seção 1-4.

Capítulo 3

Funções escalares com várias variáveis

Como vimos, muitos problemas em áreas científicas são modelados com o uso de muitas variáveis. Neste capítulo vamos estudar os objetos matemáticos adequados para a representação desses problemas.

3.1 Lembrando Cálculo I

Vamos considerar um exemplo bem simples de uma função de uma variável, definida pela expressão algébrica:

$$y = f(x) = x^2.$$

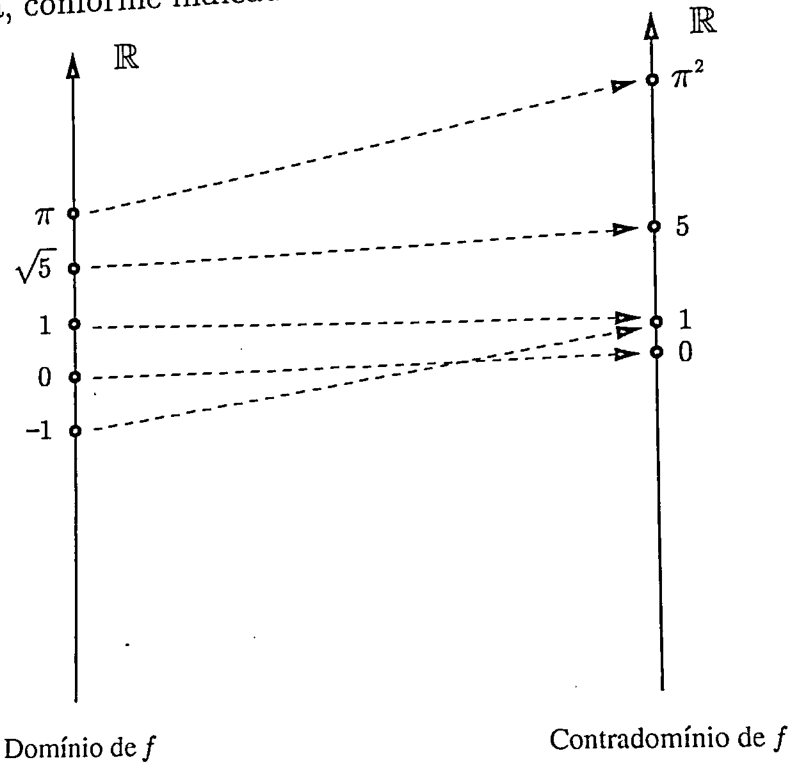
Toda função tem um *domínio* e um *contradomínio*. Em nosso caso, o *domínio* de f é o subconjunto mais amplo do conjunto de todos números reais ($\mathbb{R}$) para os quais podemos efetuar as operações indicadas na expressão. Como podemos elevar qualquer número ao quadrado, vem que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais:

$$\text{Domínio de } f = \mathbb{R}.$$

Dado que a função f "devolve" um número real e nenhum contradomínio foi indicado explicitamente, vamos assumir que

$$\text{Contradomínio de } f = \mathbb{R}.$$

Uma função é uma regra que associa a cada ponto do domínio, um *único* ponto do contradomínio. Assim, por exemplo, a função f acima associa o número real $x = 0$ ao número real $y = f(0) = 0^2 = 0$. Analogamente, ela associa $x = 1$ a $y = f(1) = 1^2 = 1$, $x = -1$ a $y = f(-1) = (-1)^2 = 1$, $x = \sqrt{5}$ a $y = f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$, $x = \pi$ a $y = f(\pi) = \pi^2$, e assim por diante. Estas associações podem ser representadas geometricamente através de um diagrama, conforme indicado na figura abaixo.



Contudo, é difícil conseguir informações importantes do comportamento de f (como, por exemplo, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, etc) através desta representação geométrica.

Você aprendeu em Cálculo I que a representação geométrica adequada para se estudar uma função real é através de seu gráfico. O *gráfico* de uma função nada mais é do que a coleção de todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, com x no domínio de f. Mais formalmente:

Definição 3.1 (Gráfico de uma função de uma variável) Dada uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável, o gráfico de f é o subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

De maneira informal, o gráfico de uma função f nada mais é do que "juntar" o domínio e o contradomínio de f em um mesmo desenho (o domínio em um eixo e o contradomínio em outro eixo) e fazer a representação de f através dos pontos da forma $(x, f(x))$, com x variando no domínio da função.

Em nosso exemplo, os pares ordenados $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(\sqrt{5},5)$ e (π,π^2) são pontos do gráfico de $y = f(x) = x^2$. Por outro lado, o ponto $(3,15)$ não é um ponto do gráfico da função. Tente justificar estas afirmações!

Um esboço do gráfico de $y = f(x) = x^2$ está na figura (3.1) e é nossa conhecida parábola. Esta função é realmente muito simples. Para o caso de funções definidas por expressões algébricas mais complicadas, você pode utilizar as técnicas aprendidas em Cálculo I para fazer um esboço representativo do gráfico de f. Finalmente, observe que através do gráfico de f podemos responder todas as questões de interesse: crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, etc.

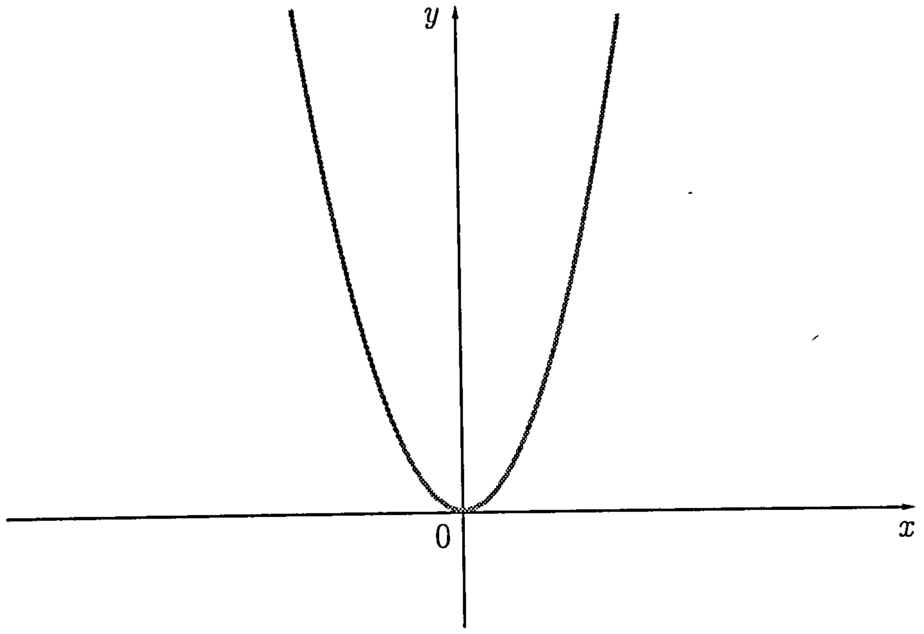


Figura 3.1: Esboço do gráfico de $y = f(x) = x^2$.

3.2 Funções de duas variáveis

Exemplo 3.1 (O PARABOLÓIDE ELÍPTICO DE REVOLUÇÃO) Não vamos ser muito ambiciosos: vamos começar com uma função de *duas* variáveis bem simples, definida pela expressão algébrica

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2.$$

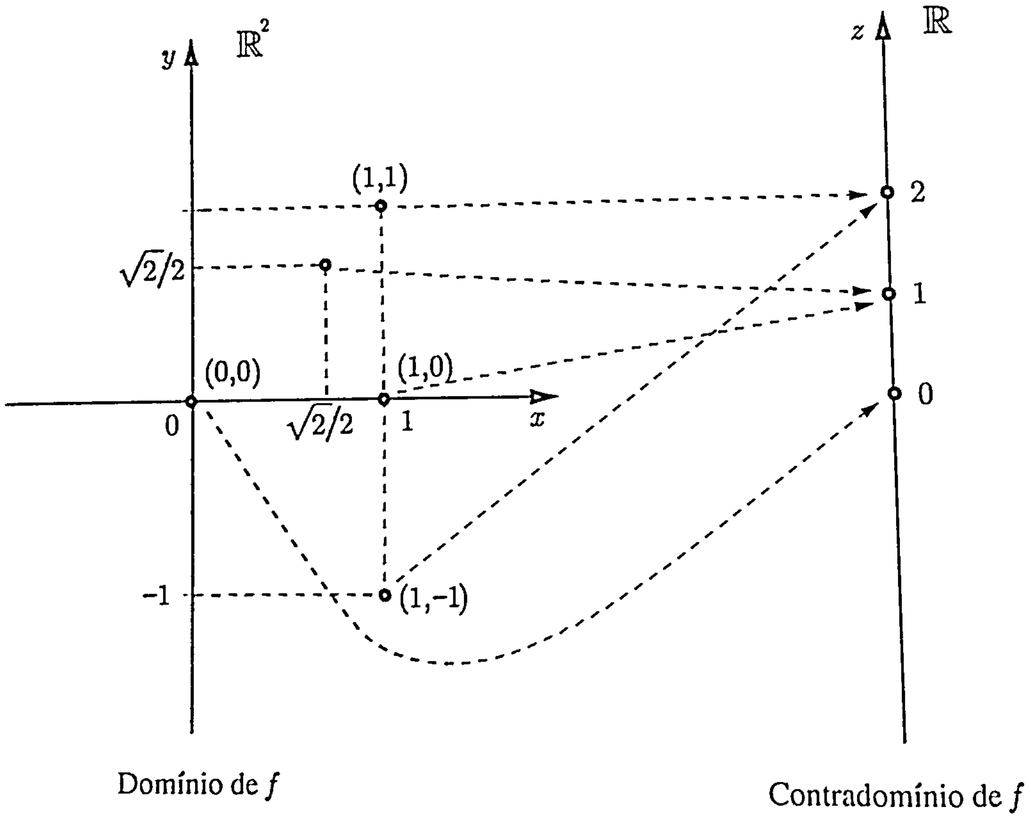
A função é de duas variáveis porque ela associa cada *par* de números reais x e y ao número real z definido como a soma dos quadrados de x e y. Ou, com uma notação mais compacta, podemos dizer que ela associa o par ordenado (x, y) ao número real $z = x^2 + y^2$. Como a expressão algébrica que define f pode ser calculada para qualquer escolha dos valores de x e y, temos que o *domínio* de f é todo o plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\text{Domínio de } f = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Como antes, dado que a função f "devolve" um número real e nenhum contradomínio foi indicado explicitamente, vamos assumir que

$$\text{Contradomínio de } f = \mathbb{R}.$$

Vamos calcular f em alguns pontos: $f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$, $f(0,1) = 0^2 + 1^2 = 1$, $f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$, $f(1,-1) = 1^2 + (-1)^2 = 2$ e $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 1/2 + 1/2 = 1$. Novamente, essas associações podem ser representadas geometricamente através de um diagrama, conforme indicado na figura abaixo.



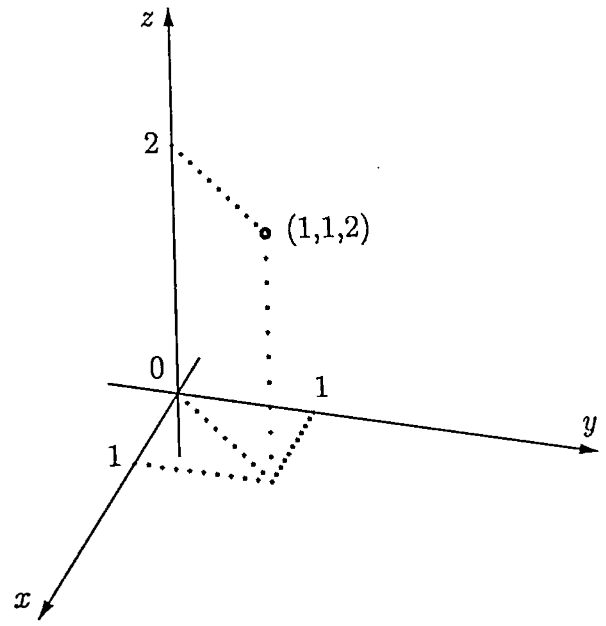
Como antes, é difícil conseguir informações importantes do comportamento de f através desta associação de pontos onde domínio e contradomínio são representados separadamente. Uma representação geométrica conveniente é tentar representá-los em um único desenho, isto é, através do *gráfico* da função f.

Como o domínio de f precisa de 2 eixos para ser representado e o contra-domínio precisa de 1 eixo, então o gráfico de f precisa de 3 eixos para ser representado. O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ formado pelas triplas ordenadas da forma $(x, y, f(x, y))$, com (x, y) no domínio de f. Mais formalmente:

Definição 3.2 (Gráfico de uma função de duas variáveis) Dada uma função $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de duas variáveis, o gráfico de f é o subconjunto do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}.$$

Por exemplo, o ponto $(1, 1, 2)$ é um ponto do gráfico de f e o seu desenho é dado na figura abaixo.



Outros pontos de $\mathbb{R}^3$ que também pertencem ao gráfico de f são $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$ e $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$. Por outro lado, $(2, 2, 15)$ não é um ponto do gráfico de f. Tente justificar estas afirmações!

Como conseguir um bom esboço do gráfico de f? Você poderia ser tentado a fazer uma tabela de valores $(x, y, f(x, y))$ para alguns valores de x e y e, em seguida, desenhar os pontos obtidos. Se você tentar utilizar esta técnica para 10 valores de x entre -2 e 2 e 10 valores de y entre -2 e 2, obtendo então 100 pontos do gráfico de f, o que você verá é a figura (3.2). Como você pode observar, o resultado não é promissor!

