C3 15/AGO/2019

Hoje:
Introdução ao curso!

A página do curso é
http://angg.twu.net/2019.2-C3.html

O jeito mais fácil de chegar até ela é googlando por "Eduardo Ochs" e aí clicando em "C3" na barra de navegação à esquerda.

Vamos usar dois livros: o "APEX Calculus" (livre, mas em inglês; tem link pra ele na página do curso. Se ainda não estiver lá siga o link que diz "Página do semestre anterior") e o do Humberto Bortolossi.

Aviso: C3 é um curso que tem poucas contas e muita coisa que vocês vão ter que aprender a visualizar.

Revisão de vetores
(porque a gente vai precisar deles pra visualizar derivadas!)

Lembrem que existem duas convenções diferentes pra vetores...

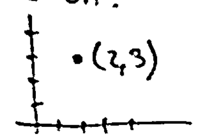
Em GA $\quad (2,3) + \overrightarrow{(4,5)}$

$\Uparrow$ ponto $\quad \Uparrow$ vetor

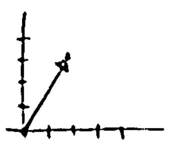
e a gente distingue sempre pontos de vetores porque eles têm representações gráficas totalmente diferentes.

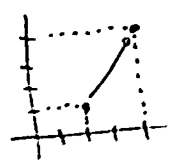
Em Álgebra Linear
$$(2,3) = \overrightarrow{(2,3)}$$
e às vezes
$$(2,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$(2,3) = (2 \;\; 3)$$
porque o objetivo em AL é fazer contas com matrizes.

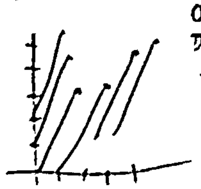
Vamos usar a convenção de GA:

$(2,3) =$ 

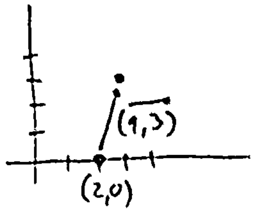
$\overrightarrow{(2,3)}$ é um deslocamento de +2 na horizontal e +3 na vertical, e vetores são representados como setas

$\overrightarrow{(2,3)} =$ 

$=$ 

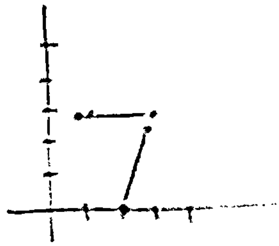
Às vezes $\overrightarrow{(2,3)} =$  o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes (?)

Truque:
A representação gráfica de
$(2,0) + \overrightarrow{(1,3)}$ é:



uma figura com o vetor $\overrightarrow{(1,3)}$ "apoiado" no ponto $(2,0)$ e indo para $(2+1, 0+3)$.

Exemplo:
$$\underbrace{\underbrace{\left((2,0) + \overrightarrow{(1,3)}\right)}_{(3,3)} + \overrightarrow{(-2,0)}}_{(1,3)}$$



Obs: se vocês quiserem vocês podem escrever ao lado de cada ponto e vetor coisas como $(2,0)$, $\overrightarrow{(1,3)}$, $(3,3)$, $(2+1, 0+3)$, etc...

Exercício:
1) Sejam $A = (2,0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-2,-1)}$.
Represente graficamente:
a) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$
b) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$
c) $A + (\vec{v} + \vec{w})$

15/AGO/2019

Hoje:

Introdução ao curso!

Continuação...

(d) $(A+\vec{v})+\vec{v}$

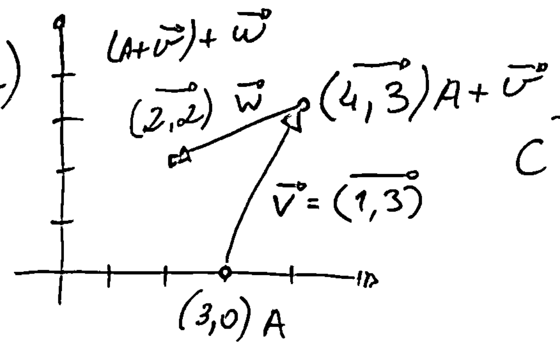
(e) $A+(\vec{v}+\vec{v})$

(f) $A+2\vec{v}$

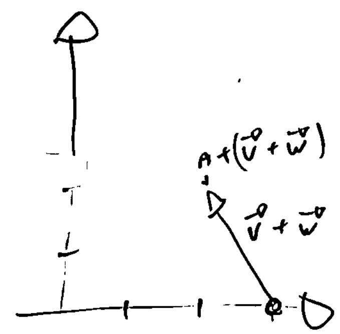
(g) $A+(-1)\vec{v}$

OBS: Estamos procurando as melhores representações gráficas possíveis para cada um dos itens acima, mas não é nada óbvio quais são as "melhores possíveis"... Então discuta com os seus vizinhos pra tentar encontrar (várias) representações gráficas que vocês achem muito boas.

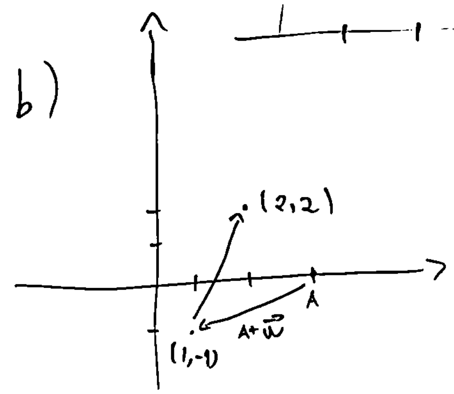
a)



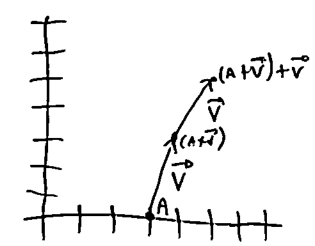
c)



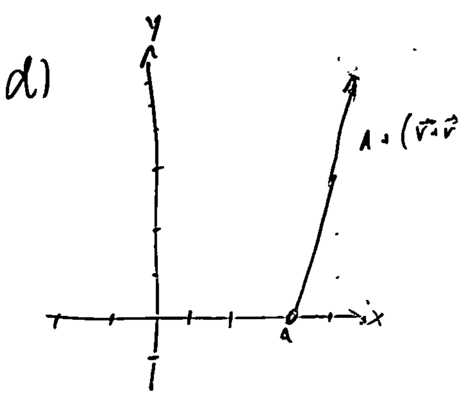
b)



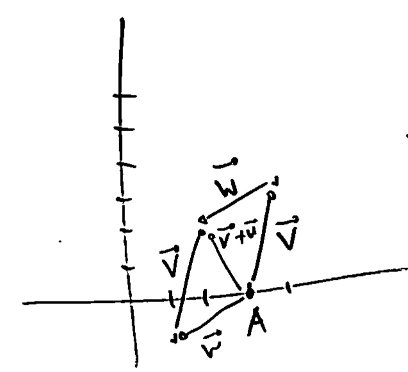
d)

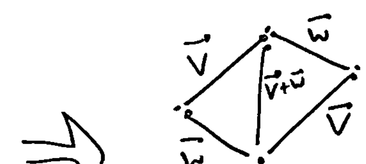


d)



OBS: A "regra do paralelogramo" de GA costuma ser demonstrada representando $(A+\vec{v})+\vec{w}$, $(A+\vec{w})+\vec{v}$ e $A+(\vec{v}+\vec{w})$ na mesma figura...





Versão "abstrata"

C3 15/AGO/2019

Hoje:
Introdução ao curso!

Continuação...

(d) $(A+\vec{v})+\vec{v}$

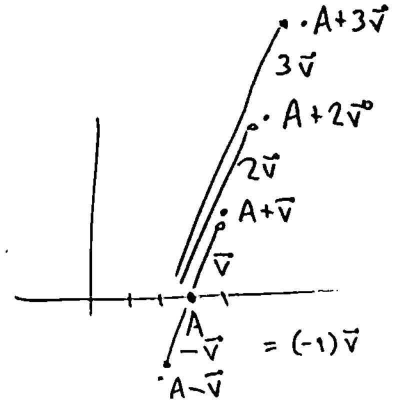
(e) $A+(\vec{v}+\vec{v})$

(f) $A+2\vec{v}$

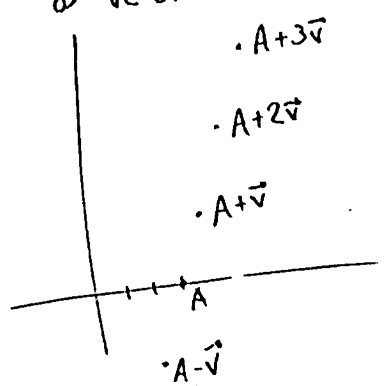
(g) $A+(-1)\vec{v}$

O que acontece se a gente representa A e vários pontos da forma $A+k\vec{v}$ num gráfico só?

P. ex., $A+\vec{v}$ $(k=1)$,
$A+2\vec{v}$,
$A+3\vec{v}$,
$A-\vec{v}$ $(k=-1)$

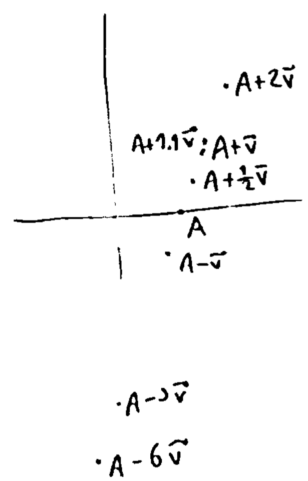


E se a gente não representar os vetores?

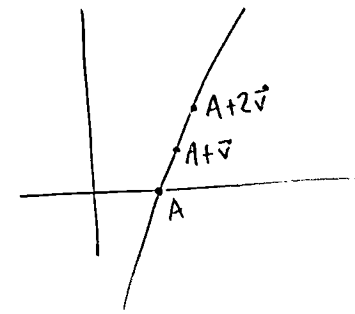


A Reta Parametrizada gerada pelo ponto A e pelo "vetor diretor" $\vec{v}$ é esse conjunto:

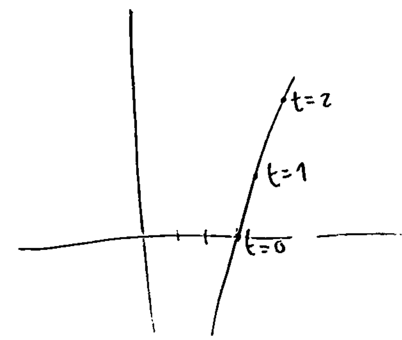
$$\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$$



Vamos desenhar todos esses pontos mas só vamos pôr anotações em alguns...



E se a gente anotar qual é o valor de t?



Exercício:
Em cada um dos casos abaixo represente graficamente o conjunto $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e indique os pontos com $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=-1$, $t=\frac{1}{2}$.

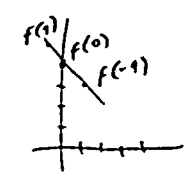
a) $A=(2,3)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$

b) $A=(2,3)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$

c) $A=(0,4)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,-2)}$

d) $A=(0,4)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,1)}$

e) $A=(4,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,1)}$



Obs: dá pra calcular
$A+2\vec{v}$,
$A+3\vec{v}$,
$A-\vec{v}$,
$A+\frac{1}{2}\vec{v}$
fazendo contas...
mas também dá pra descobrir eles no olho!

Vamos interpretar $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ como trajetórias...
("movimento retilíneo uniforme")

Outro jeito de escrever uma trajetória:

$f(t) = A+t\vec{v}$ (caso d)
$= (0,4)+t\overrightarrow{(-1,1)}$
$= (0,4)+\overrightarrow{(-t,t)}$
$= (-t,4+t)$

C3 15/AGO/2019

Hoje:

Introdução ao curso!

Agora vamos começar a ver trajetórias que não são retas parametrizadas.

Três exemplos importantes:

$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$
$$g(t) = (t, t^2)$$
$$h(t) = (t^2, t)$$

Como é que a gente desenha elas?

A começa por pontos fáceis de calcular

t	$\cos t$	$\operatorname{sen}(t)$
0		
$\pi/2$		
π		
$\frac{3}{2}\pi$		
2π		
$\pi/4$		

t	(t, t^2)
0	
1	
2	
-1	
-2	

t	(t^2, t)
0	
1	
2	
-1	
-2	

V

e

Ou

C3 16/agosto/2019

Hoje: derivadas e retas tangentes, visualmente!

(A gente vai voltar temporariamente pra coisas com cara de Cálculo 1)

Lembre que se a reta r é o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$ então o coeficiente angular de r é a...

⇧ A "inclinação" de r

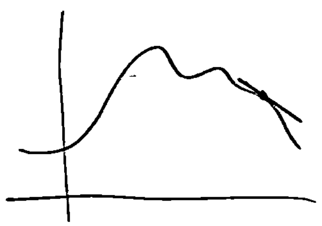
E se r passa pelos pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1)

Então $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

"O quanto y varia (com relação a x)"

a é o quanto o y varia quando x varia 1.

Reta tangente à uma curva



Vocês sabem desenhar retas tangentes a curvas (em pontos dados)

Vocês sabem estimar no olho o coeficiente angular de uma reta dada.

$f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Exercício:

(1) Seja $f(x)=x^2$.

(a) Calculem $f(x)$ e $f'(x)$ nos seguintes pontos: $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=-1$, $x=-2$.

(b) Para cada um desses pontos — por exemplo, $(1,f(1))$ — represente graficamente a reta tangente à curva de f nesse ponto.

(c) Use o que você descobriu nos itens anteriores pra fazer um desenho bem preciso de $y=f(x)$.

(2) Faça a mesma coisa para $g(x)=\operatorname{sen} x$.

Tente desenhar uma aproximação bem boa para a curva do seno no intervalo entre $x=0$ e $x=\pi$.

Obs: os pontos onde tudo é fácil de calcular são estes: $x=0$, $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\pi$.

Dica: use $\pi\approx 3$ e $\sqrt{2}\approx 1.5$ (ou $\sqrt{2}\approx 1.4$).

(3) Use o desenho que você obteve no item anterior pra obter aproximações para $g(0.5)$ e $g'(0.5)$.

Voltando pra Cálculo 3...

Digamos que $P(x)=(f(x),g(x))$.

Isto é uma trajetória.

Vamos deixar as definições exatas de coisas como $P'(x)$ pra depois — hoje vamos começar pelo meio da história e entender graficamente o que $P'(x)$ significa.

