É A EDO CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA $M(x,y)$?

ALGUMAS IDÉIAS DE CÁLCULO 3:
- DERIVADAS PARCIAIS
- DERIVADA TOTAL
- TEOREMA DE YOUNG / CRITÉRIO DE (ESQUECI QUEM).

EXEMPLO:
$M(x,y) = x^3y^5$

PRA GENTE CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x}M(x,y)$ A GENTE TRATA O y COMO CONSTANTE E CALCULA $\frac{d}{dx}M(x,y)$.

PRA GENTE CALCULAR $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ A GENTE TRATA O x COMO CONSTANTE E CALCULA $\frac{d}{dy}M(x,y)$.

NOTAÇÕES MAIS CURTAS:

$M_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}M(x,y)$,

$M_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$.

(1) EXERCÍCIO: CALCULEM:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^5)$

(b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^5)$

(c) $\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x^2y^4+y^5)$

(d) $\frac{\partial}{\partial y}(x^3+x^2y^4+y^5)$

REGRA DA CADEIA EM $\mathbb{R}^2$

DIGAMOS QUE
$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x = g(t)$,
$y = h(t)$,
$z = F(x,y) = F(g(t),h(t))$

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

EM CASOS BEM CONCRETOS A GENTE SABE CALCULAR $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ MESMO SEM ESSA REGRA NOVA...

(2) EXERCÍCIO:
DIGAMOS QUE
$F(x,y) = x^2y^3$,
$g(t) = \operatorname{sen} t$,
$h(t) = e^{4t}$.

$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) =$

$\frac{d}{dt}\left((\operatorname{sen} t)^2(e^{4t})^3\right) = \ ?$

$$F(g(t),h(t)) \quad \left[\begin{array}{l} F(x,y)=x^2y^3 \\ g(t)=\operatorname{sen} t \\ h(t)=e^{4t} \end{array}\right]$$

$= (\operatorname{sen} t)^2(e^{4t})^3$

$= (2(\operatorname{sen} t)(\cos t))(e^{4t})^3 + (\operatorname{sen} t)^2(12e^{12t})$

(3) CALCULE $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ USANDO A REGRA DA CADEIA EM $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F(x,y)=x^2y^3 \\ F_x(x,y)=2xy^3 \\ F_y(x,y)=x^2\cdot 3y^2 \\ g(t)=\operatorname{sen} t \\ h(t)=e^{4t} \\ g'(t)=\cos t \\ h'(t)=4e^{4t} \end{array}\right]$$

C2 14/NOV/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
EDOS EXATAS!

MINI-TESTE NOS ÚLTIMOS 30 MINUTOS DA AULA!
MARCAR P2, VR, VS!

P2: 12/DEZ
VR: 13/DEZ
VS: 19/DEZ

ABREVIANDO, E CONSIDERANDO QUE $z = F(x,y)$,
$x = g(t)$,
$y = h(t)$,

$$\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) = \frac{dz}{dt}$$

$$F_x(g(t),h(t))\, g'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

$$F_y(g(t),h(t))\, h'(t) = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad !!!$$

SE $g(t) = t$

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t)) + F_y(g(t),h(t))\, h'(t)$$

COMO É QUE A GENTE CARACTERIZA AS CURVAS DE NÍVEL DA F?

UMA CURVA DE NÍVEL DA F "É" UMA FUNÇÃO $y = h(x)$ TAL QUE

$$F(x, h(x)) = \text{CONSTANTE}\ldots$$

MAIS PRECISAMENTE, UMA FUNÇÃO $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "PERCORRE UMA CURVA DE NÍVEL DA F" QUANDO $F(x,h(x)) = \text{CONSTANTE}\ldots$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F(x,h(x)) = 0$$

OBS: $\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = \frac{d}{dt} F(g(t),h(t))$ COM $g(t) = t$

QUEREMOS

$$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = 0$$
$$\| $$
$$F_x + F_y h'(x)$$
$$\|$$
$$F_x + F_y \frac{dy}{dx}$$

A GENTE NORMALMENTE VAI ESCREVER EDOS EXATAS ASSIM:

$$\boxed{F_x\, dx + F_y\, dy = 0}$$

ÁGORA: MINI-TESTE!