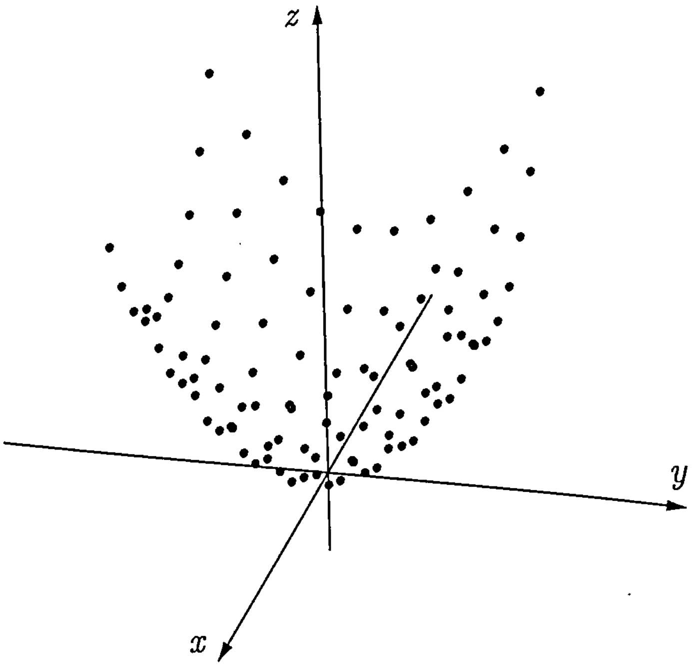


Figura 3.2: Desenho de 100 pontos do gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Vamos estudar agora uma técnica mais eficaz, que consiste em se fazer uma "tomografia computadorizada" do gráfico da função, isto é, vamos determinar a interseção do gráfico com diversos planos (algo supostamente mais fácil de se fazer) e, a partir destas interseções, tentar fazer um esboço do gráfico da função.

Por exemplo, considere o plano $z = 1$, isto é, o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ da forma $(x, y, 1)$, com x, $y \in \mathbb{R}$. Este plano é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0, 0, 1)$ (veja a figura (3.3)). Que figura geométrica obtemos quando fazemos a interseção deste plano com o gráfico da função? Se um ponto (x, y, z) pertence ao gráfico da função f, então $z = f(x, y)$. Por outro lado, se o ponto também pertence ao plano, então sua terceira componente é 1, isto é, $z = 1$. Combinando estes dois fatos temos que

$$f(x, y) = z = 1,$$

ou seja, vale a equação

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Moral da história: a interseção do gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ com o plano $z = 1$ é a circunferência de raio 1, *contida no plano* $z = 1$ e de centro em $(0, 0, 1)$ (veja a figura (3.4)).

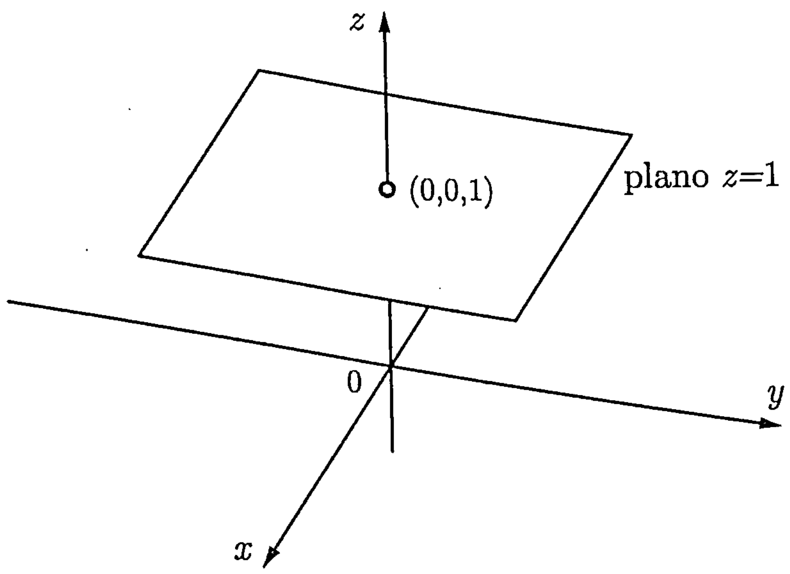


Figura 3.3: Desenho do plano $z = 1$ passando pelo ponto $(0, 0, 1)$.

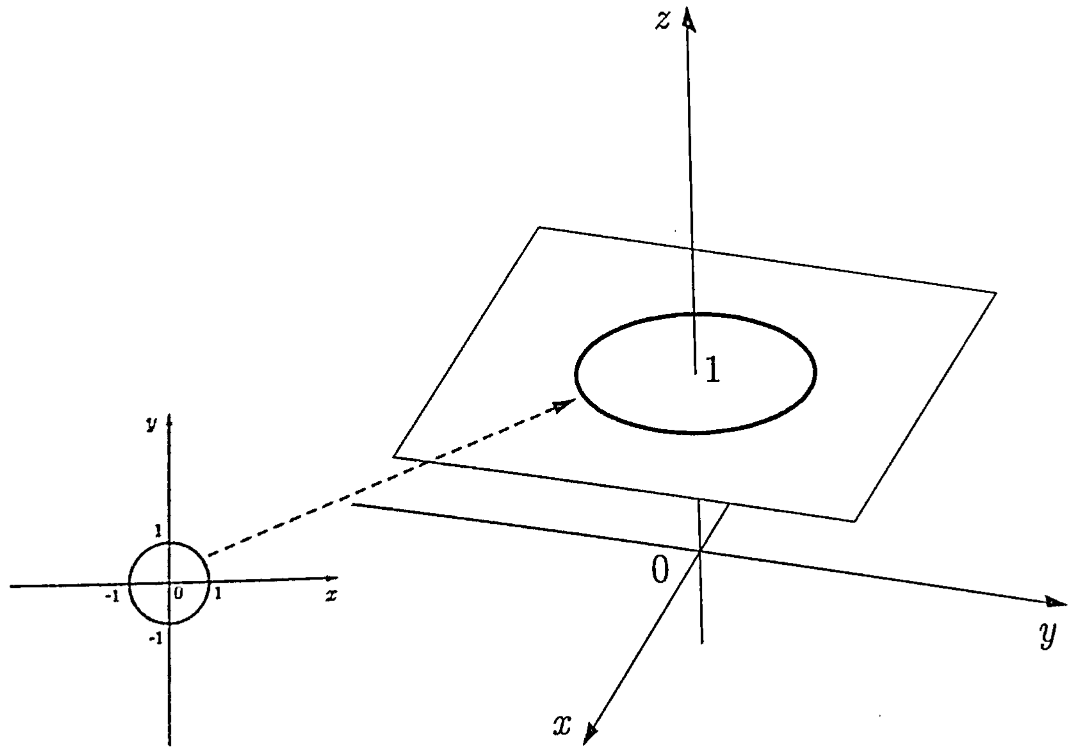


Figura 3.4: Interseção do plano $z = 1$ com o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Vamos tentar outros "cortes" (interseções).

- Com o plano $z = 2$.

  Este plano é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0,0,2)$. Os pontos (x,y,z) da interseção são caracterizados por satisfazerem $z = f(x,y)$ (o ponto está no gráfico de f) e $z = 2$ (o ponto está no plano). Assim, $2 = z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Moral da história: a interseção do gráfico de f com o plano $z = 2$ é a circunferência de raio $\sqrt{2}$, contida no plano $z = 2$ e de centro em $(0,0,2)$ (veja a figura (3.5)).

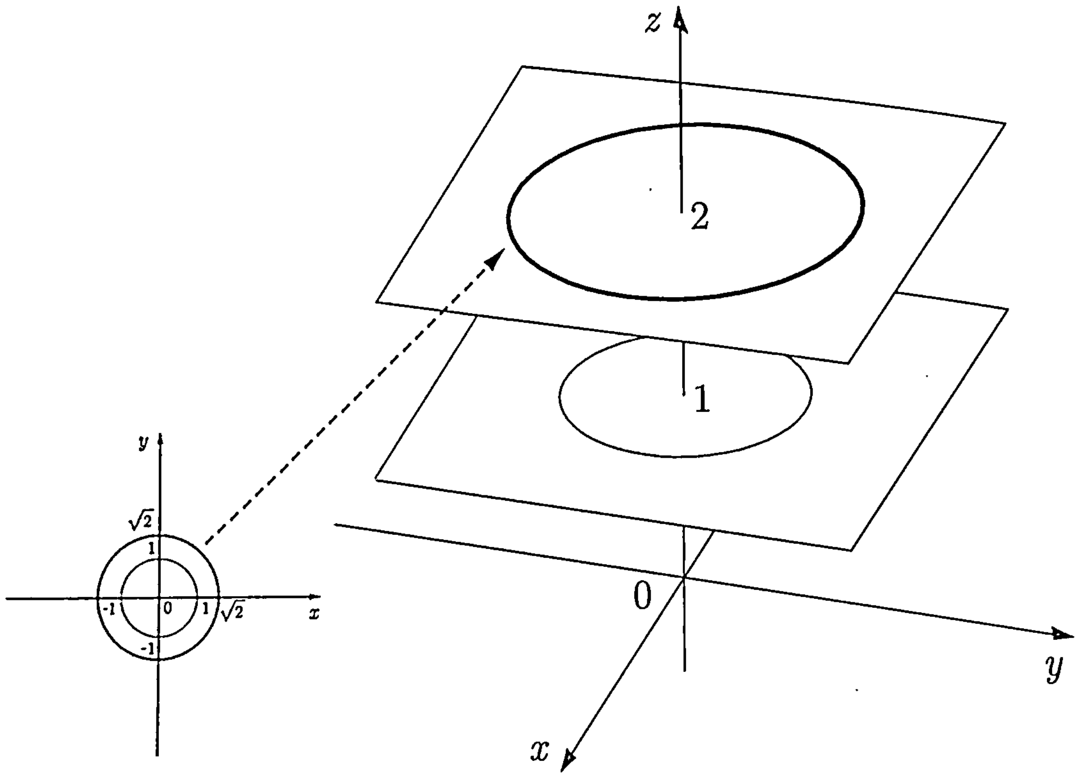


Figura 3.5: Interseção do plano $z = 2$ com o gráfico de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Mais geralmente, com o plano $z = k$, onde k é uma constante > 0.

  Este caso é completamente análogo ao caso anterior. O plano $z = k$ é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0,0,k)$. Na interseção com o gráfico de f vale a equação $k = z = f(x,y) = x^2 + y^2$, isto é, temos a circunferência de raio $\sqrt{k}$ contida no plano $z = k$ e de centro em $(0,0,k)$.

- Com o plano $z = 0$.

  Observe que o plano $z = 0$ é justamente o plano xy. Como antes, $0 = z = f(x,y) = x^2 + y^2$. O único valor de x e y que satisfaz esta equação é $x = 0$

e $y = 0$. Moral da história: a interseção do gráfico de f com o plano $z = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$.

- Com o plano $z = -1$.

  Este plano é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0, 0, -1)$. Na interseção com o gráfico de f temos $-1 = z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Não existem números reais x e y que satisfazem esta equação. Moral da história: não existe interseção entre o gráfico de f e o plano $z = -1$.

- Mais geralmente, com o plano $z = k$, onde k é uma constante < 0.

  Este caso é completamente análogo ao caso anterior. O plano $z = k$ é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0, 0, k)$. Na interseção com o gráfico de f vale a equação $k = z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Como k é negativo, esta equação não tem solução e, portanto, não existe interseção entre o gráfico de f e planos da forma $z = k$, com k negativo.

Vamos resumir os resultados obtidos: à medida que tomamos planos paralelos, mas "por cima" do plano xy (isto é, com valores de z maiores do que zero), obtemos uma circunferência com centro no eixo z. Quanto mais próximo do plano xy estivermos, menor será o raio da circunferência. Quando tomamos o próprio plano xy, obtemos apenas o ponto $(0, 0, 0)$. Planos paralelos, mas "por baixo" do plano xy (isto é, com valores de z menores do que zero), possuem interseção vazia com o gráfico de f.

Estes resultados já permitem inferir um primeiro esboço do gráfico de f, mas eles ainda não são suficientes. Observe a figura (3.6). Qual figura representa melhor o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$? A figura (a) ou a figura (b)? Nas duas figuras obtemos circunferências quando fazemos "cortes" com os planos da forma $z = k$.

Para obter um esboço melhor é preciso fazer cortes com outros tipos de planos. Por exemplo, com planos da forma $y = k$, que representa o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ da forma (x, k, z), com $x, z \in \mathbb{R}$ (veja a figura (3.7)) ou com planos da forma $x = k$, que representa o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ da forma (k, y, z), com $y, z \in \mathbb{R}$ (veja a figura (3.8)).

Vamos então estudar a interseção do gráfico de f com planos da forma $y = k$, com k uma constante real.

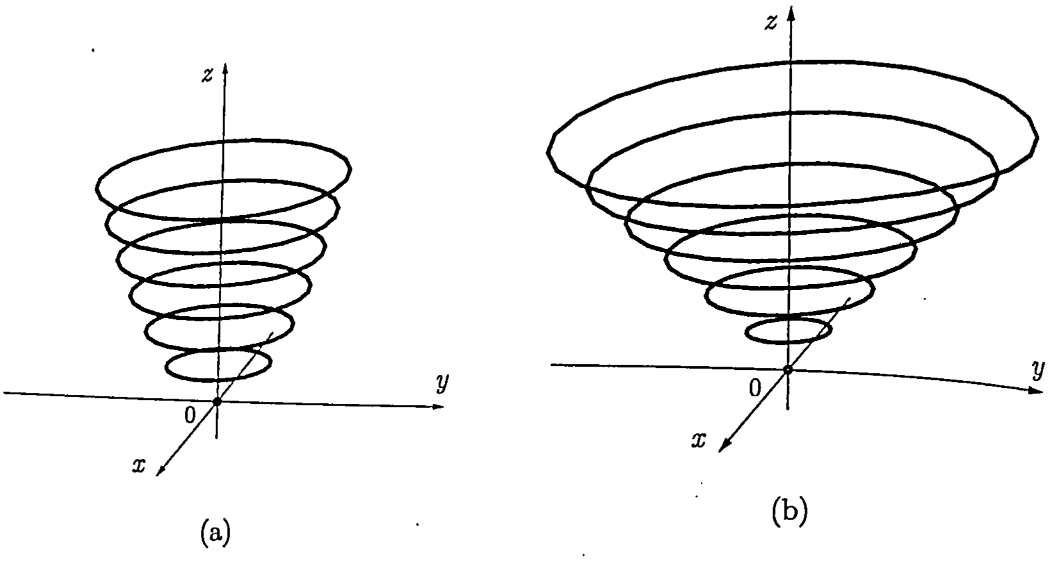


Figura 3.6: Qual figura representa melhor o gráfico de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$?