Def: $P'(x)=\overrightarrow{(f'(x),g'(x))}$.

A derivada é um vetor — o "vetor velocidade".

Sabemos representar graficamente $\underbrace{P(x_0)}_{\text{ponto}}+\underbrace{P'(x_0)}_{\text{vetor}}$

E sabemos montar a reta $\{P(x_0)+tP'(x_0) \mid t\in\mathbb{R}\}$...

Essa reta vai ser tangente à trajetória — isto é, à curva $\{P(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$!!!

(4) Seja $P(t)=(t+\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(a) Calcule $P(t)$ e $P'(t)$ para os valores fáceis de calcular: $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$, $t=\frac{3}{2}\pi$, $t=2\pi$.

(b) Represente graficamente $P(t)+P'(t)$ para cada um desses valores de t.

(c) Faça um esboço da curva $\{P(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

C3 16/AGOSTO/2019

HOJE: DERIVADAS E RETAS TANGENTES, VISUALMENTE!

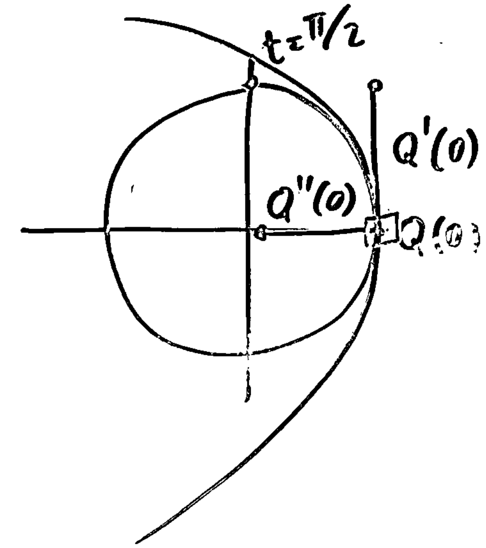
REPARE QUE $P(t) = (t + \cos t, \operatorname{sen} t)$
$$= (t, 0) + (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

E REPARE QUE $P''(t)$ É O "VETOR ACELERAÇÃO"

$$P'(t) = \overrightarrow{(1 - \operatorname{sen} t, \cos t)}$$
$$P''(t) = \overrightarrow{(-\cos t, -\operatorname{sen} t)}$$

DICA: O QUE ACONTECE QUANDO A VELOCIDADE É CONSTANTE?
O QUE ACONTECE QUANDO A ACELERAÇÃO É CONSTANTE?

N... O DO ...ULO,
$Q(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$



EXEMPLO:
DIGAMOS QUE
$S(0) = (0,0)$,
$S'(0) = \overrightarrow{(0,0)}$
$S''(t) = \overrightarrow{(1,0)}$

$$S(t) = (a t^2 + bt + c \;,\; d t^2 + et + f)$$
$$S(0) = (a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \;,\; d \cdot 0 + e \cdot 0 + f)$$
$$= (0,0)$$
$$S'(0) = \ldots$$

22/AGO/2019

Hoje:
Várias coisas relacionadas a parábolas!!

No final da aula passada nós começamos a ver o vetor aceleração...

Hoje nós vamos entendê-lo direito.

Vamos voltar pra $\mathbb{R}$ um pouco...

Def: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é um <u>movimento uniformemente acelerado</u> se f'' for constante.

Fato: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um MUA então existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercícios

1) Suponha que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Digamos que $f(0) = 6$, $f'(0) = 7$, $f''(0) = 8$. Encontre a, b, c.

b) Digamos que $f(10) = 6$, $f'(10) = 7$, $f''(10) = 8$. Encontre a, b, c.

c) Digamos que $f(x) = 6(x-10)^2 + 5(x-10) + 4$. Encontre $f(10)$, $f'(10)$, $f''(10)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, a, b, c.

d) Mostre que toda função da forma
$g(x) = \alpha(x-x_0)^2 + \beta(x-x_0) + \gamma$,
onde $x_0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, é um MUA.
Dica: calcule a, b, c.

e) Digamos que $g(x)$ é a função do item anterior. Calcule $g'(x)$, $g''(x)$, $g(x_0)$, $g'(x_0)$, $g''(x_0)$.

Obs: Quando estamos interessados no que acontece num ponto x_0 – ou "em torno de x_0" – as contas vão ficar muito mais fáceis se usarmos o x_0 como "ponto base"...

f) Digamos que $h(x)$ é um MUA e que a curva de $h(x)$ passa pelo ponto $(2,3)$ com coeficiente angular 4, e além disso $h''(x) = 5$ pra todo x.
Expresse $h(x)$ nas formas
$h(x) = \alpha(x-2)^2 + \beta(x-2) + \gamma$ (☆)
e $h(x) = ax^2 + bx + c$. (☆☆)

Veja que as contas são <u>muito</u> mais fáceis no caso (☆).

Uma trajetória $f(t) = (g(t), h(t))$ é um MUA se $g(t) = at^2 + bt + c$ e $h(t) = a't^2 + b't + c'$, para $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.

Repare que dá pra reescrever $f(t)$ como:

$$\begin{aligned} f(t) &= (at^2 + bt + c,\ a't^2 + b't + c') \\ &= \overrightarrow{(at^2, a't^2)} + \overrightarrow{(bt, b't)} + (c, c') \\ &= t^2\overrightarrow{(a,a')} + t\overrightarrow{(b,b')} + (c, c') \end{aligned}$$

Exercício:

2) Digamos que $A = (2,0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$,
$f(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$.
Represente graficamente
$f(0) + f'(0)$,
$f(1) + f'(1)$,
$f(-1) + f'(-1)$,
$f(2) + f'(2)$,
$f(-2) + f'(-2)$
(Isso vai dar uma parábola torta!)

23/AGO/2019

Hoje: um monte de coisas usando partículas parametrizadas!

No final da aula passada nós vimos um exercício que era assim:

Sejam $A=(2,0)$, $\vec{v}=(1,1)$, $\vec{w}=(-1,1)$,

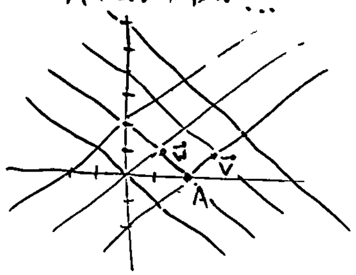
$f(t)=A+t\vec{v}+t^2\vec{w}$.

Represente graficamente

$f(0)+f'(0)$,
$f(1)+f'(1)$,
$f(-1)+f'(-1)$,
$f(2)+f'(2)$,
$f(-2)+f'(-2)$.

(Façam isso agora)

Um truque pra representar graficamente todos os pontos da forma $A+\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$...



GRID ⇧

$A+\vec{v}+2\vec{w}$ ☺

$A-0.5\vec{v}+3\vec{w}$ ☺

Exercício: Faça essas três variações do exercício anterior:

(a) $A=(2,-2)$, $\vec{v}=(2,0)$, $\vec{w}=(0,1)$, $t\in\{-2,-1,0,1,2\}$

(b) $A=(-2,2)$, $\vec{v}=(2,0)$, $\vec{w}=(-1,1)$, $t\in\{-2,-1,0,1,2\}$

(c) $A=(-2,2)$, $\vec{v}=(2,0)$, $\vec{w}=(-1,1)$,
$f(t)=A+(t-\pi)\vec{v}+(t-\pi)^2\vec{w}$,
$t\in\{\pi-2,\pi-1,\pi,\pi+1,\pi+2\}$.

OBS: Na primeira aula eu pedi pra vocês se juntarem em grupos e tentarem encontrar a melhor representação gráfica possível para certas expressões com vetores. Faça a mesma coisa agora!

Digamos que

$$f(t)=(at^2+bt+c,\ a't^2+b't+c')$$
$$=A+t\vec{v}+t^2\vec{w}$$
$$=f(0)+tf'(0)+kt^2f''(0)$$
$$=f(\pi)+(t-\pi)f'(\pi)+k(t-\pi)^2f''(\pi).$$

Digamos que a gente sabe os valores de a,b,c, a',b',c'.

(1) Encontre $A,\vec{v},\vec{w}$.

(2) Encontre o $k\in\mathbb{R}$ que satisfaz a terceira igualdade.

(3) Verifique que esse mesmo k satisfaz a quarta igualdade.

A gente quer aproximar a trajetória $f(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ por movimentos uniformemente acelerados. Como fazer isso?

(4) Calcule:
$f(0), f'(0), f''(0)$,
$f(\frac{\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{2}), f''(\frac{\pi}{2})$,
$f(\pi), f'(\pi), f''(\pi)$

Definições:

- Uma aproximação de 1ª ordem para uma trajetória $f(t)$ no ponto t_0 é uma reta parametrizada $g(t)$ tal que $g(t_0)=f(t_0)$ e $g'(t_0)=f'(t_0)$.
- Uma aproximação de 2ª ordem para uma trajetória $f(t)$ no ponto t_0 é uma parábola parametrizada $g(t)$ tal que: $g(t_0)=f(t_0)$, $g'(t_0)=f'(t_0)$, $g''(t_0)=f''(t_0)$

Nos próximos exercícios nós vamos obter aproximações de 2ª ordem para o círculo, para uma parábola comum e pra $f(t)=(t,\sqrt{t})$

(5) Obtenha aproximações de 1ª e de 2ª ordem para:

(a) $f(t)=(t,t^2)$ em $t=0$

(b) $f(t)=(t,t^2)$ em $t=\pi$

(c) $f(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ em $t=0$

(d) idem, em $t=\pi$

(e) idem, em $t=\frac{\pi}{2}$

(f) $f(t)=(t,\sqrt{2})$ em $t=4$.

29/AGO/2019

Hoje:
Outro assunto: funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e curvas de nível!
(Primeiro a gente vai ver como visualizar vários objetos importantes. A parte 1 do curso vai ser uma introdução a um monte de coisas mais ou menos fáceis de visualizar, com contas simples. Depois da P1 a gente vai rever todas essas ideia (e outras) num nível mais avançado, com contas mais difíceis).

Já vimos:
Trajetórias (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$)

Hoje:
Funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$
(e como visualizá-las).

Exemplos:

(1) Se $z = \underbrace{F(x,y)}_{\text{função de } \mathbb{R}^2 \text{ em } \mathbb{R}} = a + bx + cy$

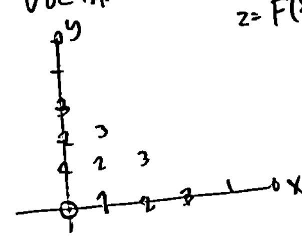
Então a superfície $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\}$ é um plano.
(Obs: isso é parecido com as trajetórias que eram retas parametrizadas).

Aviso: daqui a pouco eu vou pôr no site o capítulo 3 do livro do Bortolossi, que é sobre isso.

Definição:
Uma curva de nível de uma função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a interseção da superfície $z = F(x,y)$ com algum plano da forma $z = K$ ← constante.

...e hoje eu queria que a gente fizesse vários exercícios usando uma técnica que o Bortolossi não usa (depois vamos discutir porquê).

Voltando a GA...
$z = F(x,y) = x+y$
Pra cada x,y inteiros eu vou desenhar sobre o ponto (x,y) ← em $\mathbb{R}^2$ o valor de $F(x,y)$...



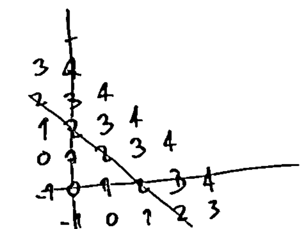
O método tradicional, bem conhecido, etc, etc, de visualizar superfícies em $\mathbb{R}^2$ é usando curvas de nível...

Exemplo:
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \overbrace{F(x,y)}^{x+y}\}$
$\cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\} =$
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y,\ z=2\}$

Alguns pontos desse conjunto: $(0,2,2)$, $(1,1,2)$, $(2,0,2)$, $(3,-1,2)$

Se a gente esquecer a coordenada z temos...
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$, que é uma reta em $\mathbb{R}^2$!

Se a gente desenhar essa reta sobre os numerozinhos temos:



E essa reta indica onde encontrar outros pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $F(x,y)=2$.

Exercícios de desenhar curvas de nível a partir do desenho com os números

Pra cada um dos casos abaixo desenhe os números em pontos com coordenadas inteiras e a partir daí desenhe as curvas de nível pedidas.

(1) $z = F(x,y) = x+y$;
desenhe $F(x,y)=2$, $F(x,y)=3$, $F(x,y)=0$.

(2) $z = F(x,y) = 2+3x+4y$
desenhe $F(x,y)=10$, $F(x,y)=0$, $F(x,y)=-10$.

(3) $z = F(x,y) = x^2+y^2$
desenhe $F(x,y)=1$, $F(x,y)=4$, $F(x,y)=0$, $F(x,y)=-1$.

Obs: nas situações em que o seu desenho não ficar claro o suficiente complemente-o com comentários em português!

C3 29/AGO/2019

Hoje: Outro assunto — funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e curvas de nível! (Primeiro a gente vai ver como <u>visualizar</u> vários objetos importantes. A parte 1 do curso vai ser uma introdução a um monte de coisas mais ou menos fáceis de visualizar, com contas simples. Depois da P1 a gente vai rever todas essas ideia (e outras) num nível mais avançado, com contas mais difíceis).

Já vimos: trajetórias (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$)

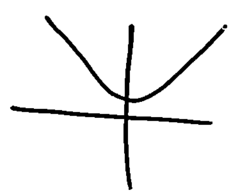
Hoje:

Funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$

(e como visualizá-las).

O livro do Bortolossi supõe que

- A gente sabe tudo de Cálculo 1 — por exemplo, a gente sabe que $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ tem este gráfico:



- A gente sabe usar algum programa de computador que pode plotar gráficos pra gente.

Exercícios, cont:

④ $z = F(x,y) = \min(x,y)$

Desenhe $F(x,y)=4$,
$F(x,y)=3$,
2,
1,
0.

⑤ $z = F(x,y) = xy$

$F(x,y) = 0$,
4,
-4,
1,
-1.

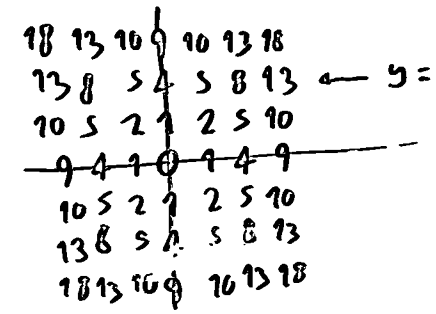
⑥ $z = F(x,y) = x^2 - y^2$

$F(x,y) = 0$,
4,
-4,
1,
-1.

