Capítulo 4

Continuidade, noções de topologia e o teorema de Weierstrass

No capítulo anterior estudamos o conceito de função de várias variáveis, que é o objeto matemático por excelência para se modelar problemas. Vimos também as diversas maneiras de representá-lo geometricamente: seja através de seu gráfico ou seja através de suas hiperfícies de nível. Com estes recursos geométricos vamos estudar uma primeira propriedade interessante que funções podem ter: continuidade.

4.1 Por que funções contínuas são importantes?

O conceito de continuidade não deve ser novo para você pois você já deve tê-lo estudado em Cálculo I. De qualquer modo, vamos fazer uma revisão do assunto.

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável e $p \in D$ um ponto do domínio D de f. A função f associa p no domínio a $f(p)$ na imagem. Considere agora $x \in D$ uma aproximação de p. O que podemos dizer a respeito de $f(x)$ (*o valor de f na aproximação*) e $f(p)$ (*o valor de f no ponto*)? Para uma função contínua é possível "amarrar" estes quatro valores: se f é *contínua em p*, então $f(x)$ pode ser considerado uma aproximação de $f(p)$, tão boa quanto se queira, desde que x esteja suficientemente próximo de p. Em outras palavras, para garantir que $f(x)$ esteja suficientemente próximo de $f(p)$ (na imagem) basta tomar x suficientemente próximo de p (no domínio).

Como formalizar matematicamente este conceito? Através de seqüências numéricas: construir aproximações de p é construir seqüências x_n que convergem para p e, para funções contínuas em p, espera-se que $f(x_n)$ convirja para $f(p)$ (veja figura (4.1)). Mais formalmente:

Definição 4.1 (Continuidade) Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua* em um ponto p de seu domínio D se *para toda* seqüência

$$x_n \to p$$

no domínio, tem-se

$$f(x_n) \to f(p)$$

na imagem. Se f não é contínua em $p \in D$, então dizemos que f é *descontínua* em p. Se f é contínua em *todos* os pontos de seu domínio, então dizemos simplesmente que f é contínua.

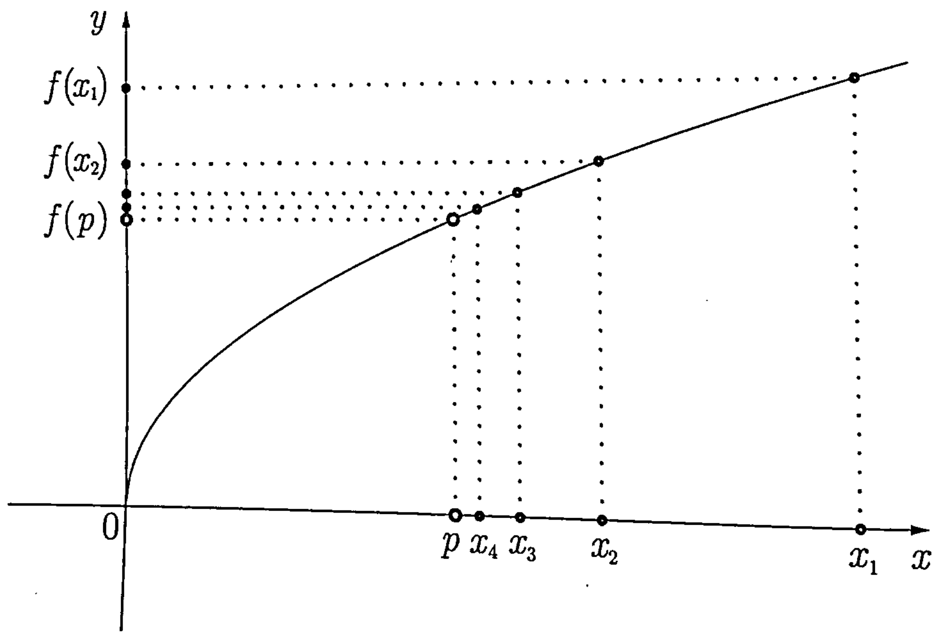

Figura 4.1: Ilustração do conceito de continuidade em 1 variável através do gráfico de f.

Mas por que funções contínuas, isto é, funções que satisfazem a definição acima, são importantes? Vamos citar duas propriedades de interesse.

