C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- À EDOs
- À INTEGRAIS

A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).
O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER SUBPÁGINA DO angg.twu.net E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

EDOs:
"EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS"
(EXISTEM TAMBÉM AS "EDP"S, QUE SÃO "PARCIAIS", QUE SÃO BEM MAIS DIFÍCEIS)

DIFERENCIAL:
A COISA COMPLICADA DELAS É UMA DERIVADA.

COMO ASSIM?
$x^2+x+3=9$
EQUAÇÃO DE 2º GRAU!

$f'(x)=4x^3$;
ENCONTRE O f...

ALIÁS, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

NOSSO PRIMEIRO MÉTODO É O CHUTAR E TESTAR.

TABELA
(CADA LINHA É UM CHUTE, E A ÚLTIMA COLUNA É UM TESTE)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=4x^3$
e^x	e^x	F

OUTROS PROBLEMAS (OUTRAS EDOS):
a) $f'(x)=e^{4x}$
b) $f'(x)=2+3x$
c) $f'(x)=\operatorname{sen} x$
d) $f'(x)=\operatorname{sen} 4x$

SOL: $f(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$

a)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=e^{4x}$
$\frac{1}{4}e^{4x}$	e^{4x}	V

b)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=2+3x$
$4x^3$		
$9x$		
$2x^3$		
$\operatorname{sen} x$		

Um exercício pra treinar regra da cadeia:

$f(u)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$f'(u)$	$g'(x)$	$f'(g(x))g'(x)$
e^u	$4x$	e^{4x}			
e^u	$g(x)$	$e^{g(x)}$	e^u	$g'(x)$	$e^{g(x)}g'(x)$

C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EDOs
- A INTEGRAIS

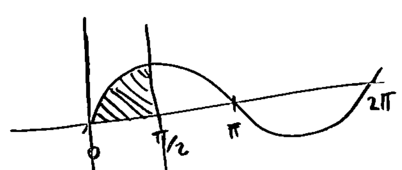
A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).

O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER SUBPÁGINA DO angg.twu.net E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

INTEGRAIS SÃO ÁREAS SOB CURVAS.

EXEMPLO:
$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$ É...

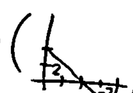
A GENTE PRIMEIRO DESENHA A CURVA $y = \operatorname{sen} x$, DEPOIS DESENHA RETAS VERTICAIS EM $x=0$ E $x=\pi/2$...

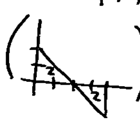


$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \, dx$: "A ÁREA SOB A CURVA f(x) ENTRE x=a E x=b" [DEFINIDA]

OU: "A INTEGRAL DE f(x) ENTRE x=a E x=b"

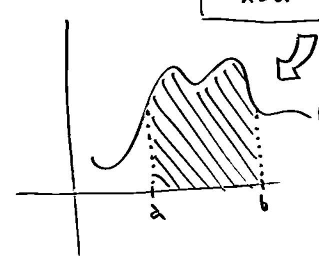
OBS: ÁREA SOB UMA CURVA É DIFERENTE DE ÁREA ENTRE UMA CURVA E O EIXO HORIZONTAL

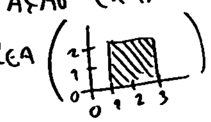
ÁREA SOB () = 0

ÁREA ENTRE... () = 4

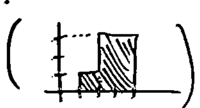
$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x) \, dx}$ $\xrightarrow{\text{RESULTADO}}$ NÚMERO!

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

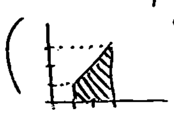


NOTAÇÃO EXTRA:
ÁREA ()

EXERCÍCIOS:

a) ÁREA ()

b) ÁREA ()

c) ÁREA ()

d) $\int_{x=1}^{x=4} 3 \, dx$

e) $\int_{x=0}^{x=3} x \, dx$

f) $\int_{x=0}^{x=3} 4-x \, dx$

g) $\int_{x=0}^{x=3} 3-x \, dx$

h) $\int_{x=0}^{x=3} 2-x \, dx$

i) IDEM COM 1−x

f') $\int_{x=0}^{x=3} 4+x \, dx$

g') $\int_{x=0}^{x=3} 3+x \, dx$

h') $\int_{x=0}^{x=3} 2+x \, dx$

i') $\int_{x=0}^{x=3} 1+x \, dx$

C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EDOs
- A INTEGRAIS

A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).

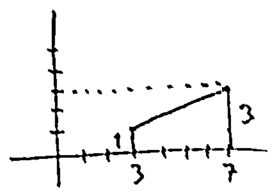
O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER SUBPÁGINA DO angg.twu.net E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

TRUQUE:
ÁREA DE TRAPÉZIOS

h = ALTURA MENOR

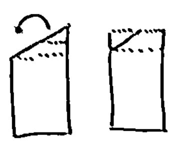
H = ALTURA MAIOR

LARGURA DA BASE: $b-a$



ÁREA: MÉDIA DAS ALTURAS · LARGURA DA BASE

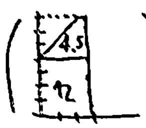
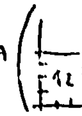
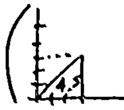
$= \left(\frac{1+3}{2}\right) \cdot (7-3)$

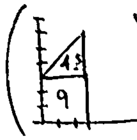


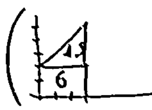
← ESSA ALTURA É A MÉDIA ENTRE h E H!

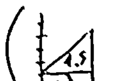
$\frac{h+H}{2}$

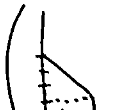
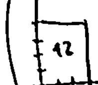
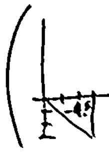
TEM UM PADRÃO NAS RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS f' ATÉ i'...

f': ÁREA () = ÁREA () + ÁREA () $= \int_{x=0}^{x=3} 4\,dx + \int_{x=0}^{x=3} x\,dx$

g': ÁREA ()

h': ÁREA ()

i': ÁREA ()

F: ÁREA () = ÁREA () + ÁREA ()

$$\int_{x=0}^{x=3} 4-x\,dx = \int_{x=0}^{x=3} 4\,dx + \int_{x=0}^{x=3} -x\,dx$$

OBS: $\int_{x=0}^{x=3} -x\,dx = -\int_{x=0}^{x=3} x\,dx$

ISTO SUGERE QUE:

$$\int_{x=2}^{x=6} f(x)+g(x)\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{x=2}^{x=6} f(x)\,dx + \int_{x=2}^{x=6} g(x)\,dx$$

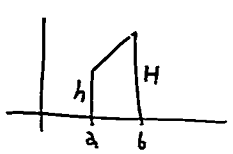
OBS: A "ÁREA ENTRE A CURVA E O EIXO HORIZONTAL" NÃO TEM ESSA PROPRIEDADE!

C2 16/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÁREAS COMO SOMATÓRIOS! OU MELHOR: COMO VISUALIZAR CERTOS SOMATÓRIOS!

NO FINAL DA AULA PASSADA VIMOS QUE DÁ PRA CALCULAR A ÁREA DE UM TRAPÉZIO ASSIM:



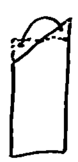
h: ALTURA MENOR

H: ALTURA MAIOR

b-a: LARGURA DA BASE

$\frac{h+H}{2}$: MÉDIA DAS ALTURAS

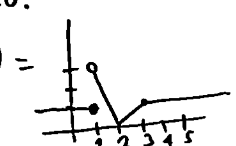
ÁREA: $\frac{h+H}{2}(b-a)$



COM ISSO A GENTE SABE CALCULAR INTEGRAIS DE VÁRIAS FUNÇÕES... DE TODAS AS FUNÇÕES CUJOS GRÁFICOS SÃO FORMADOS POR SEGMENTOS DE RETAS...

EXEMPLO:

$f(x) =$



$$= \begin{cases} 1 & \text{QUANDO } x \leq 1 \\ 6-3x & \text{QUANDO } 1 < x \leq 2 \\ -2+x & \text{QUANDO } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{QUANDO } 3 < x \end{cases}$$

EXERCÍCIOS: QUANTO É:

ⓐ $f(5)$

ⓑ $f(3)$

ⓒ $f(1.5)$

ⓓ $f(1.1)$

ⓔ $f(2.5)$

ⓕ $f(2)$

ⓖ $\displaystyle\int_{x=1.1}^{x=4} f(x)\,dx$

$$= \frac{f(1.1)+f(2)}{2}(2-1.1) + \frac{f(2)+f(3)}{2}(3-2) + 1(4-3)$$

OBS: NO FINAL DA AULA PASSADA VIMOS QUE:

$$\int_{x=1}^{x=4} 3-x\,dx = \int_{x=1}^{x=4} 3\,dx + \int_{x=1}^{x=4} -x\,dx$$

AGORA TEMOS:

$$\int_{x=1.1}^{x=4} f(x)dx = \int_{x=1.1}^{x=2} f(x)dx + \int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx + \int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx$$

VERSÃO GERAL:

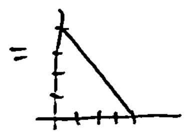
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

O QUE ACONTECE QUANDO O INTERVALO ESTÁ "NA ORDEM ERRADA"? ATÉ AGORA SEMPRE TIVEMOS $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ COM $a \leq b$...

"ÁREA SOB CURVA" É MELHOR QUE "ÁREA ENTRE CURVA E EIXO HORIZONTAL" PORQUE "ÁREA SOB CURVA" OBEDECE ESSA PROPRIEDADE.

EXEMPLO:

$f(x) = 4-x =$



$\displaystyle\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx =$

$$\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{\text{FÁCIL } (=0.5)} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{\text{FÁCIL } (=8)}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{7.5} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{8} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{0.5}$$

$$= \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{8} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{-0.5}$$

TEMOS QUE TER

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx \quad !$$

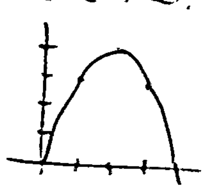
C2 16/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÁREAS COMO SOMATÓRIOS! OU MELHOR: COMO VISUALIZAR CERTOS SOMATÓRIOS!

COMO É QUE A GENTE CALCULA INTEGRAIS DE "f"S MAIS COMPLICADAS?

EXEMPLO:



$$f(x) = 4-(x-2)^2$$

MINHA PARÁBOLA PREFERIDA PARA EXEMPLOS DE C2!

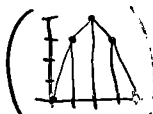
A PARTIR DE AGORA $f(x) = 4-(x-2)^2$ (ATÉ O FINAL DA AULA)

COMO CALCULAR $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$?

COM O QUE A GENTE SABE ATÉ AGORA NÃO DÁ!!!

MAS A GENTE PODE CALCULAR APROXIMAÇÕES...

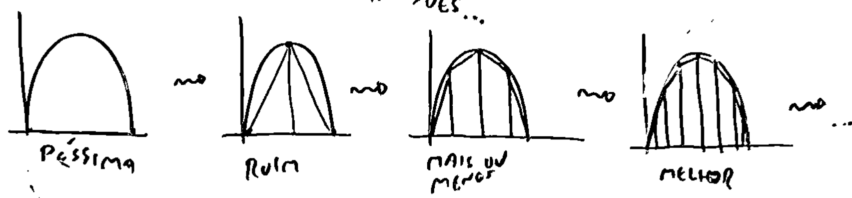
POR EXEMPLO:

ÁREA ()

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) + \frac{f(1)+f(2)}{2}(2-1) + \frac{f(3)+f(2)}{2}(3-2) + \frac{f(4)+f(3)}{2}(4-3) \quad (\star)$$

$$= 1.5 + 3.5 + 3.5 + 1.5$$

A GENTE VAI DEFINIR A INTEGRAL COMO O LIMITE DESSAS APROXIMAÇÕES...



AGORA A GENTE VAI TER QUE APRENDER A VISUALIZAR SOMATÓRIOS...

OBS: ISSO AQUI PODE SER ESCRITO COMO:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{f(i-1)+f(i)}{2}(i-(i-1)) \quad (\star\star)$$

REPARE QUE DÁ PRA 'EXPANDIR' A $(\star)$... VIRA:

$$\frac{0+3}{2}(1-0) + \frac{3+4}{2}(2-1) + \frac{4+3}{2}(3-2) + \frac{3+0}{2}(4-3) \quad (\star\star\star)$$

E ISSO PODE VIRAR:

$$1.5\cdot 1 + 3.5\cdot 1 + 3.5\cdot 1 + 1.5\cdot 1 \quad (\star\star\star\star)$$

SÓ QUE A $(\star\star\star)$ NÃO TEM UMA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA FÁCIL... A $(\star\star\star)$ TEM, DESDE QUE EU ESTABELEÇA QUE CADA $\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$ VAI SER INTERPRETADA COMO TRAPÉZIO,

E CADA $\alpha(\beta-\gamma)$ VAI SER INTERPRETADA COMO RETÂNGULO.

ALTURA ESQ

ALTURA DIR

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$$

EXTREMIDADE ESQUERDA

EXTREMIDADE DIREITA DO INTERVALO

ALTURA DO RETÂNGULO

$$\alpha(\beta-\gamma)$$

EXTR DIR

EXTR ESQ

EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE:

(a) $\frac{2+5}{2}(3-1)$

(b) $4(3-1)$

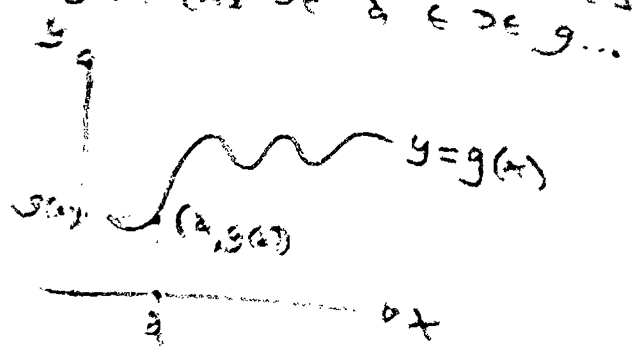
(c) $4(3-1)+\frac{4+1}{2}(6-3)$

C2 16/ago/2019

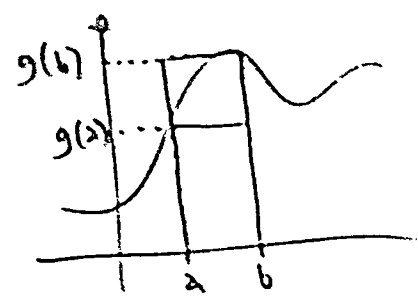
Turma pequena

Hoje: áreas como somatórios! Ou melhor: como visualizar certos somatórios!

Lembrem que a gente sabe representar graficamente $g(a)$ mesmo quando a gente só tem as representações gráficas de a e de g...



Então a gente sabe representar graficamente coisas como $g(a)\,(b-a)$ e $g(b)\,(b-a)$...



Exercício: Represente graficamente:

ⓐ $f(0.5)(1-0.5)$

ⓑ $f(1.5)(1.5-1)$

ⓒ $\dfrac{f(2.5)+f(3.5)}{2}(3.5-2.5)$

Agora sejam
$a_0 = 0.5$,
$a_1 = 1.0$,
$a_2 = 2.5$,
$a_3 = 3.5$.

... nte graficamente:

ⓐ $f(a_0)(a_1-a_0) + f(a_1)(a_2-a_1) + f(a_2)(a_3-a_2)$

ⓑ $f(a_1)(a_2-a_1) + f(a_2)(a_3-a_2) + f(a_3)(a_3-a_2)$

ⓒ $\sum_{i=1}^{3} f(a_i)(a_i-a_{i-1})$

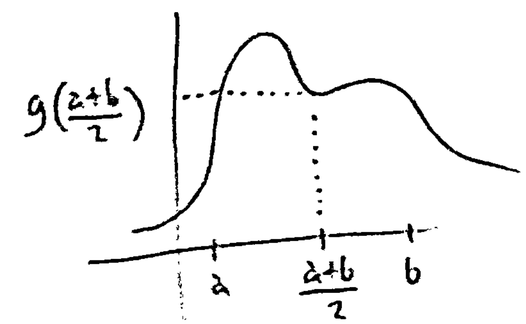
ⓓ $\sum_{i=1}^{2} f(a_{i-1})(a_i-a_{i-1})$

Aqui é 2 mesmo.

ⓔ $f\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right)(a_1-a_0)$

ⓕ $\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{a_i+a_{i-1}}{2}\right)(a_i-a_{i-1})$

... e a gente também consegue representar graficamente $\frac{a+b}{2}$ e $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$...



C2 23/AGO/2019
TURMA PEQUENA

HOJE:
- PARTIÇÕES
- COMO VISUALIZAR CERTOS SOMATÓRIOS (EXERCÍCIO MUITO GRANDE! !!)

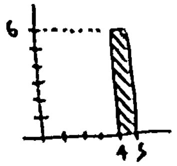
PRA GENTE CONSEGUIR ENTENDER A DEFINIÇÃO "CERTA" DA INTEGRAL A GENTE VAI PRECISAR ENTENDER O QUE QUEREM DIZER CERTOS SOMATÓRIOS... GRAFICAMENTE!

OS QUE A GENTE VAI VER HOJE VOCÊ VAI VER DE NOVO DEPOIS NUMA OUTRA MATÉRIA - UMA QUE ANTIGAMENTE SE CHAMAVA "MÉTODOS NUMÉRICOS" E ACHO QUE AGORA SE CHAMA "MÉTODOS COMPUTACIONAIS".

LEMBRE QUE

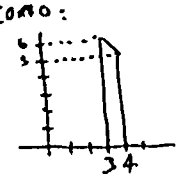
$6\cdot(5-4)$

VAI SER INTERPRETADO COMO:



E $\frac{6+5}{2}\cdot(4-3)$

VAI SER INTERPRETADO COMO:



MÉTODOS

$[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$

$[R] = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i)$

$[min] = \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i),f(b_i))(b_i-a_i)$

$[max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i),f(b_i))(b_i-a_i)$

$[M] = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i-a_i)$

$[Trap] = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$

PARTIÇÕES

DEF: UMA PARTIÇÃO É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $\mathbb{R}$ COM PELO MENOS UM ELEMENTO.

EXEMPLO:
$P=\{4,5,7,9,10\}$
REPARE QUE ELA TEM 5 PONTOS (A GENTE VAI ESCREVÊ-LOS EM ORDEM).
ELA "É" UM JEITO DA GENTE DIVIDIR O INTERVALO $[4,10]=[a,b]=I$
EM 4 SUBINTERVALOS,

$[4,5]=[a_1,b_1]=I_1$
$[5,7]=[a_2,b_2]=I_2$
$[7,9]=[a_3,b_3]=I_3$
$[9,10]=[a_4,b_4]=I_4$

N É O NÚMERO DE SUBINTERVALOS - O NÚMERO DE PONTOS EM P MENOS 1.

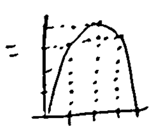
DÁ PRA ARRUMAR ESSES DADOS NUMA TABELA...

$P=\{4,5,7,9,10\}$
$\Rightarrow N=4,\ I=[a,b]=[4,10]$

i	I_i	a_i	b_i
1	[4,5]	4	5
2	[5,7]	5	7
3	[7,9]	7	9
4	[9,10]	9	10

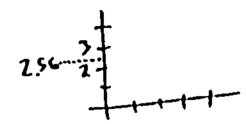
1 EXERCÍCIO:
PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO DIGA QUEM SÃO O "N", O "I", O "a" E O "b" DELA E MONTE A TABELA.
a) $P=\{0.5,1.5,4\}$
b) $P=\{1.2,1.3,1.4,5,6\}$

LEMBREM QUE ESTAMOS USANDO ESTA f: $f(x)=4-(x-2)^2$

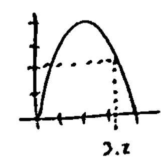
$f(x)=$ 

LEMBRE QUE EXISTE UM JEITO BURRO E UM JEITO RÁPIDO DE REPRESENTAR GRAFICAMENTE $f(3.2)$...

JEITO BURRO:
$f(3.2)=4-(2-3.2)^2$
$=4-(-1.2)^2$
$=4-1.44$
$=2.56$



JEITO RÁPIDO:



DICA: $\underbrace{\min(\underbrace{f(\underbrace{a_1}_{2})}_{4},\underbrace{f(\underbrace{a_2}_{3})}_{3})}_{3}$

2 EXERCÍCIO:
(VAI TER UM MINI-TESTE SOBRE ISSO!)
REPRESENTE GRAFICAMENTE [L], [R], [min], [max], [M] E [TRAP] PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO.
a) $P=\{2,3\}$
b) $P=\{0,1,2,3,4\}$
c) $P=\{0,2,4\}$
d) $P=\{0,1,3,4\}$
e) $P=\{0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4\}$ ← DICA: FAÇAM GRANDE NO PAPEL SEM PAUTA!

DICA: CONFIRA 2c[min] E 2c[max] COM SEUS VIZINHOS.

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

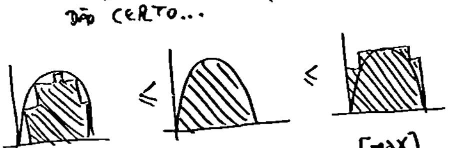
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do APEX Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$f(x) = 4-(x-2)^2$
$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$
$= -x^2+4x$

Lembrem que na aula passada a gente tentou calcular uma "aproximação por cima" e uma "aproximação por baixo" da área de $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$

E a gente viu que os métodos [MAX] e [MIN] nem sempre dão certo...



O que deu errado?

Se $P=\{0,1,3,4\}$

então a representação gráfica de $[\max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i),f(b_i))(b_i-a_i)$

era:

⇐ No intervalo do meio temos $\max(f(a_2),f(b_2))=3$, que está abaixo da parábola!

Como consertar isso?

max e min só se aplicam a conjuntos finitos...

$\max(3,20)=20$

$\max(3,20,4,42)=42$

Vamos definir uma função "sup" que recebe um conjunto de números e retorna o "máximo" dele...

↑ Entre aspas! Versão melhorada!

$\sup(\{3,20,4,42\})=42$

OBS: o "inf" vai ser o correspondente pro mínimo.

$\inf(\{3,20,4,42\})=3$

Só que inf e sup aceitam conjuntos infinitos...

$\min(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots) \overset{??}{=} 0$

Idéia: o maior número que está "abaixo" de todos esses é o 0... só que

$0 \notin \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\}$

O inf tem uma definição formal complicada, mas (em português)

Se $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$

$\inf(A)$ é o maior número que é "≤" a todos os elementos de A...

$\inf(A)=0\notin A$

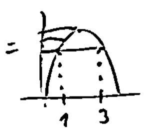
Sup é a mesma coisa, mas "pra cima".

Exemplo:

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$

$\sup(\mathbb{N})=+\infty$

Voltando pra algo mais gráfico...

$f(x) =$ 

Sejam:

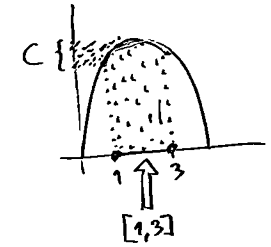
$I_2=[1,3]$

$C=\{f(x) \mid x\in[1,3]\}$

Repare que $f(1)\in C$, $f(2)\in C$, $f(3)\in C$, $f(1.1)\in C, \ldots$

Graficamente o C é a imagem do imagem do intervalo [1,3]...

Pensem que o [1,3] está no eixo horizontal, e que C está no eixo vertical.