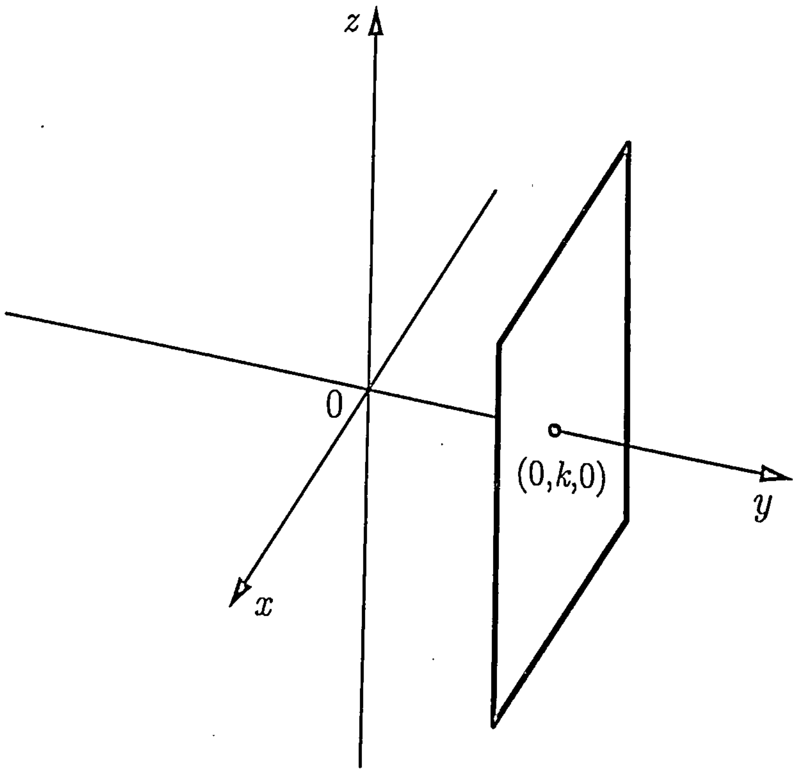


Figura 3.7: Desenho do plano $y = k$ passando pelo ponto $(0, k, 0)$.

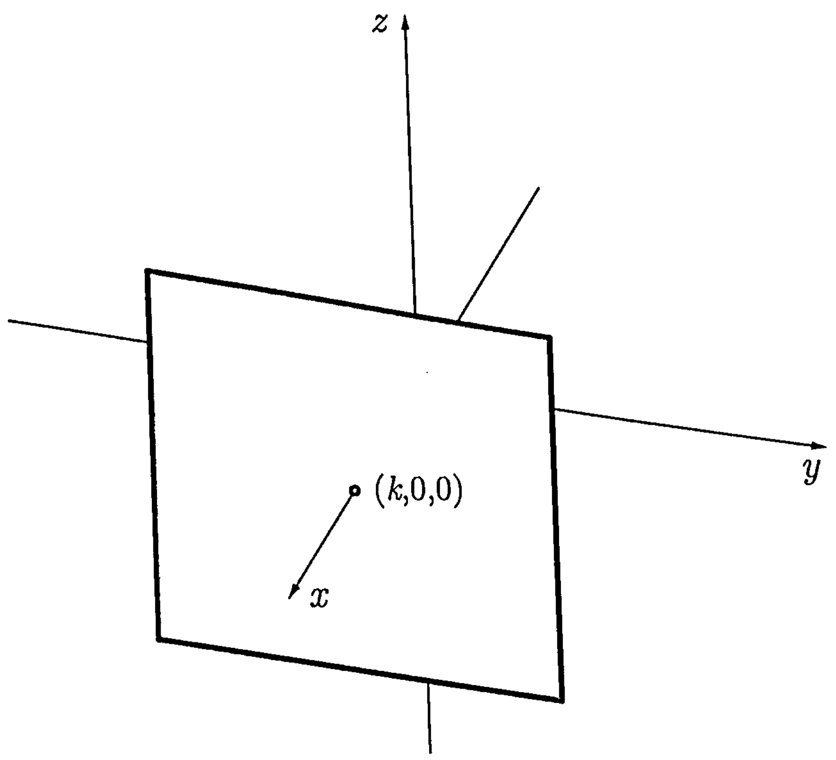


Figura 3.8: Desenho do plano $x = k$ passando pelo ponto $(k, 0, 0)$.

- Com o plano $y = 1$.

  Este plano é paralelo ao plano xz e passa pelo ponto $(0, 1, 0)$. Na interseção deste plano com o gráfico de f temos $y = 1$ e $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Portanto, vale a equação

  $$z = x^2 + 1^2 = x^2 + 1.$$

  Moral da história: a interseção do gráfico de f com o plano $y = 1$ é a parábola $z = x^2+1$ no plano $y = 1$ com vértice $(0, 1, 1)$ (veja a figura (3.9)).

- Com o plano $y = 0$.

  Observe que o plano $y = 0$ é justamente o plano xz. Como antes, $y = 0$ e $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Portanto, vale a equação

  $$z = x^2 + 0^2 = x^2.$$

  Moral da história: a interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$ é a parábola $z = x^2$ no plano xz com vértice $(0, 0, 0)$ (veja a figura (3.10)).

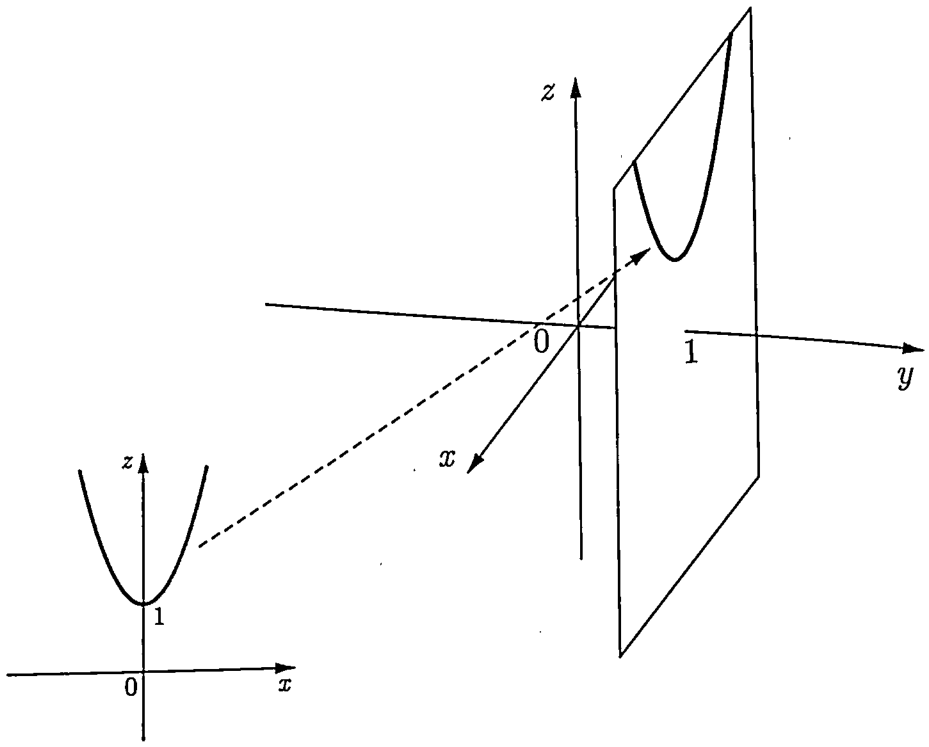


Figura 3.9: Interseção do plano $y = 1$ com o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

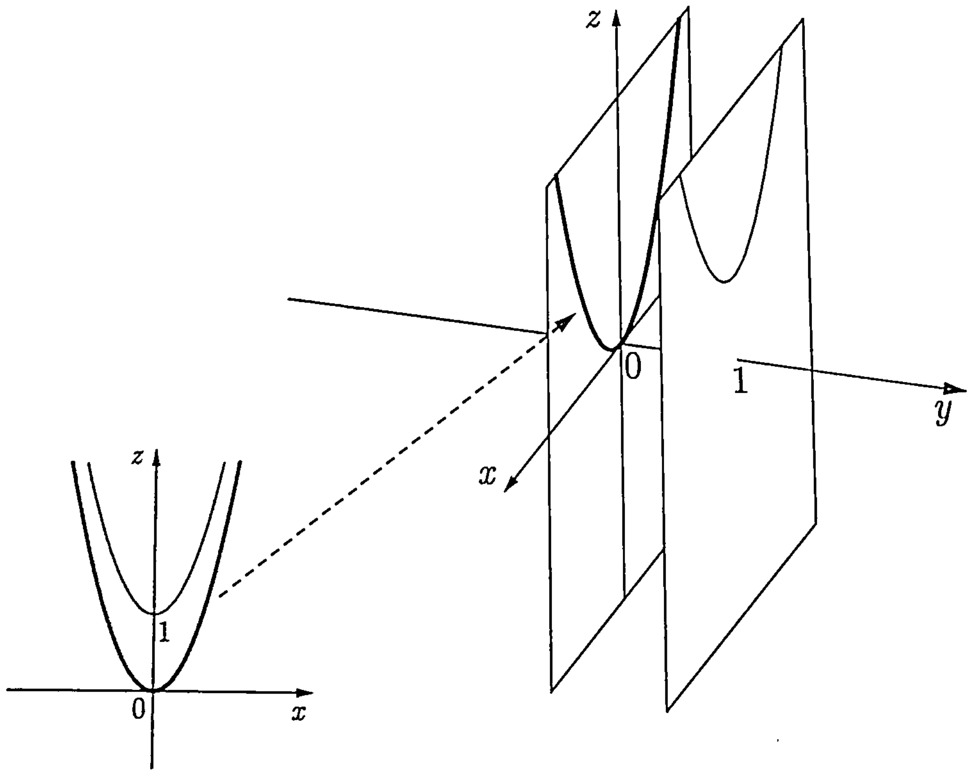


Figura 3.10: Interseção do plano $y = 0$ com o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Com o plano $y = -1$.

  Este plano é paralelo ao plano xz e passa pelo ponto $(0, -1, 0)$. Na interseção deste plano com o gráfico de f temos $y = -1$ e $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Portanto, vale a equação

  $$z = x^2 + (-1)^2 = x^2 + 1.$$

  Moral da história: a interseção do gráfico de f com o plano $y = -1$ é a parábola $z = x^2 + 1$ no plano $y = -1$ com vértice $(0, -1, 1)$ (veja a figura (3.11)).

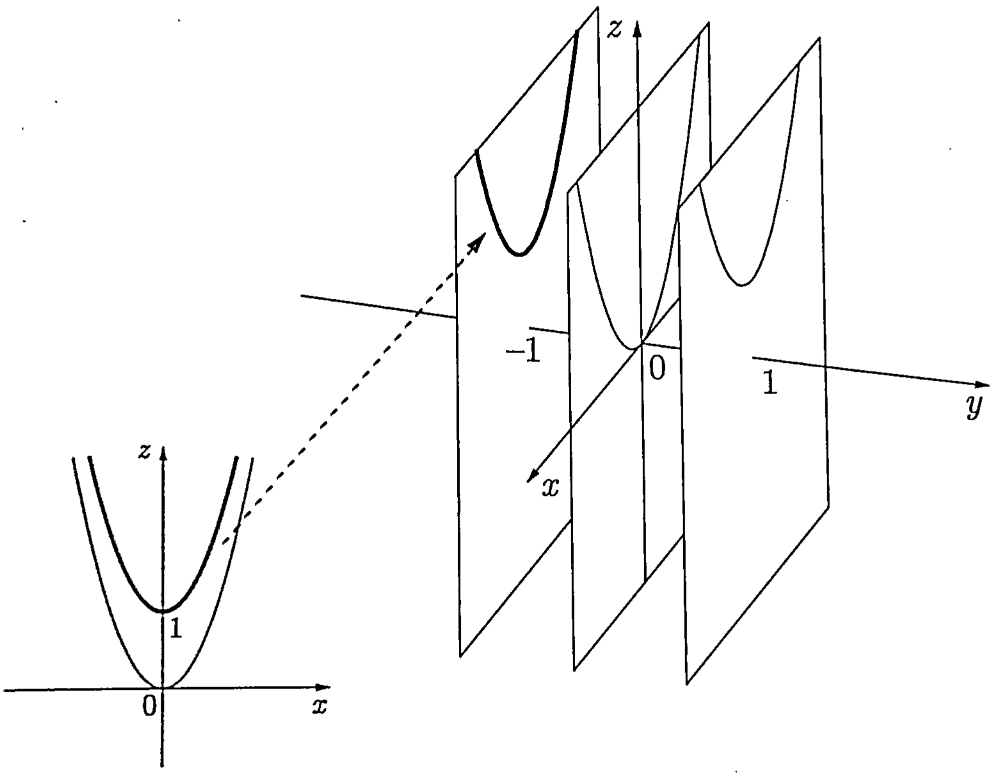


Figura 3.11: Interseção do plano $y = -1$ com o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Mais geralmente, com o plano $y = k$, onde k é uma constante real.