Propriedade 1:

O valor de uma função contínua em um ponto p é "estável" por pequenas variações em p. Para exemplificar, considere a seguinte situação: você está modelando matematicamente um determinado fenômeno (digamos, o quanto uma ponte suspensa é resistente ao vento) e é necessário calcular a função f resultante em pontos da forma $2 \cdot k \cdot \pi$, com $k = 0, 1, \ldots, 99$. Se você está utilizando um computador para fazer os cálculos, certamente você não conseguirá calcular a função exatamente nestes pontos pois, sendo o computador uma máquina com precisão finita, ele não conseguirá representar o número real π que possui infinitas casas decimais não-periódicas. O melhor que se consegue fazer é calcular a função f em aproximações destes pontos, digamos, em $6.28 \cdot k$ ou $6.2831 \cdot k$ (isto sem considerar os erros de arredondamento efetuados durante os cálculos).

Você passaria por uma ponte suspensa que foi projetada utilizando aproximações e não os valores originais? Se a função que descreve o fenômeno é contínua, então você pode ficar mais tranqüilo pois você sabe que, para pontos suficientemente próximos de $2 \cdot k \cdot \pi$, o valor da função nestes pontos estará tão próximo do valor correto $f(2 \cdot k \cdot \pi)$ quanto se queira. Basta então escolher uma tolerância e prosseguir com os cálculos.

Propriedade 2:

Nem todo problema de otimização possui uma solução, isto é, nem toda função definida em um conjunto possui um máximo global ou um mínimo global neste conjunto. Uma importante pergunta é: como saber, *a priori*, se um problema de otimização possui ou não uma solução? Um teorema que resolve esta questão envolve o conceito de continuidade.

Teorema 4.1 (Weierstrass) Toda função $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua* definida no *intervalo fechado e limitado* $[a, b]$ possui pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global em $[a, b]$.

Observe que o teorema exige duas coisas: (1) a continuidade da função f e, (2), que ela esteja definida em um intervalo fechado e limitado da forma $[a, b]$. Se uma ou as duas destas condições não se verificarem, nada se pode garantir. Faça algumas figuras e tente pensar em exemplos e contra-exemplos!

4.2 Continuidade em várias variáveis

A idéia é a mesma! Vamos começar com duas variáveis: considere uma função $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto do domínio D de f. A função associa (a,b) no domínio a $f(a,b)$ na imagem. Considere agora (x,y) uma aproximação de (a,b), isto é, x é uma aproximação de a e y é uma aproximação de b. O que podemos dizer a respeito de $f(x,y)$ (*o valor de f calculado na aproximação*) e $f(a,b)$ (*o valor de f no ponto*)? Como antes, para uma função contínua em (a,b), vale que $f(x,y)$ pode ser considerado uma aproximação de $f(a,b)$, tão boa quanto se queira, desde que (x,y) esteja suficientemente próximo de (a,b), isto é, desde que x esteja suficientemente próximo de a e y esteja suficientemente próximo de b (veja a figura (4.2)). A definição formal, como antes, faz o uso de seqüências.