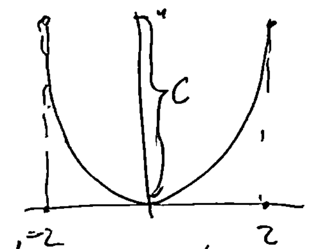


Exercício:

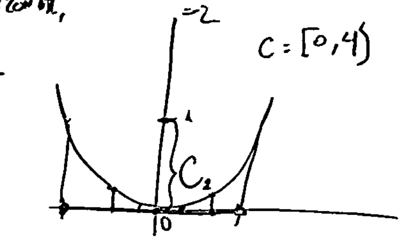
① O que é $\{2x \mid x\in[2,3]\}$?

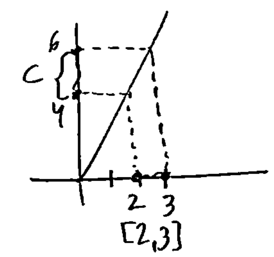
② O que é $\{x^2 \mid x\in[-1,1]\}$?

③ O que é $\{x^2 \mid x\in(-2,2)\}$?



$C=[0,4)$





C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\int_{\underline{P}}$, $\overline{\int_P}$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

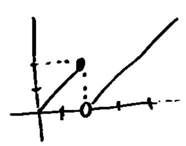
$$f(x) = 4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = -x^2+4x$$

$$[SUP] = \sum_{i=1}^{N} \sup\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\}(b_i-a_i) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x)\right)(b_i-a_i)$$

$$[INF] = \sum_{i=1}^{N} \inf\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\}(b_i-a_i) = \sum_{i=1}^{N}\left(\inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x)\right)(b_i-a_i)$$

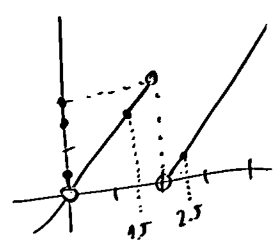
Esses métodos vão nos dar as aproximações por retângulos por cima e por baixo — mesmo em funções estranhas...

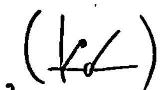
Exemplo: se $f(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x \le 2 \\ x-2 & \text{quando } 2 < x \end{cases}$

$f(x) =$ 

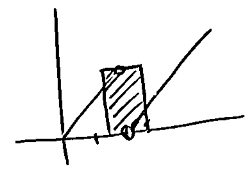
$I = [1.5, 2.5]$

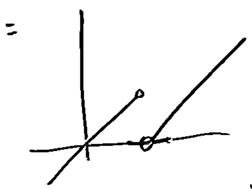
$\{f(x) \mid x\in[1.5,2.5]\} = (0,0.5]\cup[1.5,2]$



Nessa função 

se $P = \{1.5, 2.5\}$

então $[SUP] =$ 

e $[INF] =$ 

(um retângulo de altura zero).

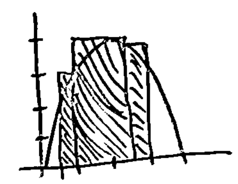
Moral: [SUP] e [INF] são bem complicados formalmente mas bem simples graficamente...

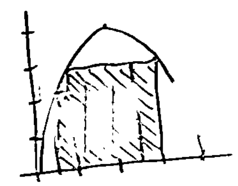
Exercício: seja $f(x) =$ .

Represente graficamente:

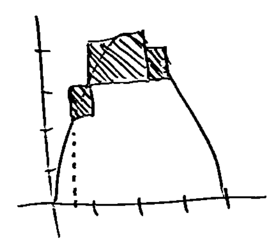
(a) [SUP] para $P = \{0.5, 1, 2.5, 3\}$,

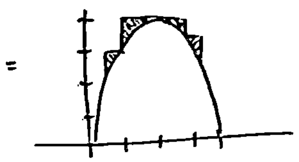
(b) [INF] para $P = \{0.5, 1, 2.5, 3\}$.

$[SUP] =$ 

$[INF] =$ 

...e agora a gente consegue fazer bons desenhos pra diferença entre duas áreas!

$[SUP] - [INF] =$ 

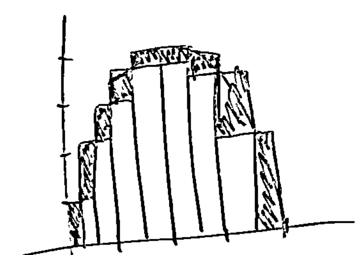
$[SUP] - \int_{x=0.5}^{x=3} f(x)\,dx =$ 

E também dá pra gente comparar duas partições...

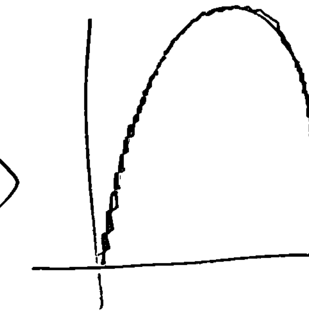
$P_1 = \{0, 4\}$

$P_2 = \{0, 1, 3, 4\}$

$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$



O que acontece se a gente vai passando pra partições cada vez mais finas?



A área da diferença fica cada vez mais próxima de zero!

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = -x^2+4x$$

$P_1 = \{0,4\}$

$P_2 = \{0,1,3,4\}$

$P_3 = \{0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4\}$

São partições cada vez mais "finas" do intervalo $[0,4]$...

Def: Digamos que P seja uma partição do intervalo $[a,b]$ e que $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sejam partições cada vez mais finas do intervalo $[a,b]$. Então:

$\overline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "aproximação por cima" usando a partição P

$\underline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "aproximação por baixo" (idem).

Obs: $\overline{\int}_P f(x)\,dx = [SUP]$

$\underline{\int}_P f(x)\,dx = [INF]$

E se $P_1, P_2, P_3, \ldots$ são partições cada vez mais finas de $[a,b]$ então

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{i=1}^{\infty} \overline{\int}_{P_i} f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{i=1}^{\infty} \underline{\int}_{P_i} f(x)\,dx$$

Porque tudo isso?

Da mesma forma que existem funções não-deriváveis existem funções não integráveis — as funções em que as aproximações da área delas por cima não ficam próximas das aproximações por baixo...

Exemplo:

Seja $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$g(1) = 0$

$g(0.01) = 0$

$g(-\frac{1}{123}) = 0$

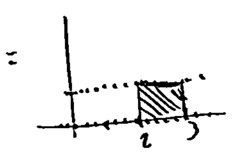
$g(\pi) = 1$

$g(\sqrt{2}) = 1$

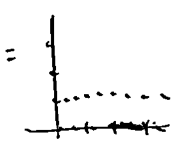
$g(3+\sqrt{2}) = 1$

$g(x) =$

$\overline{\int}_{x=2}^{x=3} g(x)\,dx =$



$\underline{\int}_{x=2}^{x=3} g(x)\,dx =$



Def: $f(x)$ é integrável no intervalo $[a,b]$ (ou: "$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ existe") quando $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

Exemplo: Toda função $f(x)$ contínua em $[a,b]$ é integrável! (Porquê? Pensem em casa!)

Reparem que essa definição de integral nos diz como calcular uma integral fazendo infinitos passos!

Precisamos de truques melhores!

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

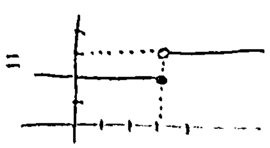
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = -x^2+4x$$

Exemplo (que vai motivar alguns dos truques):

Se $f(x)=\begin{cases}2 & \text{se } x\le 3,\\ 3 & \text{se } 3<x.\end{cases}$

$f(x) =$ 

Exercício:

(a) $\int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \Rightarrow 2(3-1)+3(4-3)$

(b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$

(c) $\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx$

Digamos que ε seja maior que zero mas muito pequeno.

Represente graficamente e calcule:

(d) $\int_{x=1}^{x=5+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

(e) $\int_{x=1+\varepsilon}^{x=5} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

Def: $F(a,b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

- Digamos que a está fixo... Por exemplo, $a=1$.

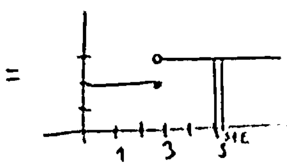
Como é a função $F(1,b)$?

b	$F(1,b)$
2	2
3	4
4	7
5	10

A gente sabe calcular $F(1,b)$ pra cada b...

O que é $\frac{d}{db}F(1,b)$?

Aliás, o que é $\frac{F(1,5+\varepsilon)-F(1,5)}{\varepsilon}$?

$F(1,5+\varepsilon)-F(1,5) =$ 

$=3\varepsilon$

$$\frac{F(1,5+\varepsilon)-F(1,5)}{\varepsilon}=3$$

Como visualizar isso?

$\frac{3\cdot\varepsilon}{\varepsilon}=3$, ou:

$\frac{\text{altura}\cdot\text{base}}{\text{base}}=\text{altura}$

Calcule:

(f) $\frac{F(1,4+\varepsilon)-F(1,4)}{\varepsilon} = 3$

(g) $\frac{F(1,2+\varepsilon)-F(1,2)}{\varepsilon} = 2$

Repare que se sabemos $F(1,b)$ pra todo valor de b a gente consegue calcular todas as expressões da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$...

Exemplo: $\int_{x=5}^{x=6} f(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

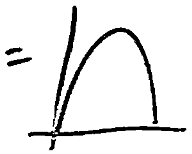
Hoje:

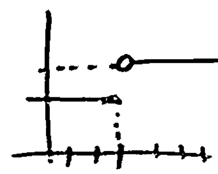
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P, \overline{\int}_P, \underline{\int}, \overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = -x^2+4x$$

Rearrumando:

$f(x) =$ 

$g(x) =$ 

$$\frac{\int_{x=1}^{x=b+\varepsilon} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx}{\varepsilon} = g(b)$$

Def: $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$

Exemplos: $G(1)=0$, $G(2)=2$, $G(3)=4$, $G(5)=7$

E essa função G pode ser usada pra calcular integrais...

Por exemplo, $\int_{x=5}^{x=6} g(x)\,dx = G(6)-G(5)$

Que propriedades essa G tem?

- $\frac{d}{db} G(b) = g(b)$

ou renomeando: $\frac{d}{dx} G(x) = g(x)$

Chute: Podemos obter $G(x)$ descobrindo uma função $G(x)$ que obedeça isto... (isto funciona quase sempre!)

Idem pra $f(x)$...

Se encontrarmos $F(x)$ que obedece $F'(x) = f(x) = 4-(x-2)^2$ podemos calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$

desse jeito: $F(4)-F(0)$

C2 [illegible]/2019

TURMA PEQUENA

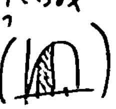
NA AULA PASSADA NÓS VIMOS UM MONTE DE DETALHES TÉCNICOS DA INTEGRAL — VISTA COMO LIMITE DE SOMAS DE RETÂNGULOS...

HOJE VAMOS VER COMO USAR AS IDÉIAS DA AULA PRA CALCULAR $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ (A PARÁBOLA) E UM MONTE DE OUTRAS INTEGRAIS.

VOLTANDO AO NOSSO EXEMPLO PREFERIDO...

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = -x^2+4x$$

DEF: $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

$F(2) =$ ÁREA ()

$F(3) =$ ÁREA ()

REPARE QUE SE TIVERMOS UMA FÓRMULA RÁPIDA — QUE NÃO PRECISA DE INFINITOS PASSOS — PRA CALCULAR $F(b)$ PRA QUALQUER b A GENTE VAI SABER CALCULAR

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

PRA QUAISQUER a E b.

EXEMPLO MUITO FÁCIL DE VISUALIZAR:

$$\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx$$

(ISSO TAMBÉM FUNCIONA PRA a E b FORA DO INTERVALO $[1,4]$ — VISUALIZEM EM CASA!)

QUAIS SÃO AS PROPRIEDADES DA F?

- $F(1) = \int_{x=1}^{x=1} f(x)\,dx = 0$

  (PORQUE É UM RETÂNGULO DE LARGURA ZERO)

- $F'(b) = f(b)$

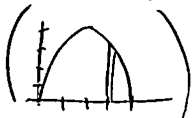
  PORQUE?

  TEM UM ARGUMENTO VISUAL BEM LEGAL PRA ISSO!

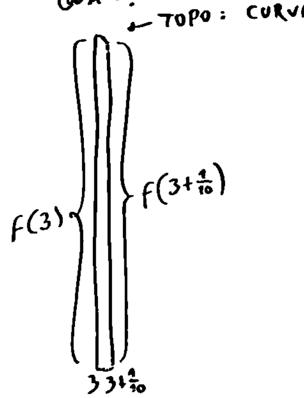
$$F'(b) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(b+\varepsilon)-F(b)}{\varepsilon}$$

VAMOS TENTAR VISUALIZAR ISSO PRA ε PEQUENO E MAIOR QUE 0 — O ARGUMENTO TAMBÉM FUNCIONA PRA $\varepsilon<0$, MAS É MAIS DIFÍCIL DE VER.

EXEMPLO:

$F(3+\frac{1}{10}) - F(3) =$ ÁREA ()

ESSA ÁREA NÃO É UM RETÂNGULO, NEM É UM TRAPÉZIO — MAS QUASE!



... MAS $F(3+\frac{1}{1000000}) - F(3)$ É BEM MAIS PARECIDO COM UM RETÂNGULO — DE BASE $\frac{1}{1000000}$ E ALTURA $f(3)$! ...

E ESSAS FIGURAS FICAM CADA VEZ MAIS PARECIDAS COM RETÂNGULOS QUANDO $\varepsilon \to 0$.

SE $\varepsilon > 0$ É BEM PEQUENO

$F(3+\varepsilon)-F(3)$

VAI SER PRATICAMENTE

$\underset{\text{BASE}}{\varepsilon} \cdot \underset{\text{ALTURA}}{f(3)}$

E $\dfrac{F(3+\varepsilon)-F(3)}{\varepsilon} \approx f(3)$

... ISSO É UM ARGUMENTO INFORMAL/VISUAL QUE MOSTRA QUE

$$F'(3) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(3+\varepsilon)-F(3)}{\varepsilon} = f(3)$$

E ISSO PODE SER GENERALIZADO —

SE $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

ENTÃO $F'(b) = f(b)$

PRA QUALQUER f CONTÍNUA, E $a,b \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS:

1. ENCONTRE $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ QUE OBEDEÇA $g'(x) = f(x) = -x^2+4x$
2. ENCONTRE TODAS AS SOLUÇÕES PARA $F'(x) = -x^2+4x$
3. ENCONTRE A SOLUÇÃO DESSA EDO QUE OBEDECE $F(1)=0$.

C2 [illegible]/AGO/2019

TURMA PEQUENA

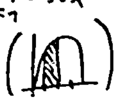
Na aula passada nós vimos um monte de detalhes técnicos da integral — vista como limite de somas de retângulos...

Hoje vamos ver como usar as idéias da aula pra calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ (a parábola) e um monte de outras integrais.

Voltando ao nosso exemplo preferido...

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = -x^2+4x$$

Def: $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

$F(2) = \text{Área}\Big($  $\Big)$

$F(3) = \text{Área}\Big($  $\Big)$

Revendo:

Definimos $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

Descobrimos que
$$\left.\begin{aligned} F(1) &= 0, \\ F'(b) &= f(b) \\ F'(x) &= -x^2+4x \end{aligned}\right\} (\star)$$

Isso é uma EDO simples!

Vamos esquecer as áreas temporariamente e resolvê-la...

$$F'(x) = -x^2+4x$$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2+C$ pra alguma constante C.

Qual é o C que faz com que $F(1)=0$?

$$F(1) = -\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2+C$$

$\Rightarrow C = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2-\frac{5}{3}$ é a solução da EDO $(\star)$.

Exercícios:

Calcule:

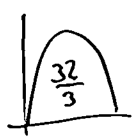
a) $F(2)$

b) $F(3)$

c) $\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx$

e) $\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx$

f) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \frac{32}{3} =$ 

CASA!!

Como é que a gente otimiza isso? Dica: dá pra gente se livrar do passo de calcular a constante C...

Se: $F_1(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

$F_{0.5}(b) = \int_{x=0.5}^{x=b} f(x)\,dx$

$F_a(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

Digamos que a gente resolveu a EDO $F'(x) = -x^2+4x$ e a gente encontrou uma solução dela...

Exemplo: $F(x) = -\frac{x^3}{3}+2x^2+42$

e aí a gente encontrou C_1, e

$F_1(x) = F(x)+C_1$

$F_{0.5}(x) = F(x)+C_{0.5}$

Mas:

$$\begin{aligned}\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx &= F_1(3)-F_1(2) \\ &= (F(3)+C_1)-(F(2)+C_1) \\ &= F(3)+\cancel{C_1}-F(2)-\cancel{C_1} \\ &= F(3)-F(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx &= F_{0.5}(3)-F_{0.5}(2) \\ &= (F(3)+\cancel{C_{0.5}})-(F(2)+\cancel{C_{0.5}}) \\ &= F(3)-F(2)\end{aligned}$$

Método: (TFC2!)

Se f é contínua podemos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ encontrando <u>alguma</u> solução da EDO $F'(x) = f(x)$ e aí:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Exercício:

Seja $g(x) = \operatorname{sen} x$.

Calcule $\int_{x=0}^{x=\pi} g(x)\,dx = \text{Área}\Big($  $\Big)$

Dica: Resolva esta EDO: $G'(x) = \operatorname{sen} x$

OBS: A papelaria TNT está fazendo impressões a 10 centavos por página se for frente e verso e for material da UFF! Vou mandar o capítulo sobre integração do APEX Calculus pra lá!

30/AGO/2019

TURMA PEQUENA

NOTAÇÃO NOVA:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A DIFERENÇA DE $F(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

LIMITES DE INTEGRAÇÃO (EXTREMIDADES DO INTERVALO)

PONTOS EM QUE TEMOS QUE CALCULAR $F(x)$

O QUE ACONTECE SE A GENTE APAGA AS EXTREMIDADES/OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO?

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

$\int f(x)\,dx$ É A "INTEGRAL INDEFINIDA" DE $f(x)$

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ É A "INTEGRAL DEFINIDA" (PORQUE OS LIMITES ESTÃO EXPLÍCITOS).

EU PREFIRO TRATAR

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

COMO ABREVIAÇÃO DE

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

NO SENTIDO DE QUE É O RESULTADO DA GENTE OMITIR OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO.

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

TEM VÁRIAS INTERPRETAÇÕES POSSÍVEIS...

UMA DELAS É:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

QUER DIZER

$$f(x) = F'(x)$$

OUTRA É:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

QUER DIZER QUE TODAS AS SOLUÇÕES DA EDO $F'(x)=f(x)$ SÃO DA FORMA $F(x)+C$...

EXEMPLO CONCRETO:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C$$

QUER DIZER QUE TODAS AS SOLUÇÕES DE $F'(x)=x^2$ SÃO DA FORMA $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

OU: "PRIMITIVAS"

NAS SEÇÕES SOBRE INTEGRAIS INDEFINIDAS OS LIVROS TÊM MONTES DE EXERCÍCIOS COMO:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \ ?$$

E AQUI NO CURSO VOCÊS VÃO PODER USAR TANTO A FORMA COM "+C" QUANTO A FORMA SEM.

EXERCÍCIOS (SEÇÃO 5.1 DO APEX):

a) $\int 3x^3\,dx = \ ?$

b) $\int x^8\,dx = \ ?$

c) $\int 10x^2-2\,dx = \ ?$

d) $\int 1\,dx = \ ?$

e) $\int 42\,dx = \ ?$

f) $\int x^{1/2}\,dx = \ ?$

g) $\int 4e^{5x}\,dx = \ ?$

C2 4/SET/2019

TURMA PEQUENA

NA ÚLTIMA AULA NÓS VIMOS UM TRUQUE PRA CALCULAR EXPRESSÕES COMO

$$\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx \ldots$$

NÓS ENCONTRÁVAMOS ALGUMA FUNÇÃO $F(x)$ CUJA DERIVADA FOSSE x^2 E AÍ USÁVAMOS ISTO ("TFC2"):

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A PARTIR DE HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A USAR O LIVRO - O APEX CALCULUS - UM BOCADO.

HOJE: ATIVIDADES! EXERCÍCIOS! FOLHAS SOBRE SUBSTITUIÇÃO E INTEGRAÇÃO SOBRE SUBSTITUIÇÃO!

ESTÃO NO PDF DO "MATERIAL PARA EXERCÍCIOS" NO SITE.

EXEMPLO 6.1.1 DO LIVRO:

SE $u = x^2+5$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+5) = 2x,$$

$$\int \operatorname{sen}\underbrace{(x^2+5)}_{u} \cdot \underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int \operatorname{sen} u\,du$$

$$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du \Leftarrow \text{!!}$$

PORQUÊ? COMO ASSIM??? DÁ PRA FAZER MESMO ESSE CANCELAMENTO OU É GAMBIARRA?

EXERCÍCIO (a) DA FOLHA:

$$(\text{TFC2})\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

OBS: A (S2) TEM UM DETALHE IMPLÍCITO:

SE $F'(u) = f(u)$ ENTÃO $\Leftarrow$ ESTA CONDIÇÃO AQUI!

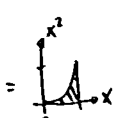
$$\left(\begin{array}{c} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du \end{array}\right)$$

A (S2) É ÚTIL QUANDO A GENTE SABE $f(u)$ MAS AINDA NÃO SABE UMA ANTIDERIVADA PRA ELA.

NOVIDADE: (S2+) É ISTO AQUI:

$$(S2+) = \left(\begin{array}{l} \text{SE } F'(u) = f(u) \text{ ENTÃO} \\ F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \quad\| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}\right)$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx =$$



$$\int_{t=0}^{t=1} t^2\,dx =$$

EXEMPLO: $(S2+)\begin{bmatrix} f(u) = \tan u \\ g(x) = 3x+4 \end{bmatrix} =$

$$\left(\begin{array}{l} \text{SE } F'(u) = \tan u \text{ ENTÃO:} \\ F(3x+4)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} \tan(3x+4)\cdot 3\,dx \\ \quad\| \\ F(u)\Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} = \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \tan(u)\,du \end{array}\right)$$

OBS: A GENTE ÀS VEZES VAI USAR SUBSTITUIÇÃO PRA TESTAR FÓRMULAS.

DIGAMOS QUE UM COLEGA NOSSO, PAULO GUEDES, DEMONSTROU ISSO AQUI E PUBLICOU NUM ARTIGO.

O TEOREMA DE GUEDES É:

$$(TG) = \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\,dx = 4\right).$$

TESTE 1:

$$(TG)\begin{bmatrix} b := 3 \\ a := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=2}^{x=3} 4\,dx = 4\right) \Leftarrow \text{OK!}$$

TESTE 2:

$$(TG)\begin{bmatrix} b := 0 \\ a := 0 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=0}^{x=0} 4\,dx = 4\right) \Leftarrow \text{ERRADO!}$$

C2 4/set/2019

TURMA PEQUENA

Na última aula nós vimos um truque pra calcular expressões como
$\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx$...
Nós encontrávamos alguma função $F(x)$ cuja derivada fosse x^2 e aí usávamos isto ("TFC2"):
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A partir de hoje nós vamos começar a usar o livro - o APEX Calculus - um bocado.

$\boxed{\text{Hoje: Atividades! Exercícios! Folhas sobre substituição e integração sobre substituição!}}$

Estão no PDF do "Material para exercícios" no site.

Algumas observações (vou alterar o PDF mais tarde pra acrescentá-las!):

① A notação de substituição quer dizer substitua todas as ocorrências daquelas variáveis, uma vez só.