  Os cálculos são exatamente os mesmos: como $y = k$ e $z = x^2 + y^2$ então, $z = x^2 + k^2$. Moral da história: a interseção do plano $y = k$ com o gráfico de f é a parábola $z = x^2 + k^2$ no plano $y = k$ com vértice $(0, k, k^2)$.

Com estes planos adicionais é possível eliminar o desenho (b) na figura (3.6) — um cone — como candidato a gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ pois, como vimos, a interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$ é uma parábola, enquanto que a interseção deste plano com o cone é um par de semi-retas (no formato de um "V").

E as interseções com os planos da forma $x = k$? Fica como exercício demonstrar que a interseção do gráfico de f com o plano $x = k$ é a parábola $z = y^2 + k^2$ no plano $x = k$ com vértice $(k, 0, k^2)$.

Para encerrar, na figura (3.12), temos o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ gerado por computador. Nela também aparecem as curvas resultantes da interseção do gráfico de f com os planos $z = 0.0$, $z = 0.5$, $z = 1.0$, $z = 2.0$, $z = 2.5$, $z = 3.0$, $z = 3.5$, $z = 4.0$, $z = 4.5$, $y = -1$, $y = 0$ e $y = 1$. □

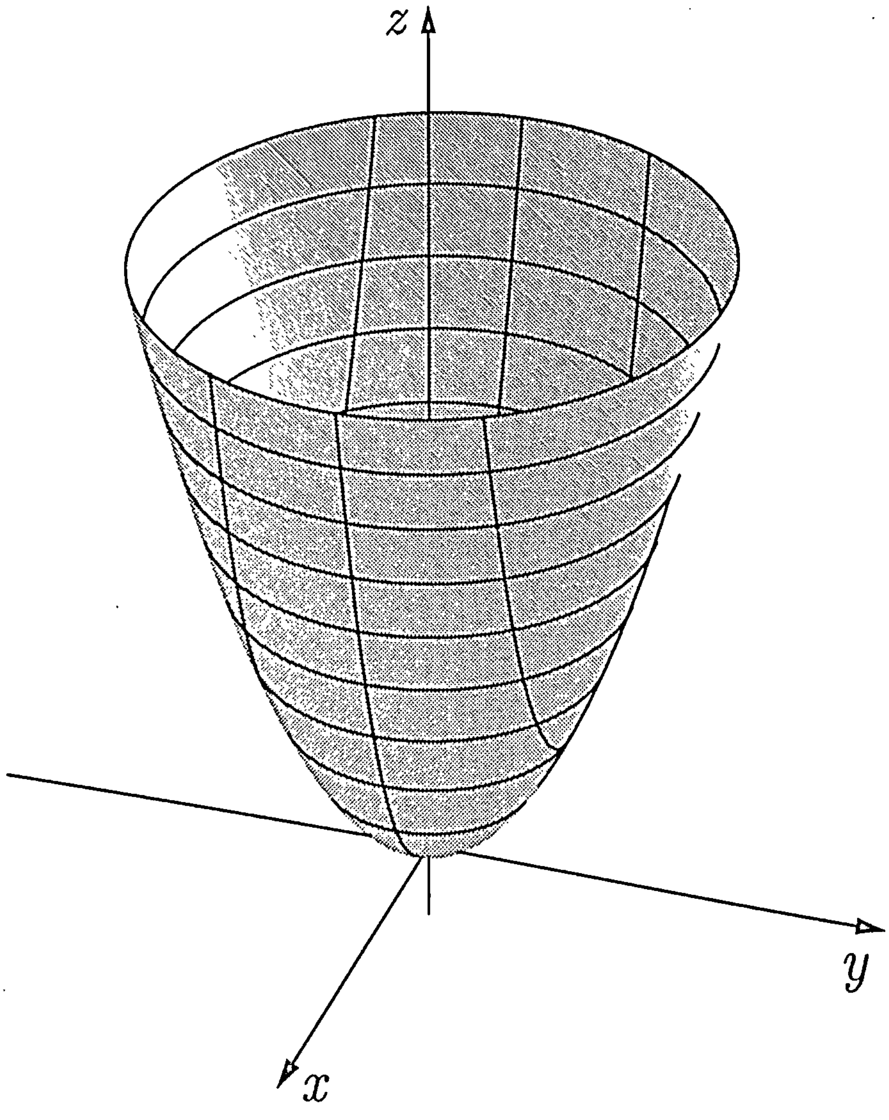


Figura 3.12: Gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ gerado por computador.

Exemplo 3.2 (O PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO) Vamos fazer mais um (importante) exemplo juntos. Considere agora o parabolóide hiperbólico (também conhecido como *a sela de cavalo*) definido pela expressão algébrica:

WWW

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2.$$

É fácil de ver que o *domínio* de f é $\mathbb{R}^2$ e que seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Para fazer um esboço do gráfico, vamos utilizar a técnica de "cortes" com os planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Começaremos com os planos da forma $z = k$.

- Com o plano $z = 1$.

  Temos $1 = z = f(x, y) = x^2 - y^2$, logo a interseção do gráfico de f com o plano $z = 1$ é a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, com vértices $(-1, 0, 1)$ e $(1, 0, 1)$, neste plano (veja a figura (3.13)).

- Mais geralmente, com o plano $z = k$, onde k é uma constante > 0.

  Este caso é completamente análogo ao caso anterior: temos $k = z = f(x, y) = x^2 - y^2$, logo a interseção do gráfico de f com o plano $z = k$ é a hipérbole $x^2 - y^2 = k$, com vértices $(-\sqrt{k}, 0, k)$ e $(\sqrt{k}, 0, k)$, neste plano. Observe que quanto menor o valor de k (isto é, quanto mais k estiver próximo de 0), mais os vértices da hipérbole tendem a se aproximar.

- Com o plano $z = 0$ (o plano xy).

  Temos $0 = z = f(x, y) = x^2 - y^2$. Então $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = 0$. Portanto, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$, isto é, $y = x$ ou $y = -x$. Desta maneira, a interseção do gráfico de f com o plano $z = 0$ é o par de retas $y = x$ e $y = -x$, passando pelo ponto $(0, 0, 0)$, neste plano (veja a figura (3.13)).

- Com o plano $z = -1$.

  Temos $-1 = z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ou, ainda, multiplicando-se por -1, $-x^2 + y^2 = 1$. Desta maneira, a interseção do gráfico de f com o plano $z = -1$ é a hipérbole $-x^2 + y^2 = 1$, com vértices $(0, -1, -1)$ e $(0, 1, -1)$ (compare com o caso $z = 1$ e observe a mudança do eixo da hipérbole), neste plano (veja a figura (3.13)).

- Mais geralmente, com o plano $z = k$, onde k é uma constante < 0.

  Este caso é completamente análogo ao caso anterior: temos $k = z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ou, ainda, multiplicando-se por -1, $-x^2 + y^2 = -k$. Desta maneira, a interseção do gráfico de f com o plano $z = k$ é a hipérbole

$-x^2 + y^2 = -k$, com vértices $(0, -\sqrt{-k}, k)$ e $(0, \sqrt{-k}, k)$, neste plano. Observe que quanto maior o valor de k (isto é, quanto mais k estiver próximo de 0), mais os vértices da hipérbole tendem a se aproximar.

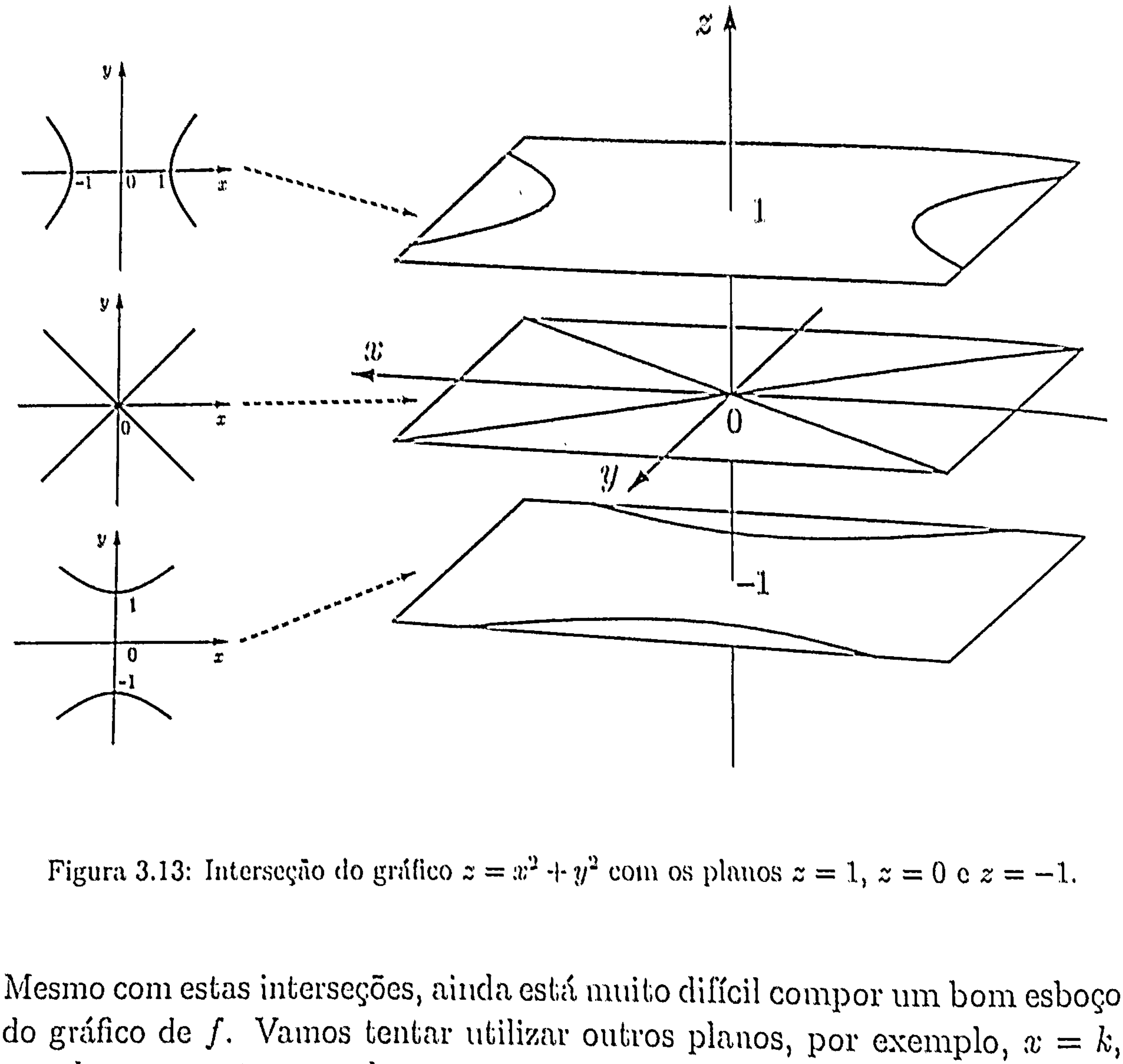


Figura 3.13: Interseção do gráfico $z = x^2 + y^2$ com os planos $z = 1$, $z = 0$ e $z = -1$.

Mesmo com estas interseções, ainda está muito difícil compor um bom esboço do gráfico de f. Vamos tentar utilizar outros planos, por exemplo, $x = k$, com k uma constante real.

Vamos tratar diretamente do caso geral ao invés de fazer alguns casos específicos primeiro pois, a esta altura, você já deve ter adquirido prática nesta técnica de "cortes". Bem, como na interseção temos $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ e $x = k$, segue-se que $z = k^2 - y^2$. Moral da história: a interseção do plano $x = k$ com o gráfico de f é a parábola $z = k^2 - y^2$ com vértice $(k, 0, k^2)$ no plano $x = k$ (as parábolas estão com concavidade "voltada para baixo"). Também não é difícil de perceber que os vértices $(k, 0, k^2)$ destas parábolas descrevem outra parábola, $z = x^2$, que nada mais é do que a interseção do plano $y = 0$ com o gráfico da função f.

Agora está mais fácil de visualizar o gráfico de f: você pode imaginar uma seqüência de parábolas $z = k^2 - y^2$, com concavidade "voltada para baixo", cujos vértices estão sobre a parábola $z = x^2$ (veja a figura (3.14)), formando uma "sela de cavalo".

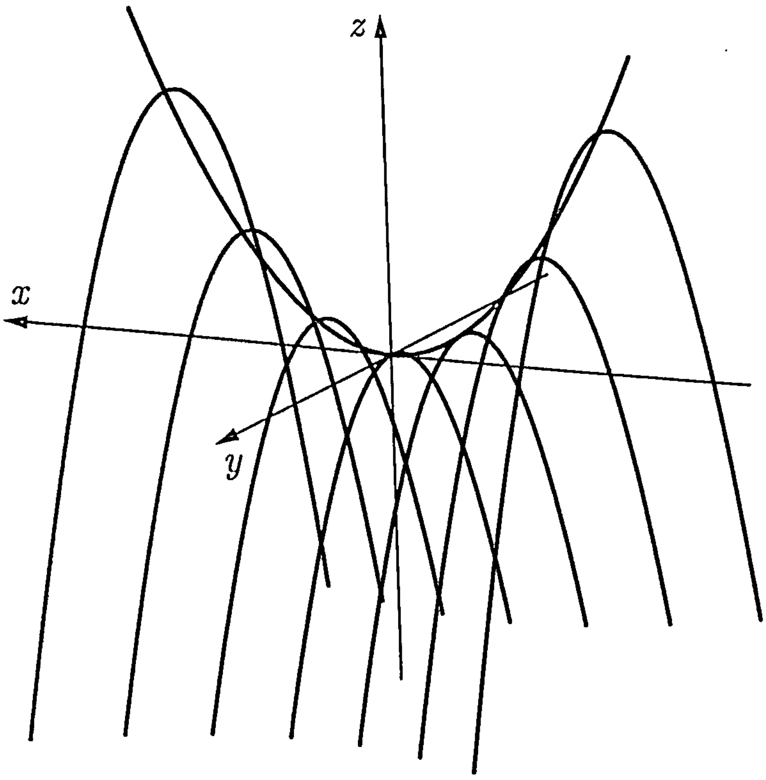


Figura 3.14: Parábolas $z = k^2 - y^2$ "dependuradas" sobre a parábola $z = x^2$.