Pra casa:
Deem uma olhada no Cap. 3 do Bortolossi (que tá no site)!

A partir da p. 86 ele começa a examinar o que acontece quando fazemos outros cortes — por exemplo nos planos $y=1$ e $y=2$.
Tentem fazer isso agora!

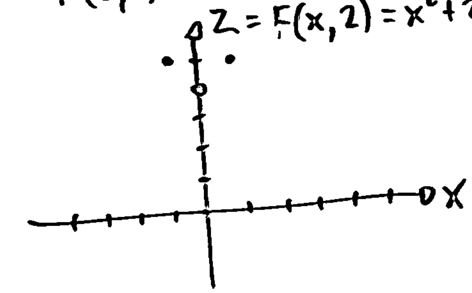
Exemplo:
$z = F(x,y) = x^2 + y^2$ (Ex. 3)



Esse diagrama está nos dizendo que:

$F(-1,2)=5$ $F(0,2)=4$ $F(1,2)=5$ $F(2,2)=8$

$z = F(x,2) = x^2 + 2^2$



C3 30/AGO/2019

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ALGUNS TRUQUES PRA VISUALIZAR SUPERFÍCIES...

HOJE VAMOS VER ALGUNS OUTROS — E PLANO TANGENTE!

O QUE ACONTECE SE COMPUSERMOS UMA FUNÇÃO $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ COM UMA FUNÇÃO $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

EXEMPLO:

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$F(x,y) = x^2 + y^2$

NOVIDADE:

⇩

$(x,y) = P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$z = F(x,y) = x^2 + y^2$

P.EX: $t=0 \to (x,y) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1,0)$

$z = F(1,0) = 1^2 + 0^2 = 1$

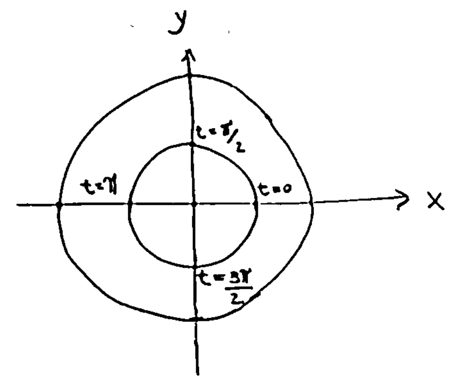
NESSE CASO A TRAJETÓRIA P PERCORRE UMA CURVA DE NÍVEL DA FUNÇÃO F.

① EXERCÍCIO:

REPRESENTE NUM GRÁFICO SÓ ALGUMAS CURVAS DE NÍVEL DA F E ALGUNS PONTOS DA TRAJETÓRIA P.

t	(x,y)	z
0	$(1,0)$	1
$\pi/2$	$(0,1)$	1
π	$(-1,0)$	1
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	1
2π	$(1,0)$	1

NEM SEMPRE VAI SER FÁCIL ENCONTRAR TRAJETÓRIAS QUE PERCORREM CURVAS DE NÍVEL...



... E AGORA VAMOS COMEÇAR A VER TRAJETÓRIAS QUE PERCORREM OUTRAS CURVAS SOBRE A SUPERFÍCIE $z=F(x,y)$.

NO FINAL DA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO CORTAR A SUPERFÍCIE $z=F(x,y)$ EM PLANOS COM X CONSTANTE E COM Y CONSTANTE...

SE PEGARMOS A TRAJETÓRIA $P(t) = (t,0)$

A GENTE VAI PERCORRER ESSA CURVA DAQUI:

t	(x,y)	z
0	$(0,0)$	0
1	$(1,0)$	1
2	$(2,0)$	4
3	$(3,0)$	9

$z = F(x,y) = F(t,0) = t^2 + 0^2 = t^2$

$x = t$
$y = 0$
$z = t^2$

UM PASSO EXTRA:

PODEMOS ESCREVER $x(t), y(t), z(x,y)$ ("NOTAÇÃO DE FÍSICOS")

$z = z(x,y) = z(x(t), y(t)) = z(t,0) = t^2 + 0^2 = t^2$

QUAL É A CURVA EM $\mathbb{R}^3$ GERADA PELA COMPOSTA DE P E F?

PRA CADA VALOR DE t O PONTO DE $\mathbb{R}^3$ ASSOCIADO A ELE VAI SER:

$(x,y,z) = (x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$

② EXERCÍCIO

(PRA ENTENDER A "NOTAÇÃO DE FÍSICOS"):

DIGAMOS QUE $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) = (2t, 2t)$.

② ENCONTRE OS PONTOS (x,y,z) ASSOCIADOS A ESTES VALORES DE t: $0, 1, 2, -1, -2$.

t	(x,y)	z
2	$(4,4)$	$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
1	$(2,2)$	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
0	$(0,0)$	$0 = 0$
-1	$(-2,-2)$	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
-2	$(-4,-4)$	$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

COMO É QUE A GENTE "ENTENDE" UMA SUPERFÍCIE $z=F(x,y)$ EM TORNO DE ALGUM PONTO (x,y) DADO? OU, EM TORNO DO PONTO $(x,y,z(x,y))$?

PRA DEIXAR MAIS CONCRETO, EM TORNO DO PONTO $(x,y) = (3,4)$?...

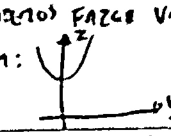
IDÉIA: VAMOS FAZER CORTES USANDO OS PLANOS $x=3$ E $y=4$...

O BORTOLOSSI FAZ DESENHOS DESSE CORTES USANDO MUITOS PONTOS...

NO EXEMPLO $F(x,y) = x^2+y^2$;

NO CORTE NO PLANO $x=3$ TEMOS: $z = F(x,y) = F(3,y) = 3^2 + y^2$

E PODEMOS FAZER UM GRÁFICO ASSIM:

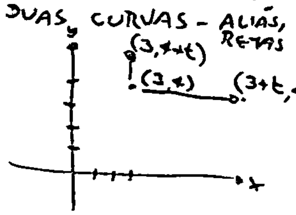


$\boxed{\text{C3 — 30/AGO/2019}}$

Na aula passada nós vimos alguns truques pra visualizar superfícies... Hoje vamos ver alguns outros — e plano tangente!

...E dá pra fazer a mesma coisa no plano $y=4$, e obter um outro gráfico.

Idéia nova: vamos considerar duas curvas — aliás, retas parametrizadas...



Uma das retas parametrizadas é $(x,y)=(3+t,4)$ e a outra vai ser: $(x,y)=(3,4+t)$.

Repara que as duas passam pelo ponto $(3,4)$ quando $t=0$.

O que acontece quando a gente "sobe" essas retas pra superfície?

Vamos obter duas trajetórias que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$, e vamos poder derivá-las!

Trajetória 1:

$(x,y)=(3+t,4)$

$z=x^2+y^2$

$(x,y,z)=(\ \ ,\ \ ,\ \ )$ — expressões em t

$H(t)=(x,y,z)$

③ Exercício:

a) Expresse $H(t)=(x,y,z)$ como três funções de t

b) Calcule $H'(t)$.

c) Calcule $H'(0)$.

d) Como você desenharia (em 3D!) $H(0)+H'(0)$?

④ Faça a mesma coisa com a trajetória 2: $(x,y)=(3,4+t)$, $z=x^2+y^2$, $V(t)=(x,y,z)$. Calcule $V'(t)$, $V(0)$, $V'(0)$.

Obs: $\{H(0)+\alpha H'(0)\ |\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ e $\{V(0)+\beta V'(0)\ |\ \beta\in\mathbb{R}\}$ são duas retas tangentes à superfície $z=F(x,y)$ no ponto $(3,4,F(3,4))$!

O plano que contém essas duas retas é o plano tangente à superfície $z=F(x,y)$ no ponto $(3,4,F(3,4))$!

Pra entender isso direito — com contas — a gente vai precisar fazer uma revisão de planos, e a gente vai precisar entender o que esse método dos cortes faz quando a função $F(x,y)$ é um plano.

⑤ Exercício: Seja $F(x,y)=5+6x+7y$.

a) Digamos que $(x,y)=(3+t,4)$ e $H(t)=(x,y,z)$. Expresse $H(t)$ em função de t, calcule $H'(t)$, $H(0)$ e $H'(0)$.

b) Digamos que $(x,y)=(3,4+t)$ e $V(t)=(x,y,z)$. Expresse $V(t)$ em função de t, calcule $V'(t)$, $V(0)$ e $V'(0)$.

Como a gente interpreta geometricamente o 5, o 6 e o 7 de uma equação de plano como $z=F(x,y)=5+6x+7y$?

Dica: calcule os pontos (x,y,z) correspondentes a: $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(1,0)$, $(x,y)=(0,1)$.

⑥ (Exercício: dica o z correspondente a $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(1,0)$, $(x,y)=(0,1)$.)

⑦ Um outro modo de entender a função $F(x,y)=5+6x+7y$ é por cortes. Faça gráficos

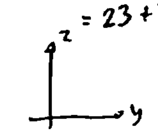
a) da interseção dessa superfície com o plano $x=3$,

b) idem, com o plano $y=4$.

Uma das coisas que nós vamos ver na aula que vem é como visualizar o plano tangente, e as principais propriedades dele...

Obs: Na linguagem dos exercícios que estamos fazendo hoje, o plano tangente passa pelo ponto $H(0)=V(0)$ e contém os vetores $H'(0)$ e $V'(0)$.

⑦a) $z=5+6\cdot 3+7\cdot y$
$=5+18+7y$
$=23+7y$



C3 5/set/2019

Hoje: algumas atividades pra visualizar superfícies da forma $z=F(x,y)$ como as das figuras do Cap.3 do Bortolossi — mas em versão low-tech com 3D de verdade (e papel e arame)

A gente vai trabalhar sobre essas funções aqui:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$
2) $y=\sqrt{5^2-x^2}$
3) $y=\begin{cases}\sqrt{5^2-x^2} & \text{quando } |x|\leq 5\\ 0 & \text{quando } |x|>5\end{cases}$

em 2D

4) $z=F_1(x,y)=x^2+y^2$
5) $z=F_2(x,y)=5^2-x^2-y^2$
6) $z=F_3(x,y)=\sqrt{5^2-x^2-y^2}$
7) $z=F_4(x,y)=\begin{cases}\sqrt{5^2-x^2-y^2} & \text{quando } 5^2-x^2-y^2\geq 0\\ 0 & \text{quando } 5^2-x^2-y^2<0\end{cases}$

em 3D

Dicas:

1. Qual é o domínio de cada uma dessas funções? (Bortolossi, p.79)
2. Represente os gráficos dos itens 1, 2, 3
3. Desenhe algumas curvas de nível para cada uma delas. Dicas: Bortolossi págs 84-97 e as figuras das págs 114 e 115.
4. Descubra a interseção da superfície do item 7 com os planos:
   a) $z=1$
   b) $z=4$
   c) $z=5$
   d) $z=0$
5. Faça — no papel e em arame — as interseções da superfície do item 7 com os planos $x=1$, $x=4$, $x=5$, $x=0$, $x=-1$, $x=-4$, $x=-5$, $y=1$, $y=4$, $y=5$, $y=0$, $y=-1$, $y=-4$, $y=-5$.

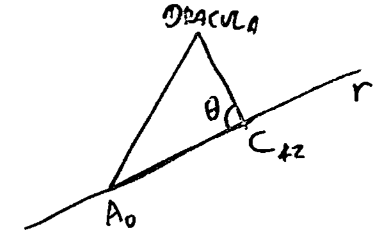
Obs: os exercícios acima são pra ajudar a gente a visualizar retas tangentes às curvas do exercício 5. Com essas retas tangentes a gente vai começar a ter ferramentas pra visualizar e calcular planos tangentes a superfícies!

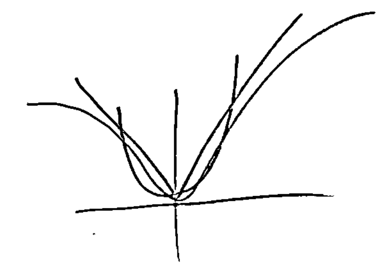
6. Quando você tiver um modelo em arame da superfície do item 7 a gente vai começar a tentar descobrir os planos tangentes à superfície nos seguintes pontos:
   $(0,0,F_4(0,0))$,
   $(1,0,F_4(1,0))$,
   $(0,1,F_4(0,1))$,
   $(1,1,F_4(1,1))$,
   $(4,0,F_4(4,0))$.

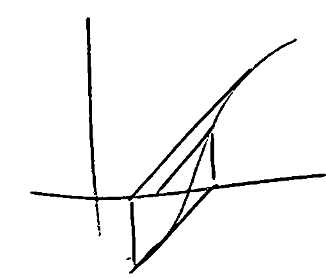
Mais precisamente: Seja $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=F_4(x,y)\}$. Para cada ponto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ dado, visualize:

- o ponto $(x_0,y_0,F_4(x_0,y_0))$
- a intersesão de S com o plano $x=x_0$
- a reta tangente à curva acima em $x=x_0$
- a intersesão de S com o plano $y=y_0$
- a reta tangente à curva acima em $y=y_0$
- o plano em $\mathbb{R}^3$ que contém as duas retas acima

Importante: Dê nomes para os seus objetos!!!







6/SET/2019

Hoje:
As funções da aula passada
e mais algumas...

$$F_4(x,y)=\begin{cases}\sqrt{5^2-x^2-y^2} & \text{quando } 5^2-x^2-y^2\geq 0\\ 0 & \text{quando } 5^2-x^2-y^2<0\end{cases}$$

$F_5(x,y)=(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} y)$

$F_6(x,y)=(\operatorname{sen} x)+(\operatorname{sen} y)$

A gente vai começar tentando visualizar F_5 e F_6 usando cortes em $x=$ constante e $y=$ constante e papel e arame.
Aí a gente vai discutir planos tangentes, máximos e mínimos locais, e pontos de sela.