C2 22/Nov/2019

Turma Grande

Hoje:
Dúvidas, exercícios,
Revisão!

Variáveis separáveis - meio:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$g(y) = y^2$ $\quad f(x) = \cos x$

1) $\int y^2\,dy = \frac{y^3}{3}$ $\quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

2) $y = \sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}$

3) $y^2\,dy = \cos x\,dx$

$\frac{y^2\,dy}{dx} = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2}$ ← EDO

4) $\frac{\cos x}{(\sqrt[3]{3\operatorname{sen} x})^2}$

① Escolham $g(y)$ e $f(x)$ fáceis de integrar

② "Resolva" a EDO, no sentido de: escreva y em função de x

③ Descubra qual é a EDO

④ Teste se a sua solução do ② é solução do ③

1) $g(y) = \cos y \quad f(x) = x^2$

2) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3}$

3) $\cos y\,dy = x^2\,dx$

$\frac{\cos y}{x^2} = \frac{dx}{dy}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\cos y}$ ← EDO: $h'(x) = \frac{x^2}{\cos(h(x))}$

4) $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{3}\right) = \operatorname{arcsen}'\left(\frac{x^3}{3}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^3}{3}\right)^2}} \cdot x^2$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{x^6}{9}}} = \frac{x^2}{\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{3}\right)} = \frac{x^2}{\cos y}$$

$\frac{dy}{dx} = \left(\sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}\right)'$

$= \frac{1}{3}(3\operatorname{sen} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3\cos x$

$= (3\operatorname{sen} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos x$

$= \frac{\cos x}{(3\operatorname{sen} x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(3\operatorname{sen} x)^2}} = \frac{\cos x}{y^2}$

$\boxed{\text{Se } f(g(x)) = x \text{ então } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$ $\quad f(u) = \quad g(x) = \quad f'(u) =$

$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\cos \operatorname{arcsen} x = \sqrt{1-x^2}}$

$\cos y =$

$\cos \operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3} =$

$y = \sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}$ $\quad (\sqrt[3]{8})^2 =$

$y^2 = \sqrt[3]{(3\operatorname{sen} x)^2}$ $\quad \sqrt[3]{8^2} =$

$f'' + 7f' + 10f = 0$

$H(t) = \{$

C2 28/nov/2019
Turma grande

Hoje: mais sobre EDOs exatas!!!

Na última aula nós fomos até aqui... Uma EDO exata cujas soluções são as curvas de nível de $F(x,y)$ costuma ser escrita deste jeito:

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

Repare que dá pra "traduzir" isto para

$$F_y \frac{dy}{dx} = -F_x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Exemplo: Digamos que

$F(x,y) = x^2y^3$
$F_x(x,y) = 2xy^3$
$F_y(x,y) = x^2\cdot 3y^2$

No exemplo,

$$\boxed{(2xy^3)\,dx + (3x^2y^2)\,dy = 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x\,f(x)^3}{3x^2 f(x)^2}} \quad (*)$$

(1) Exercício:
(a) Escreva a equação $F(x,y)=4$, isto é, $x^2y^3=4$, "em função de x".
(b) Idem, mas para $F(x,y)=C$.
(c) Verifique que a sua "solução da EDO" $y=f(x)$ que você obteve no (b) obedece $(*)$.