Para encerrar, na figura (3.15), temos o gráfico de $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ gerado por computador. Nela também aparecem as curvas resultantes da interseção do gráfico de f com os planos $z = -12.0$, $z = -10.0$, $z = -8.0$, $z = -6.0$, $z = -4.0$, $z = -2.0$, $z = 0.0$, $z = 2.0$, $z = 4.0$, $z = 6.0$, $z = 8.0$, $z = 10.0$, $z = 12.0$ e $x = 0.0$. □

Estas duas funções, $z = x^2 + y^2$ e $z = x^2 - y^2$, junto com a função

$$z = -x^2 - y^2$$

(cujo gráfico pode ser obtido fazendo-se a reflexão do gráfico de $z = x^2 + y^2$ com relação ao plano xy), apesar de simples, são muito importantes. Como veremos, sob certas condições, elas descrevem o "comportamento" de funções mais complicadas nas proximidades de candidatos a extremo local.

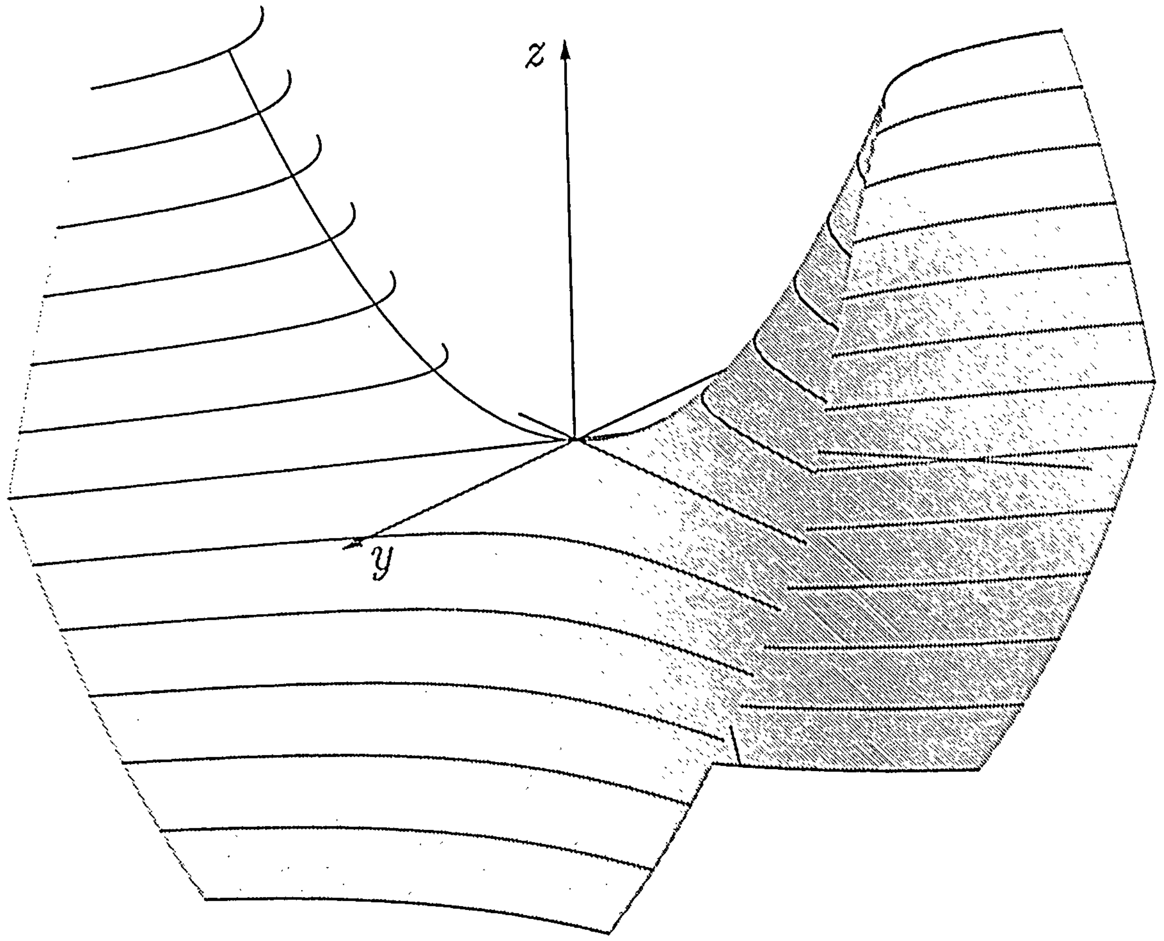


Figura 3.15: Gráfico de $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ gerado por computador.

3.3 Curvas de nível

Fazer a interseção do gráfico de uma função f de duas variáveis com planos da forma $z = k$ serve mais do que apenas nos auxiliar na construção de um esboço do gráfico de f. Esta interseção motiva um dos objetos mais importante na teoria que vamos desenvolver aqui: o conceito de curva de nível.

Suponha, por um momento, que a função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, estudada no exemplo (3.1), represente o lucro de uma determinada empresa em função das quantidades x e y de dois insumos diferentes. Uma pergunta muito natural que se pode fazer é: quais são todas as possíveis combinações nas quantidades x e y dos insumos que produzam lucro igual a 1? Por exemplo, $x = 1$ e $y = 0$ produzem lucro 1. Outras combinações que produzem lucro 1 são $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Mas como determinar todas as combinações? Bem, se o lucro deve ser 1, então $z = 1$ (pois $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ representa justamente o lucro obtido com uso das quantidades x e y de insumos). Desta maneira, x e y devem satisfazer a equação

$$1 = x^2 + y^2.$$

Descobrimos então que os únicos pontos que produzem lucro 1 são os pares ordenados sobre a circunferência de centro na origem $(0, 0)$ e raio 1. *Observe que o modo como a equação desta circunferência foi deduzida é completamente análogo ao processo de se determinar a interseção entre o gráfico de f e o plano $z = 1$!* Isto motiva a definição de curva de nível:

Definição 3.3 (Curva de nível) Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis com domínio D. Dado um número (nível) $k \in \mathbb{R}$, definimos a *curva de nível* associada a k como o conjunto

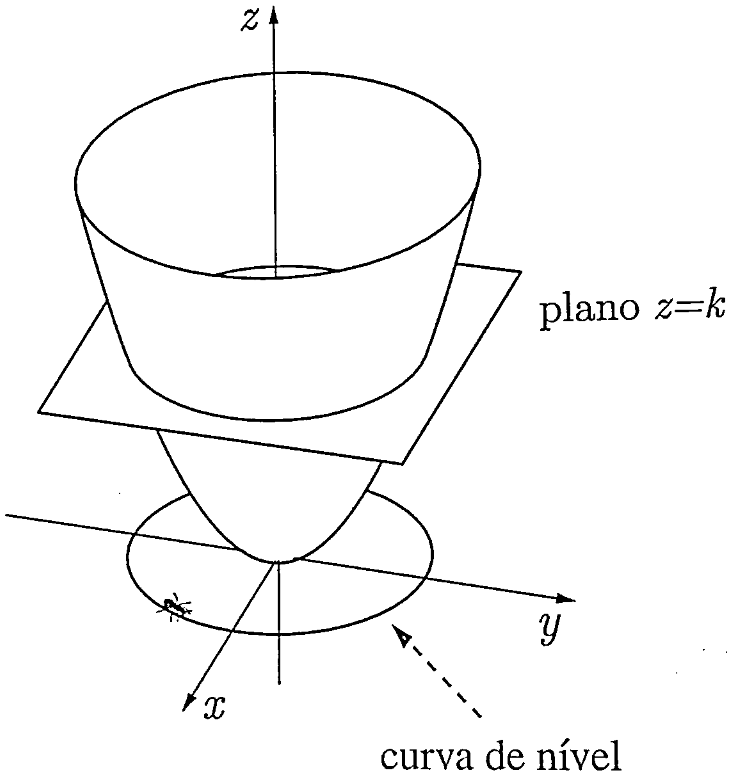
$$\{(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do *domínio* de f para os quais o valor da função é k.

Por exemplo, para a função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, a curva de nível associada ao nível 1 é a circunferência $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, a curva de nível associada ao nível 0 é o conjunto $\{(0,0)\}$ formado apenas pelo ponto $(0,0)$ e a curva de nível associada ao nível -1 é o conjunto vazio.

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

Apesar de você poder identificar uma curva de nível fazendo a interseção do gráfico da função com planos da forma $z = k$, lembre-se que o desenho da curva de nível deve ser feito do domínio da função (isto é, no plano xy) e *não* no plano $z = k$.



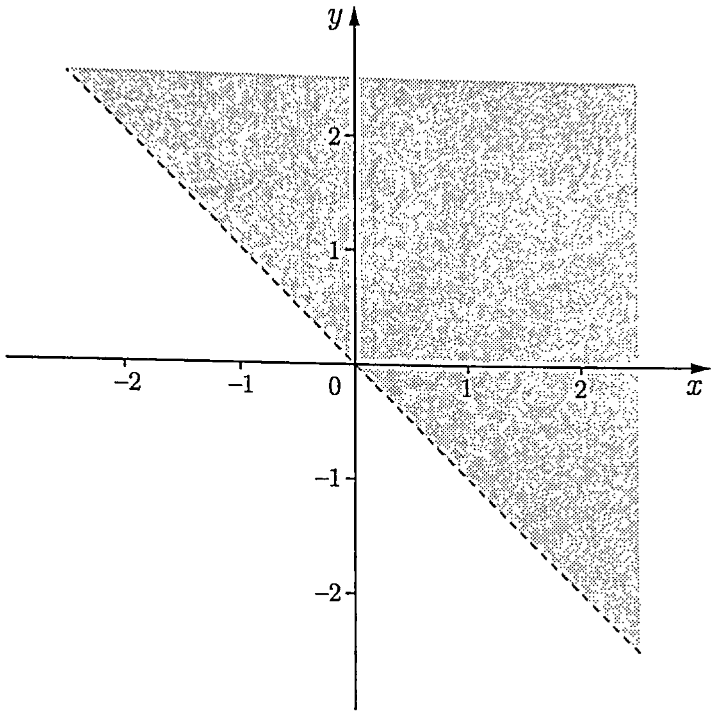
Você pode imaginar que, se calculássemos o valor da função f na posição ocupada por uma formiguinha (pontual) andando sobre a curva de nível $z = f(x, y) = k$ no plano xy, veríamos sempre o mesmo valor k.

WWW **Exercício resolvido 3.1** Considere a função

$$z = f(x, y) = \ln\left(e^{x+y} - 1\right).$$

Faça um esboço do domínio de f e uma descrição de suas curvas de nível.

Solução: Uma vez que a função logarítmica $t \mapsto \ln(t)$ está definida apenas para valores positivos de t, segue-se que $e^{x+y} - 1 > 0$, isto é, $e^{x+y} > 1$. Lembrando que ln é uma função crescente e é inversa da função exponencial $t \mapsto e^t$, obtemos que $\ln\left(e^{x+y}\right) = x + y > \ln(1) = 0$ e, portanto, $y > -x$. Assim,



$$\text{Domínio de } f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\right\}.$$

Vamos agora tentar obter uma descrição das curvas de nível de f. Para $z = k$ temos

$$\begin{aligned} z = k \Leftrightarrow \ln\left(e^{x+y} - 1\right) = k \Leftrightarrow e^{x+y} - 1 = e^k \Leftrightarrow e^{x+y} = 1 + e^k \Leftrightarrow \\ x + y = \ln\left(e^{x+y}\right) = \ln\left(1 + e^k\right) \Leftrightarrow y = -x + \ln\left(1 + e^k\right), \end{aligned}$$

isto é, a curva de nível associada ao nível $z = k$ é a reta $y = -x + \ln\left(1 + e^k\right)$ no plano xy, paralela à reta $y = -x$ e passando pelo ponto $\left(0, \ln\left(1 + e^k\right)\right)$. Na figura (3.16) temos as curvas de nível $y = -x + \ln\left(1 + e^{-2}\right)$, $y = -x + \ln(2)$ e $y = -x + \ln\left(1 + e^2\right)$ associadas aos níveis $z = -2$, $z = 0$ e $z = +2$, respectivamente. Observe que quanto maior é o valor de k, mais a reta $y = -x + \ln\left(1 + e^k\right)$ se distancia de $y = -x$ e, por outro lado, quando k tende a $-\infty$, $y = -x + \ln\left(1 + e^k\right)$ tende à reta $y = -x$. □

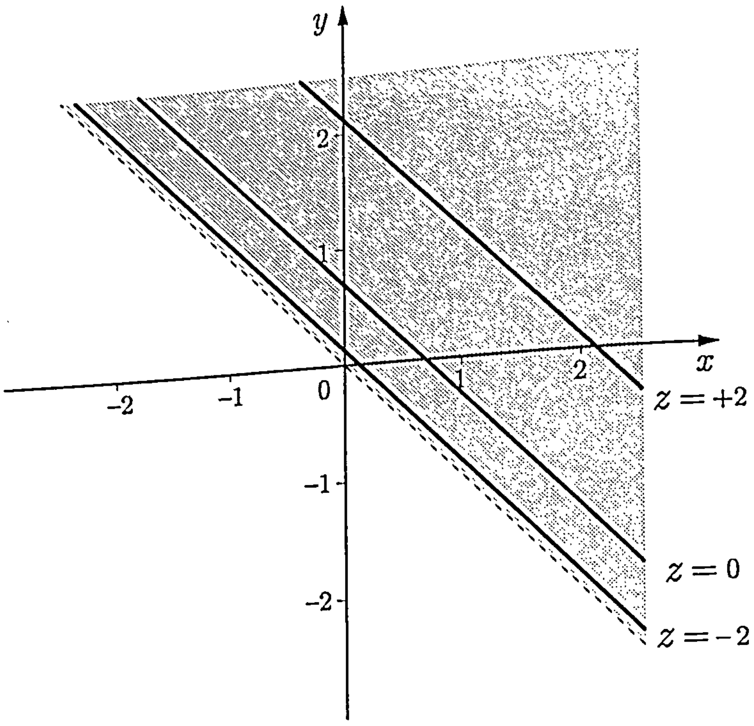


Figura 3.16: Curvas de nível $z = -2$, $z = 0$ e $z = +2$ da função $z = f(x, y) = \ln(e^{x+y} - 1)$.