Uma dica pra F_5 e pra F_6:
Os pontos fáceis de calcular são os com

$$x,y\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}=\frac{\pi}{2}\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}=\{\ldots,-2\tfrac{\pi}{2},-1\tfrac{\pi}{2},0\tfrac{\pi}{2},1\tfrac{\pi}{2},2\tfrac{\pi}{2},\ldots\}.$$

(1) Faça um diagrama de numerozinhos para F_5 que mostre os valores da F_5 para $x,y\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Lembrem que esse exercício do F_4, F_5 e F_6 é uma preparação pra gente entender retas tangentes, derivadas parciais e plano tangente...
Sejam: $F_7(x,y)=2+3(x-4)+5(y-6)$
e $F_8(x,y)=a+b(x-x_0)+c(y-y_0)$.

(2) Qual é o comportamento de F_7 em $(4,6)$?
(3) Qual é o comportamento de F_8 em (x_0,y_0)?
(4) Desenhe os cortes em $x=4$ e $y=6$ e em $x=x_0$ e $y=y_0$ e descubra as derivadas desses gráficos.

Dica:
Veja as figuras do Bortolossi nas páginas 243, 293 e 295!

@calculo320192

Importante:
Seja $(x_0,y_0)=(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$.

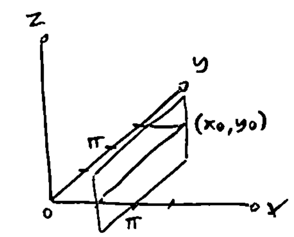
(5) Desenhe o corte de $z=F_5(x,y)$ em $x=x_0$ e em $y=y_0$.
(6) Descubra as derivadas desses gráficos em x_0 e em y_0.

...Você acabou de descobrir as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x}F_5(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial}{\partial y}F_5(x_0,y_0)$!

(7)(8) Faça a mesma coisa no ponto $(\pi,2\pi)$, e calcule $\frac{\partial}{\partial x}F_5(\pi,2\pi)$, $\frac{\partial}{\partial y}F_5(\pi,2\pi)$, $\frac{\partial}{\partial x}F_6(\pi,2\pi)$, $\frac{\partial}{\partial y}F_6(\pi,2\pi)$.

(9) Calcule $\frac{\partial}{\partial x}F_5(\frac{2}{3},\frac{4}{5})$ e $\frac{\partial}{\partial y}F_5(\frac{2}{3},\frac{4}{5})$.

(10) Calcule $\frac{\partial}{\partial x}F_5(x,y)$ e $\frac{\partial}{\partial y}F_5(x,y)$.



C3 12/set/2019

Hoje: derivadas parciais e várias interpretações delas; vetor gradiente; alguns problemas do mini-teste (que vai ser 19/set).

Vamos começar reusando esta função:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sqrt{5^2-x^2-y^2} & \text{quando } 5^2-x^2-y^2\geq 0\\ 0 & \text{quando } 5^2-x^2-y^2<0.\end{cases}$$

1) Exercício:
Seja $(x_0,y_0)=(3,4)$.

a) Desenhe o gráfico do corte da superfície $z=F(x,y)$ em $x=x_0$.

b) Idem mas em $y=y_0$.

c) Os dois gráficos acima são em $\mathbb{R}^2$. Faça um desenho em $\mathbb{R}^3$ que inclua ambos.

Dica: baseie-se nos desenhos das páginas 293 e 295 do Bortolossi

2) Faça a mesma coisa, mas para $(x_0,y_0)=(2,4)$:

a) Faça o corte em $x=x_0$,

b) " " " " $y=y_0$,

c) Descubra a derivada do gráfico do item 2a em $y=y_0$,

d) Descubra a derivada do gráfico do item 2b em $x=x_0$.

e) Descubra um vetor da forma $\overline{(1,0,\_)}$ tangente à superfície $z=F(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0,F(x_0,y_0))$.

f) Idem mas obtenha um vetor da forma $\overline{(0,1,\_)}$.

g) Leia a seção sobre derivadas parciais do Bortolossi e descubra a relação entre os vetores que você obteve nos itens 2e e 2f com $\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial}{\partial y}F(x_0,y_0)$.

h) O que acontece se você calcular $\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial}{\partial y}F(x_0,y_0)$ no ponto do exercício 1, $(x_0,y_0)=(3,4)$? Pense graficamente.

3) Seja $G(x,y)=(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$.
Os pontos nos quais a G é fácil de calcular são os pontos da forma $x,y\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

$$=\frac{\pi}{2}\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$
$$=\{\ldots,-2\tfrac{\pi}{2},-1\tfrac{\pi}{2},0\tfrac{\pi}{2},1\tfrac{\pi}{2},2\tfrac{\pi}{2},\ldots\}.$$

a) Relembre como calcular $G(x,y)$ nestes pontos e além disso descubra o valor do vetor gradiente $\nabla G(x,y)$ nestes pontos.

O Bortolossi explica vetor gradiente bem tarde no livro - págs 298 até 304, com uma figura importante na p. 307 - mas a gente vai aprender o básico sobre gradiente agora.

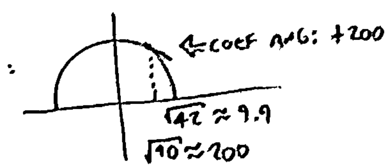
b) Faça um diagrama de numerozinhos pra função G com uma coisa extra: pra cada ponto (x,y) com $x,y\in k\mathbb{Z}$ desenhe sobre o ponto (x,y) o vetor $\nabla G(x,y)$.

$$\nabla G(x,y)=\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x,y),\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right)}$$

Dica:
Façam um mutirão pra resolver isto aqui - vamos pôr os resultados no quadro!

Façam os itens 2a, 2b, 2c, 2d usando tanto os resultados exatos quanto aproximações numéricas!

Exemplo:



$$\overline{(1,0,\lambda)}=\,?$$

Aviso:
Amanhã a gente já começa outro assunto: conjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$!

C3 13/SET/2019

HOJE:
ÚLTIMA AULA DA INTRODUÇÃO A FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$!

FAÇAM OS EXERCÍCIOS DA LISTA – OS "EXERCÍCIOS SOBRE OUTROS CORTES", E DAQUI A POUCO EU PASSO PRA VOCÊS ALGUMAS COISAS SOBRE VETOR GRADIENTE!

EXERCÍCIOS QUE AINDA NÃO ESTÃO NA LISTA:

3) REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $(2,1)+\overrightarrow{(0,1)}$

b) TODAS AS EXPRESSÕES ABAIXO NUM GRÁFICO SÓ:

$(x,y)+\overrightarrow{(-y,x)}$

PARA $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ E $y\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

UMA DICA PRA LISTA: LEVEM MUITO A SÉRIO A DICA QUE EU DEI NO ITEM 2c – USEM APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS.

4) SEJA $G(x,y)=x^2+y^2$.

UM DOS MODOS DE CALCULAR DERIVADAS PARCIAIS É "FINGIR QUE A OUTRA VARIÁVEL É CONSTANTE"... POR EXEMPLO, PRA CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)$ A GENTE FINGE QUE O y É CONSTANTE E CALCULA $\frac{d}{dx}G(x,y)$.

a) CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)$.

b) CALCULE $\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)$.

c) CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}G(3,4)$.

d) DEF: $\nabla G(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x,y),\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right)$.

CALCULE $\nabla G(3,4)$.

e) REPRESENTE GRAFICAMENTE $(1,1)+\nabla G(1,1)$.

f) REPRESENTE NUM GRÁFICO SÓ TODAS AS EXPRESSÕES DESTA FORMA:

$(x,y)+\nabla G(x,y)$

PARA $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ E $y\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

C3 19/SET/2019

HOJE: ÚLTIMOS EXERCÍCIOS DE GRADIENTE E PLANO TANGENTE; DÚVIDAS; MINI-TESTE.

NA ÚLTIMA AULA VIMOS COMO REPRESENTAR O GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO EM VÁRIOS PONTOS DE UMA VEZ... HOJE VAMOS FAZER MAIS EXERCÍCIOS DISTO.

(1) SEJA $F(x,y) = x$. REPRESENTE GRAFICAMENTE $(x,y)+\nabla F(x,y)$ EM 4 PONTOS À SUA ESCOLHA.

(2) IDEM MAS PARA $F(x,y)=y$.

(3) IDEM PARA $F(x,y)=2x+y$.

(4) SEJA $F(x,y)=x^2+y^2$. IDEM, MAS PARA $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

(5) SEJA $F(x,y) = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$. IDEM MAS PARA $x,y \in \{-2\frac{\pi}{2}, -1\frac{\pi}{2}, 0\frac{\pi}{2}, 1\frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{2}\}$.

(6) FAÇA COMO NA (5), MAS USANDO $F(x,y)=\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

(7) IDEM PARA $F(x,y)=4+2x+y$. USE $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

(8) ENCONTRE ALGUMAS CURVAS DE NÍVEL PARA A F DO ITEM (7) E VERIFIQUE QUE "AS CURVAS DE NÍVEL SÃO SEMPRE ORTOGONAIS AOS VETORES TANGENTES" (ONDE?) (*)

(9) TRACE ALGUMAS CURVAS DE NÍVEL PARA A FUNÇÃO DO ITEM (4) E VERIFIQUE QUE A IDÉIA (*) ACIMA TAMBÉM VALE PRA ELA.

(10) SEJA $z=G(x,y)$ O PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE $z=F(x,y)=x^2+y^2$ (DO ITEM (4)) NO PONTO $(1,2)$, OU SEJA, EM $(1,2,F(1,2))$. DESCUBRA SEM FAZER CONTAS QUAL É O GRADIENTE $\nabla G(x,y)$ (DICA: ELE É CONSTANTE!) E DESCUBRA, TAMBÉM SEM FAZER CONTAS, QUAIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA SUPERFÍCIE $z=G(x,y)$.

(11) DÊ A EQUAÇÃO DO PLANO TANGENTE $G(x,y)$ QUE VOCÊ OBTEVE NO ITEM (10). DICA: SE VOCÊ USAR UM "PONTO BASE" AS CONTAS FICAM BEM MAIS SIMPLES, ENTÃO ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA: $G(1+\Delta x, 2+\Delta y)$.

MINI-TESTE:

SEJAM:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2-x^2-y^2} & \text{QUANDO } 5^2-x^2-y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{QUANDO } 5^2-x^2-y^2 < 0. \end{cases}$$

$(x_0,y_0)=(2,4)$,

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=F(x,y),\ y=y_0\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE O CONJUNTO E E MOSTRE COMO USÁ-LO PARA CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ NO PONTO (x_0,y_0).

CS 20/SET/2019

HOJE: INTRODUÇÃO A ABERTOS, FECHADOS E CONTINUIDADE!

O BORTOLOSSI TEM UM CAPÍTULO SOBRE ISSO — O CAP. 4.

O QUE A GENTE VAI VER HOJE E NA AULA QUE VEM É PREPARAÇÃO PRA VOCÊS ENTENDEREM O CAPÍTULO 4.

VAMOS PRECISAR DESTAS DEFINIÇÕES (EM $\mathbb{R}^2$):

$$B_\varepsilon(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{d((x,y),P)}_{\text{A DISTÂNCIA ENTRE } (x,y) \text{ E } P} < \varepsilon\}$$

A "BOLA ABERTA DE RAIO ε EM TORNO DE P"

$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),P) \leq \varepsilon\}$$

A "BOLA FECHADA DE RAIO ε EM TORNO DO PONTO P"

EM $\mathbb{R}$ ESSAS BOLAS SÃO INTERVALOS:

$$B_\varepsilon(P) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,P) < \varepsilon\}$$
$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,P) \leq \varepsilon\}$$

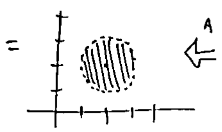
A DEFINIÇÃO DE CONJUNTO ABERTO USA BOLAS ABERTAS. UM CONJUNTO $A \subset \mathbb{R}^n$ É ABERTO SE E SÓ SE:

$$\forall P \in A.\ \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subset A.$$

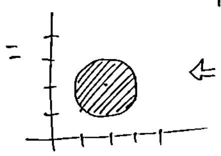
É MEIO DIFÍCIL ENTENDER ISSO, ENTÃO VAMOS FAZER UM MONTE DE EXERCÍCIOS PRA APRENDER A VISUALIZAR ESSAS COISAS.

DE VISUALIZAÇÃO DE CONJUNTOS EM $\mathbb{R}^2$.

DICA:

$B_1((2,2)) =$ 

A FRONTEIRA TRACEJADA INDICA QUE OS PONTOS DA FRONTEIRA NÃO PERTENCEM AO CONJUNTO $B_1((2,2))$

$\overline{B}_1((2,2)) =$ 

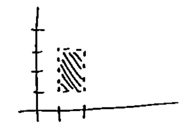
FRONTEIRA NÃO TRACEJADA!

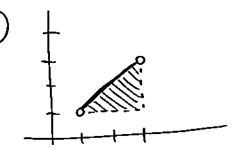
EXERCÍCIOS:

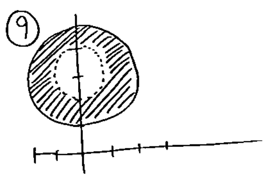
REPRESENTE GRAFICAMENTE:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \text{ e } 1 \leq x < 4\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2 \text{ e } 1 < x\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$

ENCONTRE ALGUMA REPRESENTAÇÃO EM NOTAÇÃO DE CONJUNTOS PARA OS CONJUNTOS ABAIXO:

7. 

8. 

9. 

SEJAM $C_1, C_2, \ldots, C_9$ OS CONJUNTOS DOS PROBLEMAS 1 ATÉ 9.

NOS PRÓXIMOS EXERCÍCIOS VOCÊ VAI TER QUE SER CAPAZ DE VISUALIZAR BOLAS SOBRE CONJUNTOS QUE VOCÊ JÁ DESENHOU SEM DESENHAR ESTAS BOLAS.

DIGA SE CADA UMA DAS AFIRMAÇÕES ABAIXO SÃO VERDADEIRAS OU FALSAS.

