Capítulo 10

Máximos e mínimos de funções de várias variáveis

A partir deste capítulo, vamos desenvolver ferramentas de cálculo diferencial necessárias para resolver problemas de otimização.

10.1 Definições e exemplos

Definição 10.1 (MÁXIMOS E MÍNIMOS) Considere uma função de n variáveis

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definida em D_f e D um subconjunto de D_f.

(a) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *ponto de máximo global* de f em D se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{x} \in D$. Neste caso, o número real $f(\mathbf{p})$ é denominado o *valor máximo* de f.

(b) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *ponto de mínimo global* de f em D se

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{x} \in D$. Neste caso, o número real $f(\mathbf{p})$ é denominado o *valor mínimo* de f.

(c) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *ponto de máximo local* de f em D se existe uma bola aberta $B_r(\mathbf{p})$ de centro em $\mathbf{p}$ e raio $r > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p}) \cap D$.

(d) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *ponto de mínimo local* de f em D se existe uma bola aberta $B_r(\mathbf{p})$ de centro em $\mathbf{p}$ e raio $r > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p}) \cap D$.

(e) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *extremo global* de f em D se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global de f em D.

(f) Dizemos que $\mathbf{p} \in D$ é um *extremo local* de f em D se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local de f em D.

A função f é denominada *função-objetivo* e o conjunto D de *conjunto admissível* do problema de otimização.

Freqüentemente, o conjunto admissível D é definido com o uso de funções. Assim, se $\mathbf{h}\colon D_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{g}\colon D_{\mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, então

$$D = \{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{h}} \cap D_{\mathbf{g}} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}.$$

A notação $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ significa que $g_1(\mathbf{x}) \leq 0$, $g_2(\mathbf{x}) \leq 0$, $\ldots$, $g_k(\mathbf{x}) \leq 0$, onde $g_1, g_2, \ldots, g_k$ são as funções coordenadas de $\mathbf{g}$.

No problema (1.1) (o problema da caixa), o conjunto admíssivel

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 15\}$$

é definido com o auxílio da função $g(x) = x$, enquanto que o conjunto admissível do problema (1.2) (o problema da dieta) é definido com o auxílio de treze funções de $\mathbb{R}^9$ para $\mathbb{R}$ (veja as desigualdades da página 29).

Observe a diferença entre um extremo local e um extremo global de uma função-objetivo f em um conjunto admissível D, segundo a definição (10.1).

Para um extremo global, comparamos o valor da função f no candidato a extremo global $\mathbf{p}$ com *todos os pontos do conjunto admissível*, enquanto que, para um extremo local, comparamos o valor da função f no candidato a extremo local $\mathbf{p}$ com *todos os pontos do conjunto admissível em uma bola aberta de centro em* $\mathbf{p}$.

Na figura (10.1) temos o gráfico de uma função f de duas variáveis de classe C^1 definida no conjunto admissível $D = [-3, +3] \times [-3, +3]$ (um quadrado no plano cartesiano). O ponto $\mathbf{p}$ é o ponto de mínimo global de f em D, o ponto $\mathbf{q}$ é o ponto de máximo global de f em D e os pontos $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ e $\mathbf{u}$ são pontos de máximo local de f em D.

O fato de f possuir ou não extremos (sejam eles locais ou globais) depende evidentemente da expressão de f, mas depende também do conjunto admissível D. Por exemplo, a função

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

possui um único ponto de mínimo global em

$$D_1 = \mathbb{R}^2$$

(o ponto $(0, 0)$) e ela não possui ponto de máximo global em D_1. Por outro lado, esta mesma função-objetivo possui pontos de máximo e mínimo global no conjunto admissível

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}.$$

O ponto $\mathbf{0} = (0, 0)$ é o ponto de mínimo global de f em D_2 e os pontos $\mathbf{p} = (0, -3)$ e $\mathbf{q} = (0, +3)$ são os pontos de máximo global de f em D_2, conforme a figura (10.2). Finalmente, no conjunto admissível

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = x^2/4 + y^2/9 = 1\},$$

f possui dois pontos de mínimo global, $\mathbf{r} = (-2, 0)$ e $\mathbf{s} = (+2, 0)$, e dois pontos de máximo global, $\mathbf{p} = (0, -3)$ e $\mathbf{q} = (0, +3)$, conforme a figura (10.3). Como todo extremo global também é um extremo local (por que?), estes exemplos mostram que uma função pode possuir extremos locais na fronteira do conjunto admissível.