(b) $x^2y^3 = C$
$y^3 = C/x^2$
$y = \sqrt[3]{C/x^2}$
$= \underbrace{\sqrt[3]{C}}_{\alpha}\sqrt[3]{x^{-2}}$
$= \alpha\, x^{-2/3}$
$f(x) = y = \alpha\, x^{-2/3}$

(c) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\alpha x^{-\frac{2}{3}}\right)$
$= \alpha\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}$

$f'(x) \overset{?}{=} -\frac{2x\,f(x)^3}{3x^2 f(x)^2}$
$= -\frac{2\,f(x)}{3x}$
$= -\frac{2\,(\alpha x^{-2/3})}{3x}$
$= -\frac{2}{3}\cdot\alpha\cdot x^{-5/3}$

Dá pra gente fazer exemplos bem mais complicados... P.ex.:

$(y+2)^3 + 4 = x^5 + 6x^2 + 7$
$(y+2)^3 = x^5 + 6x^2 + 3$
$y+2 = \sqrt[3]{x^5 + 6x^2 + 3}$
$y = \sqrt[3]{x^5 + 6x^2 + 3} - 2$

A gente vai tentar trabalhar com exemplos simples, com $F(x,y)$ polinômio em x e y...

Dica: eu pus no site um link pra um livro de EDOs "livre" muito bom - o do Trench.

Em geral quando derem um problema de EDOs exatas pra gente ele vai ser dado nesta forma:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

ao invés de

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

e a gente vai ter que descobrir qual é a F...

Truque: uma notação visual (não-padrão!!!) pra polinômios em duas variáveis

Antes: $\boxed{6 \mid \ \mid 7 \mid 8 \mid \ } = 6x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 8x + 0$

Agora:

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
\text{coef } y^2 \to & 2 & 3 & 4 \\
\text{coef } y^1 \to & 5 & 6 & 7 \\
\text{coef } y^0 \to & 8 & 9 & 10 \\
 & \text{coef } x^0 & \text{coef } x^1 & \text{coef } x^2
\end{array}
= \begin{array}{l} 2x^0y^2 + 3x^1y^2 + 4x^2y^2 \\ + 5x^0y^1 + 6x^1y^1 + 7x^2y^1 \\ + 8x^0y^0 + 9x^1y^0 + 10x^2y^0 \end{array}$$

$$= 2y^2 + 3xy^2 + 4x^2y^2 + 5y + 6xy + 7x^2y + 8 + 9x + 10x^2$$

(2) Exercícios: Faça as contas abaixo e dê o resultado na notação de caixinhas 2D.

(a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 6 \\ \hline & 4 & 5 \\ \hline\end{array}$

(b) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 10 \\ \hline\end{array}$

(c) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline \\ \hline\end{array}$

(d) $\frac{\partial}{\partial x}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 \\ \hline\end{array}$

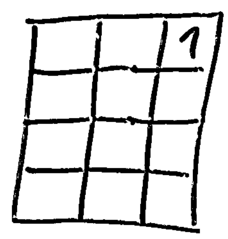
(e) $\frac{\partial}{\partial y}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 \\ \hline\end{array}$

C2 28/nov/2019

Turma grande

Hoje: mais sobre EDOs exatas!!!

Nosso exemplo do início da aula era:

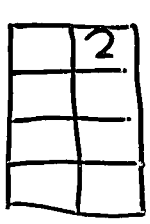
$F(x,y) = x^2 y^3 =$ 

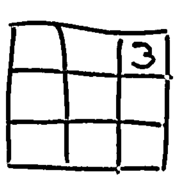
A EDO cujas soluções eram as curvas de nível de F era:

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

isto é,

$$(2xy^3)\,dx + (3x^2y^2)\,dy = 0,$$



$dx +$ 

$dy = 0$

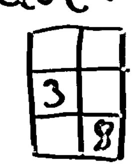
Lembre que às vezes a nossa EDO ~~exata pode~~ ser dada na forma

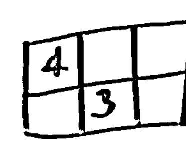
$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0,$$

mas você vai ter que descobrir a F...

Formalmente: "Encontre F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$", onde M e N são funções conhecidas.