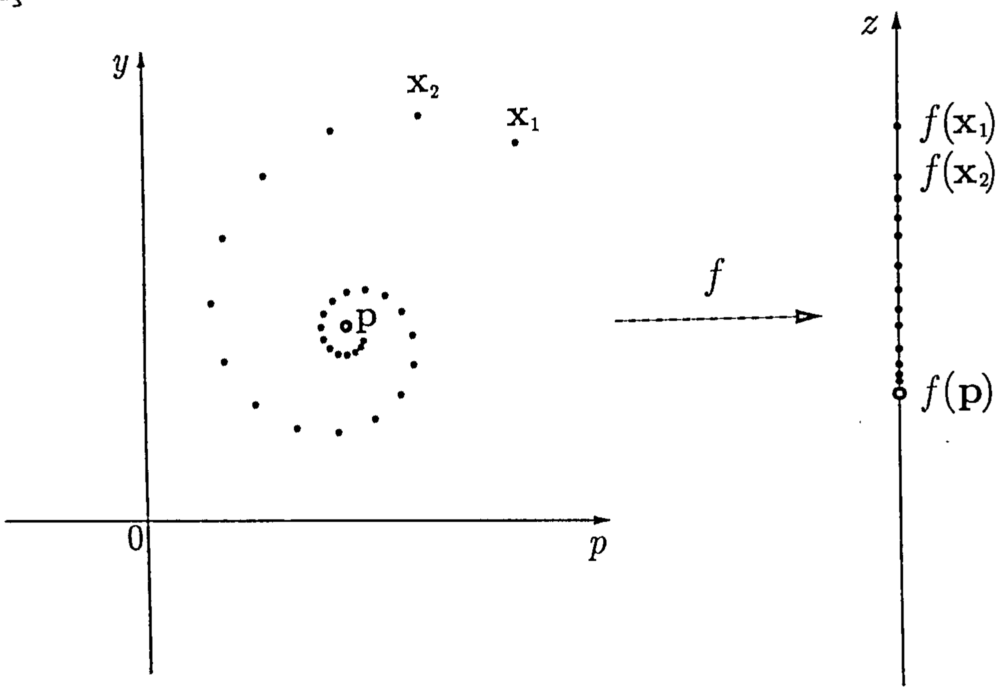

Figura 4.2: Ilustração do conceito de continuidade em 2 variáveis através do domínio/contradomínio de f.

Definição 4.2 (Continuidade) Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua* em um ponto $\mathbf{p} = (a,b)$ de seu domínio D se *para toda* seqüência

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n) \to (a,b) = \mathbf{p}$$

no domínio, isto é, se *para todo* par de seqüências numéricas

$$x_n \to a \quad \text{e} \quad y_n \to b,$$

com $(x_n, y_n) \in D$, tem-se

$$f(x_n, y_n) \to f(a, b)$$

na imagem. Se f não é contínua em $\mathbf{p} \in D$, então dizemos que f é *descontínua* em $\mathbf{p}$. Se f é contínua em *todos* os pontos de seu domínio, então dizemos simplesmente que f é contínua. Note que $z_n = f(x_n, y_n)$ é uma seqüência de números reais!

Talvez a melhor maneira de entender como uma função contínua se parece é visualizar o gráfico de uma função que *não é contínua.*

Exemplo 4.1 A função

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } y > 0, \\ 1 & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

não é contínua em $\mathbf{p} = (0, 0)$ pois a seqüência

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

converge para $\mathbf{p} = (0, 0)$ mas

$$f(\mathbf{x}_n) = f(x_n, y_n) = f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 2$$

converge para 2, que é diferente de $1 = f(\mathbf{p})$ (veja a figura (4.3)). Em verdade, f é descontínua em todos os pontos da forma $(a, 0)$ (o eixo x) e contínua nos demais pontos. □

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

Para mostrar que uma função é contínua em um ponto (a, b), é preciso provar que para *todas* as seqüências (x_n, y_n) que convergem para (a, b), tem-se $f(x_n, y_n)$ convergente para $f(a, b)$. Estabelecer a convergência para uma ou duas seqüências particulares não é suficiente para demonstrar a continuidade da função no ponto. No exemplo anterior, a seqüência $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$ converge para $(0, 0)$ e $f(x_n, y_n) = f(1/n, 0) = 1$ converge para $1 = f(0, 0)$ mas, mesmo assim, f é descontínua em $(0, 0)$.