Exemplo:
$$\left((x+y)\cdot z\right)\begin{bmatrix} x:=y+z \\ y:=x+z \\ z:=x+y \end{bmatrix} = \left(((y+z)+(x+z))\cdot(x+y)\right)$$
(x vira $y+z$, y vira $x+z$, z vira $x+y$)

② Os sinais dentro do "[ ]" são ":=", não "=" !!!

③ Tem coisas que vão fazer mais sentido em português - e lembrem que nós estamos aprendendo uma notação extra que pode ser traduzida pra português!

Exemplo (exerc. (m) com cos ao invés de Γ):
$$(S3)\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\int_{x=1}^{x=2} \cos(3x+4)\,3\,dx = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \cos u\,du\right)$$

Em português isto viraria: substituindo $f(u)$ por $\cos u$, $g(x)$ por $3x+4$, a por 1 e b por 2 em (S3),

temos:
$$\int_{x=1}^{x=2} \cos(3x+4)\cdot3\,dx = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \cos u\,du$$
Além disso,
$$\int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \cos u\,du = \int_{u=7}^{u=10} \operatorname{sen}' u\,du = \operatorname{sen} 10 - \operatorname{sen} 7,$$
portanto
$$\int_{x=1}^{x=2} \cos(3x+4)\cdot3\,dx = \operatorname{sen} 10 - \operatorname{sen} 7.$$

Em português: o TFC2 diz:
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$
renomeando a variável x para u, temos:
$$\int_{u=a}^{u=b} F'(u)\,du = F(u)\Big|_{u=a}^{u=b}$$
Substituindo a por 7, b por 10 e $F(u)$ por $\operatorname{sen} u$ acima, obtemos:
$$\int_{u=7}^{u=10} \cos u\,du = \operatorname{sen} u\Big|_{u=7}^{u=10} = \operatorname{sen} 10 - \operatorname{sen} 7$$

Revisão de Γ...
$$(DP) = \left(\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}\right)$$
$$(DP)\left[k:=\tfrac12\right] = \left(\frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac12 x^{\frac12-1}\right)$$
Podemos reescrever isto como:
$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac12 x^{-1/2} = \frac12\,\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exercício (pra quem não souber):
$$\int \sqrt{x}\,dx = ?$$
Dica:
$$(IP) = \left(\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}\right)$$
$$(IP)\left[k:=\tfrac12\right] = ?$$

C2 6/set/2019

Turma pequena

Hoje:

- Dúvidas sobre substituição (eu trouxe uma versão revisada dos exercícios)
- Integração por partes
- Como integrar algumas potências de senos e cossenos

o) $(\mathrm{TFC2})\left[F(x) := g(h(x))\right]$

p) $(\mathrm{TFC2})\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$

q) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)\left[k := \frac{1}{2}\right]$

r) $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{k}x^k = x^{k-1}\right)\left[k := \frac{3}{2}\right]$

s) $(\mathrm{TFC2})\left[F(x) := \frac{1}{k}x^k\right]$

Grupo no Telegram: @calculoII20192

Lembre que você não pode usar os "[:=]"s fora deste curso - e todo uso de um "[:=]" pode ser traduzido para português.

Integração por partes

O TFC2 nos diz que:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Substituindo $F(x)$ por $g(x)h(x)$ acima obtemos:

$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}(g(x)h(x))\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Passando um termo para a direita obtemos:

$$(\mathrm{IP1}) = \boxed{\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx}$$

$$(\mathrm{IP2}) = \boxed{\int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx}$$

Exercício:

Dá pra usar uma dessas fórmulas pra integrar $\int_{x=a}^{x=b} xe^x\,dx$?

Obs: (IP1) ou (IP2)!

Qual delas? E qual é o resultado?

Dica: $\int_{x=a}^{x=b} e^x\,dx = e^x\Big|_{x=a}^{x=b}$

Obs: Novidade: Eu estou pedindo pra vocês usarem alguma substituição na (IP1) ou na (IP2), mas não estou dizendo qual substituição!

$(\mathrm{IP1})[\ldots := \ldots]$

$(\mathrm{IP2})[\ldots := \ldots]$

Depois que você resolver este exercício tente integrar $\int_{x=a}^{x=b} x^2e^x\,dx$.

$$(\mathrm{IP1})\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = \ ?$$

$$(\mathrm{IP1})\begin{bmatrix} g(x) := \frac{x^2}{2} \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = \ ?$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\left[F(x) := g(h(x))\right]$$

$$= \left(\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\cdot h'(x)\,dx = g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

C2 6/set/2019
TURMA PEQUENA

Hoje:
- Dúvidas sobre substituição (eu trouxe uma versão revisada dos exercícios)
- Integração por partes
- Como integrar algumas potências de senos e cossenos

o) (TFC2) $[F(x):=g(h(x))]$

p) (TFC2) $[F(x):=g(x)h(x)]$

q) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)$ $[k:=\frac{1}{2}]$

r) $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{k}x^k = x^{k-1}\right)$ $[k:=\frac{3}{2}]$

s) (TFC2) $[F(x):=\frac{1}{k}x^k]$

GRUPO NO TELEGRAM: @calculoII20192

Lembre que você não pode usar os "[:=]"s fora deste curso — e todo uso de um "[:=]" pode ser traduzido para português.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

O TFC2 nos diz que: $\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

substituindo $F(x)$ por $g(x)h(x)$ acima obtemos:

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{d}{dx}(g(x)h(x))\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Passando um termo para a direita obtemos:

(IP1) = $\boxed{\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx}$

(IP2) = $\boxed{\int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx}$

Exercício:
Dá pra usar uma dessas fórmulas pra integrar $\int_{x=a}^{x=b} xe^x\,dx$.

OBS: (IP1) ou (IP2)!

1) Qual delas? E qual é o resultado?
Dica: $\int_{x=a}^{x=b} e^x\,dx = e^x\Big|_{x=a}^{x=b}$

OBS: Novidade:
Eu estou pedindo pra vocês usarem alguma substituição na (IP1) ou na (IP2), mas não estou dizendo qual substituição!

(IP1) [...:=...]

(IP2) [...:=...]

Depois que você resolver este exercício tente integrar

2) $\int_{x=a}^{x=b} x^2e^x\,dx$.

Repare que você usou um monte de "$x=b$ / $x=a$" e "$\Big|_{x=a}^{x=b}$"...

Dá pra abreviar isso, omitindo os limites de integração.

Fórmulas novas:

$$(\mathrm{IP1I}) = \left(\int g'(x)h(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx\right)$$

$$(\mathrm{IP2I}) = \left(\int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,dx\right)$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

Versão curta!

Como integrar algumas potências de senos e cossenos

Exemplo:
$\int (\operatorname{sen} x)^5(\cos x)^3\,dx = ?$

Vamos começar usando a notação abreviada — sem limites de integração — e vamos "completar" as contas depois.

Normalmente a gente usa "u" pra variável nova na substituição, mas eu vou preferir usar s:
$s = \operatorname{sen} x$

Lembre que na versão gambiarra da integração por substituição aparecia isso: $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$

No nosso caso,
$\frac{ds}{dx}dx = ds$
$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}s = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

C2 6/SET/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- DÚVIDAS SOBRE SUBSTITUIÇÃO (EU TROUXE UMA VERSÃO REVISADA DOS EXERCÍCIOS)
- INTEGRAÇÃO POR PARTES
- COMO INTEGRAR ALGUMAS POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS

o) $(TFC2)\left[F(x) := g(h(x))\right]$

p) $(TFC2)\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$

q) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)\left[k := \frac{1}{2}\right]$

r) $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{k}x^k = x^{k-1}\right)\left[k := \frac{3}{2}\right]$

s) $(TFC2)\left[F(x) := \frac{1}{k}x^k\right]$

GRUPO NO TELEGRAM: @calculoII20192

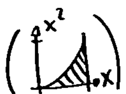
$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 dx =$$
$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \cos x\, dx =$$
$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\cos x\, dx}_{\frac{ds}{dx}} =$$

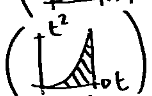
$\boxed{s = \operatorname{sen} x}$

$$\int s^5 \quad (1 - \quad s^2) \quad ds =$$
$$\int s^5 - s^7\, ds \quad = \quad \frac{1}{6}s^6 - \frac{1}{8}s^8$$
$$= \frac{1}{6}(\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8}(\operatorname{sen} x)^8$$

Exercício:

$$\int_{x=a}^{x=6} x^5 - x^7\, dx = ?$$

OBS: $\int_{x=0}^{x=1} x^2\, dx =$ Área ()

$\int_{t=0}^{t=1} t^2\, dt =$ Área ()

OBS: $\int_{x=a}^{x=6} x^5\, dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{x=a}^{x=6}$

ESTA É A VERSÃO ABREVIADA...
COMO "DESABREVIÁ-LA"?

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 dx = \frac{1}{6}(\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8}(\operatorname{sen} x)^8$$
$$\int_{x=a}^{x=6} (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 dx = \left(\frac{1}{6}(\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8}(\operatorname{sen} x)^8\right)\Big|_{x=a}^{x=6}$$

SÓ QUE A GENTE USOU VÁRIOS PASSOS DIFÍCEIS DE ACREDITAR... COMO A GENTE CONFERE SE O NOSSO RESULTADO É VERDADE?

$$(TFC2)\left[F(x) := \frac{1}{6}(\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8}(\operatorname{sen} x)^8\right]$$

OBS: FUNCIONA SIM - A VERIFICAÇÃO É TRABALHOSA MAS OK.

OS PASSOS DO MEIO USAM OUTRA VARIÁVEL - s AO INVÉS DE x... COMO DESABREVIÁ-LOS?

ENCONTRE AS SUBSTITUIÇÕES QUE:

$$(S3I)\left[\ \dots\ \right] = \left(\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\operatorname{sen} x)^2) \cos x\, dx = \int u^5 (1 - u^2)\, du \right)$$

HIPÓTESE:

$$(S3I)\begin{bmatrix} g(x) := 42x \\ f(x) := e^x \end{bmatrix} =$$

HIPÓTESE 2.

...

(CHUTEM E TESTEM!)

PRÓXIMO PASSO: (CASA!)

$$(S3)\left[\ \dots\ \right] = \left(\int_{x=a}^{x=6} (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\operatorname{sen} x)^2) \cos x\, dx = \int_{u=?}^{u=?} u^5 (1 - u^2)\, du \right)$$

O QUE A GENTE PÕE NO LUGAR DOS "?"s ?

C2 11/set/2019
Turma pequena

Hoje: técnicas pra integrar "funções racionais", isto é, quocientes de um polinômio por outro.

Relembrando algumas coisas de Cálculo 1...

Exercícios:

① Lembre que se f e g são inversas, isto é, se $f(g(x))=x$, então $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$

$\overset{\shortparallel}{f'(g(x))g'(x)}$,

e portanto $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Substitua $f(u) := \exp u = e^u$ e $g(x) := \ln x$ na demonstração acima pra descobrir $\frac{d}{dx} \ln x$

② Agora que você sabe $\ln' x$ calcule $\frac{d}{dx} \ln(-x)$.

Dica: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$; encontre uma substituição que faz com que $f(g(x)) = \ln(-x)$.

Revejam isso em casa!

Respostas:

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{x}$

Com isso $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ (porquê? Pensem nos casos $x>0$ e $x<0$!)

E já que $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$, então substituindo $F(x) := \ln|x|$ em

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

temos:

$$\int \frac{d}{dx} \ln|x|\,dx = \ln|x|$$

$$\overset{\shortparallel}{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|} \quad (☆)$$

Isto tem algumas sutilezas... Lembrem que pra gente a integral indefinida é uma abreviação da integral definida...

Ou seja, a fórmula (☆) é o resultado da gente pegar

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_{x=a}^{x=b}} \quad (☆☆)$$

e apagar os limites de integração...

Será que (☆☆) vale pra todos os valores de a e b?

Será que ela vale pra $a=-1$ e $b=1$?

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \text{Área}\left(\qquad \right)$$

Façam o desenho em casa!

$$\left(\ln|x|\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$$

Aviso: A lista de exercícios sobre áreas via retângulos tá quase pronta! Vou mandar ela pra vocês de noite (e colocá-la na página do curso) - e o mini-teste sobre ela vai ser na quarta que vem e a gente pode tirar dúvidas sobre ela na sexta.

O exercício mais difícil e importante da lista é esse aqui:

Calcule $\overline{\int}_P \frac{1}{x}\,dx$ e $\underline{\int}_P \frac{1}{x}\,dx$, onde P é a seguinte partição de $[-1,1]$:

ⓐ $P = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$,

ⓑ $P = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1\}$.

C2 11/SET/2019
TURMA PEQUENA

HOJE: TÉCNICAS PRA INTEGRAR "FUNÇÕES RACIONAIS", ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO.

FATO: $\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx$

NÃO EXISTE! $\frac{1}{x}$ NÃO É INTEGRÁVEL NESSE INTERVALO!

... MAS A GENTE MESMO ASSIM VAI DIZER

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|,$$

PORQUE A VERSÃO "INTEGRAL DEFINIDA" DISTO VALE PARA INTERVALOS QUE NÃO INCLUAM O PONTO RUIM.

POR INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (CASA!) TEMOS:

$$\int \frac{1}{x-42}\,dx = \ln|x-42|$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$$

PARA QUALQUER $a \in \mathbb{R}$.

PORTANTO:

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-3|$$

EXERCÍCIO:

$$\int \frac{3}{4x+5}\,dx = ?$$

DICA: $u = 4x+5$

OBS: A SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS QUE VAI VIRAR UM MINI-TESTE TAMBÉM ESTÁ QUASE PRONTA! ELA É SOBRE INTEGRAR COISAS COMO $\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5\,dx$ USANDO A NOTAÇÃO CERTA E TODOS OS SINAIS DE "=".

$$\int \frac{3}{4x+5}\,dx =$$

$$\int \frac{3}{u}\frac{1}{4}\,du =$$

$$\int \frac{3}{4}\frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{3}{4}\ln|u| =$$

$$\frac{3}{4}\ln|4x+5|$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 4x+5 \\ \frac{du}{dx} = 4 \\ du = 4\,dx \\ dx = \frac{1}{4}\,du \end{array}\right]$$

$$\int \frac{x+2}{x}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{x} + \frac{2}{x}\,dx =$$

$$\int 1 + \frac{2}{x}\,dx =$$

$$\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$x \quad + 2\ln|x|$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = ?$$

$$\int x^{-2}\,dx = ?$$

$$\frac{d}{dx} x^K = K x^{K-1}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{K} x^K = x^{K-1}$$

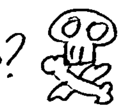
$$\left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)\left[F(x) := \frac{1}{K}x^K\right]$$

$$= \left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)$$

$$\left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)[K := -1] = \left(\int x^{-2}\,dx = \left(\frac{1}{-1}\right)x^{-1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

DÁ PRA INTEGRAR COISAS COMO $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ USANDO A FÓRMULA DA INTEGRAL DE UMA POTÊNCIA DE X...

MAS E NESTE CASO?  !!

$$\left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)[K := 0] =$$

$$\left(\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{0}x^0\right) \quad !!$$

ISTO PRATICAMENTE NOS DIZ QUE

$$\int x^{-1}\,dx = \infty$$

E SE A GENTE PUSER LIMITES DE INTEGRAÇÃO?

$$\int_{x=2}^{x=3} x^{-1}\,dx = \infty\Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$= \infty - \infty$$

$$= \text{INDEFINIDO} \quad !!$$

C2 11/SET/2019
TURMA PEQUENA

Hoje: Técnicas pra integrar "funções racionais", isto é, quocientes de um polinômio por outro.

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x+2| + \ln|x-3|$$

$$\int \frac{4}{x+2} + \frac{5}{x-3}\,dx = \text{(ok)}$$

$$\int \frac{4x^2+5x+6}{x+2} + \frac{7x^2+8x+9}{x-3}\,dx = \text{(ok)}$$

Agora vamos trabalhar um pouco fora do sinal de integral...

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3}{(x+2)(x-3)} + \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx = \Leftarrow$$

x^2-x-6 é um polinômio de grau 2 com duas raízes diferentes!

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x+2| + \ln|x-3|$$

Obs: $\boxed{\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}} = \boxed{\frac{2x-1}{x^2-x+6}}$

FÁCIL $\longrightarrow$
$\longleftarrow$ DIFÍCIL

Em programas que sabem fazer computação simbólica ("contas com letras") essas duas operações têm nomes:
TOGETHER $\longrightarrow$
$\longleftarrow$ APART.

Exercícios:

(a) $\text{TOGETHER}\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) = ?$

(b) $\text{TOGETHER}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right) = ? = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}$

Pra fazer o "apart" a gente tem que resolver um sistema — a menos que a gente saiba o truque que eu vou ensinar depois!!.

Exercícios:

(c) $\text{APART}\left(\frac{1}{(x-2)(x+5)}\right) = ?$

(d) $\text{APART}\left(\frac{x}{(x-2)(x+5)}\right) = ?$

Dica:
$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)} \quad \left[\begin{matrix} a:=2 \\ b:=-5 \end{matrix}\right]$$
$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)} \quad (\star\star\star)$$

Pra resolver o (c) precisamos de: $(A+B)x + (5A-2B) = 1$

$\Rightarrow A+B=0,\quad 5A-2B=1$

$B=-A,\quad 5A+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{7}$, $B=-\frac{1}{7}$

(e) $\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

(f) $\int \frac{x}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

Resp. (c): $\frac{1}{(x-2)(x+5)} = \frac{1/7}{x-2} + \frac{-1/7}{x+5}$

(e):
$$\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1/7}{x-2}\,dx + \int \frac{-1/7}{x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{1}{x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{7}\ln|x+5|$$

E depois?

(g) $\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

Nesse caso temos um polinômio de grau 2 no numerador e um de grau 2 no denominador...

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10} = \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10} = 1 + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10}$$

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

NA AULA PASSADA VIMOS QUE PODÍAMOS INTEGRAR ALGO COMO

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

FAZENDO:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10} = \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10} = \frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-10} + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10} = 1 + \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}$$

E A GENTE VIU QUE DAVA PRA INTEGRAR ALGO COMO

$$\int \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

FAZENDO O "APART"...

VAMOS REVER ALGUMAS COISAS SOBRE POLINÔMIOS, E VER UMA NOTAÇÃO VISUAL (NÃO-PADRÃO!) PRA FAZER CONTAS COM POLINÔMIOS - A "NOTAÇÃO DE CAIXINHAS".

NO CURSO NÓS VAMOS TER TRÊS SITUAÇÕES EM QUE VAMOS PRECISAR MANIPULAR POLINÔMIOS GRANDES - HOJE É A PRIMEIRA DELAS.

EXEMPLO:

$$4x^5 + 6x^4 + 7x^2 + 8x + 9$$

COEF DO x^5; COEF DO x^4; (O COEF DO x^3 É 0); COEF DO x^2; COEF DO x^1; COEF DO x^0

NA NOTAÇÃO DAS CAIXINHAS A GENTE ESCREVE SÓ OS COEFICIENTES - O POLINÔMIO ACIMA VIRA:

4	6	0	7	8	9

COEF DO x^5; COEF DO x^3; COEF DO x^0

IDÉIA:

CONTAS COM POLINÔMIOS SÃO COMO CONTAS COM NÚMEROS, MAS SEM "VAI UM"...

	1	2	3	4
+		9	99	990
	1	11	102	1003

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2+3x+4 \\ +\quad 9x^2+99x+990 \\ \hline x^3+11x^2+102x+1003 \end{array}$$

TRADUÇÃO PRA NOTAÇÃO USUAL!

DÁ PRA CONSIDERAR QUE A NOTAÇÃO DAS CAIXINHAS VAI SER SÓ UM JEITO DA GENTE SE DISCIPLINAR PRA FAZER COM POLINÔMIOS ALINHANDO OS TERMOS DE MESMO GRAU.

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

$$\begin{array}{r} (2x^2+3x+4) \\ \cdot\,(2x^2+10x+100) \\ \hline 200x^2+300x+400 \\ 20x^3+30x^2+40x \\ +\quad 4x^4+6x^3+8x^2 \\ \hline 4x^4+26x^3+238x^2+340x+400 \end{array}$$

			2	3	4
·			2	10	100
			200	300	400
		20	30	40	
+	4	6	8		
	4	26	238	340	400

TERMINOLOGIA:

UMA FUNÇÃO RACIONAL É O QUOCIENTE DE DOIS POLINÔMIOS: $\frac{p(x)}{q(x)}$

SE GRAU$(p(x))$ < GRAU$(q(x))$ ENTÃO DIZEMOS QUE $\frac{p(x)}{q(x)}$ É "PRÓPRIA"; SENÃO DIZEMOS QUE ELA É IMPRÓPRIA.

$$\text{TOGETHER}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right) = \frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}$$

PRÓPRIA; PRÓPRIA; TAMBÉM É PRÓPRIA!

$$\text{TOGETHER}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}\right) = \frac{\begin{pmatrix} A(x-b)(x-c) \\ +(x-a)B(x-c) \\ +(x-a)(x-b)C \end{pmatrix}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

A GENTE CONSEGUE RESOLVER ALGO DESTE TIPO — ISTO É, ENCONTRAR OS VALORES DE A, B, C — SE E SÓ SE O POLINÔMIO p(x) FOR DE GRAU 2 OU MENOR...

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+10}=\frac{p(x)}{(x-2)(x-5)(x+10)}$$

EXEMPLOS: $p(x)=3x^2+4x+5$ ⇒ DÁ PRA RESOLVER

$p(x)=4x^3$ ⇒ NÃO DÁ PRA RESOLVER.

COMO INTEGRAR $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ QUANDO $\frac{p(x)}{q(x)}$ É IMPRÓPRIA?

TRUQUE: DIVISÃO DE POLINÔMIOS COM RESTO

EXEMPLO:

$\boxed{1|1|1|1|1}$

$\cdot\ \boxed{1|-1}$

$\boxed{-1|-1|-1|-1|-1}$

$\boxed{1|1|1|1|1}$

$\boxed{1|0|0|0|0|-1}$

$\parallel$

x^5-1

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\frac{x^5}{x-1}=\,?$$

RENOMEANDO:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}\,dx=\int\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\,dx$$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\gamma(x)$$

VERSÃO COM RESTO: $\frac{\alpha(x)-r(x)}{\beta(x)}=\gamma(x)$

ONDE $\mathrm{GRAU}(r(x))<\mathrm{GRAU}(\beta(x))$

$$\alpha(x)-r(x)=\gamma(x)\beta(x)$$

"DIVIDIR $\alpha(x)$ POR $\beta(x)$ COM RESTO" VAI QUERER DIZER: ENCONTRAR $\gamma(x)$ E $r(x)$ OBEDECENDO:

$\alpha(x)-r(x)=\gamma(x)\beta(x)$,

$\mathrm{GRAU}(r(x))<\mathrm{GRAU}(\beta(x))$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS COM RESTO, VERSÃO PARECIDA COM AS CONTAS COM NÚMEROS QUE A GENTE VIU QUANDO ERA CRIANÇA:

$\boxed{1|0|0|0|0|0}\ \big|\ \boxed{1|-1}$

$-\ \boxed{1|-1}\qquad \boxed{1|1|1|1|1}$

$\boxed{1|0|0|0|0}$

$-\ \boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0|0|0}$

$-\ \boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0|0}$

$-\ \boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0}$

$-\ \boxed{1|-1}$

$\boxed{1}$

EXERCÍCIO:

CALCULE: $\boxed{1|2|3|4|5}\ \big|\ \boxed{1|0|10}$

$-\ \boxed{1|0|10}\qquad \boxed{1|2|-7}$

$\boxed{2|-7|4|5}$

$-\ \boxed{2|0|20}$

$\boxed{-7|-16|5}$

$-\ \boxed{-7|0|-70}$

$\boxed{-16|75}$

CONFIRA: $\boxed{1|2|3|4|5}-\boxed{-16|75}=\boxed{1|0|10}\cdot\boxed{1|2|-7}$

$$\begin{array}{l|l} x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0 & x-1 \\ \hline -(x^5-x^4) & x^4+x^3+x^2+x+1 \\ x^4+0x^3+0x^2+0x+0 & \\ -(x^4-x^3) & \\ x^3 & \\ \vdots & \end{array}$$

1

O MINI-TESTE SOBRE A LISTA DE EXERCÍCIOS QUE EU DISTRIBUÍ HOJE VAI SER DAQUI A UMA SEMANA — 20/SET — NOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS DA AULA!