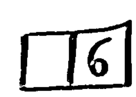
(3) Encontre F tal que:

(a) $F_x =$ 

, $F_y =$ 

.

(b) $F_x =$ 

, $F_y =$ 

.

C2 29/nov/2019

Hoje: mais coisas sobre EDOs exatas! Fatores integrantes!

Ontem nós vimos que uma EDO da forma

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

(que pode ser prescrita como

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0)$$

tem como soluções as curvas de nível $F(x,y) = c$...

Em geral essas EDOs vão ser dadas nesta forma aqui,

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

e a gente vai ter que descobrir o F.

Vamos usar uma notação de caixinhas 2D pra polinômios em duas variáveis:

$$\begin{array}{c|ccc|}
y_4 & & 5 & 6 \\
y_3 & & & 7 \\
y_2 & & & \\
y_1 & & & \\
y_0 & & & \\
\hline
 & x^0 & x^1 & x^2
\end{array} = 5xy^4 + 6x^2y^4 + 7x^2y^3$$

E terminamos a aula passada com estes dois exercícios:

1) Digamos que $M\,dx + N\,dy = 0$ seja

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline & 12 \\ \hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\ \hline & 5 \\ \hline\end{array}\,dy = 0.$$

Encontre F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$.

2) Idem, mas $M\,dx + N\,dy = 0$ é

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & 5 \\ \hline & \\ \hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 6 \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,dy = 0.$$

Pra quem precisa aprender ou relembrar isso correndo:

3) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 4 & \\ \hline & 5 & 6 \\ \hline\end{array} = ?$

4) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline \\ \hline\end{array} = ?$

5) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 10 \\ \hline\end{array} = ?$

6) Seja $F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 10 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$.

Calcule $\frac{\partial}{\partial x}F$ e $\frac{\partial}{\partial y}F$

Se $F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & & \\ \hline & 5 & \\ \hline & & 6 \\ \hline\end{array}$ então F_x obedece ⇒

p/ que $F_y = \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\ \hline & 5 \\ \hline\end{array}$

$\hookrightarrow F = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & \\ \hline & 5 \\ \hline & \\ \hline\end{array}$

1) Digamos que $F_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline & 12 \\ \hline\end{array}$ e $F_y = \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\ \hline & 5 \\ \hline\end{array}$. Descubra F.

$$F = \begin{array}{|c|c|c|l}\cline{1-3} a & b & c & y_2 \\ \cline{1-3} d & e & f & y_1 \\ \cline{1-3} g & h & i & y_0 \\ \cline{1-3} x_0 & x_1 & x_2 & \end{array}$$

$F_x = by^2 + 2cxy^2 + ey + 2fxy + h + 2xi$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline b & 2c \\ \hline e & 2f \\ \hline h & 2i \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{aligned}
F = {} & a x^0y^2 + b x^1y^2 + c x^2y^2 \\
& + d x^0y^1 + e x^1y^1 + f x^2y^1 \\
& + g x^0y^0 + h x^1y^0 + i x^2y^0 \\
= {} & ay^2 + bxy^2 + cx^2y^2 \\
& + dy + exy + fx^2y \\
& + g + hx + ix^2
\end{aligned}$$

$F_x = by^2 + 2cxy^2 + ey + 2fxy + h + 2ix$

$F_y = 2ay + 2bxy + 2cx^2y + d + ex + fx^2$

F_x: $\begin{array}{|c|c|}\hline b & 2c \\ \hline e & 2f \\ \hline h & 2i \\ \hline\end{array}$ F_y: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2a & 2b & 2c \\ \hline d & e & f \\ \hline\end{array}$

C2 5/DEZ/2019

TURMA GRANDE

DÚVIDAS E REVISÃO!