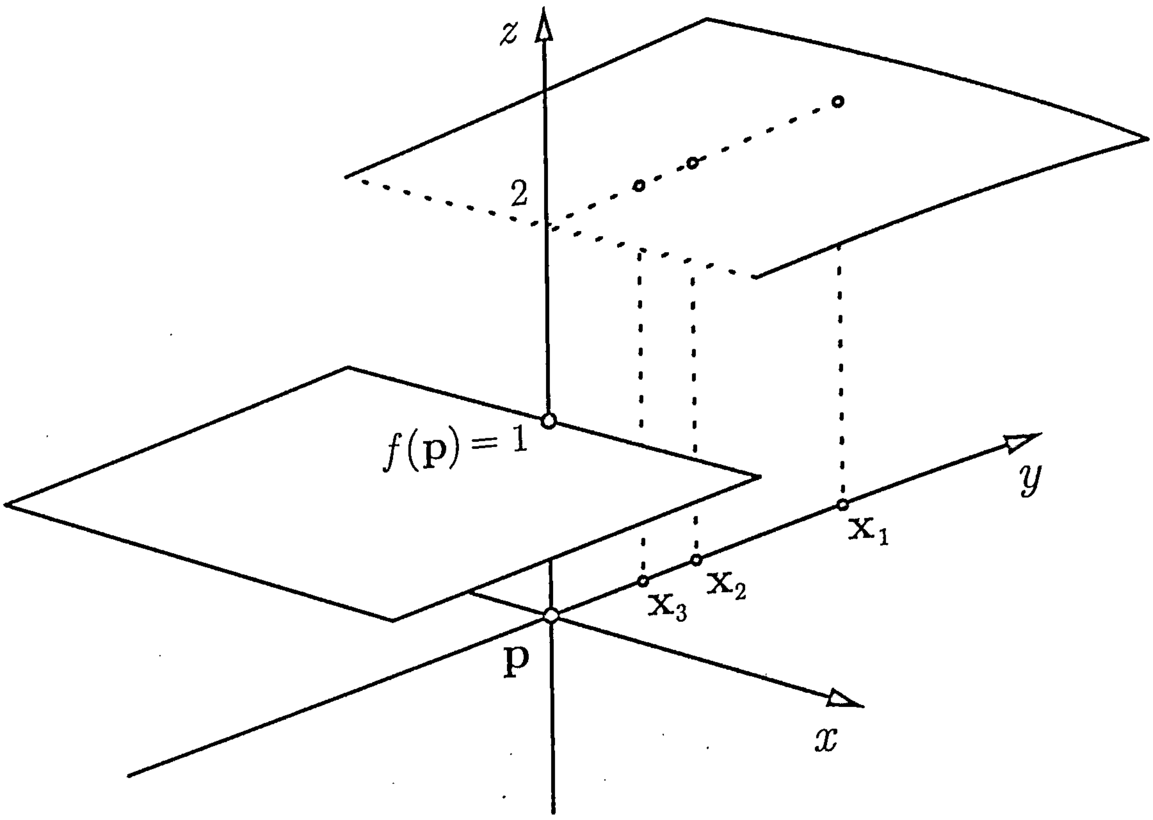

Figura 4.3: O gráfico de uma função descontínua.

Exercício resolvido 4.1 A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1/2 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$?

Solução: Inicialmente, observe que

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$$

e

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = f(0,0).$$

Contudo, isto não garante que f seja contínua em $(0,0)$ pois pode existir uma outra seqüência (x_n, y_n) que converge para $(0,0)$ mas com $f(x_n, y_n)$ não convergindo para $1/2 = f(0,0)$. De fato, tal seqüência existe pois

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \to (0,0)$$

e

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2} = f(0,0).$$

Sendo assim, f *não é* contínua em $(0,0)$. Observe que os pontos da seqüência $(1/n, 1/n)$ (que converge para $(0,0)$) estão sobre a reta $y = x$ e que os pontos da seqüência $(1/n, 2/n)$ (que também converge para $(0,0)$) estão sobre a reta $y = 2x$. □

Vamos ver agora exemplos de como provar que funções são contínuas.

Exercício resolvido 4.2 Mostre que a função $z = f(x,y) = x$ é contínua no ponto $(2,1)$.

Solução: Dada uma seqüência qualquer (x_n, y_n) que converge para $(2,1)$, devemos mostrar que $f(x_n, y_n)$ converge para $f(2,1) = 2$. Como $(x_n, y_n) \to (2,1)$, sabemos que

$$x_n \to 2$$

e $y_n \to 1$. Então,

$$f(x_n, y_n) = x_n \to 2 = f(2,1).$$

□

Exercício resolvido 4.3 Mostre que a função $z = f(x,y) = x$ é contínua.

Solução: Devemos mostrar que f é contínua em todos os pontos (a,b) de $\mathbb{R}^2$. Seja então (x_n, y_n) uma seqüência qualquer que converge para (a,b). Devemos mostrar que $f(x_n, y_n)$ converge para $f(a,b)$. Como $(x_n, y_n) \to (a,b)$ segue-se que

$$x_n \to a$$

e $y_n \to b$. Portanto,

$$f(x_n, y_n) = x_n \to a = f(a,b).$$

□

A definição de continuidade se estende naturalmente para funções que dependem de três ou mais variáveis:

Definição 4.3 (CONTINUIDADE) Seja $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em um ponto $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ de seu domínio D se *para toda* seqüência

$$\mathrm{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n}) \to (p_1, p_2, \ldots, p_m) = \mathrm{p}$$

no domínio, isto é, *para toda* coleção de m seqüências numéricas

$$x_{1,n} \to p_1, \quad x_{2,n} \to p_2, \quad \ldots, \quad x_{m,n} \to p_m,$$

com $(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n}) \in D$, tem-se

$$f(\mathrm{x}_n) = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n}) \to f(p_1, p_2, \ldots, p_m) = f(\mathrm{p})$$

na imagem. Se f não é contínua em $\mathrm{p} \in D$, então dizemos que f é *descontínua* em p. Se f é contínua em *todos* os pontos de seu domínio, então dizemos simplesmente que f é contínua. Finalmente, observe que $z_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n})$ é uma seqüência de números reais!