C2 13/set/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: últimos truques pra integrar funções racionais; truques com polinômios; método de Heaviside...

Método de Heaviside

O método de Heaviside vai nos permitir resolver coisas como:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$ ← tem que ser própria!

Sem a gente precisar resolver sistemas.

Obs: ele só funciona se a,b,c forem diferentes; ele também funciona para 4, 5, 6, ... frações e pra 2 frações. a,b,c são números que a gente já conhece, e conhecemos o polinômio $p(x)$ (e $\mathrm{grau}(p(x)) < \mathrm{grau}((x-a)(x-b)(x-c))$)

Queremos descobrir A, B, C.

Exemplo:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+10}=\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x-5)(x+10)}$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}\cancel{(x-a)}\frac{p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)(x-c)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}}+\frac{(x-a)B}{x-b}+\frac{(x-a)C}{x-c}\right)}_{=A+0+0=A} \qquad \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{(x-b)(x-c)} = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

Truques pro lado esquerdo:

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{\to 0}{(x-a)}\overset{\in\mathbb{R}}{B}}{\underset{\neq 0}{(x-b)}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)B}{x-b}=\lim_{x\to a}\frac{(a-a)B}{a-b}=\frac{0\cdot B}{a-b}=0$$

$$\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)}_{=A}=\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{=\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}}$$

E se fizermos "$\lim_{x\to b}(x-b)$" vamos obter:

$$B=\frac{p(b)}{(b-a)(b-c)}$$

Similarmente,

$$C=\frac{p(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Exercício: Calcule:

$$\int\frac{x^4}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

usando divisão com resto e Heaviside.

Casa: Fasa isso e confira a sua resposta usando TFC2!

O mini-teste sobre a lista de exercícios que eu distribuí hoje vai ser daqui a uma semana - 20/set - nos últimos 15 minutos da aula!

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

PRÓXIMA AULA:

LEMBREM QUE A GENTE SABE INTEGRAR ISTO NUM MONTE DE CASOS...

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

A GENTE TEM QUE FATORAR $q(x)$ E O MÉTODO DE HEAVISIDE SÓ FUNCIONA SEM RAÍZES REPETIDAS...

$$(x+i)(x-i) = x^2 + \cancel{ix} - \cancel{ix} + i(-i)$$
$$= x^2 + 1$$

x^2+1 TEM RAÍZES COMPLEXAS!

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = ?$$

IDÉIA (RUIM): $\alpha \ln|x-i| + \beta \ln|x+i|$!!

SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}_{(\cos\theta)^2}}}_{\cos\theta} \cos\theta\, d\theta$$

C2 18/set/2019

Turma pequena

Hoje: substituição trigonométrica!

Idéia geral: é difícil integrar coisas como

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

por causa do $\sqrt{1-x^2}$, mas dá pra converter a integral acima em algo em termos de senos e cossenos...

Obs: os livros costumam apresentar substituição trigonométrica usando um método que eu achava impossível de decorar e que a gente vai dividir em vários passos.

Substituição trigonométrica -
Passo principal -
Caso do seno -
Exemplo 1

Ah, tem um truque que eu vou usar algumas vezes durante o curso - certas letras vão ter significados default. As que vamos usar agora são:

$s = \operatorname{sen}\theta$ ⟸ mais fácil
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

Exemplo 1

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = ?$$

Se substituirmos s por $\operatorname{sen}\theta$ vamos ter:

$$\int \underbrace{s}_{\operatorname{sen}\theta}\ \underbrace{\sqrt{1-\underbrace{\underbrace{s^2}_{}}_{(\operatorname{sen}\theta)^2}}}_{\substack{(\cos\theta)^2 \\ \cos\theta}}\ \underbrace{\underbrace{ds}_{?}}_{\cos\theta\,d\theta}$$

$\frac{ds}{d\theta} = ?$

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}s = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$

$ds = \cos\theta\,d\theta$

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx =$ $\left[\begin{array}{l} s=x \\ ds=dx\end{array}\right]$

$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds =$ $\left[\begin{array}{l} s=\operatorname{sen}\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta\end{array}\right]$

$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$

$\int \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta)^2\,d\theta =$

$\int (\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta =$ $\left[\begin{array}{l} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)\,dc\end{array}\right]$

$\int c^2\ (-1)\,dc =$

$-\int c^2\,dc =$

$-\frac{c^3}{3} =$

$-\frac{(\cos\theta)^3}{3} =$

$-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3} =$

$-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$

⟸ Como é que a gente volta pra variável x?

Ou seja:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^3}{3}$$

Como é que a gente verifica isso?

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\substack{\text{será que isto é} \\ F'(x)?}} = \underbrace{-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}}_{F(x)}$$

Como é que a gente deriva esse $F(x)$? Regra da cadeia várias vezes, e temos que saber $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$...

Dá pra descobrir $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$ de um jeito parecido com o que a gente fez pra descobrir $\frac{d}{dx}\ln x$... Usamos isto: se $f(g(x)) = x$ então $\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad f'(g(x))\,g'(x)$,

e daí $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

C2 18/set/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

JEITO MAIS FÁCIL (DEPENDE DA GENTE ENTENDER AS RELAÇÕES ENTRE AS VARIÁVEIS QUE USAMOS — x, s, θ, c ...

$x = s$

$s = \operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \operatorname{arcsen} s$

$c = \cos\theta \qquad \theta = \operatorname{arccos} c$

$c = \sqrt{1-s^2}$

$= \sqrt{1-x^2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \qquad [s = x]$$

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \qquad \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \qquad \left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta = (-1)\,dc \end{array}\right]$$

$$\int c^2(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$$

COMO TESTAR ISSO?

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\text{SERÁ QUE ISTO É } F'(x)?} = \underbrace{-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3}_{F(x)}.$$

DICA:

COMECE FAZENDO UMA TABELA DAS DERIVADAS DAS SUBEXPRESSÕES DE $F(x)$:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2) = -2x$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}^3 = \frac{d}{dx}(1-x^2)^{3/2} = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3\right) = +\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(1-x^2)^{1/2}(+\cancel{2}x)$$

$$= (1-x^2)^{1/2}\cdot x$$

$$= x\sqrt{1-x^2}$$

AGORA ALGO UM POUQUINHO MAIS GERAL:

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta\,dx = ?$$

CONVERTA ISTO EM ALGO COMO

$$\int k(\operatorname{sen}\theta)^\gamma(\cos\theta)^\delta\,d\theta.$$

REFAÇAM EM CASA!

ATÉ AGORA USAMOS $s = \operatorname{sen}\theta$ ...

VAMOS VER OS CASOS $z = \sec\theta$ e $t = \tan\theta$.

IMPORTANTE:

z e t OBEDECEM CERTAS RELAÇÕES PARECIDAS COM $c^2 + s^2 = 1$ ...

LEMBRE QUE:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$t = \frac{s}{c}$$

$$z = \frac{1}{c}$$

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$$

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1 + t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z^2 = 1 + t^2 \\ z^2 - t^2 = 1 \\ t^2 = z^2 - 1 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \sqrt{1+t^2} \\ t = \sqrt{z^2-1} \end{array}}$$

ESSAS RELAÇÕES —

$$z = \sqrt{1+t^2}$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$

QUASE SÃO O SUFICIENTE PRA GENTE APRENDER A RESOLVER COISAS COMO

$$\int \underbrace{t}_{\frac{s}{c}} \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\underbrace{z}_{\frac{1}{c}}} \underbrace{dt}_{?}$$

MAS AINDA NÃO SABEMOS EXPANDIR O dt — E NEM O dz ...

CASO DA SECANTE:

$$\int \underbrace{z}_{1/c} \underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{\underbrace{t}_{\frac{s}{c}}} \underbrace{dz}_{?}$$

$\boxed{\text{C2 18/SET/2019}}$

$\boxed{\text{TURMA PEQUENA}}$

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \tan\theta = \frac{d}{d\theta} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \sec\theta = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \frac{s}{c} &= \frac{s'c - sc'}{c^2} \\ &= \frac{cc - s(-s)}{c^2} \\ &= \frac{c^2 + s^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \\ &= z^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{d\theta} t = z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{c} &= \frac{1'c - 1c'}{c^2} \\ &= \frac{0 \cdot c - 1(-s)}{c^2} \\ &= \frac{s}{c^2} \\ &= \frac{1}{c} \frac{s}{c} \\ &= zt \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dz}{d\theta} = zt}$$

Com estas duas fórmulas,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dt}{d\theta} &= z^2 \\ \frac{dz}{d\theta} &= zt \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} dt &= z^2\, d\theta \\ dz &= zt\, d\theta \end{aligned}}$$

EXERCÍCIOS:

1. FAÇA O PRIMEIRO PASSO DA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA AQUI:

$$\int t \sqrt{1+t^2}\, dt = ?$$

ALIÁS, FAÇA O PASSO SEGUINTE TAMBÉM - TRANSFORMEM A INTEGRAL ACIMA NUMA DESSA FORMA:

$$\int k (\cos\theta)^\gamma (\operatorname{sen}\theta)^\delta\, d\theta$$

2. FAÇA A MESMA COISA PARA:

$$\int z \sqrt{z^2-1}\, dz = ?$$

CASA!!! MUITO IMPORTANTE!

3. IDEM PARA:

$$\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta\, dt$$

4. IDEM PARA

$$\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^\beta\, dz.$$

EU AVISEI QUE ISSO ERA UM DOS PASSOS DA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA...

O QUE A GENTE VIU SERVE PRA GENTE LIDAR COM INTEGRAIS CUJO "TERMO RUIM" É DA FORMA

$\sqrt{1-x^2}$, ⇐ USE $s=x$

$\sqrt{1+x^2}$, ⇐ USE $t=x$

$\sqrt{x^2+1}$ ... ⇐ USE $z=x$

E SE O TERMO RUIM FOR ALGO COMO:

$$\sqrt{\underbrace{4}_{\text{NÃO É 1!}} - \underbrace{9}_{\text{NÃO É 1!}} x^2}\ ?\ !!$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{4-9x^2} = \\ &\sqrt{4\left(1-\tfrac{9}{4}x^2\right)} = \\ &\sqrt{4}\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} = \\ &2\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} = \\ &2\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2} = && \left[u = \tfrac{3}{2}x\right] \\ &2\sqrt{1-u^2} = && [s = u] \\ &2\sqrt{1-s^2} \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} &\int x \sqrt{4-9x^2}\, dx = \\ &\int x \cdot 2\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2}\, dx = \\ &\int \left(\tfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}u\right) \cdot 2\sqrt{1-u^2} \cdot \tfrac{2}{\cancel{3}}\, du = \\ &\int 2u\sqrt{1-u^2}\, du = \\ &2\int u\sqrt{1-u^2}\, du \end{aligned} \qquad \left[\begin{aligned} u &= \tfrac{3}{2}x \\ \tfrac{du}{dx} &= \tfrac{3}{2} \\ du &= \tfrac{3}{2}dx \\ dx &= \tfrac{2}{3}du \end{aligned}\right]$$

C2 18/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

ÀS VEZES SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA VAI NOS SALVAR EM CASOS EM QUE A RAIZ QUADRADA NÃO ESTÁ EXPLÍCITA...

COISAS PENDENTES DO FINAL DA AULA PASSADA:

$$(x+i)(x-i) = x^2 + \cancel{ix} - \cancel{ix} + i(-i)$$
$$= x^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{1}{(x-i)(x+i)}\,dx = \ \|$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}\,dx =$$

$$\int x^0 \sqrt{x^2+1}^{\,-2}\,dx = \qquad [z=x]$$

$$\int z^0 \sqrt{z^2+1}^{\,-2}\,dz =$$

$\|$ (CASA!)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \qquad [z=x]$$

$$(\ldots) =$$

$$\int z^1 \sqrt{z^2+1}^{\,-2}\,dz$$

(CASA!)

AVISOS:

SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

- TEM VÁRIOS CASOS
- DÁ UM TRABALHÃO
- A GENTE ERRA MUITO...

ENTÃO:

$\boxed{\text{TREINEM!}}$

A PÁGINA DO CURSO TEM LINKS PRA VÁRIAS LISTAS DE EXERCÍCIOS ANTIGAS DE NITERÓI... ALGUNS DOS EXERCÍCIOS DIZEM EXPLICITAMENTE "RESOLVA POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA". TENTE FAZÊ-LOS!

C2 20/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$!

MAS ANTES DISSO:
- INTRODUSÃO A SÉRIES DE TAYLOR,
- REVISÃO DE COMPLEXOS.

DERIVADAS EM $x=0$

VAMOS DEFINIR DUAS OPERASÕES:

$\mathrm{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots)$,

$\mathrm{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0), \ldots)$

A "derivs" RECEBE UMA FUNSÃO E RETORNA UMA SEQUÊNCIA INFINITA DE FUNSÕES, E A "derivs_0" RECEBE UMA FUNSÃO E RETORNA UMA SEQUÊNCIA INFINITA DE NÚMEROS.

EXEMPLO: SE

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ \text{ENTÃO}\quad f'(x) &= 2ax+b, \\ f''(x) &= 2a, \\ f'''(x) &= 0, \end{aligned}$$

$\mathrm{derivs}(f) = (ax^2+bx+c,\ 2ax+b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots)$

$\mathrm{derivs}_0(f) = (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$

EXERCÍCIOS:

1. SEJA $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. CALCULE $\mathrm{derivs}_0(f)$.
   DICA: CALCULE $\mathrm{derivs}(f)$ PRIMEIRO.
2. CALCULE $\mathrm{derivs}_0(e^x)$.
3. CALCULE $\mathrm{derivs}_0(\cos x)$.
4. CALCULE $\mathrm{derivs}_0(\operatorname{sen} x)$.

SE $p(x)$ É UM POLINÔMIO DÁ PRA RECUPERAR TODOS OS COEFS DE $p(x)$ A PARTIR DE $\mathrm{derivs}_0(p(x))$!

COMO?

5. DIGAMOS QUE $p(x) = ax^2+bx+c$ E $\mathrm{derivs}_0(p(x)) = (42, 99, 200, 0, 0, 0, \ldots)$. DESCUBRA a, b, c.
6. DIGAMOS QUE $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ E $\mathrm{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, 0, \ldots)$. DESCUBRA a, b, c, d, e.

ÀS VEZES NÓS VAMOS FINGIR, OU SUPOR, QUE ESSA IDÉIA FUNCIONA TAMBÉM PARA "POLINÔMIOS INFINITOS"... E É MELHOR ESCREVÊ-LOS COMEÇANDO PELOS TERMOS DE GRAU MAIS BAIXO.

7. DIGAMOS QUE $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots$ E $\mathrm{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. DIGAMOS QUE CONHECEMOS $b_0, b_1, b_2, \ldots$. DESCUBRA $a_0, a_1, a_2, \ldots$.
8. IDEM, MAS SUPONHA QUE CONHECEMOS $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$. DESCUBRA $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$.
9. AGORA VAMOS TENTAR EXPRESSAR A EXPONENCIAL COMO UM "POLINÔMIO INFINITO".
   DIGAMOS QUE $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$ E $\mathrm{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, DESCUBRA $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots$.

...SE A IDÉIA DE QUE "DÁ PRA RECUPERAR OS COEFICIENTES DE $p(x)$ A PARTIR DE $\mathrm{derivs}_0(p(x))$" TAMBÉM VALER PARA "POLINÔMIOS INFINITOS" ENTÃO:

$\mathrm{derivs}_0(e^x) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

$\mathrm{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

ONDE $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

ENTÃO NUM CERTO SENTIDO

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}$$

OBS: DÁ USAR ISSO PRA CALCULAR e^x NA MÃO!!!

EXEMPLO: SE $x = 1$

ENTÃO $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$e = 1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$

OBS: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

ISTO É CHAMADO DE A SÉRIE DE TAYLOR DE e^x (EM $x=0$).

EXERCÍCIOS:

10. ENCONTRE A SÉRIE DE TAYLOR DE $\cos x$. OBS: $\mathrm{derivs}_0(\cos x) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$.
11. IDEM PARA $\operatorname{sen} x$.

RESPOSTA (VERIFIQUEM EM CASA!):

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

A GENTE DECIDIU ACREDITAR QUE $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ VALE SEMPRE...

SEMPRE $\Rightarrow$ PRA TODOS OS REAIS.

$\Downarrow$ NOVIDADE!!!

PRA TODOS OS COMPLEXOS.

C2 20/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

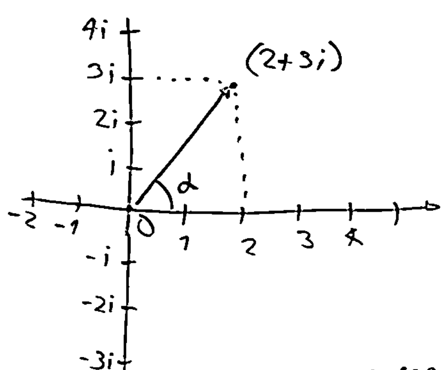
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$!

MAS ANTES DISSO:

- INTRODUÇÃO À SÉRIES DE TAYLOR,
- REVISÃO DE COMPLEXOS.

MICRO-REVISÃO DE COMPLEXOS

PLANO COMPLEXO:

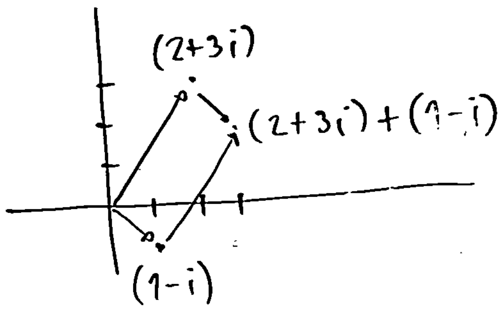


PRA DESIGNAR O PONTO (2+3i) FAZEMOS ISTO: COMEÇAMOS NO 0, ANDAMOS DUAS UNIDADES PRA DIREITA, DEPOIS TRÊS UNIDADES PRA CIMA... (2+3i) PODE SER VISTO COMO UM DESLOCAMENTO - UM VETOR.

SOMA DE COMPLEXOS

... É COMO SOMA DE VETORES:

$(2+3i) + (1-i) =$



IDÉIA IMPORTANTE

"MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS SOMA ÂNGULOS"

(ISSO VOCÊS VIRAM NO ENSINO MÉDIO, VAMOS SÓ REVER BEM RÁPIDO! ‼)

EXERCÍCIOS:

VERIFIQUE ISTO NOS SEGUINTES CASOS:

ⓐ $(2+i)(1+i) = (1+3i)$

ⓑ $(2+i)(2+i) =$

ⓒ $(2+i)\cdot i =$

ⓓ $(2+i)\cdot(-i) =$

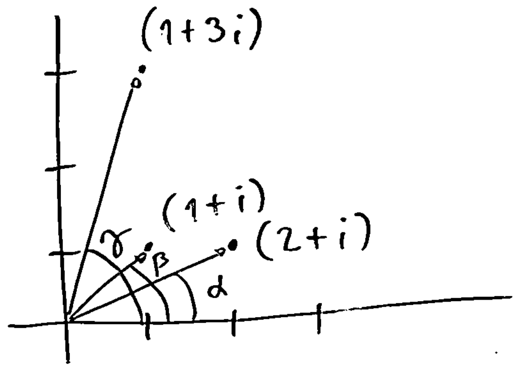
OBS:

$(a+ib)(c+id) =$

$ac + ibc + iad + iibd =$

$(ac-bd) + i(bc+ad)$.

ⓐ



MINI-TESTE:

SEJAM $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{PARA } x \neq 0, \\ 0 & \text{PARA } x = 0, \end{cases}$

E $P = \{-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 1\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE

E CALCULE

$\overline{\int_P} f(x)\,dx$ E

$\underline{\int_P} f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{C2 25/SET/2019}}$
$\boxed{\text{TURMA PEQUENA}}$

HOJE:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
E APLICAÇÕES!

NA AULA PASSADA VIMOS QUE:

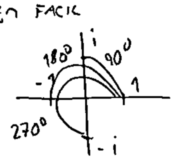
$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots &\Leftarrow \boxed{1}\\ \cos x &= 1 \quad - \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^4}{4!} - \dots &\Leftarrow \boxed{2}\\ \operatorname{sen} x &= \quad x \quad - \frac{x^3}{3!} \quad + \frac{x^5}{5!} - \dots &\Leftarrow \boxed{3}\end{aligned}}$$

E VIMOS QUE EM
$$(2+3i)(4+5i) = 2\cdot 4 + 2\cdot 5i + 3i\cdot 4 + 3i\cdot 5i$$
$$= (2\cdot 4 - 3\cdot 5) + (2\cdot 5 + 3\cdot 4)i$$

NÓS SEPARAMOS A PARTE REAL E A PARTE IMAGINÁRIA DO RESULTADO NO FINAL...

E VIMOS QUE MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS "SOMA ÂNGULOS" - UMA CONSEQUÊNCIA BEM FÁCIL DISTO É:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



FAZENDO $\boxed{1}\,[x := i\theta]$
TEMOS:
$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 \quad - \frac{\theta^2}{2} \quad + \frac{\theta^4}{4!} \quad - \dots\right) \Leftarrow \cos\theta$$
$$+\, i\left(\theta \quad - \frac{\theta^3}{3!} \quad + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \Leftarrow \operatorname{sen}\theta$$
$$= \cos\theta$$
$$+\, i \operatorname{sen}\theta$$
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

LEMBRE QUE COS É UMA "FUNÇÃO PAR" (COMO x^2) E SEN É UMA "FUNÇÃO ÍMPAR" (COMO x, E COMO x^3)...

$$\boxed{\begin{aligned}\cos -\theta &= \cos\theta\\ \operatorname{sen} -\theta &= -\operatorname{sen}\theta\end{aligned}}$$

FAZENDO $\boxed{4}\,[\theta := -\theta]$
TEMOS:
$$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta$$
$$= \cos\theta + i(-\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$
$$\boxed{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{5}$$

FAZENDO $\boxed{4}\,[\theta := k\theta]$
TEMOS:
$$\boxed{e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\operatorname{sen} k\theta} \Leftarrow \boxed{6}$$

LEMBRE QUE TÍNHAMOS ESSAS CONVENÇÕES AQUI:
$c = \cos\theta$
$s = \operatorname{sen}\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$
NOVIDADE:
$E = e^{i\theta}$

LEMBRE QUE
$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
ENTÃO:
$$e^{i\theta - i\theta} = e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}$$
$$e^0 = 1$$
OU SEJA:
$$\underbrace{e^{i\theta}}_{E} \cdot \underbrace{e^{-i\theta}}_{E^{-1}} = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = c + is &\Leftarrow \boxed{7}\\ E^{-1} &= e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = c - is &\Leftarrow \boxed{8}\end{aligned}}$$

$$E + E^{-1} = (c + \cancel{is}) + (c - \cancel{is})$$
$$= 2c$$
$$\frac{E + E^{-1}}{2} = c$$
$$E - E^{-1} = (\cancel{c} + is) - (\cancel{c} - is)$$
$$= 2is$$
$$\frac{E - E^{-1}}{2i} = s$$

DICA: DÊEM UMA OLHADA NA "P1" DE 2018.2 E 2019.1!
TEM ALGUMAS DESSAS FÓRMULAS NO RODAPÉ E TEM PROBLEMAS QUE PRECISAM DELAS PRA SEREM RESOLVIDOS.