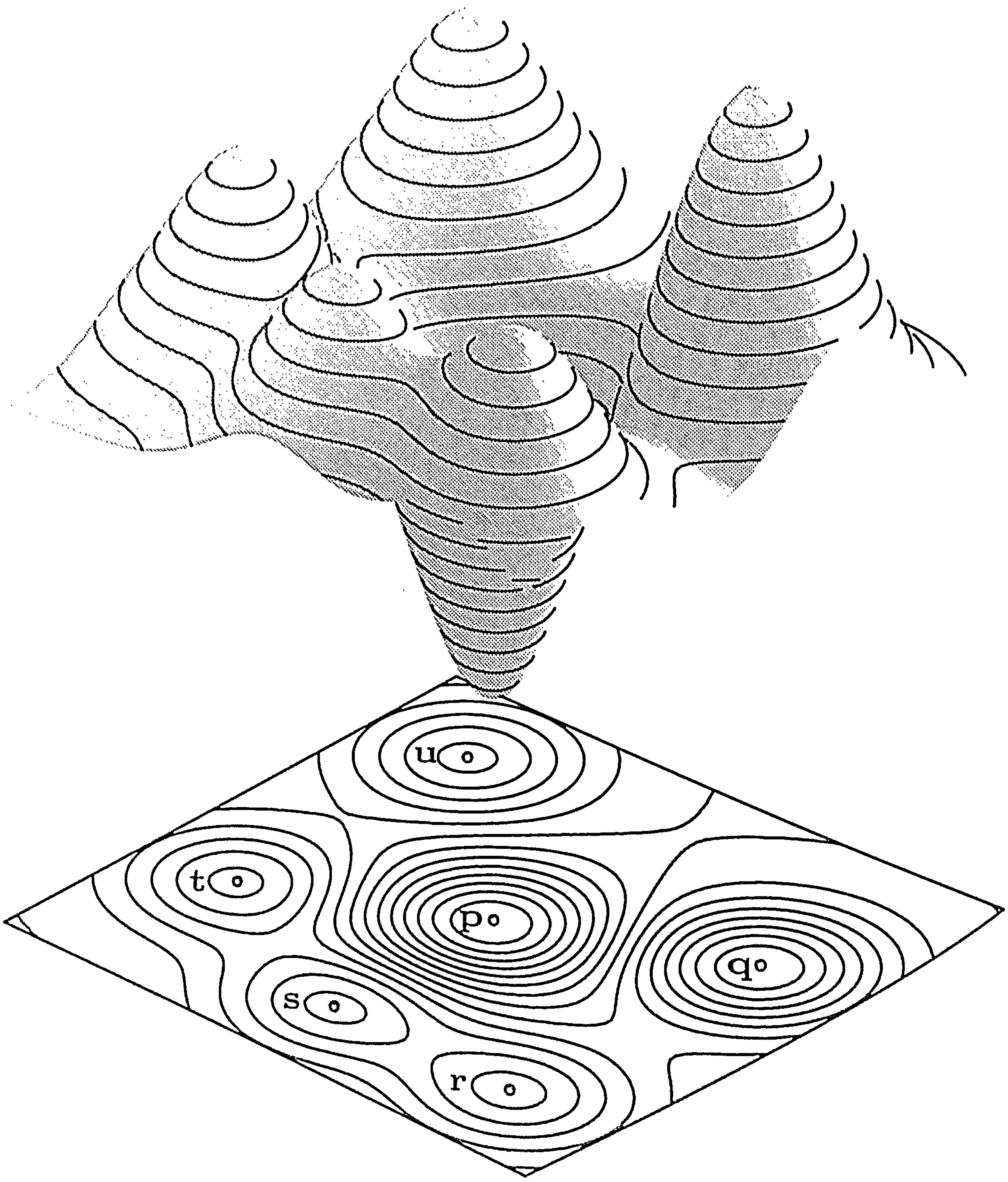

Figura 10.1: O gráfico de uma função de duas variáveis no quadrado $D = [-3, +3] \times [-3, +3]$.