O teorema seguinte estabelece uma maneira fácil de se criar e de se identificar funções contínuas a partir de outras funções contínuas.

Teorema 4.2 Sejam $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g\colon D_g \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $\mathrm{p} \in D_f \cap D_g$. Então

$$f + g, \quad f - g \quad \text{e} \quad f \cdot g$$

são contínuas em p. Se $g(\mathrm{p}) \neq 0$, então

$$f/g$$

é contínua em p. Mais ainda se $h\colon D_h \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(\mathrm{p}) \in D_h$, então

$$h \circ f$$

é contínua em p.

Demonstração: A demonstração deste teorema é uma aplicação direta de um teorema análogo para seqüências que você já estudou em Cálculo I. Para referência, vamos provar aqui que a soma de duas funções contínuas também é uma função contínua. Os demais casos ($f - g$, $f \cdot g$, f/g e $h \circ f$) são demonstrados analogamente e vamos deixá-los como exercício.

Seja x_n uma seqüência convergindo para $\mathrm{p} \in D_f \cap D_g$. Então, pela continuidade de f e g, temos

$$f(\mathrm{x}_n) \to f(\mathrm{p}) \qquad \text{e} \qquad g(\mathrm{x}_n) \to g(\mathrm{p}).$$

Em Cálculo I você aprendeu que a soma de seqüências numéricas convergentes converge para a soma de seus respectivos limites e, como $f(\mathrm{x}_n)$ e $g(\mathrm{x}_n)$ são seqüências numéricas (isto é, seqüências em $\mathbb{R}$) que convergem respectivamente para $f(\mathrm{p})$ e $g(\mathrm{q})$, segue-se que

$$(f+g)(\mathrm{x}_n) = f(\mathrm{x}_n) + g(\mathrm{x}_n) \to f(\mathrm{p}) + g(\mathrm{p}) = (f+g)(\mathrm{p}).$$

Isto mostra que $f + g$ é contínua em p. □

Com este teorema é possível justificar, por exemplo, a continuidade da função

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right).$$

De fato: x e y são funções contínuas (veja o exercício resolvido (4.3) e o exercício [01]). Logo, x^2 e y^2 são funções contínuas como produto de funções contínuas. Conseqüentemente, $x^2 + y^2$ é contínua como soma de funções contínuas. Finalmente, como a função seno é contínua, segue-se que $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)$ é contínua como composição de funções contínuas.

4.3 O teorema de Weierstrass no caso de n variáveis

Como vimos na seção (4.1), funções *contínuas* de uma variável definidas em um *intervalo fechado e limitado* $[a,b]$ possuem pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global em $[a,b]$. Uma pergunta natural é se existe um resultado parecido para funções de duas ou mais variáveis. A resposta é sim! É de se esperar que a continuidade da função ainda seja exigida mas o que faria o papel de um intervalo fechado e limitado $[a,b]$ no caso de n variáveis?

Para responder a esta pergunta, vamos estudar várias situações e tentar intuir as propriedades que um conjunto admissível D deveria possuir a fim de que uma função contínua definida em D possua pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global em D.

Considere

$$f: \begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) = x^2 + y^2 \end{array},$$

onde D pode ser um dos seis conjuntos abaixo.

(1) $D = \mathbb{R}^2$,

(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$,

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$,

(5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2\}$ e

(6) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Pergunta: em quais dos seis casos a função-objetivo f possui pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global no conjunto admissível D?

Observe que estamos usando uma mesma expressão algébrica para a função-objetivo f e mudando apenas o conjunto admissível D.

O desenho dos vários conjuntos admissíveis e respectivos gráficos de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ encontram-se nas figuras (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10). Note que as figuras (4.5) e (4.9) representam apenas uma parte do gráfico de f.

No caso (1), f possui um único ponto de mínimo global, $(0,0)$, mas f não possui pontos de máximo global em $D = \mathbb{R}^2$. De fato, a partir dos cálculos feitos no exemplo (3.1) da página 81, é fácil de ver que as curvas de nível (não-vazias) de f são circunferências de centro na origem. Se nos aproximamos de $(0,0)$, então o valor da função diminui e quando nos afastamos de $(0,0)$, o valor da função aumenta (nos pontos da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio r, o valor da função é r^2). Como o ponto mais próximo de $(0,0)$ é o próprio ponto $(0,0)$, segue-se que $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, como podemos obter pontos em $D = \mathbb{R}^2$ *arbitrariamente distantes* de $(0,0)$, isto é, pontos em $D = \mathbb{R}^2$ para os quais o valor de f é tão grande quanto se queira, concluímos que f não possui pontos de máximo global em $D = \mathbb{R}^2$.