C2 25/set 2019

TURMA PEQUENA

HOJE:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$
E APLICAÇÕES!

JÁ AULA PASSADA VIMOS QUE

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots & \Leftarrow \boxed{1}\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots & \Leftarrow \boxed{2}\\ \mathrm{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots & \Leftarrow \boxed{3}\end{aligned}}$$

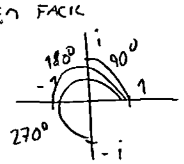
E VIMOS QUE EM

$$(2+3i)(4+5i) = 2\cdot4 + 2\cdot5i + 3i\cdot4 + 3i\cdot5i$$
$$= (2\cdot4 - 3\cdot5) + (2\cdot5 + 3\cdot4)i$$

NÓS SEPARAMOS A PARTE REAL E A PARTE IMAGINÁRIA DO RESULTADO NO FINAL...

E VIMOS QUE MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS "SOMA ÂNGULOS" - UMA CONSEQUÊNCIA BEM FÁCIL DISTO É:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



$E = c + is$
$E^{-1} = c - is$
$c = \dfrac{E + E^{-1}}{2}$
$s = \dfrac{E - E^{-1}}{2i}$

LEMBRE QUE INTEGRAR PRODUTOS DE FUNÇÕES É DIFÍCIL, MAS INTEGRAR SOMAS DE FUNÇÕES É FÁCIL...

ENTÃO VAMOS APRENDER A CONVERTER PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS EM SOMAS DE SENOS E COSSENOS.

EXEMPLO:
$\int (\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta = ?$

$$(\mathrm{sen}\,\theta)^2 = s^2 = \left(\frac{E - E^{-1}}{2i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2 (E - E^{-1})^2$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(E^2 - 2EE^{-1} + E^{-2})$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(E^2 - 2 + E^{-2})$$

$E^2 - 2 + E^{-2} =$
$(E^2 + E^{-2}) - 2 =$
$(2\cos 2\theta) - 2$

EXERCÍCIOS:

1) PORQUE É QUE $E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$?

2) COMO A GENTE GENERALIZA ISSO? $E^7 + E^{-7} = ?$

3) $E^7 - E^{-7} = ?$

4) INTEGRE ISTO: $\int (\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta$.
DICA: $\int (\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta = \int \left(-\frac{1}{4}\right)(2\cos 2\theta - 2)\, d\theta$.

5) $\int (\cos\theta)^2\, d\theta = ?$

MAIS UMA DICA PRA ESTUDAR EM CASA... NO FIM DO APEX CALCULUS, LOGO DEPOIS DO ÍNDICE, TEM ALGUMAS TABELAS DE FÓRMULAS. ELAS INCLUEM UMA SEÇÃO CHAMADA "COMMON TRIGONOMETRIC IDENTITIES". TODAS AS FÓRMULAS DESSA SEÇÃO QUE SÓ ENVOLVEM SENOS E COSSENOS PODEM SER DEMONSTRADAS USANDO OS TRUQUES DE HOJE. FAÇA EM CASA!

OUTRA DICA: TEM QUESTÕES USANDO ESSES MÉTODOS, COM GABARITO, NAS PROVAS DE 2018.2 E 2019.1. (P1, VR, VS)

TRIÂNGULO DE PASCAL:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$(A+B)^6 = A^6B^0 + 6A^1B^5 + 15A^2B^4 + 20A^3B^3 + 15A^4B^2 + 6A^5B^1 + 1A^6B^0.$

"BINÔMIO DE NEWTON"

6) CALCULE USANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL:
a) $(E + E^{-1})^4$,
b) $(E - E^{-1})^5$.

7) DÁ PRA LEMBRAR ALGUMAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS SIMPLES "PELO GRÁFICO". FAÇA OS GRÁFICOS DE:
$\mathrm{sen}\,\theta$,
$(\mathrm{sen}\,\theta)^2$,
$\cos\theta$,
$(\cos\theta)^2$,
$\cos 2\theta$,
$1 + \cos 2\theta$,
$1 - \cos 2\theta$,
$\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$,
$\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

77/SET/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Mais aplicações do $E = c + is$
- Área entre curvas
- $\int_{x=2}^{x=6} \sqrt{7 - x^2}\, dx$

Dêem uma olhada na página sobre "Fourier Series" na Wikipedia em inglês — ela tem umas figuras que mostram que toda função periódica pode ser aproximada por somas de senos e cossenos de diferentes frequências e amplitudes.

Lembre que é difícil integrar $\int_{x=2}^{x=6} f(x) g(x)\, dx$ ⇐ um produto

mas é fácil integrar $\int_{x=2}^{x=6} f(x) + g(x)\, dx$

A técnica do $E = c + is$ serve pra gente transformar qualquer produto de senos e cossenos (obs: fica implícito que eles podem ter várias "frequências") e somas de senos e cossenos.

$$(\cos\theta)^2 = c^2 = \left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right)^2 \quad \Leftarrow \text{passamos pra uma expressão em } E$$

⇑ Começamos com um produto de senos e cossenos

$$= \frac{1}{4}\left(E + E^{-1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(E^2 + 2 + E^{-2}\right) \quad \Leftarrow \text{expandimos ela (por Newton/distributividade)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(E^2 + E^{-2}\right) + 2\right) \quad \Leftarrow \text{reagrupamos os termos}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta + 2\right) \quad \Leftarrow \text{soma de senos e cossenos}$$

$$= \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

As fórmulas mais fáceis de demonstrar da folha de identidades trigonométricas (obs: ela é do APEX Calculus, logo depois do índice) são as das seções "Power-Reducing Formulas" e "Sum to Product Formulas". Vou fazer algumas e passar outras como exercícios.

Lembre que:

$$\frac{E + E^{-1}}{2} = c$$

$$E + E^{-1} = 2c$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Substituindo $[\theta := 73\theta]$ obtemos:

$$e^{i73\theta} + e^{-i73\theta} = 2\cos 73\theta$$

$$E^{73} + E^{-73} = 2\cos 73\theta$$

Isso vale "pra qualquer valor de 73", e dá pra fazer algo parecido pro seno.

PRA CASA!!! Dica: várias PAs, VRs e VSs têm problemas assim com gabarito!

Exercícios:

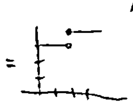
1. $(\operatorname{sen}\theta)^2 = ?$
2. $\int \cos 42\theta + \operatorname{sen} 99\theta\, d\theta = ?$
3. $\int (\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = ?$
4. $(\cos\theta)^5 = ?$
5. $(\operatorname{sen}\theta)^4 = ?$
6. $(\cos 6\theta)(\cos 8\theta) = ?$
   ⇑ Obs: isto é uma das "Product to Sum Formulas", com $x = 6\theta$ e $y = 8\theta$
7. $(\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta) = ?$
8. $\int (\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta)\, d\theta = ?$

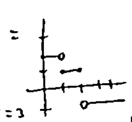
Áreas sobre curvas

Obs: aqui a gente vai seguir a seção 7.1 do APEX Calculus...

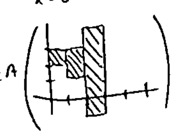
Nos exercícios sobre áreas via retângulos vocês aprenderam a desenhar áreas e diferenças entre áreas...

Exemplo:

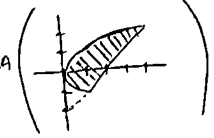
Se $f(x) =$ 

e $g(x) =$ 

então $\int_{x=0}^{x=3} f(x)\, dx - \int_{x=0}^{x=3} g(x)\, dx =$

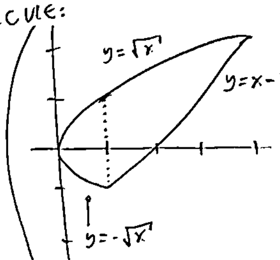
Área () $= 1 + 2 + 5 \ldots$

Agora nós vamos usar a mesma idéia pra calcular coisas como:

Área ()

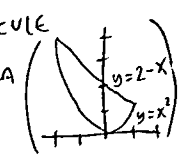
Mais precisamente,

(9) Calcule:

Área () =

$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x} - (-\sqrt{x})\, dx + \int_{x=1}^{x=4} \sqrt{x} - (x+2)\, dx = ?$$

(10) Calcule

Área ()

IL: 27/SET/2019
TURMA PEQUENA

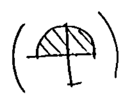
HOJE:
- MAIS APLICAÇÕES DO $E = c + is$
- ÁREA ENTRE CURVAS
- $\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$

⑧ $\int (\cos 6\theta)^3 (\cos 8\theta)\, d\theta = ?$

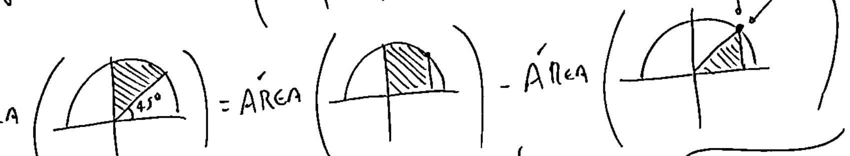
$$\cos 6\theta = \frac{E^6 + E^{-6}}{2}$$
$$\cos 8\theta = \frac{E^8 + E^{-8}}{2}$$
$$(\cos 6\theta)^3 = \left(\frac{E^6+E^{-6}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{1}{8}(E^6+E^{-6})^3$$
$$= \frac{1}{8}\left((E^6)^3(E^{-6})^0 + 3(E^6)^2(E^{-6})^1 + 3(E^6)^1(E^{-6})^2 + (E^6)^0(E^{-6})^3\right)$$
$$= \frac{1}{8}(E^{18} + 3E^6 + 3E^{-6} + E^{-18})$$
$$(\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta) = \frac{1}{8}(E^{18}+3E^6+3E^{-6}+E^{-18})\,\frac{1}{2}(E^8+E^{-8})$$
$$= \frac{1}{16}\left(\begin{matrix}E^{26}+3E^{14}+3E^{2}+E^{-10}+\\ E^{10}+3E^{-2}+3E^{-14}+E^{-26}\end{matrix}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left((E^{26}+E^{-26})+3(E^{14}+E^{-14})+(E^{10}+E^{-10})+3(E^{2}+E^{-2})\right)$$

$$\frac{1}{16}(2\cos 26\theta + 6\cos 14\theta + 2\cos 10\theta + 6\cos 2\theta)$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 26\theta + 3\cos 14\theta + \cos 10\theta + 3\cos 2\theta)$$
$$\int (\cos 6\theta)^3(\cos\theta)^8\, d\theta =$$
$$\int \frac{1}{8}(\cos 26\theta + 3\cos 14\theta + \cos 10\theta + 3\cos 2\theta)\, d\theta$$

A INTEGRAL
$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$$
PODE SER CALCULADA POR ÁREA FACILMENTE PRA ALGUNS VALORES DE a E b...

$$\int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{ÁREA}\left(\;\right) = \frac{\pi}{2}$$


$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \text{ÁREA}\left(\;\right) = \frac{\pi}{4}$$


$$\underbrace{\text{ÁREA}\left(\;\right)}_{\pi/8} = \underbrace{\text{ÁREA}\left(\;\right)}_{\int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx} - \underbrace{\text{ÁREA}\left(\;\right)}_{1/4}$$


$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \qquad [s=x]$$
$$\int \sqrt{1-s^2}\,ds = \qquad \left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{matrix}\right]$$
$$\int \cos\theta \cos\theta\, d\theta =$$
$$\int (\cos\theta)^2\, d\theta =$$
$$\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$
$$\int \frac{1}{2} d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta =$$
$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} s + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} s)$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} x)$$

EXERCÍCIO:
SEJA $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)$.
CALCULEM: $F(0)$, $F(1)$, $F(-1)$, $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1/OUT/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: REVISÃO E DÚVIDAS!

RESOLVA POR INTEGRAÇÃO POR PARTES:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = ?$$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = ?$$

$$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

$$\int x \ln(2x+3) \, dx = ?$$

$$\int \ln x \, dx = \text{:)}$$

$$\int x \ln x \, dx = \text{:)}$$

$$\int (ax+b) \ln x \, dx = \text{:)}$$

$$\int \underbrace{x}_{\frac{u-3}{2}} \ln \underbrace{(2x+3)}_{u} \underbrace{dx}_{\frac{1}{2}du} = \begin{bmatrix} u = 2x+3 \\ x = \frac{u-3}{2} \\ dx = \frac{1}{2} du \end{bmatrix}$$

$$\int \left(\frac{u-3}{2}\right)(\ln u) \frac{1}{2} du =$$

$$\int \left(\frac{u-3}{4}\right) \ln u \, du =$$

$$\frac{1}{4} \int u \ln u \, du - \frac{3}{4} \int \ln u \, du =$$

$$\ln(2x+3)$$

$$\ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

C2 9/out/2019

Turma pequena

Hoje:
- Somas de Riemann
- Volumes

Dica: <u>Leiam o cap. 7 do APEX Calculus!!!</u>

O cap. 7 começa com um método de integração — somas de Riemann — que eu deixei pra apresentar depois porque ele precisa de dados extras...

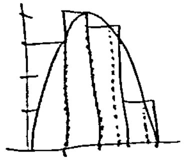
Uma soma de Riemann é algo como isto aqui,

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x$$

Onde "Δx" é a notação do livro para (b_i-a_i), e cada c_i é um ponto no intervalo $[a_i,b_i]$:

$c_i \in [a_i;b_i]$.

Por exemplo, para calcularmos esta aproximação por retângulos,



Precisamos ter, além da função $f(x)=4-(x-2)^2$ e da partição $P=\{0,1,2,3,4\}$, os valores dos "c_i"s:

$$\left.\begin{array}{l} c_1=1,\\ c_2=2,\\ c_3=2.7,\\ c_4=3.6 \end{array}\right\}\text{dados extras!}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x = \underbrace{f(\underbrace{c_1}_{1})}_{}\underbrace{(\underbrace{b_1}_{1}-\underbrace{a_1}_{0})}_{1}+f(\underbrace{c_2}_{2})\underbrace{(\underbrace{b_2}_{2}-\underbrace{a_2}_{1})}_{1}+f(\underbrace{c_3}_{2.7})\underbrace{(\underbrace{b_3}_{3}-\underbrace{a_3}_{2})}_{1}+f(\underbrace{c_4}_{3.6})\underbrace{(\underbrace{b_4}_{4}-\underbrace{c_4}_{3})}_{4}$$

Se escolhermos os "c_i"s do jeito certo conseguimos fazer com que:

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i) \quad (\text{"[L]"})$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i) \quad (\text{"[R]"}),$$

$$\ldots = \ldots \quad (\text{"[m]"}),$$

$$\ldots = \ldots \quad (\text{"[Trap]"}),$$

("[inf]"),

("[sup]"),

("[m,n]"),

("[max]").

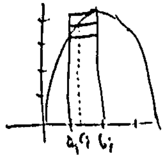
A primeira aplicação disso no cap. 7 é usar isso pra medir áreas entre curvas...

Truques:

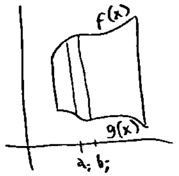
① "The approximation become exact by taking the limit $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x$"

(o "valor exato" é a área sob a curva).

② Se $f(x)$ for contínua dá pra escolher em cada intervalo $[a_i,b_i]$ um valor de c_i tal que a área do retângulo seja exatamente a área sob a curva. Exemplo:



O livro usa isso <u>primeiro</u> pra discutir como calcular áreas entre curvas... Ele usa essas figuras:



Dá pra escolher nesse intervalo $[a_i,b_i]$ um ponto $c_i \in [a_i,b_i]$ tal que a área do retângulo

$$f(c_i)\,\Delta x - g(c_i)\,\Delta x$$

seja exatamente a área entre as duas curvas no intervalo $[a_i;b_i]$.

⇑ Uma espécie de aplicação do truque ②...

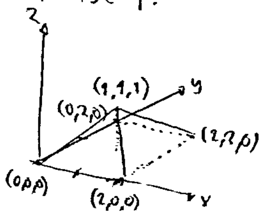
O truque ① nos diz que <u>no limite</u>

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x \Longleftarrow \text{Um limite bem complicado, sobre todas as partições, disfarçado!!!}$$

Não importa mais que escolha dos "c_i"s a gente faz.

A gente já viu <u>um pouco</u> sobre áreas entre curvas na aula passada... (na sexta eu vou uma lista de exercícios sobre isso, que vai virar um mini-teste em algum momento!)... Então vamos ver <u>volumes</u>.

Exemplo: pirâmide P:



$\boxed{1}$ Exercício (pra vocês entenderem as coordenadas disso aí):

$\boxed{a}$ Represente graficamente a interseção dessa pirâmide P com o plano $z=\frac{1}{2}$ e dê os quatro vértices desse quadrado.

$\boxed{b}$ Idem mas com $z=0.1$

$\boxed{c}$ Idem mas com $z=0.9$

$\boxed{d}$ Idem mas no caso geral — encontre fórmulas para os quatro pontos $(z\in[0,1])$

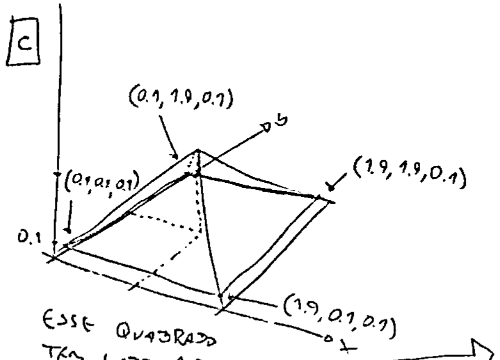
C2 9/OUT/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:
- SOMAS DE RIEMANN
- VOLUMES

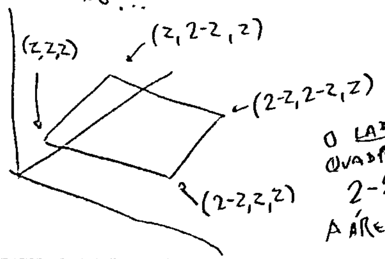
DICA: LEIAM O CAP. 7 DO APEX CALCULUS!!!

c



ESSE QUADRADO TEM LADO 1.8 ... $\Rightarrow$ ... E ÁREA $(1.8)^2$.

d



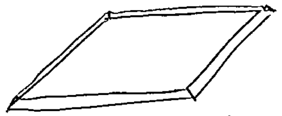
O LADO DESSE QUADRADO É: $2-2z$

A ÁREA DELE É $(2-2z)^2$.

COMO CALCULAR O VOLUME DESSA PIRÂMIDE?

O QUE ACONTECE SE A GENTE CORTAR ELA ENTRE $z=0.6$ E $z=0.7$?

VAMOS TER ALGO ASSIM:



E O QUADRADO DE CIMA É MENOR DO QUE O DE BAIXO.

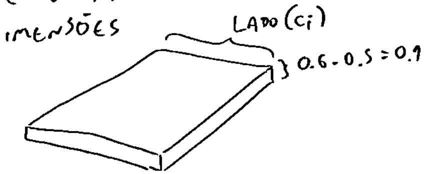
O VOLUME DISSO É DIFÍCIL DE CALCULAR, MAS PODEMOS USAR OS TRUQUES 1 E 2...

VAI EXISTIR ALGUM $c_i \in [0.6, 0.7]$ TAL QUE ACONTECE ALGO COMO
$$f(c_i)\Delta x = \int_{x=a_i}^{x=b_i} f(x)\,dx$$

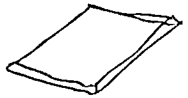
PRA CADA $z \in [0,1]$
$$\text{Lado}(z) = 2-2z,$$
ONDE Lado(z) É O LADO DO QUADRADO QUE É A INTERSEÇÃO DA PIRÂMIDE P COM O PLANO COM Z FIXO...

ALÉM DISSO
$$\text{Área}(z) = \text{Lado}(z)^2 = (2-2z)^2$$

ADAPTANDO (★), EXISTE $c_i \in [0.5, 0.6]$ TAL QUE O PARALELEPÍPEDO DE DIMENSÕES



(★) TENHA O MESMO VOLUME QUE O "CORTE"



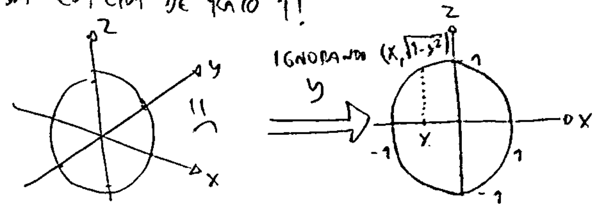
O VOLUME DESSE PARALELEPÍPEDO É:
$$\text{Lado}(c_i)^2 \cdot (0.6-0.5).$$

SEJA P UMA PARTIÇÃO DE [0,1].

PODEMOS CALCULAR
$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\ \text{TOTAL DA}\\ \text{PIRÂMIDE}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underbrace{\text{Lado}(c_i)^2}_{\text{ÁREA DO CORTE}} \cdot (b_i - a_i)}_{\text{VOLUME DO CORTE ENTRE } z=a_i \text{ E } z=b_i}$$

OU:
$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\ \text{TOTAL DA}\\ \text{PIRÂMIDE}\end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \text{Lado}(c_i)^2 (b_i - a_i)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (2-2z)^2 (b_i - a_i)$$
$$= \int_{z=0}^{z=1} \underbrace{(2-2z)^2}_{\text{ÁREA DO CORTE!!!}} dz$$
$$= \int_{z=0}^{z=1} 4 - 8z + 4z^2 \, dz$$
$$= \frac{4}{3}$$

... AGORA VAMOS FAZER A MESMA COISA - USANDO $\int_{z=a}^{z=b} \text{Área}(z)\,dz$, ALIÁS, $\int_{x=a}^{x=b} \text{Área}(x)\,dx$ - PRA CALCULAR O VOLUME DA ESFERA DE RAIO 1!



SE EU CORTAR ESSE ESFERA NUM PLANO COM X CONSTANTE VOU OBTER UM CÍRCULO DE RAIO $\sqrt{1-x^2}$ E ÁREA $\pi\sqrt{1-x^2}^2$...

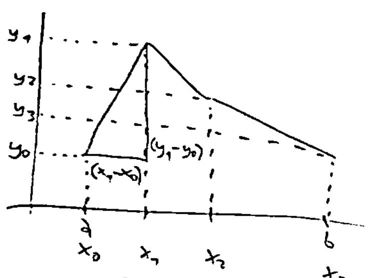
$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\ \text{TOTAL DA}\\ \text{ESFERA}\end{pmatrix} = \int_{x=-1}^{x=1} \text{Área}(x)\,dx$$
$$= \int_{x=-1}^{x=1} \pi(1-x^2)\,dx$$
$$= \pi \int_{x=-1}^{x=1} 1-x^2\,dx$$
$$= \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \pi\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)$$

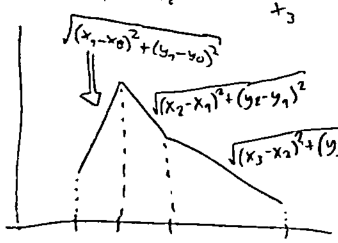
C2 11/OUT/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
Comprimentos de curvas!