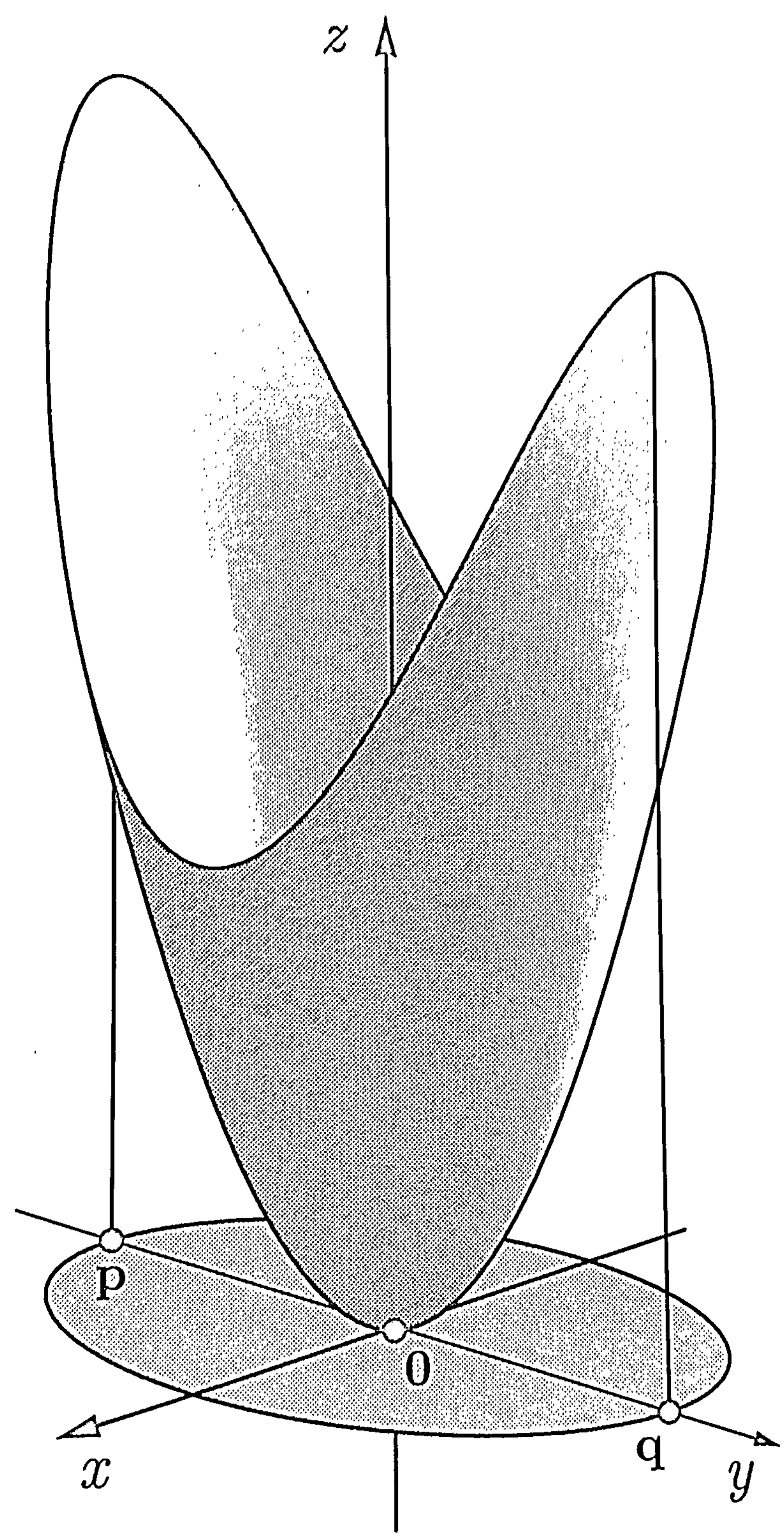

Figura 10.2: O gráfico de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ no conjunto admissível $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