3.4 Funções de três variáveis e superfícies de nível

Exemplo 3.3 Considere a função de três variáveis definida pela expressão algébrica

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Não podemos calcular a função para qualquer escolha de x, y e z. Por exemplo, o ponto $(10, 0, 0)$ não está no domínio de f. Os pontos do domínio satisfazem a desigualdade $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, isto é, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Assim

$$\text{Domínio de } f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

Geometricamente, o domínio de f é a bola, isto é, a fronteira e o interior da esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 3 (veja a figura (3.17)). Como a função f "devolve" apenas um número real, e nenhum *contradomínio* foi indicado explicitamente, vamos assumir que

$$\text{Contradomínio de } f = \mathbb{R}.$$

E o gráfico da função f? Uma vez que o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$, o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$

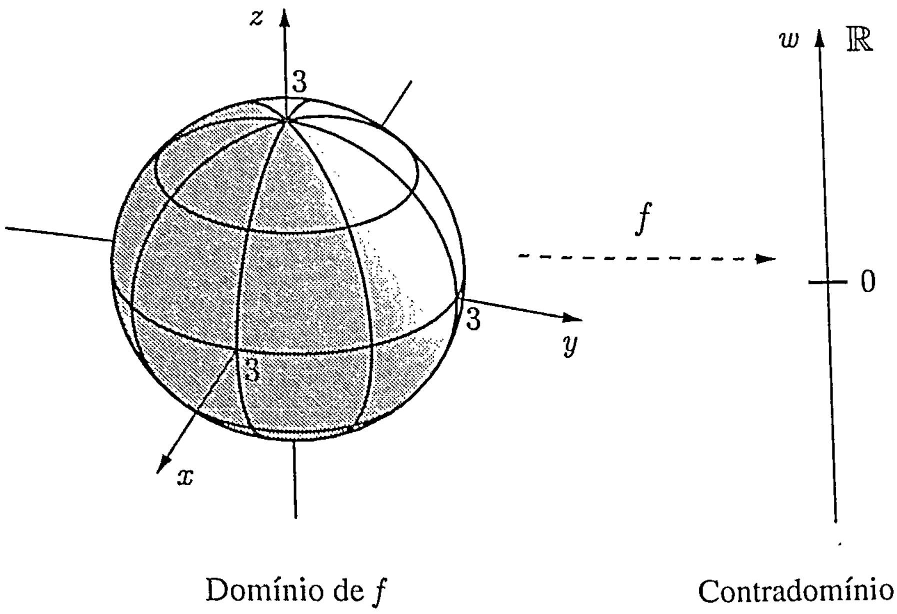


Figura 3.17: Domínio e contradomínio de $w = f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$.

e, portanto, ele não pode ser desenhado adequadamente em nosso mundo tridimensional. Contudo, ainda é possível fazer a representação geométrica de uma superfície de nível de f, isto é, do conjunto de todos os pontos (x, y, z) do domínio da função para os quais $f(x, y, z) = k$, com k uma constante. Mais formalmente:

Definição 3.4 (Superfície de nível) Seja $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis com domínio D. Dado um número (nível) $k \in \mathbb{R}$, definimos a *superfície de nível* associada a k como o conjunto

$$\{(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = k\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do *domínio* de f para os quais o valor da função é k.

Em nosso exemplo, vale o seguinte:

- Se $k < 0$, então a superfície de nível é o conjunto vazio, pois a função raiz quadrada sempre devolve um número ≥ 0.
- Se $k > 3$, então a superfície de nível é o conjunto vazio, pois $9 - x^2 - y^2 - z^2 \leq 9$, de modo que $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} \leq \sqrt{9} = 3$, isto é, não

existem pontos (x, y, z) no domínio da função f para os quais $f(x, y, z) > 3$!

- Se $0 \leq k \leq 3$, então a superfície de nível é a esfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9 - k^2\}$$

de centro em $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$, pois

$$f(x, y, z) = k \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} = k \Rightarrow$$
$$9 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9 - k^2.$$

Em particular, para $k = 3$, a superfície de nível é o conjunto $\{(0, 0, 0)\}$ formado apenas pelo ponto $(0, 0, 0)$.

Desta maneira, a função f é constante sobre cada esfera de centro $(0, 0, 0)$ no domínio de f. Se uma formiguinha (pontual) caminhasse sobre uma mesma esfera de raio r, o valor da função na posição por ela ocupada seria constante e igual a $\sqrt{9 - r^2}$. □

Exemplo 3.4 Considere a função de três variáveis definida pela expressão algébrica

$$w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

É fácil de ver que o domínio de f é todo $\mathbb{R}^3$ e que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$. O gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ e não pode ser desenhado adequadamente. O melhor que podemos fazer aqui é tentar determinar quais são as superfícies de nível de f.

Como você já deve estar com bastante prática, vamos atacar o caso geral diretamente:

$$w = f(x, y, z) = k \Rightarrow z - x^2 - y^2 = k \Rightarrow z = x^2 + y^2 + k,$$

onde k é uma constante real.

Moral da história: a superfície de nível de f associada ao nível k nada mais é do que a translação do *gráfico* do parabolóide elíptico de revolução estudado no exemplo (3.1) com relação ao eixo z de $|k|$ unidades "para cima" (isto é, no sentido positivo do eixo z), se $k > 0$ e $|k|$ unidades "para baixo" (isto é, no sentido negativo do eixo z) se $k < 0$. Na figura (3.18) estão desenhadas as superfícies de nível $w = -2$, $w = 0$ e $w = 2$ de f. □

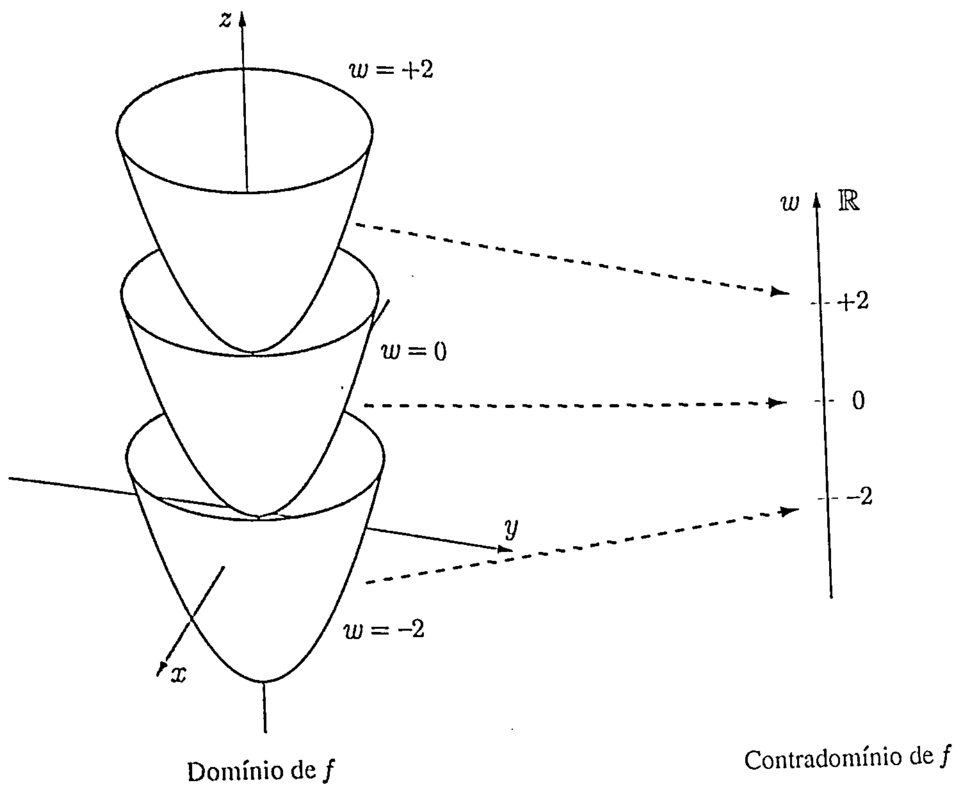


Figura 3.18: Superfícies de nível de $w = z - x^2 - y^2$ para os níveis $w = -2$, $w = 0$ e $w = +2$

3.5 Funções de n variáveis e hiperfícies de nível

Considere a função de quatro variáveis definida pela expressão algébrica $u = f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. O domínio de f é $\mathbb{R}^4$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e, portanto, o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^5$! Agora, não podemos representar nem o gráfico de f, nem qualquer hiperfície de nível de f (isto é, o conjunto de pontos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, tais que $f(x, y, z, w) = k =$ constante). A mesma dificuldade ocorre para qualquer função que dependa de $n \geq 4$ variáveis.

O que faremos é estudar situações com 2 ou 3 variáveis, onde podemos utilizar a geometria para intuir resultados e, posteriormente, mostrar que estes resultados são verdadeiros mesmo para funções de muitas variáveis.
Para terminar, aqui está um exemplo de função de n variáveis:

$$m = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

que a cada ponto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associa a *média aritmética* m destes números, e a definição formal de hiperfície de nível:

Definição 3.5 (Hiperfície de nível) Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis com domínio D. Dado um número (nível) $k \in \mathbb{R}$, definimos a *hiperfície de nível* associada a k como o conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do *domínio* de f para os quais o valor da função é k.

3.6 Exercícios

[01] Mostre que a interseção do parabolóide elíptico de revolução

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

com o plano $x = k$ é a parábola $z = y^2 + k^2$, no plano $x = k$, com vértice $(k, 0, k^2)$.

WWW

[02] Faça um esboço do gráfico de $z = f(x, y) = -x^2 - y^2$, identificando as interseções do gráfico com planos da forma $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Faça também um esboço das curvas de nível da função.

[03] **(A elipse)** O objetivo é descrever geometricamente o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (*)$$

com a e b números reais positivos (ou, em outras palavras, justificar porque a elipse $(*)$ tem o desenho que você já conhece). Vamos usar Cálculo I para fazer isto: uma vez que

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se, e somente se,

$$y = f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ ou } y = g(x) = -b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

basta determinar os gráficos de f e g (funções reais em uma variável) a fim de obter a representação geométrica de $(*)$. Utilize o que você aprendeu em Cálculo I (domínio, crescimento, concavidade, extremos locais, etc) para obter os gráficos de f e g e, em seguida, montar um esboço do desenho da elipse $(*)$.

[04] **(A hipérbole)** Utilize a idéia do exercício anterior para descrever geometricamente o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com a e b números reais positivos.

[05] **(O parabolóide elíptico)** Resolva as questões abaixo.

(a) Faça um esboço do gráfico de $z = h(x, y) = x^2/4 + y^2/9$ identificando as interseções do gráfico com planos da forma $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Faça também um esboço das curvas de nível da função.

(b) Faça um esboço do gráfico de $z = g(x, y) = 4\,x^2 + 9\,y^2$ identificando as interseções do gráfico com planos da forma $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Faça também um esboço das curvas de nível da função.

(c) Mais geralmente, faça um esboço do gráfico de

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (**)$$

com a e b constantes positivas, identificando as interseções do gráfico com planos da forma $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Faça também um esboço das curvas de nível da função. O que acontece quando $a = b$?

(d) Quais são os valores de a e b na equação (**) para as funções h e g dos itens (a) e (b)? E para a função do exemplo (3.1) na página 81?

O gráfico da função (**) recebe o nome de *parabolóide elíptico*.

[06] Por que você acha que o gráfico da função $z = f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$ do exercício anterior recebe o nome de parabolóide elíptico? Por que não chamá-lo de elipsóide parabólico?

[07] Por que você acha que o gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ estudada no exemplo (3.2) na página 93 recebe o nome de parabolóide hiperbólico? Por que não chamá-lo de hiperbolóide parabólico?

[08] Faça um esboço das curvas de nível da função $z = g(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$. Compare com as curvas de nível do parabolóide hiperbólico estudado no exemplo (3.2). O que você conclui?

*[09] Faça um esboço do gráfico de $z = f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ identificando as interseções do gráfico com planos da forma $z = k$, $y = k$ e $x = k$. Faça também um esboço das curvas de nível da função.

[10] Considere a função $z = f(x,y) = \ln(e^{x+y} - 1)$ definida no exercício resolvido (3.1).

(a) Escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto $(8,2)$ e da curva de nível que passa pelo ponto $(-2,3)$.

(b) Mais geralmente, escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto (a,b), com $b > -a$.

(c) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 2$ é constante, isto é, que $y = -x + 2$ é uma curva de nível de f.

(d) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 3$ é constante, isto é, que $y = -x + 3$ é uma curva de nível de f.

(e) Se, por um momento, f representasse um lucro, sob qual reta você gostaria de estar: $y = -x + 2$ ou $y = -x + 3$? Justifique sua resposta.