É fácil calcular o comprimento de uma curva feita de segmentos de retas... por exemplo esta aqui:



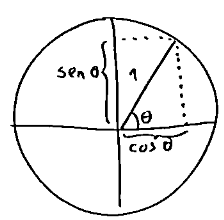


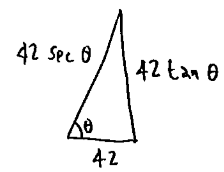
Essa fórmula misteriosa daqui é a "fórmula pra calcular o comprimento [de arco] de uma curva":

$$\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

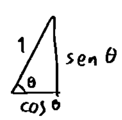
Vamos tentar entendê-la!

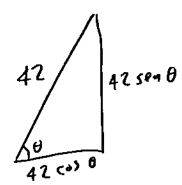
Lembre:





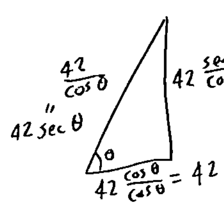
Uma das coisas que a gente viu na parte sobre substituição trigonométrica é que tan θ e sec θ obedecem uma relação parecida com $(\cos\theta)^2+(\text{sen}\,\theta)^2=1$...

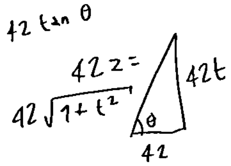




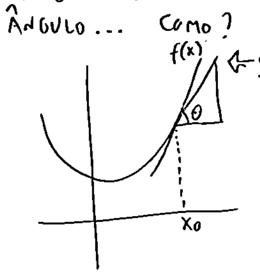
$c=\cos\theta$
$s=\text{sen}\,\theta$
$t=\tan\theta=\frac{s}{c}$
$z=\sec\theta=\frac{1}{c}$

$$t^2=\frac{s^2}{c^2}$$
$$z^2=\frac{1^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$$
$$\boxed{z^2=1+t^2}$$





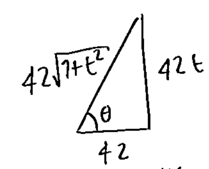
Lembre que derivada tem a ver com coeficiente angular (da reta tangente) e com tangente de um ângulo... Como?



← Essa reta tem coef. ang. $f'(x_0)$; a equação dela é $y=f'(x_0)x+b$

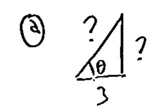
Além disso $f'(x_0)=\tan\theta$.

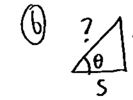
No triângulo

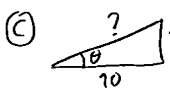


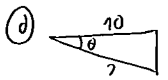
A gente vai considerar que o $\sqrt{1+t^2}$ é um "fator multiplicador" que nos permite descobrir a hipotenusa a partir da base ("cateto adjacente").

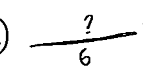
Exercício:
Calcule o valor dos "?" nos triângulos abaixo:

(a)  $\tan\theta=2$

(b)  $\tan\theta=1$

(c)  $\tan\theta=\frac{1}{2}$

(d)  $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

(e)  $\tan\theta=0$

Voltando...

Lembre que as somas de Riemann eram assim:

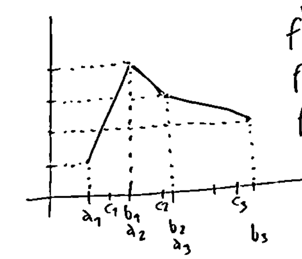
$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x$$

onde $c_i\in[a_i,b_i]$...

A gente vai restringir isso um pouquinho:

$c_i\in(a_i,b_i)$.

Exercício:



$f'(c_1)=?$
$f'(c_2)=?$
$f'(c_3)=?$

Precisamos:
- Confirmar a data da P1
- E, se puder, marcar P2, VR, VS
- Discutir mini-teste

C2 11/OUT/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:
COMPRIMENTOS DE CURVAS!

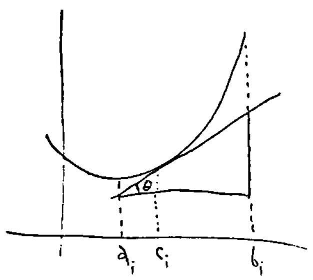
ESSA FÓRMULA MISTERIOSA DAQUI É A "FÓRMULA PRA CALCULAR O COMPRIMENTO [DE ARCO] DE UMA CURVA":

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

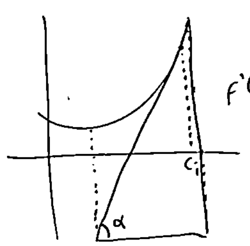
VAMOS TENTAR ENTENDÊ-LA!

QUAL É O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE

$$\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{f'(c_i)}_{\text{TAN }\theta}{}^2}}_{\text{FATOR MULTIPLICADOR}}\underbrace{(b_i-a_i)}_{\text{BASE}}\,?$$



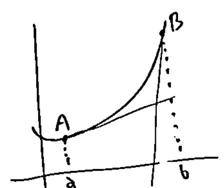
$f'(c_i)=\tan\theta$



$f'(c_i)=\tan\alpha$

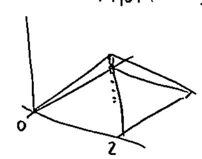
O PASSO SEGUINTE É INTUITIVO/OLHOMÉTRICO (MAS ALGUNS LIVROS FAZEM ELE COM TODO DETALHE).

O COMPRIMENTO DO SEGMENTO DE ARCO ENTRE A E B (O "COMPRIMENTO DA CURVA $f(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$")

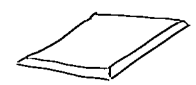


É EXATAMENTE O COMPRIMENTO DE ALGUMA HIPOTENUSA $\sqrt{1+f'(c_i)^2}(b_i-a_i)$ PARA A ESCOLHA CERTA DE c_i

NA AULA PASSADA VIMOS ALGO ASSIM PRA CALCULAR O VOLUME DE UMA FATIA DA PIRÂMIDE...



ENTRE $z=0.6$ E $z=0.7$ A FATIA DA PIRÂMIDE TINHA ESSA CARA:

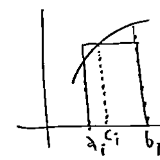


E EXISTIA ALGUM $c_i\in[0.6,0.7]$ TAL QUE O VOLUME DESSA FATIA ERA

ÁREA$(c_i)\cdot(0.7-0.6)$.

A GENTE VIU QUE O LIVRO USAVA DOIS TRUQUES:

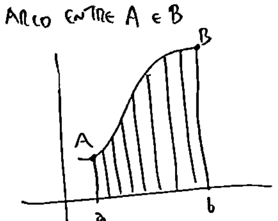
1. EM CADA INTERVALO $[a_i,b_i]$ EXISTE UM $c_i\in[a_i,b_i]$ TAL QUE A ÁREA DO RETÂNGULO $f(c_i)(b_i-a_i)$ É EXATAMENTE A ÁREA SOB $f(x)$ NESSE INTERVALO...



2. "THE APPROXIMATION BECOMES EXACT BY TAKING THE LIMIT $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N} f(c_i)(b_i-a_i)$"

E AQUI FICA IMPLÍCITO QUE A GENTE PODE ESCOLHER OS "c_i" DE QUALQUER MODO DENTRO DOS INTERVALOS.

OU SEJA:
DÁ PRA CALCULAR O COMPRIMENTO DE ARCO ENTRE A E B



DIVIDINDO O INTERVALO $[a,b]$ EM VÁRIOS SUBINTERVALOS, ESCOLHENDO O c_i "CERTO" EM CADA SUBINTERVALO, E FAZENDO ESSA CONTA: ⇐ PELO TRUQUE 1

$$\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

E PELO TRUQUE 2 PODEMOS CALCULAR ESSE COMPRIMENTO DE ARCO FAZENDO

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

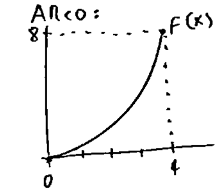
ONDE AGORA PODEMOS ESCOLHER QUALQUER $c_i\in[a_i,b_i]$!

E PODEMOS TRADUZIR ISSO PRA UMA INTEGRAL:

$$\begin{pmatrix}\text{COMPRIMENTO}\\ \text{DE ARCO}\\ \text{ENTRE } x=a\\ \text{E } x=b\end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i) = \int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

PRECISAMOS:
- CONFIRMAR A DATA DA P1
- E, SE PUDER, MARCAR P2, VR, VS
- DISCUTIR MINI-TESTE

EXERCÍCIO:
SEJA $f(x)=x^{3/2}$.
CALCULE ESTE COMPRIMENTO DE ARCO:



ENTRE $x=0$ E $x=4$.

$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}$

$\int\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=$

$\int\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=$

$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$ $\left[\begin{array}{l}u=1+\frac{9}{4}x\\ x=\frac{4}{9}(u-1)\\ dx=\frac{4}{9}du\end{array}\right.$

$\int\sqrt{u}\,\frac{4}{9}du=$

$\frac{4}{9}\int u^{1/2}du=$

$\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)=$

$\frac{8}{27}u^{3/2}=$

$\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}$

C2 16/out/2019

Turma pequena

Hoje: EDOs – primeiro método: "variáveis separáveis"!

Ainda falta uma "aplicação da integral", que é o método pra calcular a área de alguns objetos 3D, mas vamos deixar isso pra sexta.

Nós também vamos ter métodos completamente diferentes pra resolver EDOs, da mesma forma que vimos vários métodos totalmente diferentes pra resolver integrais...

O primeiro método – que serve pra "EDOs com variáveis separáveis". Vamos ver a classificação das EDOs depois – pode ser usado pra resolver EDOs da forma $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$...

Primeiro exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (\star)$$

Isto pode ser reescrito deste jeito:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (\star\star)$$

Podemos tentar resolver isto por chutar e testar, mas...

(1) Exercício: teste cada uma das $f(x)$ abaixo pra ver se ela obedece $(\star\star)$:

(a) $f(x) = x$

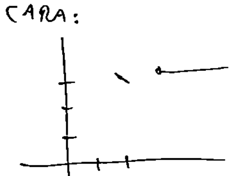
(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Como poderíamos ter chutado a solução $f(x) = \sqrt{1-x^2}$?

Lembre que se tudo que sabemos sobre uma $g(x)$ é que $g(2)=3$, $g'(2)=-1$, então sabemos que o gráfico da $g(x)$ tem esta cara:



sabemos que $y=g(x)$ passa pelo ponto $(2,3)$ com derivada -1...

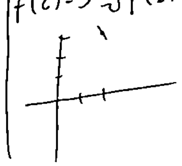
Só sabemos informações sobre o comportamento de $g(x)$ em $x=2$...

A equação $(\star\star)$ nos permite calcular $f'(x)$ se soubermos x e $f(x)$...

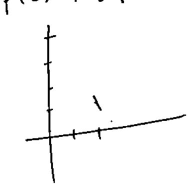
Exemplo: $x = 2$, $f(x) = 3$, $f(2) = 3$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{f(2)} = -\frac{2}{3}$$

$f(2)=3 \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{3}$

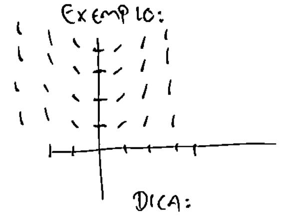


$f(2)=1 \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{f(2)} = -2$



(2) Exercício: use $(\star\star)$ pra desenhar um "campo de direções" para as soluções de $(\star\star)$...

Exemplo:



Dica: pra cada $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2\}$ desenhe um tracinho com a inclinação certa no ponto (x,y); obs: dá pra usar $(\star)$: $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{inclinação}} = -\frac{x}{y}$

(Fizemos o desenho na área de rascunho)

...dá pra chutar que as soluções são círculos...

...no sentido de que $x^2+y^2=1$ é sol., $x^2+y^2=4$ é sol.,

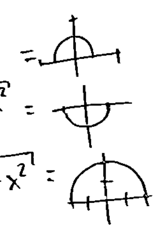
$\Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2} =$

$y = -\sqrt{1-x^2} =$

$y = \sqrt{4-x^2} =$



Como encontrar essas soluções algebricamente? (Vamos usar gambiarras com dx e dy ainda piores que as anteriores!)

$$(\star) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 \qquad -\frac{x^2}{2} + C_2$$

O que acontece se $C_1 = 42$ e $C_2 = 99$?

$$\frac{y^2}{2} + 42 = -\frac{x^2}{2} + 99$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 99 - 42 = 57$$

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot 57$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_2 - C_1$$

$$x^2 + y^2 = \underbrace{2(C_2 - C_1)}_{C_3} \Rightarrow y^2 = C_3 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{C_3 - x^2}$$

Esse método sugere (obs: estamos usando gambiarras, então temos que checar os resultados!) que as soluções de $(\star\star)$ são funções da forma $\underbrace{y}_{f(x)} = \pm\sqrt{C_3 - x^2}$...

(3) Exercício: teste essas soluções!

(a) $f(x) = \sqrt{C_3 - x^2}$ obedece $(\star\star)$?

(b) $f(x) = -\sqrt{C_3 - x^2}$ obedece $(\star\star)$?

C2 16/out/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: EDOS - PRIMEIRO MÉTODO: "VARIÁVEIS SEPARÁVEIS"! AINDA FALTA UMA "APLICAÇÃO DA INTEGRAL", QUE É O MÉTODO PRA CALCULAR A ÁREA DE ALGUNS OBJETOS 3D, MAS VAMOS DEIXAR ISSO PRA SEXTA.

COMO GENERALIZAR ESSA IDÉIA?

VAMOS COMEÇAR PELO MEIO (OBS: QUASE TODOS OS NOSSOS MÉTODOS PRA RESOLVER EDOS VÃO SER MAIS FÁCEIS DE LEMBRAR SE A GENTE "COMEÇAR PELO MEIO").

CASO PARTICULAR:

$$y\,dx = -x\,dx$$

$$\int y\,dx = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} = C_1+C_2$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$H(y)+C_1 \qquad G(x)+C_2$$

$$H(y) = G(x)+C_2-C_1$$

$$\boxed{H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_2-C_1) \\ = y}$$

OUTRO JEITO:

$$H(y)-G(x) = C_3$$

E VAMOS PROCURAR AS CURVAS DE NÍVEL DISTO, ISTO É, OS CONJUNTOS DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(y)-G(x)=C_3\}$$

4) EXERCÍCIO:

a) RESOLVA:

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx \qquad (\star\star\star)$$

b) TESTE AS SUAS SOLUÇÕES (OBS: "SUAS SOLUÇÕES" NO PLURAL PORQUE ELAS VÃO TER ALGO COMO UM "C_3", E CADA VALOR DESSE C_3 GERA UMA SOLUÇÃO DIFERENTE).

c) CONVERTA $(\star\star\star)$ PRA ALGO EM TERMOS DE $f(x)$ E $f'(x)$, COMO FIZEMOS COM ISTO AQUI...

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \iff f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

d) DESCUBRA COMO AJUSTAR O C_3 PARA A SUA SOLUÇÃO OBEDECER $f(a)=b$ PARA a E b DADOS - POR EXEMPLO, $f(42)=99$.

$$\int e^{2y}\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y}+C_1 \qquad \frac{1}{4}x^4+C_2$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{4}x^4+C_2-C_1$$

$$e^{2y} = \frac{2}{4}x^4+2(C_2-C_1)$$

$$= \frac{1}{2}x^4+\underbrace{2(C_2-C_1)}_{C_3}$$

$$= \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$e^{2y} = \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$\ln(e^{2y}) = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$2y = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

a) $$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}$$

b) $$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}{\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}4x^3\right)}{\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)} = 2\frac{x^3}{x^4+C_3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$f'(x) = 2\frac{x^3}{x^4+C_3}$$

SERÁ QUE ESSA $f(x)$ OBEDECE $(\star\star\star)$, OU SEJA,

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx, \text{ OU SEJA, } f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}\ ?$$

PARÊNTESE:

c) $$e^{2y}\,dy = x^3\,dx$$

$$e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{e^{2y}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}}$$

OU SEJA, SERÁ QUE

$$2\frac{x^3}{x^4+C_3} \stackrel{?}{=} \frac{x^3}{e^{2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)\right)}}$$

$$= \frac{x^3}{e^{\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}}$$

$$= \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3}$$

|| CASA PLZ

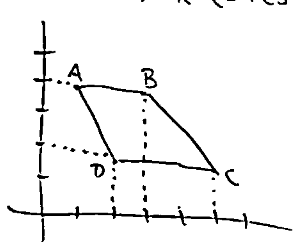
C2 16/out/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: EDOs - primeiro método: "variáveis separáveis"! Ainda falta uma "aplicação da integral", que é o método pra calcular a área de alguns objetos 3D, mas vamos deixar isso pra sexta.

LISTA DE EXERCÍCIO DE EXERCÍCIOS NOVA (QUE VAI VIRAR UM MINI-TESTE - FALTA DIGITAR):

Seja Q o quadrilátero formado por estes pontos:



$A=(1,4)$, $B=(3,4)$, $C=(5,2)$, $D=(2,2)$

Seja $f(x)$ a curva que dá a parte de cima de Q e $g(x)$ a curva que dá a parte de baixo.

① Qual é o domínio de $f(x)$? E o de $g(x)$?

② Defina $f(x)$ formalmente por casos

③ Defina $g(x)$ formalmente por casos

④ Idem para $f(x)-g(x)$

(Obs: cada um dos seus casos tem que ser da forma "$ax+b$ quando $c\le x\le d$", como aqui: ⇩)

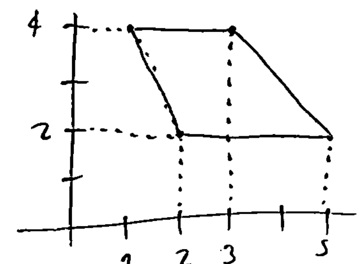
$$f(x)=\begin{cases} 3x+4 & \text{se } 42\le x\le 99 \\ 5x+6 & \text{se } 99<x\le 200 \end{cases}$$

⑤ Encontre uma definição por casos para:

$$H(t)=\left(\begin{array}{l}\text{Área de Q} \\ \text{entre } x=1 \\ \text{e } x=t\end{array}\right).$$

Hipótese:

② $f(x)=\begin{cases} 4 & \text{quando } 1\le x\le 3 \\ 7-x & \text{quando } 3<x\le 5 \end{cases}$



③ $g(x)=\begin{cases} -2x+6 & \text{quando } 1\le x\le 2 \\ 2 & \text{quando } 2<x\le 5 \end{cases}$

④ $\underset{\displaystyle h(x)}{\overset{\parallel}{f(x)-g(x)}}=\begin{cases} 2x-2 & \text{quando } 1\le x\le 2 \\ 2 & \text{quando } 2<x\le 3 \\ 5-x & \text{quando } 3<x\le 5 \end{cases}$

Truque pra resolver a ⑤:

$$H(t)=\begin{cases} \int_{x=1}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 1\le t\le 2 \\ \int_{x=1}^{x=2} h(t)\,dt+\int_{x=2}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 2<t\le 3 \\ \int_{x=1}^{x=2} h(t)\,dt+\int_{x=2}^{x=3} h(t)\,dt+\int_{x=3}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 3<t\le 5 \end{cases}$$

C2 18/out/2019

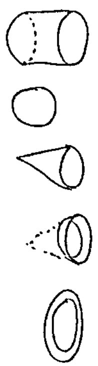
Turma pequena

Hoje: como calcular a área de alguns objetos 3D! ← "superfícies de revolução"

Depois a gente volta pra EDOs!

Notação: se A é um subconjunto do plano (x,y) Rot(A) vai ser o conjunto que obtemos rotacionando A ao redor do eixo x.

Exemplos de superfícies de revolução:



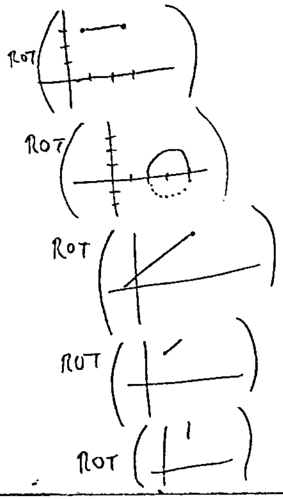
cilindros,

esferas,

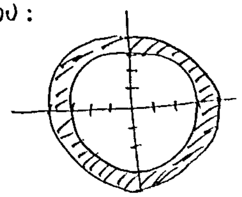
cones,

troncos de cones,

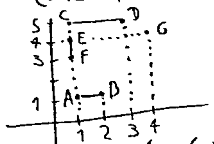
"bordas de pizzas".



(1) Digamos que você encomendou uma pizza de raio 4 mas a borda dela — de largura 1 — era muito ruim e você não comeu. Calcule a área do que sobrou:



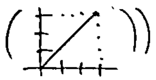
(2) Sejam A, B, C, D, E, F, G estes pontos:



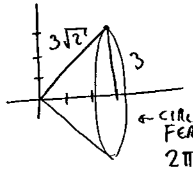
Calcule: Área(Rot(AB)), Área(Rot(CD)), Área(Rot(EF)) ← você já fez, e a circunferência do círculo Rot(G).

Os problemas seguintes são preparação pra gente aprender a calcular áreas de troncos de cones e depois da esfera...

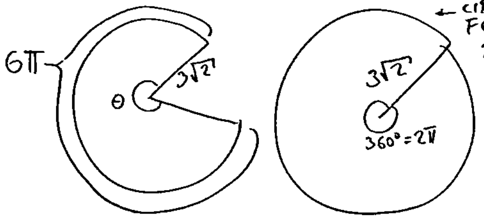
(3) Vamos usar a notação "plan" pra planificar cones.

Digamos que plan(Rot()) =

Descubram: o raio R, o ângulo θ, e a área do pacman acima.



← circunferência: $2\pi\cdot 3 = 6\pi$



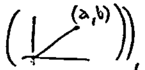
← circunferência: $2\pi\cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\pi$

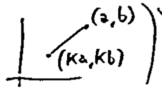
$$\frac{6\sqrt{2}\pi}{2\pi} = \frac{6\pi}{\theta}$$

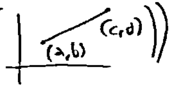
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\theta}$$

$$\theta = \pi\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

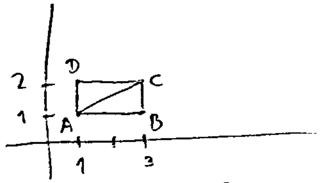
Dá pra generalizar isso!... Se a gente quebrar a cabeça bastante a gente consegue fórmulas pra estas áreas:

Área(Rot()),

Área(Rot()),

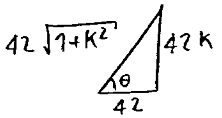
Área(Rot())

Existe um método melhor... que alguns livros apresentam ele sem um detalhe importante!...



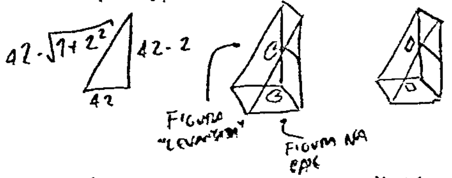
Área(Rot(AC)) = ?

Vamos lembrar de comprimentos de curvas.



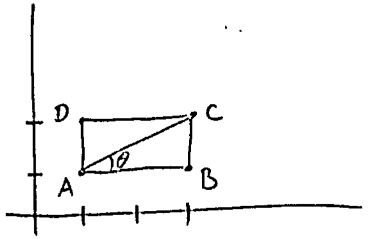
$k = \tan\theta$ é o coeficiente angular da hipotenusa!