SUGESTÕES:

1. REVEJAM EDOs COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS
2. EDOs EXATAS E FATORES INTEGRANTES
3. QUESTÕES DE ÁREA DO APEX CALCULUS
4. QUESTÕES SOBRE VOLUME
5. REVISEM INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

SUGESTÃO PRA 2:

a) ESCOLHA UMA FUNÇÃO $F(x,y)$ POLINOMIAL

b) ENCONTRE A EDO

$M dx + N dy = 0 \quad (\star)$

CUJAS SOLUÇÕES VÃO SER AS CURVAS DE NÍVEL DA $F(x,y)$

c) RESOLVA $(\star)$ FINGINDO QUE VOCÊ NÃO CONHECE A F

d) ESCOLHA UMA FUNÇÃO $H(x,y)$ NÃO TRIVIAL.

SEJA

$\underbrace{(HF_x)}_{M}dx + \underbrace{(HF_y)}_{N}dy = 0 \quad (\star\star)$

UMA NOVA EDO - REPARE QUE O "M" E O "N" DELA VÃO SER DIFERENTES DOS ANTERIORES.

e) VERIFIQUE SE $(\star\star)$ É EXATA.

f) SE ELA NÃO FOR EXATA RESOLVA ELA ENCONTRANDO FATORES INTEGRANTES PRA ELA (TRENCH).

$F_x dx + F_y dy = 0$

$F_{xy} = F_{yx}$

a) $F(x,y) = x^2 y^3$

b) $\underbrace{2xy^3}_{F_x} dx + \underbrace{3x^2y^2}_{F_y} dy = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} \stackrel{?}{=} 0$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{3}{3}} + 3x^2\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dy}{dx} = 0$

c) 1º (CURVAS DE NÍVEL)

$x^2y^3 = c$

$y^3 = \frac{c}{x^2}$

$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{c}{x^2}}}$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{3}{3}} + x^2\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{c}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{-2xc}{x^4}\right) = 0$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{-2c}{x} \stackrel{x=1}{\Longrightarrow} 2c^{\frac{1}{3}} = 2c$

2º $F(x,y) = \int 2xy^3\, dx = \int 3x^2y^2\, dy$

$\frac{dy}{dx} = \left(\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{c}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{-2xc}{x^4}\right)$

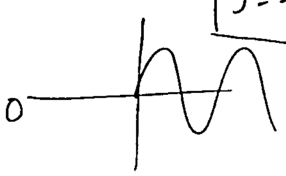
$y^3 = cx^{-2}$

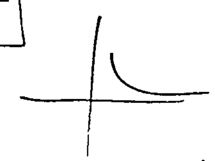
$y = (cx^{-2})^{1/3} = c^{1/3}x^{-2/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right)^{-\frac{5}{3}}$

$F(x,y) = 99$

$x^2 y = 99$

$\boxed{y = \frac{99}{x^2}}$





$\boxed{F(x,y) = x^2 y}$

$\boxed{y = \frac{99}{x^2}}$

SERÁ QUE $y = \frac{99}{x^2} = 99x^{-2}$ É SOLUÇÃO DISTO?

$(2xy) + x^2 \frac{dy}{dx} = 0$

$(2x \cdot 99x^{-2}) + x^2(-198x^{-3}) \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{dy}{dx} = -198x^{-3}$

$(D-2)(D+5)f = 0$

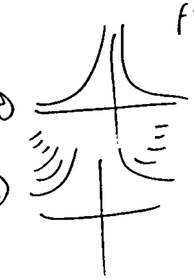
$f'' + 3f' - 10f = 0$

$f_1 = e^{2x}$

$f_2 = e^{-5x}$

$f(x)\frac{d}{dx}g(x) = f(x)g'(x)$ $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$y = \frac{4}{x^2} \Rightarrow$