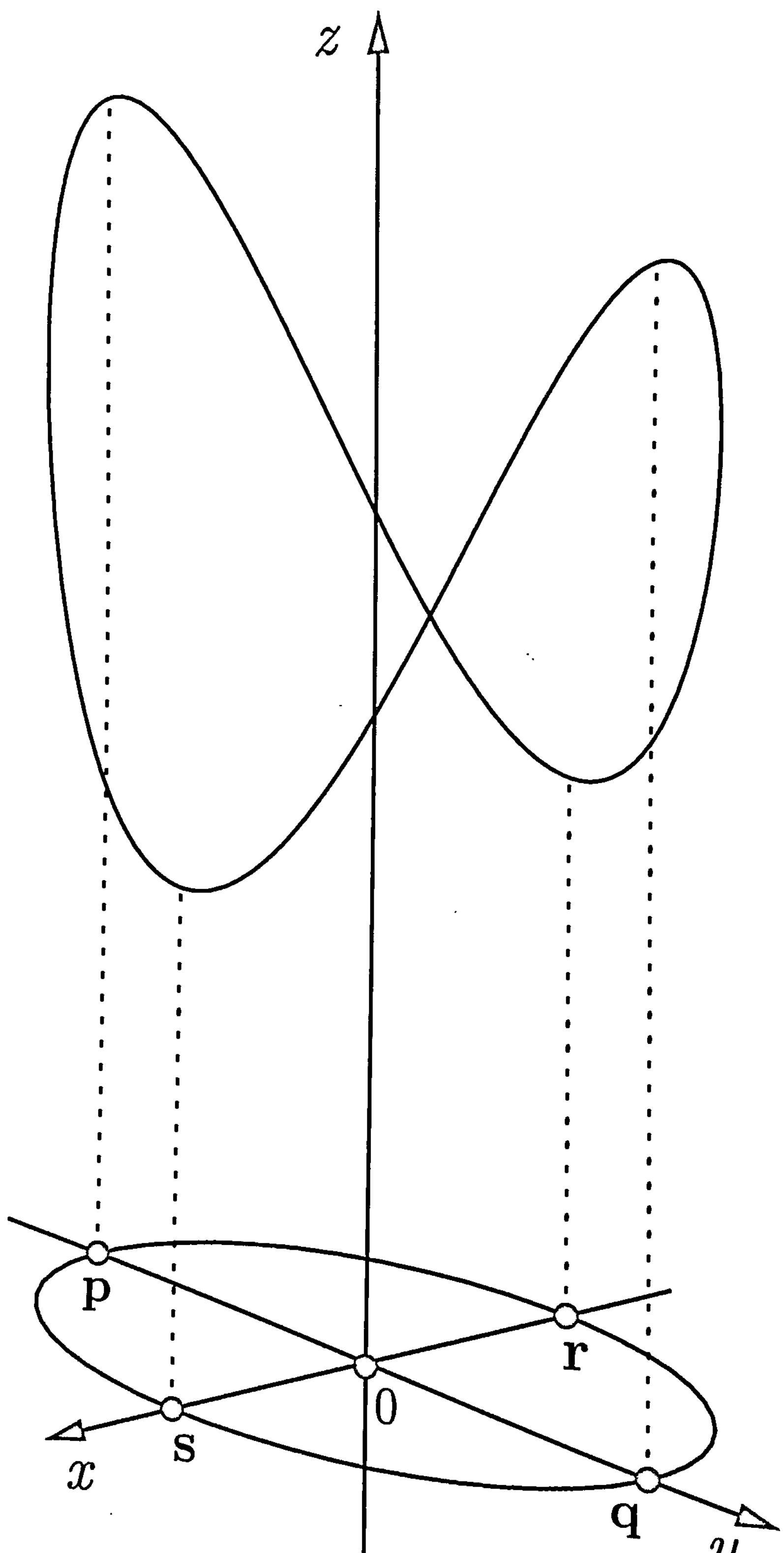

Figura 10.3: O gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ no conjunto admissível $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = x^2/4 + y^2/9 = 1\}$.

Finalmente, relembramos um dos poucos teoremas que estabelece, *a priori*, a existência de máximos e mínimos globais: *o teorema de Weierstrass.* Este teorema afirma que toda função contínua definida em um conjunto admissível D compacto e não-vazio possui pelo menos um ponto de máximo global e pelo menos um ponto de mínimo global em D.