Dá pra fazer algo parecido pra áreas! Exemplo: $k=2$



A área da figura "levantada" vai ser a área da figura na base vezes $\sqrt{1+2^2}$!

18/OUT/2019
TURMA PEQUENA



VERSÃO 2D:

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

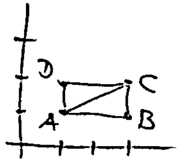
FATOR MULTIPLICADOR:

$\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$AC = AB \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$AC = DC \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

VERSÃO 3D:

Rot ()

IDÉIA (MEIO ERRADA):

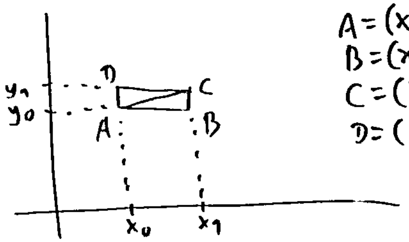
$\text{ÁREA}(\text{ROT}(AC)) = \text{ÁREA}(\text{ROT}(AB)) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\text{ÁREA}\left(\frac{\text{ROT}(AC)}{360}\right) = \text{ÁREA}\left(\frac{\text{ROT}(AB)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\text{ÁREA}\left(\frac{\text{ROT}(AC)}{360}\right) = \text{ÁREA}\left(\frac{\text{ROT}(DC)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

SÃO DIFERENTES!!

O QUE VAI ACONTECER -
ALGUNS LIVROS E VÍDEOS
FAZEM ISSO DIRETO SEM
EXPLICAR OS DETALHES -
É QUE NESSA FIGURA
(UM POUCO MAIS GERAL
QUE A ANTERIOR)



$A = (x_0, y_0)$
$B = (x_1, y_0)$
$C = (x_1, y_1)$
$D = (x_0, y_1)$

SE y_0 E y_1 FOREM MUITO PRÓXIMOS ESSAS ÁREAS VÃO SER MUITO PRÓXIMAS:

$\text{ÁREA}(\text{ROT}(DC)) \approx \text{ÁREA}(\text{ROT}(AB))$

E AÍ A APROXIMAÇÃO

$\text{ÁREA}(\text{ROT}(DC)) \approx \text{ÁREA}(\text{ROT}(AB)) \cdot \sqrt{1+(\tan\theta)^2}$

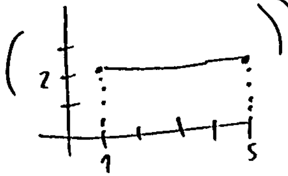
PASSA A SER MUITO BOA, E A GENTE CONSEGUE UMA FÓRMULA PRA ÁREA TOTAL USANDO UMA INTEGRAL COM " $\sqrt{1+f'(x)^2}$ " NO MEIO.

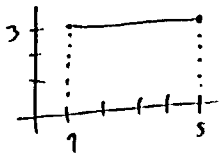
PRA CASA:
LEIAM A SEÇÃO 7.4
DO LIVRO
(OBS: ELE FAZ
ISSO AQUI DIRETO,
MAS USANDO UMA
FÓRMULA QUE A
GENTE NÃO DEDUZIU).

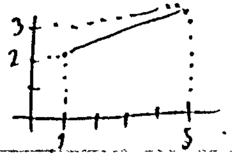
EXERCÍCIO:
O LIVRO DEMONSTRA
ESSA FÓRMULA:

$$(*)\quad \text{ÁREA}\left(\text{ROT}\left(\text{GRÁFICO DE } f(x) \text{ ENTRE } x=a \text{ E } x=b\right)\right) = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

USE ESTA FÓRMULA PRA
CALCULAR:

ÁREA (ROT ()),

ÁREA (ROT ()),

ÁREA (ROT ())

C2 11/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (*)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes").

A aula de hoje é meio opcional - ela vai mostrar porque é que um método que vários livros apresentam sem grandes justificativas funciona, e a gente vai ver como pessoas mais ou menos normais que saibam muita Álgebra Linear poderiam descobrir esse método sozinhas.

A gente sabe TENTAR resolver $(*)$ por chutar-e-testar...

① Descubra quais das funções abaixo são soluções da EDO $(*)$ e quais não são.

ⓐ $f(x) = x$
ⓑ $f(x) = e^{2x}$
ⓒ $f(x) = e^{-2x}$
ⓓ $f(x) = e^{5x}$
ⓔ $f(x) = e^{-5x}$

Em Álgebra Linear vocês costumam ver - sem muito detalhe - que o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial... Vamos rever isso, e vamos ver como tratar funções como "vetores" (de dimensão infinita) e a derivada como uma "matriz" (na verdade uma transformação linear.

Vetores podem ser vistos como funções com uma sintaxe especial...

$\vec{v} = (10, 20, 30)$

$\vec{v}_1 = 10$ $\quad \vec{v}_{42} = \text{erro}$
$\vec{v}_2 = 20$
$\vec{v}_3 = 30$

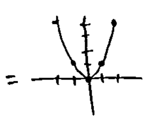
Mudando a sintaxe um pouco...

$\vec{v}(1) = \vec{v}_1 = 10$
$\vec{v}(2) = \vec{v}_2 = 20$
$\vec{v}(3) = \vec{v}_3 = 30$
$\vec{v}(i) = \vec{v}_i$

$$\vec{v} : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto \vec{v}_i$$

Em Cálculo 1 e em Matemática Discreta a gente às vezes considera que funções SÃO seus gráficos...

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$f =$ 

$= \{(0,0), (1,1), (2,4), (-1,1), (-2,4), \ldots\}$

$\vec{v} = \{(1,10), (2,20), (3,30)\}$

Lembre como a gente define soma de vetores e produto de vetor por escalar em Álgebra Linear...

$\vec{w} = (100, 200, 300)$
$\vec{v} + \vec{w} = (110, 220, 330)$
$(\vec{v} + \vec{w})_i = \vec{v}_i + \vec{w}_i$
$2\vec{v} = (20, 40, 60)$
$(k\vec{v})_i = k\vec{v}_i$

Pra ver funções como vetores vamos flexibilizar a idéia de quais são os índices válidos...

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$f(0) = 0$	$f_0 = 0$
$f(1) = 1$	$f_1 = 1$
$f(2) = 4$	$f_2 = 4$
$f(-1) = 1$	$f_{-1} = 1$
$f(-2) = 4$	$f_{-2} = 4$
$f(0.1) = 0.01$	$f_{0.1} = 0.01$

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 10x$

$(f+g)_i = f_i + g_i = f(i) + g(i)$
$(kf)_i = k(f_i)$

Vou introduzir TEMPORARIAMENTE uma notação - "notação lambda" - que vai nos ajudar a distinguir, por exemplo, o número 4 da função constante $= 4$.

$4 \neq (\lambda a. 4)$

Em C:

```c
int f(int a) {
  return a*a;
}
```

Isto define uma função com nome, "f".

Em linguagens funcionais dá pra definir funções sem nome ("anônimas").

Em Lua:

```lua
function f(a) return a*a end
f = function(a) return a*a end
```

Em λ-cálculo:

$f = (\lambda a. a \cdot a)$
$f(10) = (\lambda a. a \cdot a)(10)$
$= (a \cdot a)[a := 10]$
$= 10 \cdot 10$
$= 100$

② Exercício: Calcule:
ⓐ $(\lambda a. 3)(4)$
ⓑ $(\lambda a. 10 \cdot a)(2+3)$

Def: (que vai ser melhorada em breve):

$$Df = f'$$

③ Exercício: Calcule:

$D(\lambda x. \operatorname{sen} x) = (\lambda x. \cos x)$
$D(\lambda x. x^4) = ?$
$D(\lambda x. e^x) = ?$
$D(\lambda x. e^{42x}) = ?$

A definição melhor é:

$$Df = \left(\lambda x. \frac{d}{dx} f(x)\right)$$

Repare que $(\lambda x. x^2)$ e $(\lambda y. y^2)$ são funções com o mesmo gráfico - e devem ser iguais: $(\lambda x. x^2) = (\lambda y. y^2)$

C2 1/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$f''(x)+7f'(x)+10f(x)=0$ (A)

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes")

Dá pra ver que o "D" recebe uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (um "vetor") e retorna outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (um "vetor" do mesmo tamanho que o anterior!)... Então dá pra gente tratar esse "D" como uma matriz quadrada (de dimensão infinita!...)

Dá pra ver que:

$D(f+g)=Df+Dg$

$D(kf)=k(Df)$

Ou seja, esse D é uma transformação linear!...

Além disso:

$D(\lambda x.e^{42x})=$

$(\lambda x.42e^{42x})=$

$42(\lambda x.e^{42x})$...

Se $f=(\lambda x.e^{42x})$ então $Df=42f$, ou seja, esse f é um autovetor de D associado ao autovalor 42... e se $\alpha\in\mathbb{R}$, $(\lambda x.e^{\alpha x})$ é um autovetor de D associado ao autovalor α.

Nossa EDO é:

$f''(x)+7f'(x)+10f(x)=0$ (A).

(fica implícito que isso vale para todo $x\in\mathbb{R}$).

Na notação de vetores podemos reescrever (A) como:

$f''+7f'+10f=\vec{0}=(\lambda x.0)$

$D(Df)+7(Df)+10f=\vec{0}$ (A')

$(DD)f+(7D)f+(10I)f=\vec{0}$ (A'')

$\underbrace{(DD+7D+10I)}_{M}f=\vec{0}$ (A''')

As soluções de $Mf=\vec{0}$ vão formar um subespaço!!!

(4) Calcule (usando Álgebra Linear!):

(a) $M(\lambda x.e^{2x})$

(b) $M(\lambda x.e^{-2x})$

(c) $M(\lambda x.e^{\alpha x})$

Obs: $M(\lambda x.e^{\alpha x})=\beta(\lambda x.e^{\alpha x})$ para algum $\beta\in\mathbb{R}$... Que β é esse?

Dicas:

(I) Seja $f=(\lambda x.e^{\alpha x})$

(Obs: aprendam o truque do "seja"!!! Quando vocês aprenderem a definir objetos com "seja" vocês mesmos muita coisa em matemática vai ficar bem mais simples!)

Então $Df=\alpha f$.

(II) $Mf=(DD+7D+10I)f$

$=DDf+7Df+10f$

$=$

(5) Para que valores de α temos $M(\lambda x.e^{\alpha x})=\vec{0}$?

Sejam $g=(\lambda x.e^{-2x})$ e $h=(\lambda x.e^{-5x})$.

Então $Mg=0$, $Mh=0$, e...

$M(42g+99h)=M(42g)+M(99h)$

$=42(Mg)+99(Mh)$

$=42\cdot\vec{0}+99\cdot\vec{0}$

$=\vec{0}+\vec{0}$

$=\vec{0}$

Ou seja: nós primeiro descobrimos duas soluções "básicas" de $Mf=0$, e depois descobrimos que combinações lineares dessas soluções também são soluções...

O "básicas" quer dizer:

1) são fáceis de encontrar,

2) são a base do espaço vetorial de soluções.

Um modo de escrever soluções de EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes usando esse método:

$f''+7f'+10f=0$

$\parallel$

$(D^2+7D+10)f$

$\parallel$

$(D+2)(D+5)f$

$\parallel$

$(D+5)(D+2)f$

A solução "básica" de $(D+5)f=0$ é $f=(\lambda x.e^{-5x})$

e a solução "básica" de $(D+2)f=0$ é $f=(\lambda x.e^{-2x})$

C2 1º/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (\text{✯})$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes").

Aviso!!! Nos últimos 15 minutos da aula da sexta que vem, 8/nov, nós vamos fazer um mini-teste baseado na lista de exercícios sobre áreas de polígonos - página 4 do "Material para exercícios"...

Obs: o título da folha é "Exercício sobre funções definidas por casos".

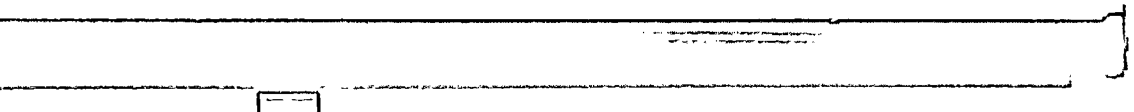
Um problema da P2 do semestre passado...

Seja (✯) esta EDO:

$$f''(x) + 8f'(x) - 20f(x) = 0 \quad (\text{✯})$$

ⓐ Encontre as soluções básicas de (✯). Chame-as de f_1 e f_2.

ⓑ Verifique que f_1 obedece (✯) e que f_2 obedece (✯).



#2

C2 6/nov/2019

Turma pequena

Hoje:
- Mais sobre EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - problemas de valor inicial
  - casos com raízes complexas
- dúvidas sobre a lista de exercícios do mini-teste da sexta

Na aula passada nós vimos um modo de resolver EDOs como esta aqui:

$$f''+7f'+10f=0$$
$$\overset{\shortparallel}{(D^2+7D+10)f}$$
$$\overset{\shortparallel}{(D+5)(D+2)f}$$

As soluções básicas são:

$(D+2)f=0 \Rightarrow f(x)=e^{-2x}$

$(D+5)f=0 \Rightarrow f(x)=e^{-5x}$

Essas soluções básicas formam a base (no sentido de Álgebra Linear!) do espaço de soluções de

$$f''+7f'+10f=0\ldots$$

As soluções da EDO acima são todas desta forma: $\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; ou melhor, sejam

$f_1=e^{-2x}$,

$f_2=e^{-5x}$;

as soluções são todas combinações lineares $\alpha f_1+\beta f_2$.

Seja $g=\alpha f_1+\beta f_2$.

Então $g(x)=\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$

$g'(x)=-2\alpha e^{-2x}-5\beta e^{-5x}$

$g(0)=\alpha e^{-2\cdot 0}+\beta e^{-5\cdot 0}=\alpha+\beta$

$g'(0)=-2\alpha\cdot 1-5\beta\cdot 1=-2\alpha-5\beta$

Exercício:
Quais são os valores de α e β que fazem com que $g(0)=3$ e $g'(0)=4$?

Temos que resolver este sistema:

$\alpha+\beta=3$

$-2\alpha-5\beta=4$

$\beta=3-\alpha$

$-2\alpha-5(3-\alpha)=4$

$-2\alpha-15+5\alpha=4$

$3\alpha=4+15=19$

$\alpha=\frac{19}{3}$

$\beta=3-\alpha=\frac{9}{3}-\frac{19}{3}=-\frac{10}{3}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{19}{3}$

$\beta=-\frac{10}{3}$

$g(x)=\frac{19}{3}e^{-2x}-\frac{10}{3}e^{-5x}$

$g'(x)=-\frac{38}{3}e^{-2x}+\frac{50}{3}e^{-5x}$

$g(0)=\frac{19}{3}-\frac{10}{3}=\frac{9}{3}=3$

$g'(0)=-\frac{38}{3}+\frac{50}{3}=\frac{12}{3}=4$

Dica: quase todas as P2, VRs e VSs dos semestres passados têm problemas deste tipo... tentem fazê-los!

Acabamos de ver que

$$f''+7f'+10f=0$$
$$\overset{\shortparallel}{(D^2+7D+10)f}$$
$$\overset{\shortparallel}{(D+5)(D+2)f}$$

A fatoração de $(D^2+7D+10)$ deu $(D+5)(D+2)$, que tem raízes reais... $D=-5$, $D=-2$

O que a gente faz quando as raízes são complexas?

Caso bem simples:

$$(D+i)(D-i)f$$
$$\overset{\shortparallel}{(D^2+1)f}$$
$$\overset{\shortparallel}{f''+f}=0$$

A gente conhece duas soluções disto!

Se $f(x)=\operatorname{sen} x$,
$f''(x)=-\operatorname{sen} x$,
$f''+f=0$!

Se $f(x)=\cos x$
$f''(x)=-\cos x$
$f''+f=0$!

Se $f(x)=42\cos x+99\operatorname{sen} x$
$f''(x)=-42\cos x-99\operatorname{sen} x$
$f''+f=0$!

Lembre que a gente viu que senos e cossenos são combinações lineares de exponenciais complexas...

$E=C+iS$

$C=\frac{E+E^{-1}}{2}$

$S=\frac{E-E^{-1}}{2i}$

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\operatorname{sen} x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Uma coisa importante que a gente não viu...

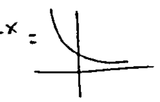
$$e^{2+3i}=\underbrace{e^2}_{\text{número real}}\cdot\underbrace{e^{3i}}_{\shortparallel\ ?}=e^2\cdot(\cos 3+i\operatorname{sen} 3)$$

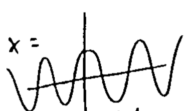
Generalizando: se $a,b\in\mathbb{R}$,

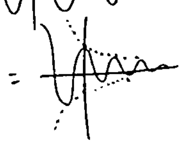
$$e^{a+ib}=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\operatorname{sen} b)$$

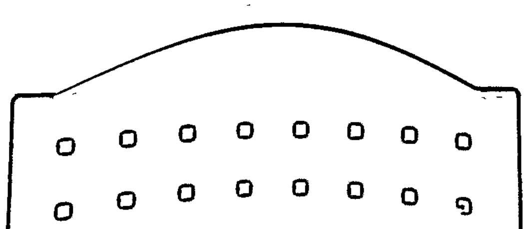
Exercício: Calcule e^{2+3i} usando a calculadora do celular (ou outra).

Exercício:
Faça o gráfico de $f(x)=e^{-x}\cos x$ sem calculadora.

$e^{-x}=$ 

$\cos x=$ 

$e^{-x}\cos x=$ 



#2

C2 6/NOV/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

- MAIS SOBRE EDOS DA FORMA $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - PROBLEMAS DE VALOR INICIAL
  - CASOS COM RAIZES COMPLEXAS
- DÚVIDAS SOBRE A LISTA DE EXERCÍCIOS DO MINI-TESTE DA SEXTA

ALGUMAS EDOS QUE VÊM DE PROBLEMAS FÍSICOS VÃO TER SOLUÇÕES COMO

e^{-t} ⇒ DECAIMENTO RADIATIVO, QUANTIDADE DE UM REMÉDIO NO ORGANISMO DEPOIS QUE VOCÊ TOMA ELE

$\cos t$ ⇒ MOLA

$e^{-x}\cos x$ ⇒ MOLA COM ATRITO / OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

PROBLEMA:

① QUAL É A EDO QUE TEM ESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS?

$f_1 = e^{(-2+3i)x}$

$f_2 = e^{(-2-3i)x}$

OBS: AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS DELA VÃO SER COISAS COMO f_1+f_2 E f_1-f_2...

LEMBRE QUE ESTA EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$ TEM SOLUÇÕES BÁSICAS $e^{\alpha x}$ E $e^{\beta x}$...

② EXPRESSE f_1 E f_2 USANDO SÓ EXPONENCIAIS REAIS, SENOS E COSSENOS.

③ IDEM PARA $\frac{f_1+f_2}{2}$ E $\frac{f_1-f_2}{2i}$.

UM PROBLEMA DA P2 DO SEMESTRE PASSADO:

SEJA (✯) ESTA EDO:

(✯) $f''+8f'+25f=0$

ⓐ EXPRESSE (✯) NA FORMA $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$

ⓑ EXPRESSE (✯) NA FORMA $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f=0$.

ⓒ DESCUBRA AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE (✯).

ⓓ DESCUBRA AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS DE (✯).

$\Rightarrow f_1+f_2 =$

$= e^{-4x}(\cos(3x)+i\,\text{sen}\,3x)$

$+ e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\text{sen}\,3x)$

$e^{-4x}(2\cos(3x))$

$-4\pm 3i$: $-4+3i$, $-4-3i$

B.

SP

α, β são raízes

b) $(D-(-4+3i))(D-(-4-3i))f=0$

c) $\underbrace{e^{(-4+3i)x}}_{f_1}$ $\underbrace{e^{(-4-3i)x}}_{f_2}$

d) $e^{-4x+3ix}$

$e^{-4x}e^{3ix}$

$f_1 = e^{-4x}(\cos 3x + i\,\text{sen}\,3x)$

$f_2 = e^{-4x}(\cos(-3x)+i\,\text{sen}(-3x)) \Rightarrow$

$= e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\text{sen}(3x))$

#2

C2 6/NOV/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Mais sobre EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - Problemas de valor inicial
  - Casos com raízes complexas
- Dúvidas sobre a lista de exercícios do mini-teste da sexta

Algumas EDOs que vêm de problemas físicos vão ter soluções como

e^{-t} ⇒ Decaimento radioativo; quantidade de um perfume no ambiente depois que você tira ele

$\cos t$ ⇒ mola

$e^{-x}\cos x$ ⇒ mola com atrito / oscilações amortecidas

Problema:

① Qual é a EDO que tem estas soluções básicas?

$$f_1 = e^{(-2+3i)x}$$
$$f_2 = e^{(-2-3i)x}$$

Obs: as soluções básicas reais dela vão ser coisas como f_1+f_2 e f_1-f_2...

Lembre que esta EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$ tem soluções básicas $e^{\alpha x}$ e $e^{\beta x}$...

② Expresse f_1 e f_2 usando só exponenciais reais, senos e cossenos.

③ Idem para $\frac{f_1+f_2}{2}$ e $\frac{f_1-f_2}{2i}$.

Um problema da P2 do semestre passado:

Seja $(☆)$ esta EDO:

$$(☆) \quad f''+8f'+25f=0$$

ⓐ Expresse $(☆)$ na forma $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$

ⓑ Expresse $(☆)$ na forma $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f=0$.

ⓒ Descubra as soluções básicas de $(☆)$.

ⓓ Descubra as soluções básicas reais de $(☆)$.

$$\Rightarrow f_1+f_2 = \begin{aligned}&= e^{-4x}(\cos(3x)+i\,\mathrm{sen}\,3x)\\ &+ e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\mathrm{sen}\,3x)\end{aligned}$$
$$e^{-4x}(2\cos(3x))$$

$$-4\pm 3i \begin{cases} -4+3i \\ -4-3i \end{cases}$$

B.

SP

α, β são raízes

b) $(D-(-4+3i))(D-(-4-3i))f=0$

c) $\underbrace{e^{(-4+3i)x}}_{f_1}$ $\quad$ $\underbrace{e^{(-4-3i)x}}_{f_2}$

d) $e^{-4x+3ix}$

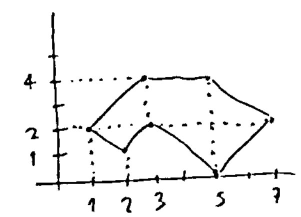
$e^{-4x}e^{3ix}$

$f_1 = e^{-4x}(\cos 3x + i\,\mathrm{sen}\,3x)$

$f_2 = e^{-4x}(\cos(-3x)+i\,\mathrm{sen}(-3x)) \Rightarrow$

$= e^{-4x}(\cos(3x) - i\,\mathrm{sen}(3x))$

Seja P esse polígono aqui:



Sejam $f(x)$ = (curva de cima do polígono), $g(x)$ = (curva de baixo de P), $H(t)$ = área do polígono P entre $x=0$ e $x=t$.

Façam o que der! Temos pouco tempo! Corram!

C2 8/nov/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

EDOS:

- VARIÁVEIS SEPARÁVEIS — OOPS, VIMOS EM 16/OUT... (NÃO TENHO FOTO DO QUADRO)

OU

- EDOS EXATAS

MINI-TESTE NOS ÚLTIMOS 30 MINUTOS DA AULA.

NÓS RESOLVÍAMOS EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS ASSIM:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int g(y)\,dy}_{G(y)+C_1} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)+C_2}$$

$$F(x)+C_2 = G(y)+C_1$$

$$\underbrace{F(x)-G(y)}_{H(x,y)} = \underbrace{C_1 - C_2}_{C_3}$$

AS SOLUÇÕES ERAM AS CURVAS COM $H(x,y) = $ CONSTANTE...