10. $B_{0.1}((0,2.5)) \subset C_1$
11. $B_{0.5}((0,2.5)) \subset C_1$
12. $\overline{B}_{0.5}((0,2.5)) \subset C_1$
13. $B_{0.1}((1,3)) \subset C_2$
14. $B_{0.1}((2.5,2.5)) \subset C_2$
15. $B_1((2,2)) \subset C_3$
16. $\overline{B}_1((2,2)) \subset C_3$
17. $B_{0.5}((1,0.5)) \subset C_4$
18. $B_{0.1}((0.5,2)) \subset C_5$
19. $B_{0.001}((1.1,1.01)) \subset C_8$

DEFINIÇÃO:

O INTERIOR DE UM CONJUNTO $A \subset \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Int}(A)$, É DEFINIDO COMO:

$$\mathrm{Int}(A) = \{P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subset A\}.$$

ALÉM DISSO, UM CONJUNTO $A \subset \mathbb{R}^2$ É ABERTO QUANDO $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

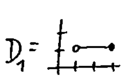
REPRESENTE GRAFICAMENTE:

20. $\mathrm{Int}(C_8)$
21. $\mathrm{Int}(C_4)$
22. $\mathrm{Int}(C_5)$
23. $\mathrm{Int}(B_1((2,2)))$

DEF: O FECHO DE UM CONJUNTO $A \subset \mathbb{R}^2$, DENOTADO POR $\overline{A}$, É DEFINIDO POR:

$$\overline{A} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset\}$$

REPRESENTEM GRAFICAMENTE:

24. $\overline{C_8}$
25. $\overline{D_1}$ ONDE $D_1 =$ 
26. $\mathrm{Int}(D_1)$

6/SET/2019

HOJE: UMA PRIMEIRA APLICAÇÃO PARA ABERTOS E FECHADOS: O TEOREMA DE WEIERSTRASS!

NOVAS DEFINIÇÕES:

UM CONJUNTO A É ABERTO QUANDO $A = \mathrm{Int}(A)$;

UM CONJUNTO A É FECHADO QUANDO $A = \overline{A}$.

ALÉM DISSO UM CONJUNTO A É LIMITADO QUANDO EXISTE ALGUM $R \in \mathbb{R}$ TAL QUE $A \subset B_R((0,0))$;

E UM CONJUNTO A É COMPACTO QUANDO A É FECHADO E LIMITADO.

O TEOREMA DE WEIERSTRASS DIZ QUE:

SE A É COMPACTO E NÃO-VAZIO E SE $f: A \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA ENTÃO f TEM MÁXIMO GLOBAL E MÍNIMO GLOBAL EM A.

OU SEJA:

$\exists a \in A.$
$\forall b \in A.$
$f(b) \leq f(a).$

E

$\exists a \in A.$
$\forall b \in A.$
$f(a) \leq f(b).$

A GENTE VAI VER A DEFINIÇÃO PRECISA DE "$f: A \to \mathbb{R}$" É CONTÍNUA (SE $A \subset \mathbb{R}^2$) DEPOIS.

EXERCÍCIO:

1) PARA CADA UM DOS CONJUNTOS ABAIXO DIGA SE ELE É ABERTO, FECHADO, LIMITADO, COMPACTO. (AQUI VOCÊ VAI PRECISAR ADAPTAR OS CONCEITOS ACIMA PARA $\mathbb{R}$).

a) $A = [2,4]$
b) $A = (2,4)$
c) $A = (2,4]$
d) $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
e) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$
f) $A = \mathbb{R}$
g) $A = \emptyset$
h) $A = (0, +\infty)$
i) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

IMAGEM INVERSA

VÁRIOS EXEMPLOS INTERESSANTES PRO TEOREMA DE WEIERSTRASS VÃO USAR, IMPLICITAMENTE OU EXPLICITAMENTE, O CONCEITO DE IMAGEM INVERSA...

NOTAÇÃO:

SE $f: A \to \mathbb{R}$ E $b \in \mathbb{R}$ ENTÃO
$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$,
- SE $B \subset \mathbb{R}$ ENTÃO
$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$.

EXERCÍCIO:

2) SEJA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $f^{-1}(1)$
b) $f^{-1}(4)$
c) $f^{-1}(\{1,4\})$
d) $f^{-1}([1,4])$
e) $f^{-1}([1,4))$
f) $f^{-1}(\mathbb{R})$
g) $f^{-1}(\emptyset)$

3) SEJA $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $g^{-1}(0)$
b) $g^{-1}(1)$
c) $g^{-1}(2)$
d) $g^{-1}([1,2])$.

4) NESTE EXERCÍCIO - QUE É PARECIDO COM UM PROBLEMA QUE EU DEI NA P2 DO SEMESTRE PASSADO - NÓS VAMOS COMEÇAR A ENTENDER VISUALMENTE PORQUE É QUE O TEOREMA DE WEIERSTRASS É VERDADE.

SEJA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$.

a) SEJA $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + 2y \leq 6\}$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE A, $A \cap F^{-1}(0)$, $A \cap F^{-1}(1)$, $A \cap F^{-1}(2)$.

b) O CONJUNTO A É COMPACTO?

c) O TEOREMA DE WEIERSTRASS PODE SER USADO PRA GARANTIR QUE F TEM UM MÁXIMO GLOBAL EM A?

d) TENTE DESCOBRIR NO DIAGRAMA ONDE DEVE ESTAR O MÁXIMO GLOBAL DE F EM A.

e) SEJA:
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + 2y < 6\}$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE B.

f) B É COMPACTO?

g) O TEOREMA DE WEIERSTRASS PODE SER USADO PRA GARANTIR QUE F TEM MÁXIMO GLOBAL EM B?

h) TENTE DESCOBRIR NO DIAGRAMA ONDE DEVE ESTAR O MÁXIMO GLOBAL DE F EM B.

27/SET/2019

Hoje:
Mais teorema de Weierstrass, e a primeira definição do que é uma função $F: A \to \mathbb{R}$ ser contínua, onde $A \subset \mathbb{R}^2$.

Vamos começar pelos últimos problemas da aula de ontem...

Os itens 4d e 4h pediam pra você encontrar aproximações no olho para máximos globais. Faça eles agora e mostre:

- Um diagrama com o conjunto A e as curvas de nível de F em A
- Uma aproximação numérica para o máximo global em A.
- Idem para o conjunto B.

Lembre que se $F: A \to \mathbb{R}$
então
$F^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$,
$F^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$.

As curvas de nível de F são os conjuntos da forma $F^{-1}(b)$ onde b é um ponto de $\mathbb{R}$.

No item 4d suponha que o domínio de F é o conjunto A — ou seja,
$F: A \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$.

No item 4h suponha que o domínio de F é B, ou seja,
$F: B \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$.

Problemas novos (que não são de ontem):

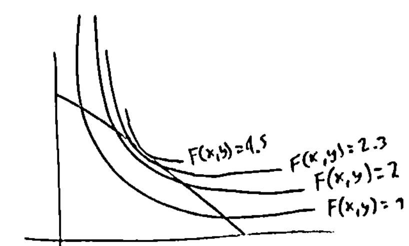
1. Resolva os itens ⓐ até ⓕ do problema 14 do Bortolossi da página 153.

2. Nós vamos aproveitar o 4d de ontem pra começar a discutir, intuitivamente e olhometricamente, algumas idéias cujas contas no caso geral nós só vamos conseguir entender bem mais adiante.

ⓐ Encontre os dois pontos de interseção da curva $xy = 1$ com a reta $x + 2y = 6$.

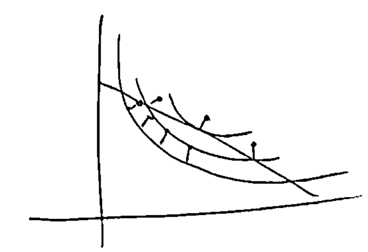
ⓑ Generalize o item ⓐ:
Encontre uma fórmula para os dois pontos de interseção da curva $xy = k$ com a reta $x + 2y = 6$.

ⓒ Para que valor de k os dois pontos de interseção colapsam num só?



$x + 2\frac{k}{x} = 6$
$x^2 + 2k = 6x$
$x^2 - 6x + 2k = 0$
$b^2 - 4ac = 0$
$36 - 4 \cdot 2k = 0$
$36 - 8k = 0$

Gradiente de F:



$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

C3 4/11/2019

Note

$C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } (x,y) \neq (0,0)\}$

Rappresenta graficamente D.

è aperto?

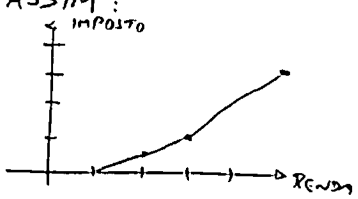
è chiuso?

A è limitato $\Leftrightarrow \exists R>0 \; A \subset B_R((0,0))$

3 10/out/2019

HOJE: MAIS ALGUMAS COISAS SOBRE CONTINUIDADE, SEQUÊNCIAS CONVERGENTES, COMO ESCREVER SEQUÊNCIAS, ALGUMAS FUNÇÕES ESTRANHAS...

LEMBREM QUE ALGUMAS FUNÇÕES "DO MUNDO REAL" SÃO DEFINIDAS POR CASOS... POR EXEMPLO IMPOSTOS, QUE SÃO DEFINIDOS POR FAIXAS, E TÊM GRÁFICOS ASSIM:



ISSO VAI SER UMA DESCULPA PRA GENTE ENTENDER MAIS SOBRE CONTINUIDADE (E TEOREMA DE WEIERSTRASS).

LEMBREM QUE $f(x)=\frac{x}{x}$ NÃO PODE SER CALCULADA EM $x=0$!

FUNÇÕES ESTRANHAS QUE VAMOS USAR NOS EXEMPLOS DE HOJE:

$$F_1(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

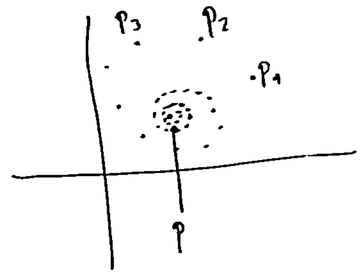
$$F_2(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$F_3(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

COMECEM TENTANDO VISUALIZAR AS SUPERFÍCIES QUE ELAS GERAM. DESSA VEZ EU NÃO VOU DIZER QUAL É O CAMINHO MAIS FÁCIL - SE É COMEÇAR DESCOBRINDO AS CURVAS DE NÍVEL, OU OS CORTES...

DICA: OS CORTES EM $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax\}$ PODEM SER ÚTEIS!

O BORTOLOSSI USA MUITO SEQUÊNCIAS CONVERGENTES NO CAP. 4...



NESSE CASO TEMOS $p_i \to p$, OU MAIS FORMALMENTE,

$$\lim_{i\to\infty} p_i = p.$$

SE $p_i=(x_i,y_i)$ E $p=(a,b)$ ENTÃO DÁ PRA REESCREVER ESSE LIMITE COMO:

$$\lim_{i\to\infty} (x_i,y_i) = (a,b)$$

E POR DEFINIÇÃO ISSO É:

$\lim_{i\to\infty} x_i = a$ E $\lim_{i\to\infty} y_i = b$

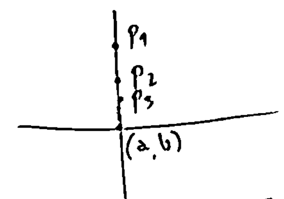
DEF: UMA SEQUÊNCIA $(p_1,p_2,p_3,\ldots)$ DE PONTOS EM $\mathbb{R}^2$ CONVERGE PARA (a,b) SE: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ⇐ TRUQUE PRA PROIBIR "LIMITES INFINITOS"

E $\lim_{i\to\infty} p_i = (a,b)$.

NOTAÇÃO MAIS COMPACTA:

$$\underset{\mathbb{R}^2\ \mathbb{R}^2}{(p_1,p_2,p_3,\ldots)} \to \underbrace{(a,b)}_{\mathbb{R}^2}.$$

COMO É QUE A GENTE ESCREVE FORMALMENTE ESSA SEQUÊNCIA AQUI?



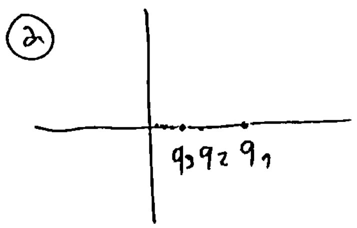
UM JEITO: $p_1=(0,1)$, $p_2=(0,\frac{1}{2})$, $p_3=(0,\frac{1}{3}), \ldots$, $p_n=(0,\frac{1}{n})$ ⇐ CASO GERAL

DÁ PRA ESCREVER ESSA SEQUÊNCIA DESSE JEITO:

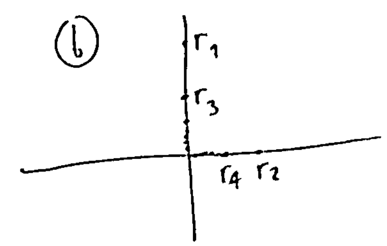
$$(p_1,p_2,\ldots)=\left((0,1),(0,\tfrac{1}{2}),(0,\tfrac{1}{3}),\ldots\right)$$

EXERCÍCIOS: ESCREVA FORMALMENTE ESTAS SEQUÊNCIAS:

ⓐ



ⓑ



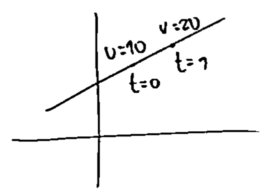
ⓒ A SEQUÊNCIA $(r_1,r_2,r_3,\ldots)$ CONVERGE? PRA QUE PONTO DE $\mathbb{R}^2$

ⓓ A SEQUÊNCIA $(F_2(r_1),F_2(r_2),F_2(r_3),\ldots)$ CONVERGE? PRA QUE PONTO DE $\mathbb{R}$?

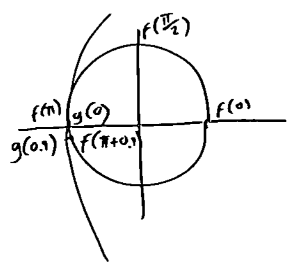
CS ?/OUT/2019

HOJE:
DÚVIDAS OU
MAIS UMA IDÉIA
SOBRE CONTINUIDADE,
E DERIVADAS PARCIAIS
DE ORDEM MAIS
ALTA...

P1: SEXTA
18/OUT/2019!