Nota histórica. Em matemática, o estudo de problemas de máximo e mínimo começou há muito tempo atrás, de fato, há 25 séculos atrás. Por um longo período, não se descobriu uma maneira uniforme de se atacar problemas de otimização. Os primeiros métodos de caráter geral foram criados há 300 anos atrás, na época em que a análise matemática nascia. Ficou claro então que certos problemas de otimização especiais desempenham um papel fundamental em ciências naturais. Mais especificamente, descobriu-se que muitas leis naturais podem ser obtidas a partir de certos "princípios variacionais". Em 1744, o cientista francês Pierre Louis Moreau de Maupertius propôs o seu "princípio metafísico": a natureza sempre opera com a maior economia possível. Dentre uma coleção de movimentos admissíveis, o movimento de um sistema mecânico, ou da luz, da eletricidade, de um fluido ou de um gás é escolhido de forma que certas quantidades sejam maximizadas ou minimizadas. A necessidade de se resolver estes problemas, como muitos outros problemas em geometria, mecânica e física, levaram à criação de uma nova área em análise matemática, o cálculo das variações.

10.2 Exercícios

[01] A figura (10.4) mostra o gráfico de uma função que aproxima a altura (em km), com relação ao nível do mar, de uma região do Havaí, formada pelo retângulo entre as longitudes 195° e 210° e entre as latitudes 18° e 25°. Marque no mapa de contorno alguns pontos de máximo e mínimo local dessa função.

[02] Mostre que $(0,0)$ é um ponto de mínimo global da função

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

estudada o exemplo (3.1).

[03] Mostre que $(0,0)$ não é nem um ponto de máximo global e nem um ponto de mínimo global da função $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ estudada no exemplo (3.2).