[11] Considere a função $z = f(x,y) = \sqrt{(x-y)/(x+y)}$. Determine geometricamente o domínio de f e faça um esboço das curvas de nível da função.

*[12] Considere a função $z = g(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)/(x-y)}$. Determine geometricamente o domínio de g e faça um esboço das curvas de nível da função.

*[13] Considere a função $z = h(x,y) = \operatorname{sen}(x-y)$. Determine geometricamente o domínio de h e faça um esboço das curvas de nível da função.

Até agora, utilizamos os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$, com k uma constante, para nos ajudar a fazer o esboço do *gráfico* de uma função de *duas* variáveis. A mesma técnica pode ser aplicada para nos ajudar a fazer o esboço de uma *superfície de nível* de uma função de *três* variáveis.

[14] (O plano) Resolva as questões abaixo.

(a) Considere a função

$$w = f(x,y,z) = 2x + 3y + 4z.$$

Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada aos níveis $w = +12$, $w = 0$ e $w = -12$.

(b) Considere a função

$$w = f(x, y, z) = 2\,x + 3\,y.$$

Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada aos níveis $w = +12$, $w = 0$ e $w = -12$.

(c) Considere a função

$$w = f(x, y, z) = 2\,x.$$

Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada aos níveis $w = +12$, $w = 0$ e $w = -12$.

(d) Mais geralmente, considere a função

$$w = f(x, y, z) = a\,x + b\,x + c\,x,$$

onde a, b e c são constantes não simultaneamente nulas, isto é, a, b e c são constantes tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = d$ nos casos abaixo.

(1) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.
(2) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d = 0$.
(3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ e $d \neq 0$.
(4) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ e $d = 0$.
(5) $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $d \neq 0$.
(6) $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 0$.

O conjunto de pontos que satisfazem a equação $a\,x + b + c\,z = d$ (a superfície de nível $w = d$ de f) é um plano. Compare com a equação (2.16) da página 70.

[15] (**O elipsóide**) Resolva as questões abaixo.

(a) Considere a função

$$w = f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = 1$.

(b) Mais geralmente, considere a função

$$w = f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

onde a, b e c são constantes positivas. Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = 1$. Observe que os pontos desta superfície satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (***)$$

(c) O que acontece com o desenho da superfície de nível $w = 1$ quando $a = b$? E quando $b = c$? E quando $a = b = c$?

(d) O que você pode dizer sobre as superfícies de nível de f para outros níveis?

O conjunto de pontos que satisfazem a equação (***) (a superfície de nível $w = 1$ de f) recebe o nome de *elipsóide*.

[16] Por que você acha que o conjunto de pontos que satisfazem a equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ do exercício anterior recebe o nome de elipsóide?

WWW

[17] **(O cone, o hiperbolóide elíptico de uma e duas folhas)** Considere a função

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

(a) Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = -1$. Observe que os pontos desta superfície satisfazem a equação

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

Esta superfície de nível é denominada *hiperbolóide elíptico de duas folhas.*

(b) Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = 0$. Observe que os pontos desta superfície satisfazem a equação

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Esta superfície de nível é denominada *cone.*

(c) Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = 1$. Observe que os pontos desta superfície satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Esta superfície de nível é denominada *hiperbolóide elíptico de uma folha*.

Por que você acha que estas superfícies de nível foram batizadas com estes nomes?

[18] **(Superfícies cilíndricas)** Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$. WWW

(a) $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$.

(b) $w = f(x, y, z) = x^2 - y$.

(c) $w = f(x, y, z) = x^2 + 2 - z$.

(d) $w = f(x, y, z) = |y| - z$.

Todas estas superfícies de nível têm algo em comum: apesar de f depender de três variáveis, apenas *duas* aparecem na expressão algébrica que define f. Mais especificamente, temos

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & w = f(x, y, z) = g(x, y) \end{array},$$

onde

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

para o caso onde é a variável "z" que está faltando na definição de f. Como você deve ter percebido, para desenhar uma superfície de nível $w = k$ de uma função deste tipo, basta desenhar a curva de nível $g(x, y) = k$ de g no plano xy e então, sobre cada ponto desta curva, desenhar uma reta perpendicular ao plano xy (veja a figura (3.19)). Os casos onde a variável "x" ou a variável "y" estão faltando são tratados de maneira análoga. Estas superfícies de nível são denominadas *superfícies cilíndricas*.

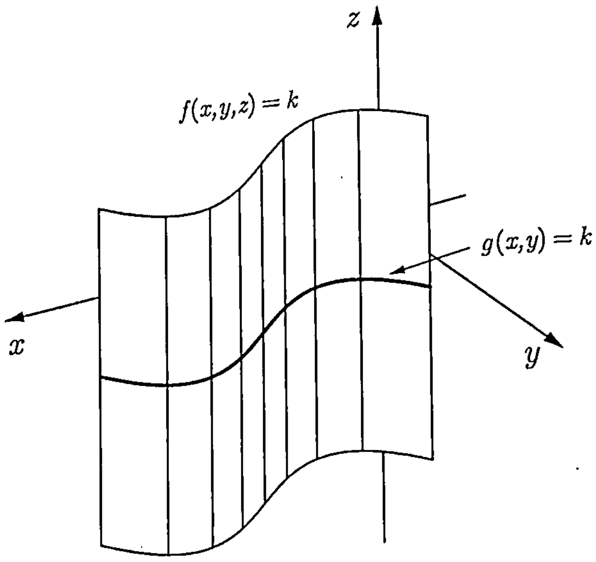


Figura 3.19: Uma superfície cilíndrica.

WWW [19] **(Superfícies de revolução)** Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$.

(a) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.
(b) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - e^{2z}$.
(c) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (\cos(z) + 2)^2$.
(d) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$.

Todas estas superfícies de nível têm algo em comum: os cortes $z = k$ são circunferências com centro no eixo z! Mais especificamente, se

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (g(z))^2 \end{array},$$

onde

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

é uma função não-negativa, então a interseção da superfície de nível $f(x,y,z) = 0$ de f com o plano $z = k$ é uma circunferência de centro em $(0,0,k)$ e raio $g(k)$ (veja a figura (3.20)). Estas superfícies de nível são denominadas *superfícies de revolução*. Geometricamente, o desenho de uma superfície de revolução pode ser obtido através da rotação de uma curva plana (a *curva geratriz* da superfície) em torno de um eixo (o *eixo de revolução* da superfície) que, em nosso caso, é o eixo z.

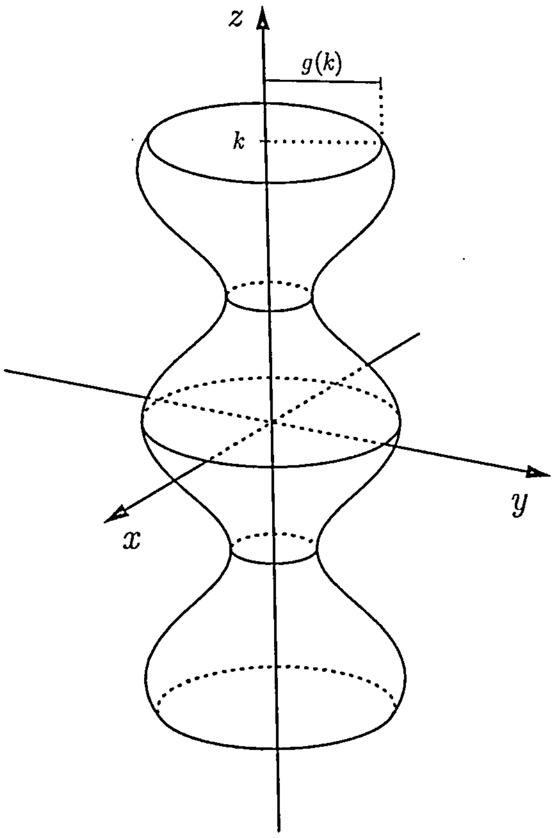


Figura 3.20: Uma superfície de revolução.

Evidentemente, as superfícies de nível $w = 0$ de funções do tipo

$$w = f(x, y, z) = x^2 + z^2 - (g(y))^2 \text{ e } w = f(x, y, z) = y^2 + z^2 - (g(x))^2$$

também são superfícies de revolução, com eixos de revolução dados, respectivamente, pelos eixos y e x. De fato, podemos generalizar um pouco mais: as superfícies de nível $w = 0$ de funções do tipo

$$w = f(x, y, z) = h(x^2 + y^2, z), w = f(x, y, z) = h(x^2 + z^2, y) \text{ e }$$
$$w = f(x, y, z) = h(y^2 + z^2, x),$$

com $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, também podem ser descritas como a rotação de uma curva plana em torno de um eixo de revolução. Para ver como esta generalização funciona, faça um esboço da superfície de nível $w = 0$ da função $w = f(x, y, z) = z - ln(x^2 + y^2)$.

[20] Utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$.

(a) $w = f(x, y, z) = z - (x-1)^2 - (y-1)^2$.
(b) $w = f(x, y, z) = z - (x+1)^2 - (y-1)^2$.
(c) $w = f(x, y, z) = z - (x-1)^2 + (y-1)^2$.
(d) $w = f(x, y, z) = z - (x+1)^2 + (y-1)^2$.

[21] O desenho de uma esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1 pode ser o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis? Justifique sua resposta.

[22] Resolva as questões abaixo.

(a) Considere a função $w = f(x) = x^2$. Determine as curvas de nível de f e faça um esboço de seu gráfico.
(b) Considere a função $w = g(x, y) = x^2$. Determine as superfícies de nível de g e faça um esboço de seu gráfico.
(c) Considere a função $w = h(x, y, z) = x^2$. Determine as hiperfícies de nível de h.
(d) Suponha que você chegue em uma sala de aula onde a única sentença escrita no quadro é: *"Faça um esboço do gráfico da função $w = x^2$!"*. Que desenho você faria?

[23] Resolva as questões abaixo.

(a) Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2$. Escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f.
(b) Mais geralmente, dada uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f. O que você pode dizer a respeito das curvas de nível de F para níveis diferentes de 0?
(c) Seja $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f.
(d) Mais geralmente, dada uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escreva uma função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f. O que você pode dizer a respeito das superfícies de nível de F para níveis diferentes de 0?

[24] Na figura (3.21) temos, respectivamente, o desenho das curvas de nível de seis funções diferentes:

(a) $z = f_1(x, y) = \operatorname{sen}(xy)/(xy)$,
(b) $z = f_2(x, y) = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$,
(c) $z = f_3(x, y) = 15\, x^2 y^2 e^{-x^2-y^2}/(x^2 + y^2)$,
(d) $z = f_4(x, y) = (xy^3 - x^3 y)/2$,
(e) $z = f_5(x, y) = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$,
(f) $z = f_6(x, y) = (y^4 - 8\, y^2 - 4\, x^2)/21$.

Faça a associação destas curvas de nível com cada um dos gráficos na figura (3.22).

[25] As superfícies de nível da função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ associadas aos níveis $w = -2$, $w = 0$ e $w = 2$ (veja a figura (3.18)) podem se interceptar? Justifique sua resposta!

[26] Utilize um programa de computador para fazer os gráficos das seguintes funções de duas variáveis:

(a) $z = f(x, y) = x^2 - y^2$. (Sela de cavalo)
(b) $z = f(x, y) = x^3 - 3\, xy^2$. (Sela de macaco)
(c) $z = f(x, y) = 4\, x^3 y - 4\, xy^3$. (Sela de cachorro)

Consulte a página http://www.mat.puc-rio.br/cursos/MAT1152/ para uma lista de programas disponíveis. Tente também visualizar as curvas de nível destas funções.

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis definida no domínio D. Dizemos que um ponto $\mathrm{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in D$ é um *ponto de máximo global* de f se $f(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{x}^*)$ para todo $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (isto é, f assume seu maior valor no ponto x^*). Analogamente, dizemos que um ponto $\mathrm{x}^* \in D$ é um *ponto de mínimo global* de f se $f(\mathrm{x}) \geq f(\mathrm{x}^*)$ para todo $\mathrm{x} \in D$ (isto é, f assume seu menor valor no ponto x^*). Um *extremo global* é um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

[27] Mostre que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global da função

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

estudada no exemplo (3.1).