...MAS, EM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS ESSA $H(x,y)$ ERA SEMPRE DA FORMA

$$H(x,y) = F(x) - G(y),$$

E EXISTEM MUITAS FUNÇÕES DE x E y QUE NÃO PODEM SER SEPARADAS NUMA SOMA DE UMA FUNÇÃO SÓ DE x COM UMA FUNÇÃO SÓ DE y...

EXEMPLO: $H(x,y) = xy$ NÃO PODE SER EXPRESSA COMO $F(x) - G(y)$

EDOS EXATAS NOS PERMITEM GENERALIZAR A IDÉIA DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS — CURVAS DE NÍVEL — PARA FUNÇÕES $F(x,y)$ GERAIS.

VAMOS COMEÇAR PELO MEIO — DIGAMOS QUE JÁ SABEMOS A $F(x,y)$... QUAL É A EDO?

MINI-INTRODUÇÃO A ALGUMAS COISAS DE CÁLCULO 3

$F(x,y)$ É $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

DÁ PRA DERIVAR ESSA FUNÇÃO F EM x E EM y SEPARADAMENTE...

NOTAÇÃO:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = F_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = F_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}$$

TRUQUE: PRA CALCULAR $F_x(x,y)$ A GENTE DERIVA EM x FINGINDO QUE y É CONSTANTE.

EXEMPLO:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^4) = 3x^2y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^4) = x^3\cdot 4y^3$$

EXERCÍCIO: CALCULE:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y^4 + y^5) = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2y^4 + y^5) = ?$$

⇐ ISTO SÃO "DERIVADAS PARCIAIS".

REGRA DA CADEIA EM DUAS DIMENSÕES

DIGAMOS QUE:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ENTÃO

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

EXERCÍCIO: DIGAMOS QUE

$F(x,y) = x^2y^3$,

$g(t) = \cos t$,

$h(t) = \operatorname{sen} t$.

CALCULE

(a) $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$,

(b) $\frac{d}{dt}F(g(\pi),h(\pi))$,

(c) $\frac{d}{dt}\left((\cos t)^2(\operatorname{sen} t)^3\right)$ ⇐ DEVE DAR O MESMO QUE A (a)

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

$= $ (FAÇAM EM CASA!!!)

$F(x,y) = x^2y^3$

$g(t) = \cos t$

$h(t) = \operatorname{sen} t$

$F_x(x,y) = 2xy^3$

$F_y(x,y) = 3x^2y^2$

$g'(t) = -\operatorname{sen} t$

$h'(t) = \cos t$

COMO A GENTE ENCONTRA — OU MELHOR, CARACTERIZA — AS CURVAS QUE PERCORREM CURVAS DE NÍVEL DE $F(x,y)$?

IDÉIA: $(g(t),h(t))$ É UMA TRAJETÓRIA.

QUEREMOS $F(g(t),h(t)) = $ CONSTANTE

$\Rightarrow \frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = 0$

|| ABREVIANDO!

$F_x g'(t) + F_y h'(t) = 0$

E SE $g(t) = t$, ENTÃO $g'(t) = 1$,

$F_x + F_y h'(t) = 0$

C2 8/NOV/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

EDOS:

- VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

  OU

- EDOS EXATAS

OOPS, VIMOS EM 16/OUT... (NÃO TENHO FOTO DO QUADRO)

MINI-TESTE NOS ULTIMOS 30 MINUTOS DA AULA.

RECAPITULANDO:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ESTAMOS PROCURANDO CURVAS DE NIVEL DELA:

$F(x,y) = \text{CONSTANTE},$

$F(g(t),h(t)) = \text{CONSTANTE}$

OU SEJA, ESTAMOS PROCURANDO FUNÇÕES g E h QUE FAÇAM

$F(g(t),h(t)) = \text{CONSTANTE}\ldots$

ALIÁS, VAMOS PROCURAR ALGO MAIS SIMPLES: SÓ UMA FUNÇÃO $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ QUE FAÇA

$F(t,h(t)) = \text{CONSTANTE}\ldots$

REESCREVENDO:

$F(x,h(x)) = \text{CONSTANTE}$

$F(x,h(x)) = \text{CONST}$

$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = 0$

OBS :

$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) \neq \frac{\partial}{\partial x} F(x,h(x))!$

$\Uparrow$

"DERIVADA TOTAL" !!

$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = 0$

$\qquad \shortparallel$

$F_x + F_y h'(x)$

AGORA VAMOS IMAGINAR QUE $y = h(x)\ldots$

AÍ $h'(x) = \frac{dy}{dx}$,

E A NOSSA EDO

$F_x + F_y h'(x) = 0$

VIRA:

$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow F_x dx + F_y dy = 0$

EDOS EXATAS COSTUMAM SER ESCRITAS NUM FORMATO COMO:

$F_x dx + F_y dy = 0$

VAMOS PEGAR UM EXEMPLO:

$F(x,y) = x^3 y^5$

EXERCÍCIO:

DIGAMOS QUE $F(x,y) = 4$.

EXPRESSE y COMO FUNÇÃO DE x.

A GENTE CONTINUA NA AULA QUE VEM!

AGORA: MINI-TESTE!

C2 13/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: EDOs exatas - continuação!

Na aula passada nós vimos algumas coisas sobre derivadas parciais e derivadas totais...

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

...e neste exemplo o "$\frac{d}{dt}$..." é uma derivada total e os F_x e F_y são derivadas parciais.

Outra notação para derivadas parciais: $\frac{\partial}{\partial x}F$, $\frac{\partial}{\partial y}F$.

Abreviando um pouco,

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x g' + F_y h'$$

e se $g(t)=t$ então $g'(t)=1$ e

$$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x + F_y h'.$$

Vocês em geral vão ver isto escrito nos livros deste jeito:

$$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = F_x + F_y h'(x)$$

derivada total

derivadas parciais

E se quisermos encontrar uma função $y=h(x)$ que percorra uma curva de nível da F essa $h(x)$ vai obedecer:

$$F(x,h(x)) = \text{constante}$$

$$\frac{d}{dx} F(x,h(x)) = 0$$

$$\text{''} \quad F_x + F_y h'$$

$$\text{''} \quad F_x + F_y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x\,dx + F_y\,dy = 0}$$

EDOs exatas costumam ser escritas deste jeito, ou como

$$G\,dx + H\,dy = 0$$

quando ainda não conhecemos a F.

Exemplos:

(a) $F(x,y) = x^3y^5$

As curvas de nível disto vão ser:

$$F(x,y) = x^3y^5 = C$$

$$x^3y^5 = C$$

$$y^5 = C/x^3$$

$$y = \sqrt[5]{C/x^3}$$

$$= \sqrt[5]{C\,x^{-3}}$$

$$F_x(x,y) = 3x^2y^5$$

$$F_y(x,y) = 5x^3y^4$$

$$\Rightarrow (3x^2y^5)\,dx + (5x^3y^4)\,dy = 0 \quad (☆)$$

Vamos dizer que as soluções da EDO (☆) são as curvas de nível de $F(x,y) = x^3y^5$.

Nem sempre é possível começar de uma EDO desta forma,

$$G\,dx + H\,dy = 0$$

e obter uma F com $F_x = G$ e $F_y = H$ pra resolver esta EDO...

Exemplo:

$$(3xy^2)\,dx + (4x^2y)\,dy = 0.$$

Vamos ver um truque pra gente conseguir encontrar a F rápido quando:

1) A nossa EDO é da forma $G\,dx + H\,dy = 0$ com G e H sendo polinômios em x e y,

2) Quando a F existe.

O truque é uma variação da notação de caixinhas pra polinômios...

$$4x^3 + 5x^2 + 6 = \boxed{4\,|\,5\,|\,0\,|\,6}$$

coef. do x^3

coef. do x^0.

Aviso

Essas notações com caixinhas não são padrão!!!

Variação 2D:

Se $F(x,y) = 4x^3y^5$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 4 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} 2x^0y^2 + 3x^1y^2 + 4x^2y^2 \\ + 5x^0y^1 + 6x^1y^1 + 7x^2y^1 \\ + 8x^0y^0 + 9x^1y^0 + 10x^2y^0 \end{pmatrix}$$

...agora a gente precisa aprender a visualizar o que as derivadas parciais "querem dizer" nessa notação 2D!

Exercício:

Calcule e represente o resultado na notação de caixinhas 2D:

(a) $\frac{\partial}{\partial x} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 10 \\ \hline & & 2 & 3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ disto.

C2 13/NOV/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: EDOS EXATAS - CONTINUAÇÃO!

P2: 11/DEZ

VR: 13/DEZ

VS: 18/DEZ

(b) CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}$ E $\frac{\partial}{\partial y}$ DE $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 10 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline\end{array}$

(c) CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}$ E $\frac{\partial}{\partial y}$ DE $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 10 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 42 & 4 & & \\ \hline\end{array}$

(2) OUTRO EXERCÍCIO:

(a) DIGAMOS QUE

$F(x,y) = (y-2)^3(3+x^4+x^5) + x^2.$

DIGAMOS QUE QUEREMOS UMA FUNÇÃO $y = h(x)$ QUE PERCORRE A CURVA DE NÍVEL $F(x,y) = \alpha$.

DESCUBRA COMO ESCREVER ESTA CURVA DE NÍVEL - OU: O y, OU: O $h(x)$ - COMO FUNÇÃO DE x.

(b) ESCREVA A $F(x,y)$ ACIMA NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS 2D.

(c) ESCREVA A EDO EXATA CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA $F(x,y)$ ACIMA NA FORMA $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ - MAS ESCREVA ESSE F_x E F_y NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

OBS/ DICA:

$\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 10 \\ \hline\end{array} = ?$

$\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 10 & 100 \\ \hline\end{array} = ?$

$\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 100 \\ \hline\end{array} = ?$

(a) $(y-2)^3(3+x^4+x^5) = \alpha - x^2$

$(y-2)^3 = \dfrac{\alpha - x^2}{3+x^4+x^5}$

$y = 2 + \sqrt[3]{\dfrac{\alpha - x^2}{3+x^4+x^5}}$

(b) $(y-2) = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline\end{array}$

$(y-2)^3 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -6 \\ \hline 12 \\ \hline -8 \\ \hline\end{array}$

$(3+x^4+x^5) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 3 & & & & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

$(y-2)^3(3+x^4+x^5) + x^2 =$

$F(x,y) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 3 & & & & 1 & 1 \\ \hline -18 & & & & -6 & -6 \\ \hline 36 & & & & 12 & 12 \\ \hline -24 & & 1 & & -8 & -8 \\ \hline\end{array}$

$F_y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 9 & & & & 3 & 3 \\ \hline -36 & & & & -12 & -12 \\ \hline 36 & & & & 12 & 12 \\ \hline\end{array}$

$F_x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & & 4 & 5 \\ \hline & & & -24 & -30 \\ \hline & & & 48 & 60 \\ \hline & 2 & & -32 & -40 \\ \hline\end{array}$

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

DIGAMOS QUE $F(x,y) = x^3y^5$

E A NOSSA EDO É:

$F_x\,dx + F_y\,dy = 0 \quad (\star\star)$

$\Rightarrow (3x^2y^5)\,dx + (5x^3y^4)\,dy = 0$

$\Rightarrow (3x^2y^5) + (5x^3y^4)\frac{dy}{dx} = 0$

ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DE $(\star\star)$ QUE PASSE POR $(3,4)$...

OU SEJA, QUANDO $x=3$ TEMOS $y=4$, OU SEJA, SE $y = g(x)$ ENTÃO $4 = g(3)$.

(3) EXERCÍCIO:

(a) ENCONTRE UM MODO DE ESCREVER $F(x,y) = x^3y^5 = \alpha$ EM QUE y É FUNÇÃO DE x (E DE α).

(b) ENCONTRE O VALOR DE α QUE FAZ COM QUE EM $x=3$ A GENTE TENHA $y=4$.

(4) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO ABAIXO QUE PASSE PELO PONTO $(4,5)$:

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 6 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 4 \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}\,dy = 0$

(a) DESCUBRA $F(x,y)$.

(b) ESCREVA y EM FUNÇÃO DE x (E α).

(c) DESCUBRA A SOLUÇÃO QUE PASSA PELO PONTO $(4,5)$.

(5) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO ABAIXO QUE PASSA PELO PONTO $(4,5)$:

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 3 \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 4 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,dy = 0.$

$\boxed{\text{C2 } 22/\text{nov}/2019}$

TURMA PEQUENA

HOJE: DÚVIDAS!

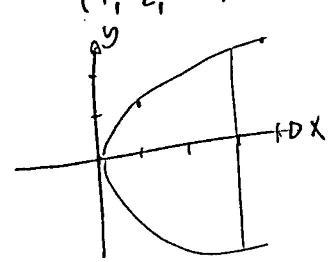
$$f'' + 3f' - 18f = 0$$
$$(D^2 + 3D - 18)f$$
$$(D+6)(D-3)f$$
$$f_1 = e^{-6x}$$
$$f_2 = e^{3x}$$
$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$
$$f(0) =$$
$$f'(0) =$$

$$\int s \cdot \sqrt{1-s^2}\, ds = \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$
$$\int$$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 4,\ y^2+z^2 \le x\}$$
$$C' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 4,\ y^2+z^2 = x\}$$

ENCONTRE ALGUNS PONTOS DE C':

$(0,0,0)$
$(1,1,0)$, $(1,\_,\_)$, $(1,\_,\_)$, $(1,\_,\_)$
$(4,2,0)$, $(4,-2,0)$, $(4,0,2)$, $(4,0,-2)$



$y = \pm\sqrt{x}$

VISUALIZE E DESCREVA $C \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3\}$.
QUAL É O RAIO DESSE CÍRCULO?
QUAL É A ÁREA DELE?

$$\text{VOLUME}(C) = \int_{x=0}^{x=4} \begin{pmatrix}\text{ÁREA DO} \\ \text{CORTE} \\ \text{EM } x\end{pmatrix} dx$$
$$= \int_{x=0}^{x=4} \pi x \, dx$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy = 0$$
$$G\, dx + H\, dy = 0$$

C2 27/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Quando é que uma EDO é exata?
- Como converter EDOs não exatas em exatas? ("fator integrante")
- Livro: Trench

Lembrem que uma EDO é exata quando ela é da forma

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

para alguma $F(x,y)$... Dá pra converter isto pra uma EDO que dá pra testar fazendo:

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

E geralmente os problemas de EDOs exatas dão pra gente uma EDO na forma

$$M dx + N dy = 0,$$

e a gente tem que encontrar a F com

$F_x = M$ e $F_y = N$...

Como a gente descobre rápido se a F existe ou não?

Truque: (Cálculo 3) Teorema de Young

$$F_{xy} = F_{yx}$$

(exceto numas funções muito estranhas e difíceis de definir)

Além disso, se em

$$M dx + N dy = 0$$

temos

$$\boxed{F_{xy}} \quad \boxed{F_{yx}}$$

$$M_y = N_x$$

então existe F tal que

$F_x = M$ e $F_y = N$

(exceto em casos muito estranhos e difíceis de definir).

Dá pra obter F a partir de M e N por integração – mas a gente vai encontrar a F no chute mesmo.

Repare que

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

é equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

e pra "qualquer" $G(x,y)$ (obs: $G(x,y) = 0$ não funciona)

A EDO acima vai ser equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{GF_x}{GF_y}$$

e também a:

$$GF_y dy = -GF_x dx$$

$$GF_x dx + GF_y dy = 0$$

que "em geral" não vai ser exata.

Exercício:

1. Qual é a EDO exata cujas soluções são as curvas de nível de $F(x,y) = x^2 y^3$?
2. Verifique que a EDO acima obedece a condição $M_y = N_x$.
3. Transforme essa EDO em outras equivalentes que talvez não sejam exatas usando:
   a) $G(x,y) = 4$,
   b) $G(x,y) = x$,
   c) $G(x,y) = x+y$
4. Teste se cada uma das EDOs acima é exata ou não – consulte o que o Trench chama de "exactness condition" no Teorema 2.5.2.
5. Leia o início da seção 2.6 ("Integrating factors") e traduza o exemplo 2.6.1 para a notação de caixinhas.
6. Faça o exercício 1a da p.91.
7. Faça o 2a da p.91.
8. Faça o 3 da p.91.
9. Faça o 4 da p.91.

C2 29/NOV/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

CONTINUAÇÃO DO QUE NÓS VIMOS NA ÚLTIMA AULA SOBRE FATOR INTEGRANTE, E TALVEZ EDOS HOMOGÊNEAS (ÚLTIMA COISA DA MATÉRIA, ACHO).

NÓS VAMOS FAZER EXERCÍCIOS DE FATOR INTEGRANTE DO TRENCH.

TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS 1,2,3,4 DO TRENCH (P. 99).

DICA: ESCREVA

$M_y - N_x$,

$\frac{M_y - N_x}{M}$,

$\frac{M_y - N_x}{N}$

NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

3) $\underbrace{y}_{M}\,dx \underbrace{- x}_{N}\,dy$

Isso é exato?

$M_y \overset{?}{=} N_x$

$M_y = 1$, $N_x = -1$

NÃO

$$p(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-(-1)}{-x} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\left(-2\int \frac{1}{x}dx\right)} = e^{(-2\ln|x|)} = \left(e^{\ln|x|}\right)^{-2} = |x|^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

EDO NOVA:

$\mu M dx + \mu N dx = 0$

$\frac{1}{x^2} y\,dx + \frac{1}{x^2}(-x)\,dx = 0$

$\underbrace{x^{-2}y}_{M}\,dx \underbrace{- x^{-1}}_{N}\,dx = 0$

A EDO $\underbrace{x^{-2}y}_{M}\,dx \underbrace{- x^{-1}}_{N}\,dx = 0$

É EXATA?

$M_y \overset{?}{=} N_x$

$M_y = x^{-2}$, $N_x = x^{-2}$

SIM! :)

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{ab} = (e^a)^b$

$x^2 = |x|^2$

C2 4/DEZ/2019

TURMA PEQUENA

REVISÃO E DÚVIDAS

1ª parte da Solução.

(4)

$$P = \frac{m_y - m_x}{m} =$$

$$P = \frac{(8xy + 10x^2) - (16xy + 15x^2)}{8x^2y + 5x^3}$$

$$= \frac{-8xy - 5x^2}{8x^2y + 5x^3} = \frac{-(8xy + 5x^2)}{x(8xy + 5x^2)} = -\frac{1}{x}$$

(5)

$$\pm e^{\int P\,dx}$$

$$= \pm e^{\int -\frac{1}{x}\,dx}$$

$$= \pm e^{-\ln x}$$

$$= e^{(-1)\ln x}$$

$$= (e^{\ln x})^{-1}$$

$$e^{ab} = (e^a)^b$$

$$\boxed{\text{exato: } m_y \overset{?}{=} m_x}$$

(3)

$$m_y = 8xy + 10x^2$$

$$m_x = 16xy + 15x^2$$

2ª Parte

$$= (e^{\ln x})^{-1}$$

$$= x^{-1}$$

$$= \frac{1}{x}$$

(6)

Seja (★) essa edo:

$$\frac{1}{x}(4xy^2 + 10x^2y)\,dx + \frac{1}{x}(8x^2y + 5x^3)\,dy = 0$$

Já que m_y é diferente de m_x não é exato!

$m_y \mathrel{!}= m_x$

$m_y \neq m_x$

(1)

$$F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline & & 5 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = 4xy^2 + 5x^2y$$

$$F_x = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline & 10 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

$$F_y = \begin{array}{c|c|c|c|} & & & \\ \cline{2-4} 1 & & 8 & \\ \cline{2-4} 0 & & & 5 \\ \cline{2-4} & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ (EXATA)

$HF_x\,dx + HF_y\,dy = 0$

TESTES: $H(x,y) = x$ (a)

$H(x,y) = \frac{1}{x}$ (b)

(2)

$$F_x = 4y^2 + 10xy$$

$$F_y = 8xy + 5x^2$$

$(4y^2 + 10xy)\,dx + (8xy + 5x^2)\,dy =$

$= 0$ (exato)

$$H(4y^2 + 10xy)\,dx + H(8xy + 5x^2)\,dy = 0$$

$$\text{(a) } \underbrace{(4xy^2 + 10x^2y)}_{m}\,dx + \underbrace{(8x^2y + 5x^3)}_{n}\,dy = 0$$

C2 4/Dez/2019

TURMA PEQUENA

REVISÃO E DÚVIDAS

(☆)

$$F = 6x^2y^2 + 7x^3y$$

$$F_x = 12xy^2 + 21x^2y$$

$$F_y = 12x^2y + 7x^3$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

$$F_{xy} \stackrel{?}{=} F_{yx}$$

$$F_{xy} = 24xy + 21x^2$$

$$F_{yx} = 24xy + 21x^2$$

$$F_{xy} = F_{yx}$$

(☆☆)

$$\frac{1}{x}\left(\left(12xy^2 + 21x^2y\right)dx + \left(12x^2y + 7x^3\right)dy\right) = 0$$

$$\underbrace{\left(12y^2 + 21xy\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(12xy + 7x^2\right)}_{N}dy$$

$$M_y \stackrel{?}{=} N_x$$

$$M_y = 24y + 21x$$

$$N_x = 12y + 14x$$

COMO $M_y \neq N_x$:

↳ PRECISO ACHAR FATOR INTEGRANTE (P)

$$↳ \ P = \frac{M_y - N_x}{N}$$

$$= \frac{24y + 21x - (12y + 14x)}{12xy + 7x^2}^{*}$$

$$^{*} = \frac{12y + 7x}{12xy + 7x^2}$$

$$= \frac{12y + 7x}{x(12y + 7x)}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int P\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= e^{\ln x}$$

$$= x$$

SEJA (☆☆☆) A EDO

$$\mu M\,dx + \mu N\,dx = 0.$$

OUTRO EXEMPLO:
(NÃO SEI COMO AS CONTAS VÃO FICAR!)

SEJAM F = , $H = \frac{1}{x}$.

SEJA (☆) A EDO $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ (EXATA),

SEJA (☆☆) A EDO $HF_x\,dx + HF_y\,dy = 0$ (NÃO-EXATA).

ENCONTRE O FATOR INTEGRANTE PARA (☆☆).

$$M = -2x + 6$$

$$N = 2y + 8$$

$$M_y \stackrel{?}{=} N_x$$

$$M_y = 0$$

$$N_x = 0$$

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

EDO: $(-2x + 6)\,dx + (2y + 8)\,dy = 0$

a) Esta EDO é exata?

b) Encontre a solução geral desta EDO

c) Encontre a solução que passa no ponto (a, b) desta EDO.

Solução geral é achar o y.

$$-x^2 + 6x + y^2 + 8y = F(x,y) = C$$

$$-2x+6 \qquad 2y+8$$

$$-x^2 + 6x + y^2 + 8y = C$$

$$-x^2 + 6x + (y^2 + 8y + 16) - 16 = C$$

$$-x^2 + 6x + (y+4)^2 - 16 = C$$

$$(y+4)^2 = C + x^2 - 6x + 16$$

$$y = \pm\sqrt{C + x^2 - 6x + 16} - 4$$

C2 6/Dez/2019

[illegible] PEQUENA

Hoje: Revisão e dúvidas!

Sugestão:
Resolva

$$\int (\text{sen } x)^3 (\cos x)^2 \, dx$$

usando integração por substituição (e não o truque do $E = C + iS$).

Sejam:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4, \ y^2+z^2 \leq x\}$$

$$C' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, \ y^2+z^2 = 4\}$$