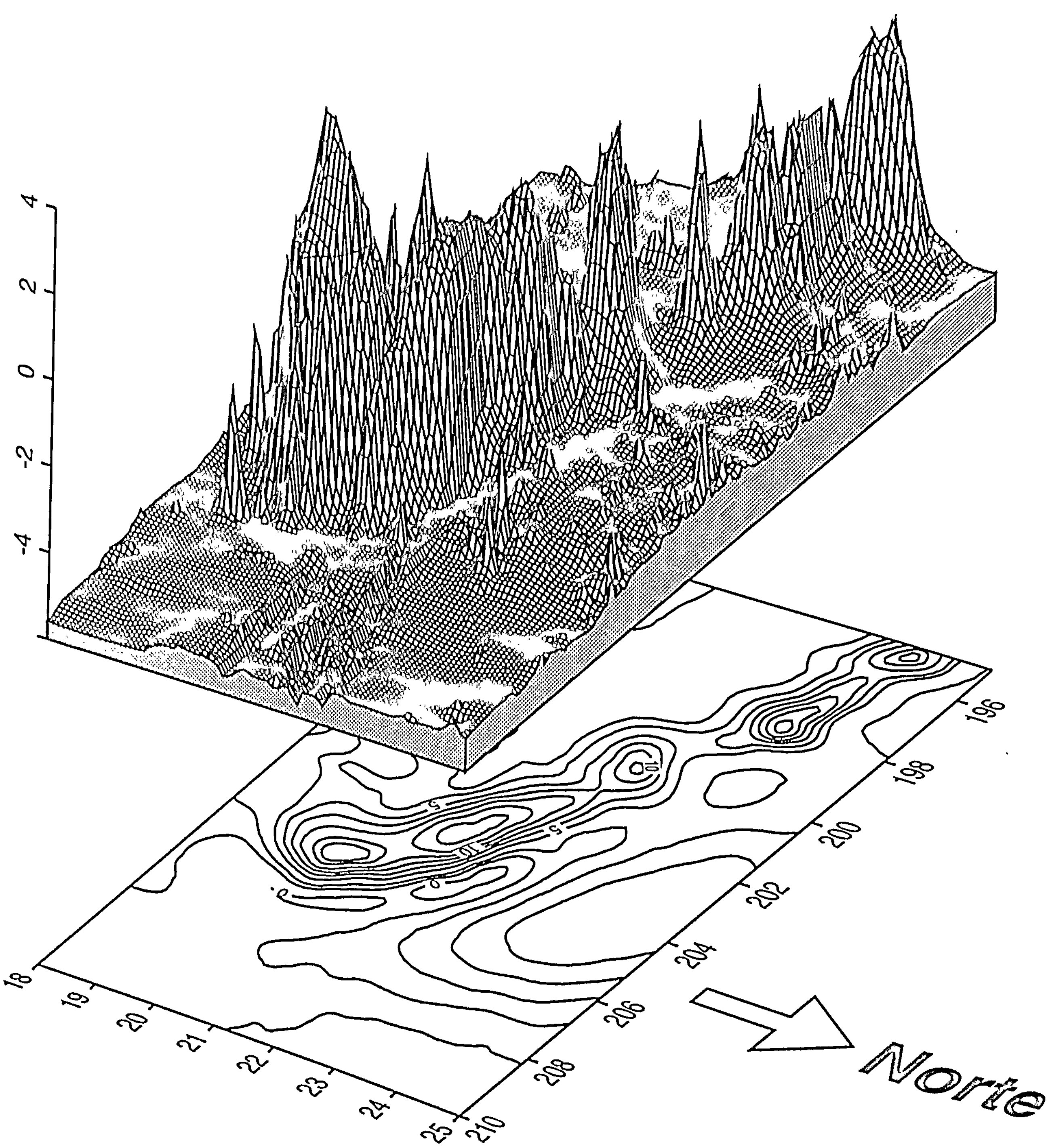

Figura 10.4: Gráfico e mapa de contorno de função que aproxima a altura com relação ao nível do mar de uma região do Havaí.

[04] Mostre que a função $z = f(x, y) = \ln\left(e^{x+y} - 1\right)$, estudada no exercício resolvido (3.1), não possui extremos globais.

[05] Encontre os extremos globais (caso existam) da função

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$$

estudada no exemplo (3.3).

[06] Mostre que a função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, estudada no exemplo (3.4), não possui extremos globais.

[07] Mostre que o teorema de Weierstrass não é mais válido se removermos a hipótese de continuidade ou de compacidade do domínio da função f exibindo:

(a) Uma função descontínua definida em um subconjunto K compacto em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em K.

(b) Uma função contínua definida em um subconjunto F fechado mas não-limitado (e, portanto, não-compacto), em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em F.

(c) Uma função contínua definida em um subconjunto L limitado mas não-fechado (e, portanto, não-compacto) em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em L.

[08] Use o teorema de Weierstrass para dizer se é possível garantir, *a priori*, se cada um dos problemas de otimização abaixo possui ou não uma solução.

(a) Maximizar $f(x, y) = x + y$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
sujeito às restrições: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(c) Minimizar $f(x, y) = x \cdot y$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $x + y = 1$.

(d) Maximizar $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 < 1$.

(e) Maximizar $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 \leq 1$.

(f) Maximizar $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 = 1$.

(g) Maximizar $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ e $x + y + z \leq 1$.

(h) Maximizar $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \leq x^2 + y^2$.

(i) Maximizar $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1$ e $z \leq 1$.

[09] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Toda função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ possui pelo menos um extremo local em $\mathbb{R}^n$.

(b) Toda função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ limitada (isto é, uma função para a qual existem constantes L e M tais que $L \leq f(\mathbf{x}) \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) possui pelo menos um extremo local em $\mathbb{R}^n$.

(c) Todo extremo local de uma função f em um conjunto admissível D também é um extremo global de f em D.

(d) Todo extremo global de uma função f em um conjunto admissível D também é um extremo local de f em D.

(e) Se f possui um máximo global em um conjunto admissível D, então f também possui um mínimo global em D.

(f) Se f possui um mínimo global em um conjunto admissível D, então f também possui um máximo global em D.

(g) Se f possui um mínimo local em um conjunto admissível D, então f também possui um mínimo global em D.

(h) A função constante $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(\mathbf{x}) = k$ não possui extremos globais em $\mathbb{R}^n$.

(i) Uma função f não pode possuir uma quantidade infinita de extremos globais em um conjunto admissível D.

(j) Uma função f não pode possuir uma quantidade infinita de extremos globais em um conjunto admissível D limitado.

(k) Uma função f não pode possuir uma quantidade infinita de extremos globais em um conjunto admissível D compacto.

[10] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se p é um ponto de mínimo global de f em um conjunto admissível D, então p é um ponto de máximo global de $-f$ em D.

(b) Se p é um ponto de máximo global de f em um conjunto admissível D, então p é um ponto de mínimo global de $-f$ em D.