$y^3 = cx^{-2}$

$y = (cx^{-2})^{1/3}$

$y = cx^{-2/3}$

NOVA C

$\frac{dy}{dx} = c\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}$

C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

REVISÃO E DÚVIDAS

$[F:=D]$

EDO: $f'' + 3f' - 18f = 0$

a) Ache a forma $(D-a)(D-b)f = 0$

$D^2 + 3D - 18 = 0$

$D_1 = 3 \qquad D_2 = -6$

$(D-3)(D+6)f = 0$

b) Soluções básicas

$f_1 = e^{3x} \quad f_2 = e^{-6x}$

$f = \alpha f_1 + \beta f_2$

$f(0) = \alpha + \beta = 1$

$f'(0) = 3\alpha - 6\beta = 0$

$3 - 3\beta - 6\beta = 0$

$9\beta = 3 \quad \beta = 3$

c) $f = \frac{2}{3} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-6x}$

2,0 PTS

EDO: $f'' - 6f' + 25f = 0$

$[f:=D]$ $D^2 - 6D + 25 = 0$

$\Delta = -64$

$\frac{6 \pm 8i}{2} = D$

$D_1 = 3+4i \qquad D_2 = 3-4i$

a) $(D-(3+4i))(D-(3-4i))f = 0$

b) $f_1 = e^{(3+4i)x} \qquad f_2 = e^{(3-4i)x}$

$= e^{3x+4ix}$

$= e^{3x}e^{4ix}$

$= e^{3x}(\cos 4x + i \operatorname{sen} 4x)$

$= \underbrace{e^{3x}\cos 4x}_{f_3} + i\,\underbrace{e^{3x}\operatorname{sen} 4x}_{f_4}$

$f_3 = e^{3x}\cos 4x$

$f_4 = e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

$\frac{f_1+f_2}{2} = f_3$

$\frac{f_1-f_2}{2i} = f_4$

$f_2 = e^{3x-4ix}$

$= e^{3x}e^{-4ix}$

$= e^{3x}(\cos -4x + i \operatorname{sen} -4x)$

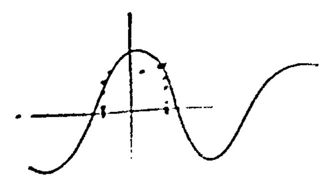
$= e^{3x}\cos(-4x) + i\, e^{3x}\operatorname{sen}(-4x)$

$f_5 = e^{3x}\cos(-4x) = e^{3x}\cos 4x$

$f_6 = e^{3x}\operatorname{sen}(-4x) = -e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

$\cos(-4x) = \cos(4x)$

$\operatorname{sen}(-4x) = -\operatorname{sen}(4x)$



C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

REVISÃO E DÚVIDAS

$$F_x = 3y^2 + 8xy + 15x^2$$

$$F_y = 6y^2 + 6yx + 4x^2$$

$$\int F_x\,dx = 3y^2x + 4x^2y + 5x^3 + C$$

$$\int F_y\,dy = 2y^3 + 3y^2x + 4x^2y + C$$

h(y)

SEJA $F = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & 5 \\ \hline \end{array} \leftarrow g(x)$

ENTÃO $F_x = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & & & \\ \hline & 8 & & \\ \hline & & 15 & \\ \hline \end{array}$

$F_y = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & & & \\ \hline & 6 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline \end{array}$

$\int F_x\,dx = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & 5 \\ \hline \end{array}$

$\int F_y\,dy = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$

$h(y) = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = 2y^3$

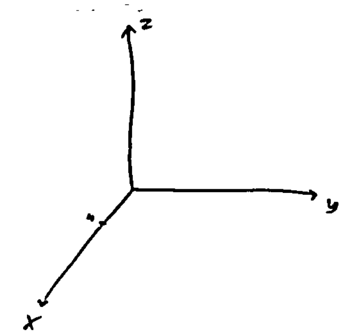
$g(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 5 \\ \hline \end{array} = 5x^3$

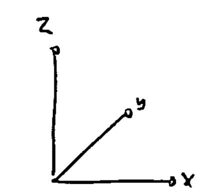
$$F = \int F_x\,dx + h(y)$$

$$F = \int F_y\,dy + g(x)$$

F_x

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 + 4y^5\right) = 0$$





$$f'(x) + \frac{1}{f(x)} + 2 = 0$$

$$f(x) = y = \sqrt[5]{\tfrac{5}{3}x^3 + 15x + C'}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{y^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3}{f(x)^4}$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