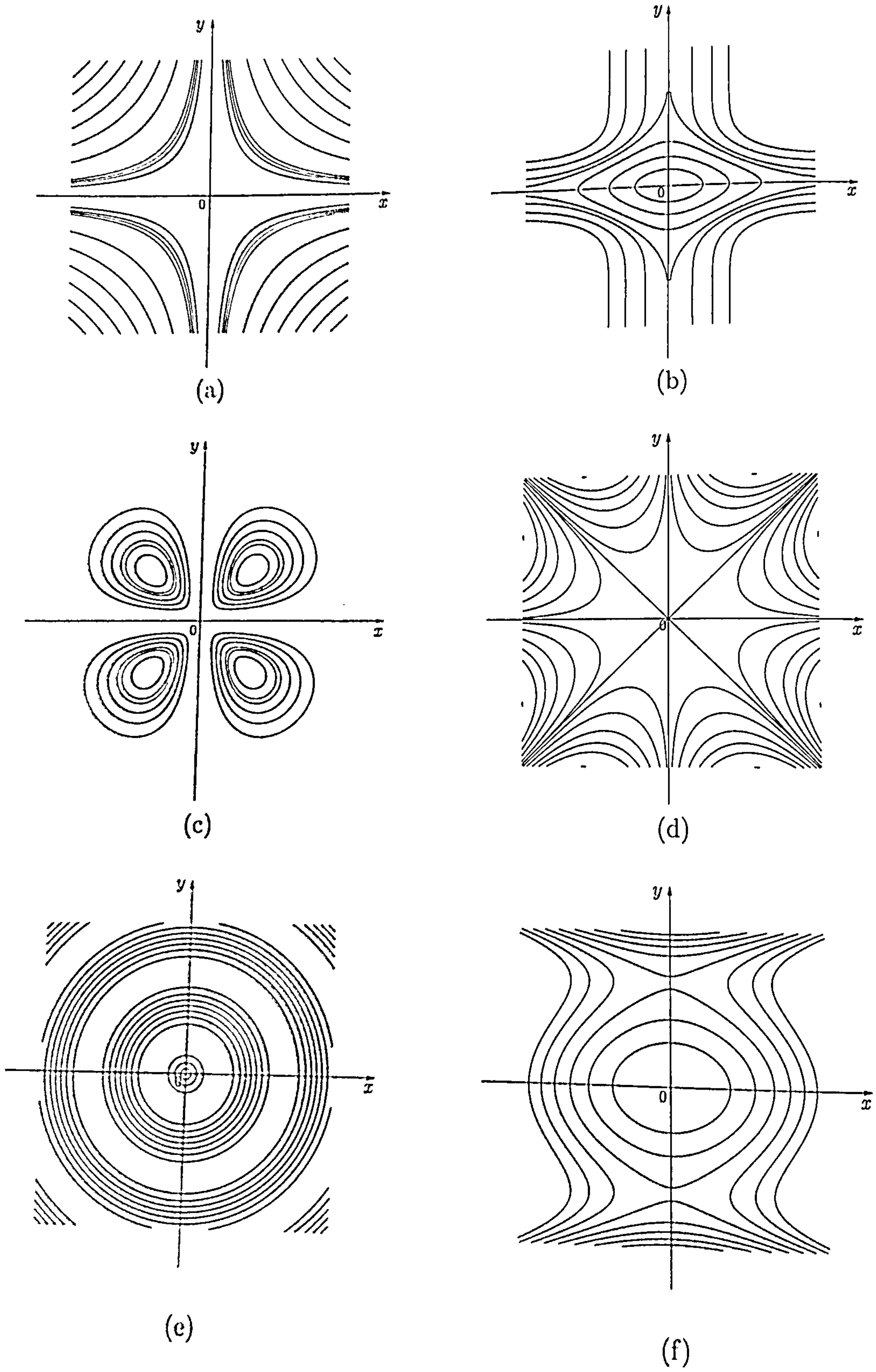
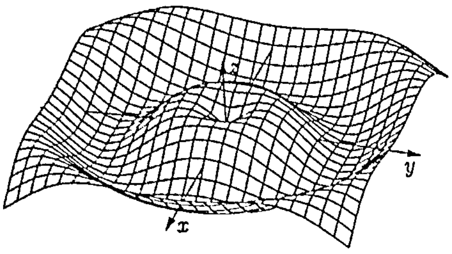
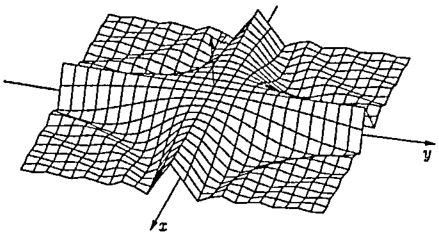


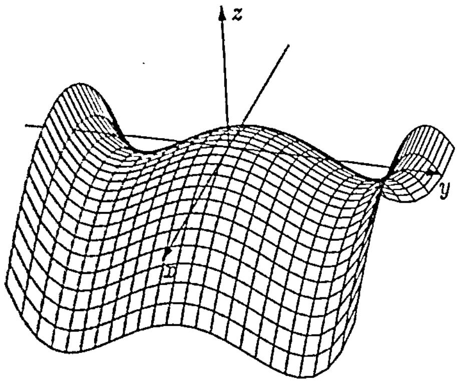
Figura 3.21: Curvas de nível de seis funções diferentes.



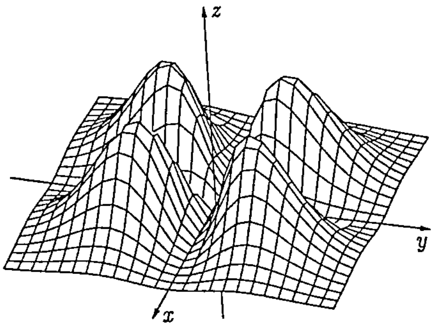
(1)



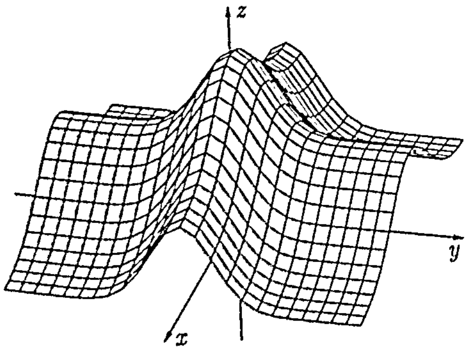
(2)



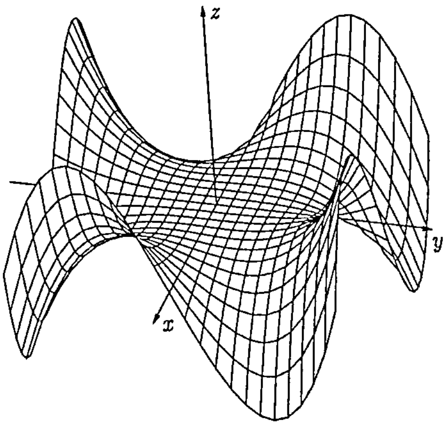
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura 3.22: Gráfico de seis funções diferentes.

[28] Mostre que $(0, 0)$ não é nem um ponto de máximo global e nem um ponto de mínimo global da função $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ estudada no exemplo (3.2).

[29] Mostre que a função $z = f(x, y) = \ln\left(e^{x+y} - 1\right)$, estudada no exercício resolvido (3.1), não possui extremos globais.

[30] Encontre os extremos globais (caso existam) da função

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$$

estudada no exemplo (3.3).

[31] Mostre que a função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, estudada no exemplo (3.4), não possui extremos globais.

[32] Considere a função de duas variáveis

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$. Faça um esboço do gráfico de f em cada um dos três casos abaixo.

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$.
(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

[33] A diferença de potencial E entre duas soluções eletrólitas separadas por uma membrana é dada por

$$E = \frac{R \cdot T}{F} \cdot \frac{x - y}{x + y} \cdot \ln z,$$

onde R, T e F são constantes que representam, respectivamente, a constante universal dos gases, a temperatura absoluta e a unidade Faraday. As variáveis x e y representam as mobilidades de Na^+ e Cl^-, respectivamente. A variável z representa a razão c_1/c_2, onde c_1 e c_2 são as concentrações média de sal (NaCl) em cada lado da membrana. Assuma que $R \cdot T/F = 25$.

(a) Escreva a superfície de nível $E = -12$ na forma $z = f(x, y)$.
(b) Na prática, $y = 3x/2$. Faça esta substituição, simplifique e esboce o gráfico da função (de uma variável) resultante.

[34] Uma chapa plana de metal está situada no plano xy de modo que a temperatura T (em °C) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem $(0, 0)$.

(a) Descreva as *isotérmicas*, isto é, as curvas de nível de T que representam pontos onde a temperatura é constante.

(b) Se a temperatura no ponto $(4, 3)$ é 40°C, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C.

[35] O potencial elétrico V no ponto (x, y, z) é dado por

$$V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}.$$

(a) Descreva as *superfícies eqüipotenciais*, isto é, as superfícies de nível de V que representam pontos onde o potencial elétrico é constante.

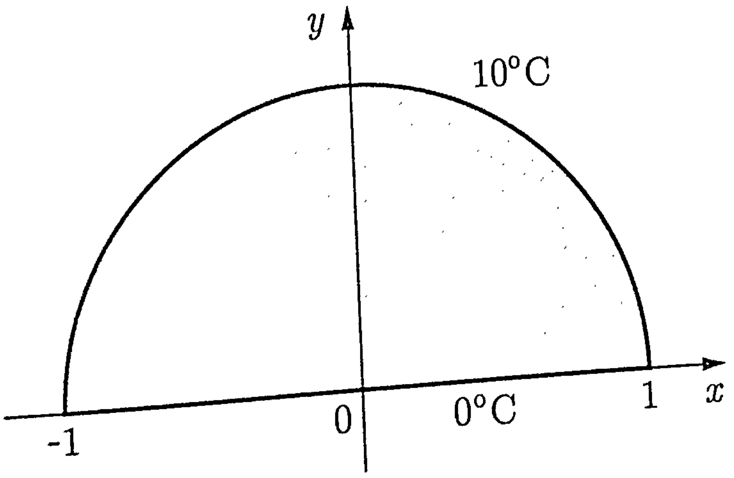
(b) Ache a equação da superfície eqüipotencial $V = 120$.

[36] De acordo com a *lei de gravitação universal* de Newton, se uma partícula de massa m_0 está na origem $(0, 0, 0)$ de um sistema de coordenadas xyz, então o módulo F da força exercida sobre uma partícula de massa m situada no ponto (x, y, z) é dada por

$$F = G \cdot \frac{m_0 \cdot m}{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. F depende de quantas variáveis? Se $m_0 = 1.99\,10^{30}$ kg e $m = 5.98\,10^{24}$ kg, descreva as superfícies de nível da função resultante. Qual é o significado físico dessas superfícies de nível?

[37] A fronteira superior da região semicircular da figura abaixo



é mantida à temperatura de 10°C, enquanto a fronteira inferior é mantida em 0°C. A temperatura de *estado estacionário* T em um ponto (x, y) interior à região é dada por

$$T(x,y) = \frac{20}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{1-x^2-y^2}\right).$$

Mostre que as isotérmicas são arcos de círculos com centros no eixo y negativo e que passam pelos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Esboce a isotérmica correspondente à temperatura de 5°C.

[38] De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão P, o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela equação

$$P \cdot V = k \cdot T,$$

para uma constante k. Expresse P como função de V e T e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual é o significado físico dessas curvas de nível?

[39] A força P gerada por um rotor eólico é proporcional ao produto da área A varrida pelas pás do rotor e à terceira potência da velocidade v do vento.

(a) Expresse P em função de A e v.

(b) Descreva as curvas de nível de P e explique seu significado físico.

(c) Quando o diâmetro da área circular varrida pelas pás é 2 metros e a velocidade do vento é 30 km/h, então $P = 3000$ watts. Ache a equação da curva de nível $P = 4000$ watts.

[40] Se x é a velocidade do vento (em m/s) e y é a temperatura (em °C), então o *fator de resfriamento eólico* F (em $(\text{kcal}/\text{m}^2)/\text{h}$) é dado por

$$F = (33 - y) \cdot (10\sqrt{x} - x + 10.5).$$

(a) Ache as velocidades e temperatura para os quais F é zero (admita que $0 \leq x \leq 50$ e $-50 \leq y \leq 50$).

(b) Se $F \geq 1400$, pode ocorrer congelamento em partes expostas do corpo humano. Esboce o desenho da curva de nível $F = 1400$.

[41] A pressão atmosférica nas proximidades do solo em uma certa região é dada por

$$p(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c,$$

com a, b e c constantes positivas. Descreva as isobáricas (curvas de nível de p) para pressões superiores a c.

[42] **(O toro)** Resolva as questões abaixo.

(a) Considere a função

$$w = f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 5^2 - 2^2)^2 - 4\,(5)^2\,(x^2 + y^2).$$

Utilize os planos $z = k$, $y = 0$ e $z = 0$ para fazer um esboço da superfície de nível de f associada ao nível $w = 0$.

(b) Mais geralmente, considere a função

$$w = f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4\,R^2\,(x^2 + y^2),$$

onde R e r são constantes positivas com $R > r$. Utilize os planos $x = k$, $y = 0$ e $z = 0$ para concluir que a superfície de nível de f associada ao nível $w = 0$ tem o formato de uma câmara de ar de um pneu de automóvel, conforme indicado na figura abaixo. Esta superfície recebe o nome de *toro*.

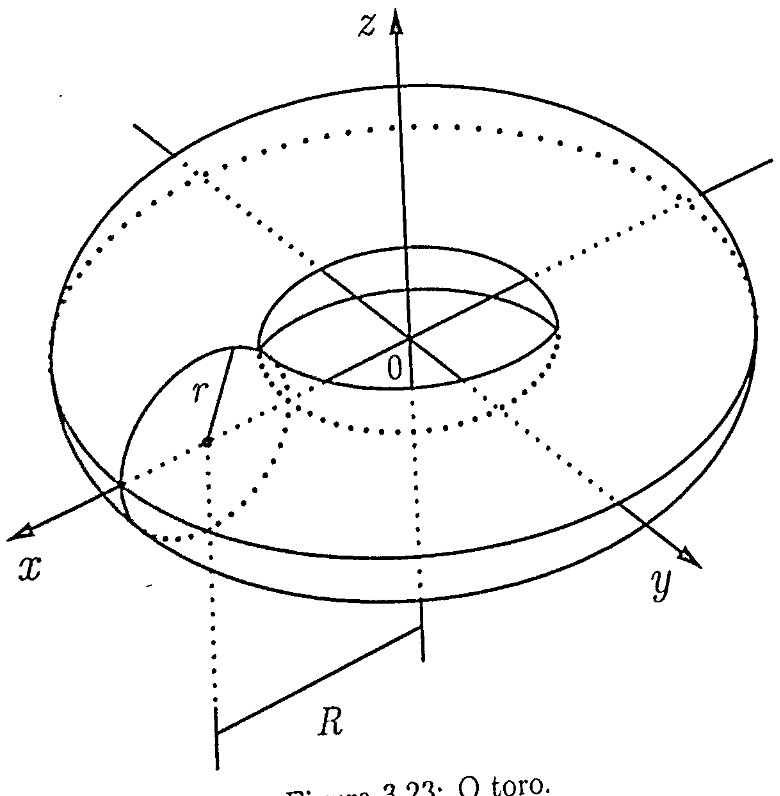


Figura 3.23: O toro.