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$



$f(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t)$

$g(t) = ?$ $\quad t_0 = \pi$

$\boxed{\begin{aligned} g(t_0) &= f(t_0) \\ g'(t_0) &= f'(t_0) \\ g''(t_0) &= f''(t_0) \end{aligned}}$

$g(\underbrace{t_0}_{\pi}+\Delta t) = \underbrace{f(t_0)}_{(-1,0)} + \Delta t\, \underbrace{f'(t_0)}_{(0,-1)} + (\Delta t)^2\, \underbrace{\frac{f''(t_0)}{2}}_{(\frac{1}{2},0)}$

$g(t \quad) = f(t_0) + (t-t_0) f'(t) + (t-t_0)^2 \frac{f''(t_0)}{2}$

$f(t) = (t, \sqrt{t})$

$g(t_0) = f(t_0)$

$g'(t_0) = f'(t_0)$

$g''(t_0) = f''(t_0)$

$t_0 = 4$

$f'(t) = (1, \frac{1}{2} t^{-1/2})$

$f''(t) = (0, \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) t^{-3/2})$

$= (0, -\frac{1}{4} t^{-3/2})$

$4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

$4^{-3/2} = \frac{1}{8}$

$f(t_0) = (4, 2)$

$f'(t_0) = (1, \frac{1}{4})$

$f''(t_0) = (0, -\frac{1}{32})$

$g(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + \Delta t\, f'(t_0) + (\Delta t)^2 \frac{f''(t_0)}{2}$

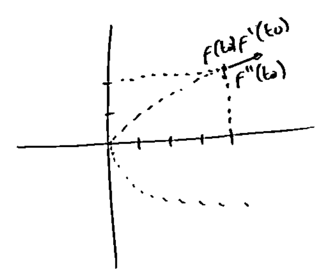
$= (4,2) + \Delta t (1, \frac{1}{4}) + (\Delta t)^2 (0, -\frac{1}{64})$

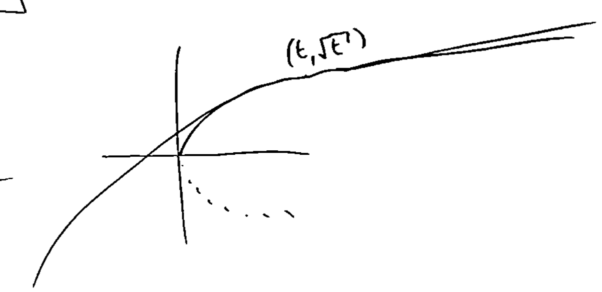
$= (4 + \Delta t, 2 + \frac{1}{4}\Delta t - \frac{1}{64}(\Delta t)^2)$

$\int (\mathrm{sen}\, x)^4 (\cos x)^6\, dx$

1. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
REPRESENTE GRAFICAMENTE A E $\bar{A}$.

2. SEJA $A = (2,4)$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE $\bar{A}$.





C3 11/06/2019

Hoje: Revisão!

Eu preparei alguns problemas pra ajudar vocês a tirarem dúvidas... mas não digitei eles.

Vou pô-los no quadro.

Obs: eles não são problemas parecidos com os da prova!!!

① Vamos reusar uma função lá do início:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{se } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

ⓐ Represente graficamente as curvas de nível abaixo:

$F(x,y) = F(4,0)$
$F(x,y) = F(3,0)$
$F(x,y) = F(2,0)$
$F(x,y) = F(1,0)$

ⓑ Descubra o vetor gradiente de F nos pontos $(4,0)$, $(3,0)$, $(2,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$.

ⓒ Use esses vetores pra desenhar sobre cada uma das suas curvas de nível do item ⓐ oito vetores gradientes sem fazer conta nenhuma.

② O Portolossi leva várias páginas pra definir abertos, fechados, interior, fecho, fronteira, compacto, etc — ele faz isso das páginas 142 até 146.

As nossas definições são:

$B_\varepsilon(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) < \varepsilon\}$,

$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) \leq \varepsilon\}$,

$\mathrm{Int}(A) = \{P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subset A\}$

$\overline{A} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset\}$

$(A \text{ é aberto}) = (A = \mathrm{Int}\, A)$

$(A \text{ é fechado}) = (A = \overline{A})$

$(A \text{ é limitado}) = (\exists R > 0.\ A \subset B_R((0,0)))$

ⓐ Seja $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Mostre que $C \neq \overline{C}$.

③ Sejam

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$,

$B = \{(x,2) \mid x \in [0,4]\}$,

$C = A \cup B$.

Represente graficamente C.

④ Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Descreva uma função contínua $F: A \to \mathbb{R}$ que tenha mínimo global em A mas não tenha máximo global em A.

⑤ Seja $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e seja $g(t)$ uma aproximasão de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$; ou seja, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P + t\vec{u} + t^2\vec{v} \qquad (\star)$$

e obedece

$g(t_0) = f(t_0)$,
$g'(t_0) = f'(t_0)$,
$g''(t_0) = f''(t_0)$.

ⓐ Relembre o truque do ponto base:

Se $t = t_0 + \Delta t$,
$\Delta t = t - t_0$,

$$g(t_0 + \Delta t) = \_ + \Delta t \_ + (\Delta t)^2 \_\_ \qquad (\star\star)$$

A expressão pode ser convertida para $(\star)$ e é fácil descobrir como preencher os "_"s pra que as condições

$g(t_0) = f(t_0)$,
$g'(t_0) = f'(t_0)$,
$g''(t_0) = f''(t_0)$

sejam obedecidas.

ⓑ Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximasão de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

ⓒ Verifique usando uma calculadora que $g(\pi + 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi + 0.1)$; idem para $g(\pi - 0.1)$ e $f(\pi - 0.1)$.

ⓓ Seja $h(t) = (\cos(\pi t^2), \operatorname{sen}(\pi t^2))$. Encontre uma aproximasão de 2ª ordem para $h(t)$ em $t_0 = 1$.

C3 31/out/2019

Hoje:

- Discussão sobre um dos problemas da prova
- Introdução a derivadas parciais de ordem mais alta e regra da cadeia em duas dimensões

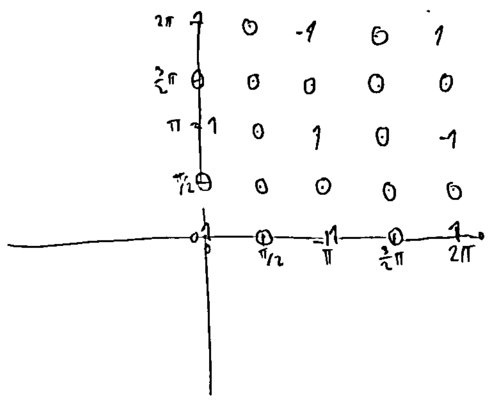
Um problema da prova:

Seja $G(x,y) = (\cos x)(\cos y)$.
Represente graficamente as curvas de nível de $z = G(x,y)$ para $z=0$, $z=1$, $z=-1$, $z=1/2$.

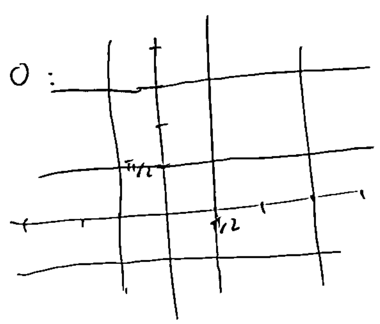
Diagrama de numerozinhos...
Preparação:

x	$\cos x$
0	1
$\pi/2$	0
π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	1

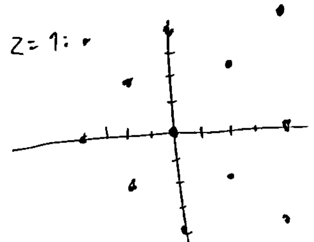
y	$\cos y$
0	1
$\pi/2$	0
π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	1



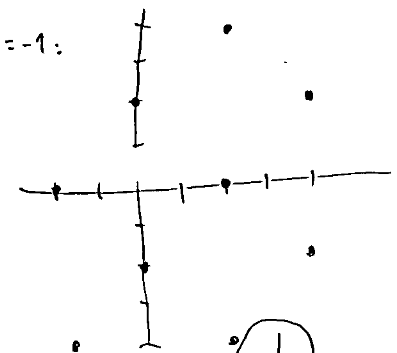
$z = 0$:



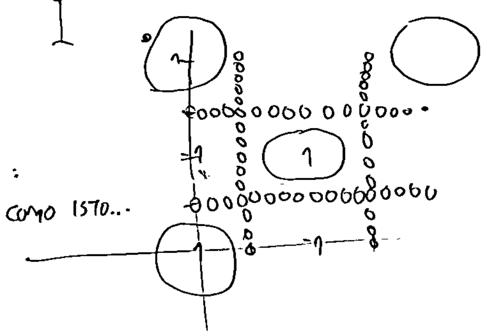
$z = 1$:



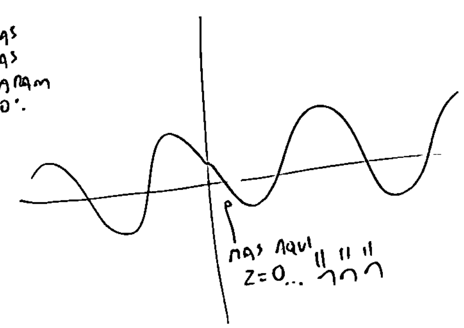
$z = -1$:



$z = 1/2$:
Algo como isto...



Várias pessoas chutaram isto:



Nosso objetivo nas próximas aulas vai ser entender direito a regra da cadeia em 2 ou mais dimensões — e os prerequisitos pra entender isso, como derivadas parciais de ordem mais alta, e a abordagem do livro e os exercícios...

Relembrando:
Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Isso tem um monte de consequências...

$$\frac{d}{dx}\Big(f(g(h(x)))\Big) = f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)$$

Isto fica mais claro se a gente sabe usar ponto base... Se $y = h(x)$, $z = g(y)$, $w = f(z)$ então:

$$f'(\underbrace{g(\underbrace{h(x)}_{y})}_{z})\,g'(\underbrace{h(x)}_{y})\,h'(x) =$$

$$f'(z)\,g'(y)\,h'(x) \ldots$$

Físicos às vezes usam:

$y = h(x)$
$h'(x) = \frac{dy}{dx}$
$z = g(y)$
$g'(y) = \frac{dz}{dy}$
$w = f(z)$
$f'(z) = \frac{dw}{dz}$, e aí $\frac{d}{dx}w = \frac{d}{dx}f(g(h(x)))$

$$\underbrace{f'(g(h(x)))}_{\frac{dw}{dz}}\,\underbrace{g'(h(x))}_{\frac{dz}{dy}}\,\underbrace{h'(x)}_{\frac{dy}{dx}} =,$$

ou seja, na notação de físicos,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

[illegible]/07/2019

Hoje:

- Discussão sobre um dos problemas da prova
- Introdução a derivadas parciais de ordem mais alta e regra da cadeia em duas dimensões

---

Os primeiros exercícios de hoje vão ser sobre como derivar coisas complicadas passo a passo sem se enrolar, usando só funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$... depois vamos usar derivadas parciais.

(1) Exemplo/exercício:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left(x^2 e^{3x}\right)\right) =$$

$$\operatorname{sen}'\left(x^2e^{3x}\right)\frac{d}{dx}\left(x^2e^{3x}\right) =$$

$$\cos\left(x^2e^{3x}\right)\left(\left(\frac{d}{dx}x^2\right)e^{3x} + x^2\frac{d}{dx}e^{3x}\right) = \ldots$$

(Termine esta conta!)

(2) Em algumas situações vai ser útil definir funções - o "truque do "seja""...

$$\frac{d}{dx}\, e^{\sqrt{x+3}} =$$

$$\frac{d}{dx}\exp\left(\sqrt{x+3}\right) =$$

$$\exp'\left(\sqrt{x+3}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x+3} =$$

(Terminem esta conta!)

Seja $\exp(a) = e^a$

então $\exp'(a) = e^a$.

Obs: $\exp'(\operatorname{sen} x) =$

$\exp(\operatorname{sen} x)$...

$\exp'(\operatorname{sen} x) \neq \frac{d}{dx}(\exp(\operatorname{sen} x))$!

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dy} f(y) = f'(y)$$

(3) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(\cos(2x+3)) = ?$

(4) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(g(x)) = ?$

(5) $\frac{d}{dx} f(g(x)h(x)) = ?$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(\ln x) = \operatorname{sen}'(\ln x)\ln' x$$
$$= \cos(\ln x)\frac{1}{x}$$

... Agora leiam as seções 7.3 e 7.4 do Bortolossi, e as três primeiras páginas da 7.5

(6) O livro usa a função de Cobb-Douglas

$$F(x,y) = 4x^{3/4}y^{1/4}$$

em vários exemplos.

Calcule $F_x(x,y)$

e $F_y(x,y)$,

e leia os comentários do Bortolossi sobre as notações F_x e F_y nas páginas 171 e 172.

Obs: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$, $\quad F_y = \frac{\partial}{\partial y}F$.

A seção 7.5 do Bortolossi discute a regra da cadeia em várias dimensões num caso beeeem geral...

Um caso particular é este aqui:

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))g'(t)$$
$$+ F_y(g(t),h(t))h'(t)$$

$$= F_x g'(t) + F_y h'(t)$$

$$= \overrightarrow{(F_x, F_y)} \cdot \overrightarrow{(g'(t), h'(t))}$$

$$\nabla F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$$

Matriz Jacobiana (no caso 2×1 ou 1×2, não lembro)

CS [illegible]2/nov/2019

Hoje: mais algumas coisas sobre derivadas parciais e derivadas direcionais...

Digamos que
$z = F(g(t), h(t))$.

Introduzindo variáveis intermediárias,
$x = g(t)$,
$y = h(t)$,
$z = F(x,y)$.

Novidade: $p = (x,y)$,
$p(t) = (g(t), h(t))$,

$z = F(p(t))$...

Aí $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dp}\frac{dp}{dt}$
$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$
$= (F_x, F_y) \cdot (g'(t), h'(t))$.

Repare que estamos misturando várias notações, umas mais abreviadas, outras menos...

No final da aula eu vou passar um trabalho pra casa no qual vocês vão ter que assistir uma vídeo-aula e entender as notações dela.

Exercícios:

Seja $F(x,y) = 4x^{3/4}y^{1/4}$
(a "função Cobb-Douglas")

(1) Descubra as curvas de nível dessa função.
Dica: encontrem funções da forma $y = m(x)$ para as quais $F(x, m(x))$ seja constante.

(2) Calcule $\frac{d}{dt} F(t, m(t))$.
Dica: isto parece com alguns exercícios da aula passada, p.ex. $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} f(g(t))$ mas aqui vocês vão ter que usar a regra da cadeia em duas dimensões (primeira coluna)

(3) Entenda a definição de derivada direcional do livro (p. 296, cap. 8) e use essa definição e a notação de gradiente para conseguir expressões curtas para

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(2+3t, 4+5t) - F(2,4)}{t}$$

onde F é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ qualquer.

(4) Idem, mas agora $F(x,y)$ é a função de Cobb-Douglas.