Revisão e Dúvidas
a) Ver se é exata
b) Solução geral
c) Solução (a,b)

$$EDO: \underbrace{(2xy^3)}_{M}dx + \underbrace{3(x^2+3)y^2}_{N}dy = 0$$

a) Ser exata: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

$\frac{dM}{dy} = 6xy^2$ $\quad N = 3x^2y^2 + 9y^2$

$\frac{dN}{dx} = 6xy^2$

EDO é exata

b) Encontre F obedecendo $F_x = M$ e $F_y = N$

$$F = \int M\,dx + g(y) = \int N\,dy + h(x)$$

$$F = \int 2xy^3\,dx + g(y) = \int 3x^2y^2 + 9y^2\,dy + h(x)$$

$$F = x^2y^3 + g(y) = x^2y^3 + 3y^3 + h(x)$$

$$\begin{bmatrix} g(y) := 3y^3 \\ h(x) := 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F = x^2y^3 + 3y^3 \Rightarrow F_x = 2xy^3 = M \Rightarrow F_y = 3x^2y^2 + 9y^2 = N$$

Achando a solução geral através das curvas de nível da F da EDO:

$$c = y^3(x^2+3)$$

$$y^3 = \frac{c}{(x^2+3)}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{c}{x^2+3}}$$

$$y = (c(x^2+3)^{-1})^{1/3}$$
$$= c^{1/3}(x^2+3)^{-1/3} \quad (\star)$$

c) Substituindo y (solução geral) na EDO:

$$2x\frac{c}{x^2+3}\,dx + \left(3x^2\left(\frac{c}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}} + 9\left(\frac{c}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}\right)dy = 0$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

$$F_x + F_y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}(c(x^2+3))^{-\frac{4}{3}}(2xc)$$

$$\frac{2xc}{x^2+3} + \left(\frac{c}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}(3x^2+9)\left(\frac{2xc}{-\frac{1}{3}(c(x^2+3))^{\frac{4}{3}}}\right) = 0$$

Temos:
$y = c^{1/3}(x^2+3)^{-1/3}$
$\frac{dy}{dx} = c^{1/3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x$

Vamos testar se $F_x + F_y\frac{dy}{dx} = 0$...

ou seja, se $(2xy^3) + (3(x^2+3)y^2)\frac{dy}{dx} = 0$,

ou seja, se $(2x(c^{1/3}(x^2+3)^{-1/3})^3) + (3(x^2+3)(c^{1/3}(x^2+3)^{-1/3})^2)(c^{1/3}(-\frac{1}{3})(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x) \stackrel{?}{=} 0$

$(2x\cdot c(x^2+3)^{-1}) + (3(x^2+3)c^{2/3}(x^2+3)^{-2/3})(c^{1/3}(-\frac{1}{3})(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x)$

$(2x\cdot c(x^2+3)^{-1}) + (3(-\frac{1}{3})c^{2/3}\cdot c^{1/3}(x^2+3)(x^2+3)^{-2/3}(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x)$

$2x\cdot c(x^2+3)^{-1} + (-1)\ c\ (x^2+3)^{-1}\cdot 2x$

c) Solução (a,b)

$$\left(y = (c(x^2+3)^{-1})^{1/3}\right)\begin{bmatrix} x := a \\ y := b \end{bmatrix} =$$

Substitui y e x por b e a → $b = c(a^2+3)^{-1/3}$

Isola a constante → $c = \frac{b}{(a^2+3)^{-1/3}}$

Substitui a constante na solução geral $(\star)$

$$y = \left(\frac{b}{(a^2+3)^{-1/3}}(x^2+3)^{-1}\right)^{1/3}$$