[11] Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(\mathrm{x}) \geq 0$ para todo $\mathrm{x} \in D$ e $h\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(\mathrm{x}) = \sqrt{f(\mathrm{x})}$.

(a) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de h em D.

(b) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de h em D.

[12] Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(\mathrm{x}) > 0$ para todo $\mathrm{x} \in D$ e $h\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(\mathrm{x}) = \ln(f(\mathrm{x}))$.

(a) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de h em D.

(b) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de h em D.

[13] Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(D) \subset I$ e g é crescente em I. Considere $h = g \circ f$.

(a) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de h em D.

(b) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de h em D.

[14] Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(D) \subset I$ e g é decrescente em I. Considere $h = g \circ f$.

(a) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de h em D.

(b) Mostre que $\mathrm{p} \in D$ é máximo global de f em D se, e somente se, $\mathrm{p} \in D$ é mínimo global de h em D.

[15] Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x} - \mathrm{p})$.

(a) Mostre que $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de máximo global de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de máximo global de h em $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de mínimo global de h em $\mathbb{R}^n$.

(c) Mostre que $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de máximo local de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de máximo local de h em $\mathbb{R}^n$.

(d) Mostre que $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de mínimo local de h em $\mathbb{R}^n$.

[16] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Sejam $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D \subset D_f$. Se existem pontos p, q_1 e q_2 em D, tais que

$$f(\mathrm{q}_1) > f(\mathrm{p}) \qquad \text{e} \qquad f(\mathrm{q}_2) < f(\mathrm{p}),$$

então p não é *extremo global* de f em D.

Em outras palavras, se encontrarmos dois pontos q_1 e q_2 em D, tais que os valores de f nestes pontos sejam, respectivamente, maior e menor do que o valor de f no ponto p, então p não pode ser um extremo *global* de f em D.

(b) Sejam $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D \subset D_f$. Se existem pontos p, q_1 e q_2 em D tais que

$$f(\mathrm{q}_1) > f(\mathrm{p}) \qquad \text{e} \qquad f(\mathrm{q}_2) < f(\mathrm{p}),$$

então p não é *extremo local* de f em D.

Em outras palavras, se encontrarmos dois pontos q_1 e q_2 em D tais que os valores de f nestes pontos sejam, respectivamente, maior e menor do que o valor de f no ponto p, então p não pode ser um extremo *local* de f em D.

[17] Mostre que $\mathrm{p} = (0, 0)$ não é *extremo local* da função $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ em $\mathbb{R}^2$.

[18] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo global de f em um conjunto admissível D, R é um subconjunto de D e $\mathbf{p} \in R$, então $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo global de f em R.

(b) Se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo global de f em um conjunto admissível D, R é um subconjunto de D e $\mathbf{p} \in R$, então $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo global de f em R.

(c) Se $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo global de f em um subconjunto R de um admissível D, então $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo global de f em D.

(d) Se $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo global de f em um subconjunto R de um admissível D, então $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo global de f em D.

[19] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, 0)$ (a restrição de f sobre o eixo x) e $h(y) = f(0, y)$ (a restrição de f sobre o eixo y). Se $x = 0$ é um mínimo *local* de g e $y = 0$ é um mínimo *local* de h, então $(0, 0)$ é um mínimo *local* de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g(t) = f(t\,\mathbf{v})$ (a restrição de f sobre a reta que passa pela origem $(0, 0)$ com vetor diretor $\mathbf{v}$). Se $t = 0$ é um mínimo *local* de g, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, então $(0, 0)$ é um mínimo *local* de f em $\mathbb{R}^2$.

(c) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, 0)$ (a restrição de f sobre o eixo x) e $h(y) = f(0, y)$ (a restrição de f sobre o eixo y). Se $x = 0$ é um mínimo *global* de g e $y = 0$ é um mínimo *global* de h, então $(0, 0)$ é um mínimo *global* de f em $\mathbb{R}^2$.

(d) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g(t) = f(t\,\mathbf{v})$ (a restrição de f sobre a reta que passa pela origem $(0, 0)$ com vetor diretor $\mathbf{v}$). Se $t = 0$ é um mínimo *global* de g, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, então $(0, 0)$ é um mínimo *global* de f em $\mathbb{R}^2$.