Dica: $$\lim_{t\to 0} \frac{f(2+3t) - f(2)}{t} = f'(2)\cdot 3$$

(5) Exercício:
Leiam o início do cap. 7 — as 3 ou 4 primeiras páginas. O que acontece quando a função "resto" ("R") é constante igual a zero?
Tente montar exemplos.

(6) Nós vimos, num monte de notações diferentes, que

$$\boxed{\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) = F_x g'(t) + F_y (h'(t))} \quad (\star)$$

O que acontece na fórmula $(\star)$ quando $g(t) = t$?
Obs: uma notação pra isto é $(\star)[g(t) := t]$.

(7) Digamos que
$F(x,y) = x^2 + y^2$,
$g(t) = \cos t$,
$h(t) = \operatorname{sen} t$,
$s(t) = F(g(t), h(t))$.

Calcule:
(a) $s(t)$
(b) $s'(t)$
(c) $F_x g'(t) + F_y h'(t)$

C3 7/NOV/2019

HOJE: DISCUSSÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE P1, O SLOGAN DO CURSO A PARTIR DE AGORA, QUE É:

CONTAS FORA DO PONTO BASE ZERAM A QUESTÃO

E ALGUMAS COISAS RELACIONADAS...

QUESTÃO 2: SEJA

$f(t) = (\cos t, t + \sin t)$.

ENCONTRE UMA APROXIMAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM PARA $f(t)$ EM $t_0 = \pi$.

MUITA GENTE ESQUECEU ESSE 1

$f'(t) = (-\sin t, 1 + \cos t)$

$f''(t) = (-\cos t, -\sin t)$

QUEREMOS $g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$ QUE OBEDEÇA ISTO:

$g(t_0) = f(t_0) = (\cos\pi, \pi + \sin\pi) = (-1, \pi + 0)$

$g'(t_0) = f'(t_0) = (-\sin\pi, 1 + \cos\pi) = \overrightarrow{(0, 1 + (-1))}$

$g''(t_0) = f''(t_0) = \overrightarrow{(-\cos\pi, -\sin\pi)} = \overrightarrow{(1, 0)}$

TEM VÁRIOS JEITOS DIFERENTES DA GENTE ENCONTRAR $P, \vec{v}, \vec{w}$...

A PÁGINA DA WIKIPEDIA EM INGLÊS TEM BASTANTE COISA SOBRE <u>POLINÔMIOS</u> E <u>FUNÇÕES POLINOMIAIS</u>...

UM POLINÔMIO EM X É UMA SOMA:

$\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, ONDE $N \in \mathbb{N}$ E CADA a_i É UMA CONSTANTE.

UMA FUNÇÃO $h(x)$ É POLINOMIAL (EM X) QUANDO EXISTE UM POLINÔMIO QUE ASSUME OS MESMOS VALORES QUE ELA.

EXEMPLO:

$h(x) = \sqrt{1 - x^2}^{\,2}$

O DOMÍNIO DA h É O INTERVALO $[-1, 1]$, E <u>NESSE INTERVALO</u> ELA COINCIDE COM O POLINÔMIO $1 - x^2$.

OBS IMPORTANTÍSSIMA:

$42(x-99)^{200}$ É UMA FUNÇÃO POLINOMIAL (EM X) MAS NÃO É UM POLINÔMIO EM X...

DA PRA CALCULAR ISTO AQUI

$$\frac{d}{dx}(x+1)^4$$

DE DOIS JEITOS:

$$\frac{d}{dx}(x+1)^4 = \frac{d}{dx}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$

OUTRO JEITO:

$$\frac{d}{dx}(x+1)^4 = 4(x+1)^3 \frac{d}{dx}(x+1) = 4(x+1)^3$$

$$42(x-99)^{200} = ?$$

É MUITO MELHOR CALCULAR ISTO DO SEGUNDO JEITO!!!

ESSE EXEMPLO TEM UM PONTO BASE IMPLÍCITO...

UM CASO EXPLÍCITO:

SE $x_0 = \pi$, $x = x_0 + \Delta x$...

EXPRESSE $g(t)$ NAS FORMAS $g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$ E $g(t) = A + (t-t_0)\vec{\alpha} + (t-t_0)^2\vec{\beta}$

OU SEJA, DIGA QUEM SÃO $P, \vec{v}, \vec{w}, A, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

VOLTANDO À QUESTÃO 2...

DIGAMOS QUE $P = (p_1, p_2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(w_1, v_2)}$...

$$g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$
$$= (p_1, p_2) + t\overrightarrow{(v_1, v_2)} + t^2\overrightarrow{(w_1, w_2)}$$
$$= (\underbrace{p_1 + tv_1 + t^2v_1}_{\text{POLINÔMIO EM } t}, \underbrace{p_2 + tv_2 + t^2v_2}_{\text{POLINÔMIO EM } t})$$

$$g(t) = g(t_0 + \Delta t)$$
$$= A + \vec{\alpha}\Delta t + \vec{\beta}(\Delta t)^2$$
$$= (A_1, A_2) + \overrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)}\Delta t + \overrightarrow{(\beta_1, \beta_2)}(\Delta t)^2$$

SE EU DIGO QUE $g(t_0 + \Delta t) = A + \vec{\alpha}\Delta t + \vec{\beta}(\Delta t)^2$ PARA ALGUM PONTO $A \in \mathbb{R}^2$ E VETORES $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ EM $\mathbb{R}^2$, EU TOU DIZENDO QUE...

VAMOS PEGAR UM EXEMPLO BEM CONCRETO - A QUESTÃO 2 DA PROVA.

SEJA $g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2$.

SEJAM $t_0 = \pi$ E $f(t_0), f'(t_0), f''(t_0)$ OS QUE A GENTE CALCULOU À ESQUERDA.

$\boxed{\text{C3 7/nov/2019}}$

HOJE: DISCUSSÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE P1, O SLOGAN DO CURSO A PARTIR DE AGORA, QUE É:

$\boxed{\text{CONTAS FORA DO PONTO BASE ZERAM A QUESTÃO}}$

E ALGUMAS COISAS RELACIONADAS...

QUESTÃO 2: SEJA

$f(t) = (\cos t, t + \operatorname{sen} t)$.

ENCONTRE UMA APROXIMAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM PARA $f(t)$ EM $t_0 = \pi$.

$f'(t) = (-\operatorname{sen} t, 1 + \cos t)$

MUITA GENTE ESQUECEU ESSE 1

$f''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$

QUEREMOS $g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$ QUE OBEDEÇA ISTO:

$$g(t_0) = f(t_0) = (\cos\pi, \pi + \operatorname{sen}\pi) = (-1, \pi + 0)$$
$$g'(t_0) = f'(t_0) = \overrightarrow{(-\operatorname{sen}\pi, 1 + \cos\pi)} = \overrightarrow{(0, 1 + (-1))}$$
$$g''(t_0) = f''(t_0) = \overrightarrow{(-\cos\pi, -\operatorname{sen}\pi)} = \overrightarrow{(1, 0)}$$

TEM VÁRIOS JEITOS DIFERENTES DA GENTE ENCONTRAR $P, \vec{v}, \vec{w}$...

A PÁGINA DA WIKIPEDIA EM INGLÊS TEM BASTANTE COISA SOBRE POLINÔMIOS E FUNÇÕES POLINOMIAIS...

UM POLINÔMIO EM X É UMA SOMA:

$\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, ONDE $N \in \mathbb{N}$ E CADA a_i É UMA CONSTANTE.

SE $g(t) = A + (t - t_0)\vec{\alpha} + (t - t_0)^2\vec{\beta}$

ENTÃO
$$g'(t) = \vec{\alpha} + \tfrac{d}{dt}(t - t_0)^2\vec{\beta}$$
$$= \vec{\alpha} + 2(t - t_0)\tfrac{d}{dt}(t - t_0)\vec{\beta}$$
$$= \vec{\alpha} + 2(t - t_0)\vec{\beta}$$
$$g'(t) = \vec{\alpha} + 2(t - t_0)\vec{\beta}$$
$$g''(t) = \quad + \quad 2\vec{\beta}$$

ALÉM DISSO:
$$g(t_0) = A$$
$$g'(t_0) = \vec{\alpha}$$
$$g''(t_0) = 2\vec{\beta}$$

SE ALÉM DISTO A FUNÇÃO g OBEDECE ESTAS CONDIÇÕES
$$g(t_0) = (-1, \pi)$$
$$g'(t_0) = \overrightarrow{(0, 0)}$$
$$g''(t_0) = \overrightarrow{(1, 0)}$$

ENTÃO $A = (-1, \pi)$,
$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{(0, 0)}$$
$$2\vec{\beta} = \overrightarrow{(1, 0)},$$
$$\vec{\beta} = \overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)},$$

$$g(t) = (-1, \pi) + (t - \pi)^2\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)}$$
$$= (-1, \pi) + (t^2 - 2\pi t + \pi^2)\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)}$$
$$= (-1, \pi) + t^2\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)} - 2\pi t\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)} + \pi^2\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)}$$
$$= (-1 + \tfrac{\pi^2}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(-\pi, 0)} + t^2\overrightarrow{(\tfrac{1}{2}, 0)}$$

EXPRESSE $g(t)$ NAS FORMAS $g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$ E $g(t) = A + (t - t_0)\vec{\alpha} + (t - t_0)^2\vec{\beta}$, OU SEJA, DIGA QUEM SÃO $P, \vec{v}, \vec{w}, A, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

VOLTANDO À QUESTÃO 2...

DIGAMOS QUE $P = (p_1, p_2)$,
$$\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)},$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{(w_1, v_2)}...$$

$$g(t) = P + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$
$$= (p_1, p_2) + t\overrightarrow{(v_1, v_2)} + t^2\overrightarrow{(w_1, w_2)}$$
$$= (\underbrace{p_1 + tv_1 + t^2v_1}_{\text{polinômio em } t}, \underbrace{p_2 + tv_2 + t^2v_2}_{\text{polinômio em } t})$$

$$g(t) = g(t_0 + \Delta t)$$
$$= A + \vec{\alpha}\Delta t + \vec{\beta}(\Delta t)^2$$
$$= (A_1, A_2) + \overrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)}\Delta t + \overrightarrow{(\beta_1, \beta_2)}(\Delta t)^2$$

SE EU DIGO QUE $g(t_0 + \Delta t) = A + \vec{\alpha}\Delta t + \vec{\beta}(\Delta t)^2$ PARA ALGUM PONTO $A \in \mathbb{R}^2$ E VETORES $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ EM $\mathbb{R}^2$, EU TOU DIZENDO QUE...

VAMOS PEGAR UM EXEMPLO BEM CONCRETO - A QUESTÃO 2 DA PROVA.

SEJA $g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2$.

SEJAM $t_0 = \pi$ E $f(t_0), f'(t_0), f''(t_0)$ OS QUE A GENTE CALCULOU À ESQUERDA.

C3 8/NOV/2019

EU TROUXE UMA PARTE DA LISTA DE EXERCÍCIOS... POR ENQUANTO SÓ CONSEGUI DIGITAR UM EXERCÍCIO DELA! VOU PÔR O(S) OUTRO(S) NO QUADRO.

2 SEJA $G(x,y) =$

$$4 + 5(x-2) + 6(x-2)^2 + 7(y-3) + 8(x-2)(y-3) + 9(x-2)^2(y-3) + 10(y-3)^2 + 11(x-2)(y-3)^2 + 12(x-2)^2(y-3)^2.$$

CALCULE $G(2,3)$, $G_x(2,3)$, $G_{xx}(2,3)$, $G_y(2,3)$, $G_{xy}(2,3)$, $G_{xxy}(2,3)$, $G_{yy}(2,3)$, $G_{xyy}(2,3)$, $G_{xxyy}(2,3)$.

3 LEIA A SEÇÃO SOBRE O TEOREMA DE YOUNG NO BORTOLOSSI. DÁ PRA APLICAR O TEOREMA DE YOUNG NAS FUNÇÕES F E G?

4 CALCULE TODAS AS DERIVADAS DE 2ª ORDEM DA FUNÇÃO F.

5 CALCULE TODAS AS DERIVADAS DE 3ª ORDEM DA FUNÇÃO $H(x,y) = x^2y^2$.

DICA: VEJAM AS SEÇÕES 5.3 E 5.4 DO BORTOLOSSI!

OBS: A QUESTÃO 2 TEM UM PONTO BASE... QUAL É ELE?

LEMBRE DO SLOGAN: $\boxed{\text{CONTAS FORA DO PONTO BASE ZERAM A QUESTÃO!}}$

O ASSUNTO PRINCIPAL DE HOJE VAI SER REGRA DA CADEIA.

A GENTE VAI COMEÇAR ENTENDENDO O TEOREMA 7.7 DO BORTOLOSSI (NA SEÇÃO 7.5) DEPOIS VOU MOSTRAR PRA VOCÊS UM EXEMPLO BEM CONCRETO EM QUE É FÁCIL COMPARAR O RESULTADO OBTIDO PELA REGRA DA CADEIA EM $\mathbb{R}^n$ COM O RESULTADO CALCULADO DE OUTRO JEITO, USANDO SÓ TÉCNICAS DE CÁLCULO 1.

6 EXERCÍCIO ABSURDAMENTE IMPORTANTE:

ESPECIALIZE O TEOREMA 7.7 DO BORTOLOSSI PARA O CASO $n=1$, $m=2$, $k=l=1$.

ESCREVA O SEU RESULTADO DIREITINHO COMO UM COROLÁRIO DO TEOREMA 7.7.

7 USE O SEU COROLÁRIO PARA CALCULAR $\frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$.

OBS: EM ALGUNS MÉTODOS PARA EDOS QUE APARECEM EM CÁLCULO 2, A GENTE USA TRAJETÓRIAS $(g(t), h(t))$ QUE PERCORREM CURVAS DE NÍVEL DA F - OU

SEJA, PERCORREM OS CONJUNTOS $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = C\}$ PARA ALGUMA CONSTANTE C...

8 USE O QUE VOCÊ OBTEVE NO 7 PARA CALCULAR $\frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$ NO CASO EM QUE $F(x,y) = x^2y^3$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{4t}$.

9 CALCULE $\frac{d}{dt}\left((\operatorname{sen} t)^2 (e^{4t})^3\right)$ USANDO MÉTODOS DE CÁLCULO 1.

IMPORTANTE:

O TEOREMA 7.7 DO BORTOLOSSI, TEM UNS ERROS DE DIGITAÇÃO! ELE ESCREVE k NO LUGAR DE l E l NO LUGAR DE k EM ALGUNS LUGARES...

$\underbrace{(\quad)}_{a\times b}\underbrace{(\quad)}_{b\times c}$ $\quad$ $\underbrace{(\quad)}_{2\times 2}\underbrace{(\,)}_{2\times 1}$

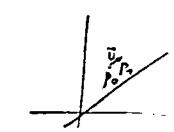
$$\underbrace{Dh(p)}_{l\times n} = \underbrace{Dg(f(p))}_{l\times m} \cdot \underbrace{Df(p)}_{m\times n}$$

$$\frac{d}{dx}\left(8\,(x-2)(y-3)\right)$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $\quad$ $p \in \mathbb{R}^3$

$g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ $\quad$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$(Df)\vec{v}$



C3 14/nov/2019

[illegible] polinômios de Taylor — vamos entender como o Bortolossi define e usa eles!

O mini-teste foi transferido pra semana que vem — e eu [illegible]

Pra discussão enquanto eu não [illegible] o [illegible] do Bortolossi pra página do curso:

O polinômio de Taylor de grau 2 para [illegible] em $x = x_0$ é:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

① Digamos que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Como você acha que deve ser o polinômio de Taylor de grau 2 da F no ponto base (x_0, y_0)?

Que derivadas parciais ele usa, com que coeficientes?

Discuta em grupo e tente escrever uma hipótese razoável.

(Daqui a pouco vamos ver várias hipóteses razoáveis e como testá-las.)

DICA: ESPECIALIZE!

OBS: Os capítulos 10 e 11 do Bortolossi já estão na página do curso! Deem uma olhada na seção 11.2.

MAIS DICAS:

Se f é um polinômio de grau baixo o suficiente o polinômio de Taylor da f vai ser igual à f.

Idem pra F.

② Faça $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
Teste $f(x) = 4$,
$f(x) = 3x$,
$f(x) = 5x^2$,
$f(x) = 6x^3$,
$f(x) = 4 + 5x^2 + 6x^3$.

③ Faça $x_0 = 8$.
Teste $f(x) = 4 + 5(x-x_0) + 6(x-x_0)^2 + 7(x-x_0)^3$.

④ Faça $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.
Teste $F(x,y) = 2x$,
$F(x,y) = 3x^2$,
$F(x,y) = 4xy$.

C3 22/nov/2019

Hoje: dúvidas e revisão!

Nos "Exercícios sobre ponto base" (na versão digitada) o problema 6 era:

⑥ Especialize o teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $\ell=1$, $m=2$, $n=1$.

① Faça uma versão mais complicada disso (com matrizes): Especialize o teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $\ell=2$, $m=2$, $n=2$.

② Dá pra gente entender melhor (?) a regra da cadeia se a gente usar uma notação abreviada...

Digamos que
$\vec{x} = p$,
$\vec{y} = f(\vec{x})$,
$\vec{z} = g(f(\vec{x}))$
$= h(\vec{x})$.

Com esta notação temos
$$\underbrace{Dh(p)}_{\vec{z}_{\vec{x}}} = \underbrace{Dg(f(p))}_{\vec{z}_{\vec{y}}} \underbrace{Df(p)}_{\vec{y}_{\vec{x}}}.$$

Reescreva as matrizes na notação nova. Obs:
$\vec{x} = (x_1, x_2)$,
$\vec{y} = (y_1, y_2)$
$\vec{z} = (z_1, z_2)$

Obs: o Bortolossi não gosta dessa abreviação. Leia as páginas 277 a 279.

③ Faça os exercícios [07] e [08] da seção 7.6 do Bortolossi (p. 279).

Agora vamos rever um problema de 26/set que eu mostrei como motivação para multiplicadores de Lagrange (que só vamos ver daqui a algumas aulas)...

④ Sejam $F(x,y) = xy$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+2y \le 6\}$.

ⓐ Represente graficamente A, $A \cap F^{-1}(0)$,
$A \cap F^{-1}(1)$,
$A \cap F^{-1}(2)$.

ⓑ Tente encontrar no olhômetro o máximo global da F em A.

ⓒ Represente graficamente ∇F.

ⓓ Em que ponto da "hipotenusa" de A – que é um segmento da reta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=6\}$ – o vetor $\nabla F(x,y)$ é ortogonal a r?

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\underbrace{g(x)h(x)}_{m(x)}\right) = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\left(g(x)h(x)\right)\right) =$$

$(r,\theta) \mapsto (x,y)$

$x = r\cos\theta$
$y = r \operatorname{sen}\theta$
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

Df

C3 28/nov/2019

HOJE:

ALGUMAS COISAS QUE SÃO PRÉ-REQUISITOS PRA ENTENDER MULTIPLICADORES DE LAGRANGE!

NA SEXTA – EM QUE QUASE NINGUÉM VEIO – A GENTE REVIU UM EXEMPLO DE MAIS DE UM MÊS ATRÁS, MAS DESSA VEZ A GENTE RESOLVEU ELE USANDO GRADIENTES...

SEJAM:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 6\}$,

$F(x,y) = xy$,

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 6\}$,

$G(x,y) = x + 2y - 6$.

1) DESENHE O CONJUNTO A.

2) DESENHE VÁRIAS CURVAS DE NÍVEL DA F.

3) REPRESENTE GRAFICAMENTE ∇F (COMO UM DIAGRAMA DE SETINHAS).

4) DÊ UMA APROXIMAÇÃO NO OLHO PRA ONDE ESTÁ O MÁXIMO GLOBAL DE F NO CONJUNTO A.

5) REPRESENTE GRAFICAMENTE ∇G.

6) ENCONTRE UM PONTO DE r EM QUE ∇F E ∇G SÃO PARALELOS.

SEJAM:

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$,

$H = x^2 + 4y^2 - 4$;

A E F CONTINUAM SENDO OS MESMOS DE ANTES.

7) DESENHE O CONJUNTO B.

8) DÊ UMA APROXIMAÇÃO NO OLHO PRA ONDE ESTÃO OS MÁXIMOS E MÍNIMOS DA FUNÇÃO F EM B.

9) REPRESENTE GRAFICAMENTE ∇H.

10) ENCONTRE OS PONTOS EM QUE $H(x,y) = 0$ E ∇F E ∇H SEJAM PARALELOS.

$\boxed{\text{C3 29/Nov/2019}}$

Hoje: mais multiplicador de Lagrange!

Na última aula eu pedi pra vocês encontrarem os pontos de $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 4\}$ nos quais a função $F(x,y) = xy$ assume máximos e mínimos... Eu pedi pra vocês procurarem esses pontos procurando pontos nos quais ∇F e ∇H sejam paralelos, onde $H(x,y) = x^2+4y^2-4$.

(1) Hoje: comparem o método que vocês descobriram improvisando com o método que o Bortolossi descreve no início do cap. 12...

... Agora vamos interromper o assunto de multiplicadores de Lagrange um pouquinho pra ver um modo de testar o resultado do problema anterior (que tem tudo a ver com polinômios de Taylor).

Lembre que $\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) = F_x g' + F_y h'$;

(2) Lembre como calcular $\frac{d}{dx} F(x, f(x))$.

(3) Digamos que $F(x, f(x)) = \text{constante}$. Qual é a relação entre $f'(x)$, F_x e F_y?

(4) No exercício (1) você deve ter encontrado alguns pontos de máximo da função F no conjunto B.

(a) Diga as coordenadas deles. A partir de agora vamos chamá-los de $(a_1,b_1) = (a,b)$, (a_2,b_2), etc.

(b) Calcule $H(a,b)$, $\nabla H(a,b)$, $F(a,b)$, $\nabla F(a,b)$.

(c) Digamos que a função $h(x)$ percorre a curva de nível $H(x,y)=0$; mais precisamente, $H(x,h(x))=0$. Descubra $h(a)$ e $h'(a)$.

(d) Calcule $\frac{d}{dx} F(x,h(x))$, e $\frac{d}{dx} F(a,h(a))$. Vamos ter $\frac{d}{dx} F(a,h(a))=0$. Porquê?

(5) Faça o problema 4 do cap. 12 do Bortolossi. Vou copiar ele aqui:

Use o Teorema dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos da função $F(x,y) = x+y^2$ no conjunto admissível $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+y^2 = 1\}$

$\Uparrow$ A P2 certamente vai ter um problema deste tipo.

$F(x,y) = xy$

$H(x,y) = x^2+4y^2-4$

Queremos os extremos de $F(x,y)$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=0\}$

Queremos $(a,b) \in D$ com $\nabla F(a,b) = \lambda \nabla H(a,b)$

$L = F - \lambda H$

$L_x(x,y) = F_x(x,y) - \lambda H_x(x,y) = y - \lambda \cdot 2x$

$L_y(x,y) = F_y(x,y) - \lambda H_y(x,y) = x - \lambda \cdot 8y$

$L_\lambda(x,y) = -H(x,y) = 4-x^2-4y^2$

$L_x(x,y) = 0 \Rightarrow y - \lambda \cdot 2x = 0$
$\Rightarrow y = \lambda \cdot 2x$

$L_y(x,y) = 0 \Rightarrow x - \lambda \cdot 8y = 0$
$\Rightarrow x = \lambda \cdot 8y$
$= \lambda \cdot 8(\lambda \cdot 2x)$
$= 16\lambda^2 x$

$\Rightarrow x = 0$
ou $16\lambda^2 = 1$
$\lambda^2 = \frac{1}{16}$
$\lambda = \pm\frac{1}{4}$

Se $\lambda = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$

$x = \frac{1}{4} \cdot 8y = 2y$

$\boxed{x = 2y}$

$4 - x^2 - 4y^2 = 0$

$4 - (2y)^2 - 4y^2 = 0$

$4 - 4y^2 - 4y^2 = 0$

$4 - 8y^2 = 0$

$4 = 8y^2$

$y^2 = \frac{1}{2}$

$y = \pm\sqrt{1/2}$

$y = \sqrt{1/2}$

$x = 2\sqrt{1/2}$
$= \sqrt{4}\sqrt{1/2}$
$= \sqrt{2}$

$(x,y) = (\sqrt{2}, \sqrt{1/2})$

C3 5/dez/2019

Hoje:
Revisão!
Dúvidas!
Mini-teste no fim da aula!

Aviso:
No mini-teste de amanhã $\underline{e}$ na P2 vai ter uns problemas que vocês só vão conseguir fazer direito se vocês souberem fazer contas assim de cabeça muito bem:

Seja $F(x,y) = (x-a)^\alpha (y-b)^\beta$

Calcule $F_{xxxyy}(x,y)$,
$F_{xxxyy}(a,b)$.

Pro mini-teste de amanhã vocês também vão ter que saber como calcular coisas como
$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$.

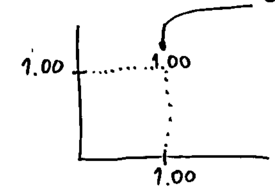
Obs: o que a gente está vendo agora tem a ver com:
- Polinômios de Taylor (seção 11.2 do Portolossi)
- Formas quadráticas (seção 11.3 do Portolossi), que a gente só vai ver muito por alto como curiosidade - mas que eu recomendo que vocês deem uma olhada nela nas férias.

Um problema pra vocês pensarem um pouco agora e mais nas férias:

Sejam
$F(x,y) = 4x^2 - 5xy + 9y^2$,
$G(x,y) = 4x^2 - 7xy + 9y^2$.

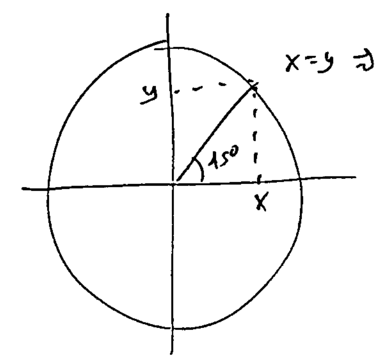
Existem funções $g(t)$ e $h(t)$
com $g(0) = h(0) = 0$
com $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} F(g(0), h(0)) < 0$?
E com $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} G(g(0), h(0)) < 0$?

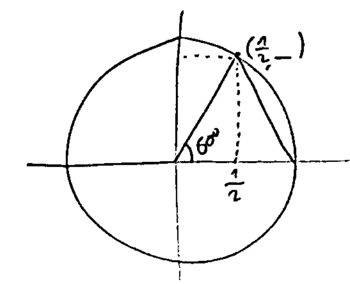
O ponto



Está aqui, no ponto decimal.

$x = y \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$





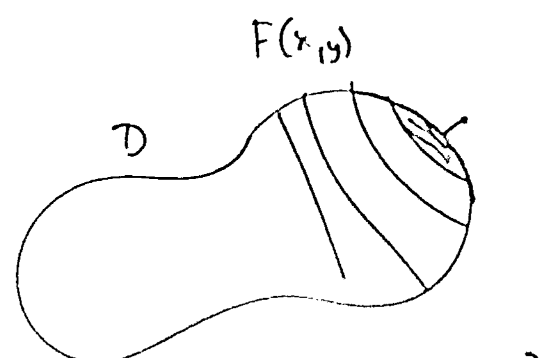
CS 6/dez/2019

Hoje:

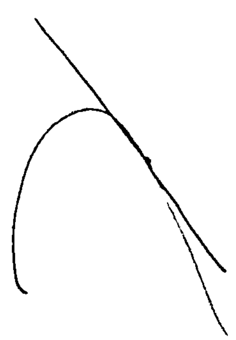
Dúvidas!

Mais uns exercícios de regra da cadeia e polinômio de Taylor!

Mini-teste!



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) \leq 42\}$



$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$

Exemplo (mult. Lagrange): (Bortolossi, p. 464, exerc. resolvido 12.1)

$F(x,y) = xy$

$H(x,y) = x + 4y$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \leq 8\}$

$L(x,y,\lambda) = F(x,y) - \lambda(H(x,y) - 8)$

$L_x =$

$L_y =$

$L_\lambda =$

Dica pro teste:

Se abreviamos $F(g(t),h(t))$ como F,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}F\right) = \frac{d}{dt}\left(F_x g' + F_y h'\right)$$

$$= \left(\left(\frac{d}{dt}F_x\right)g' + F_x\left(\frac{d}{dt}g'\right)\right) + \left(\left(\frac{d}{dt}F_y\right)h' + F_y\left(\frac{d}{dt}h'\right)\right)$$

$$= \left(\left(F_{xx}g' + F_{xy}h'\right)g' + F_x g''\right) + \ldots$$

$F = F(g(t), h(t))$

$F_x = F_x(g(t), h(t))$