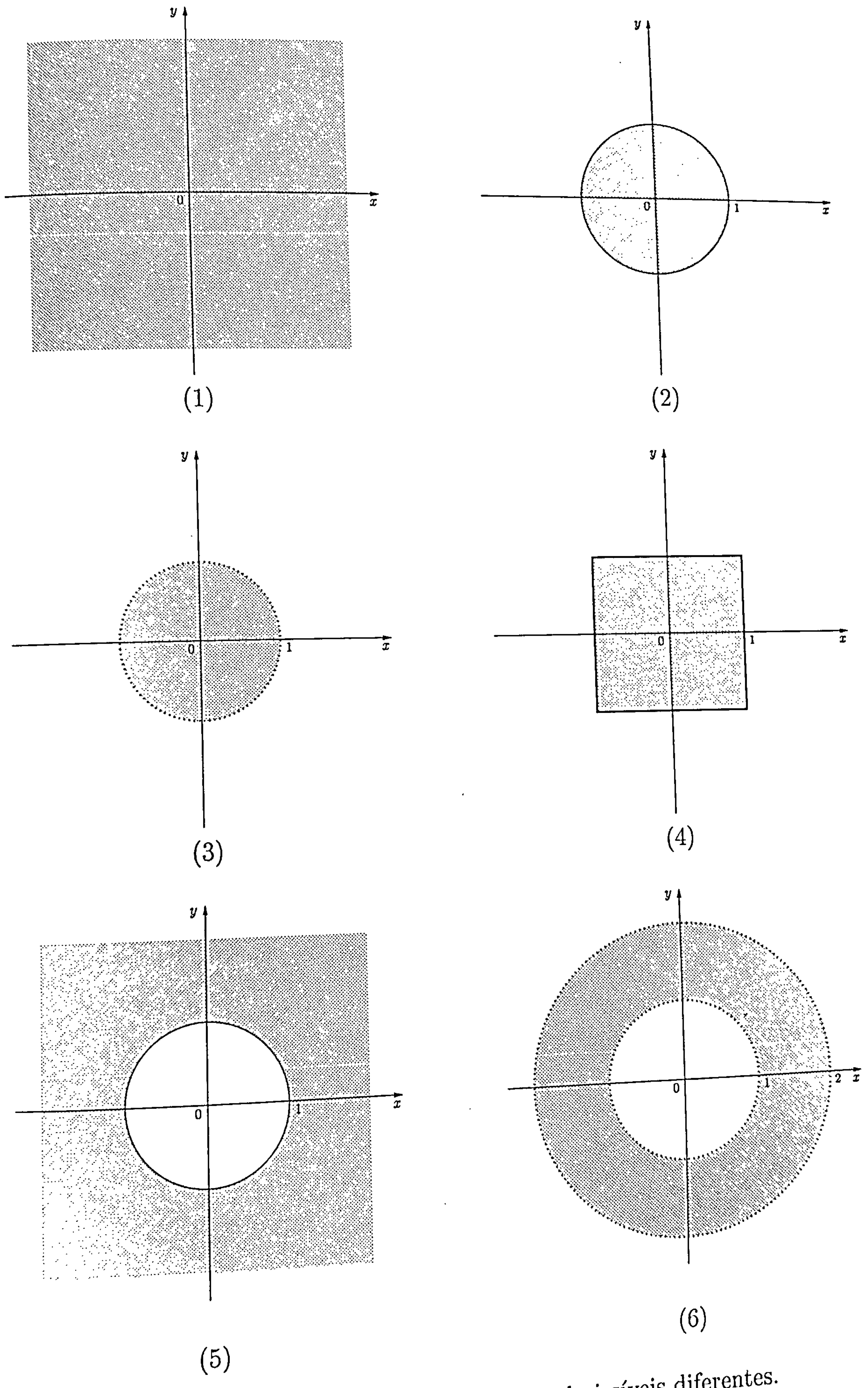

Figura 4.4: Desenho de seis conjuntos admissíveis diferentes.

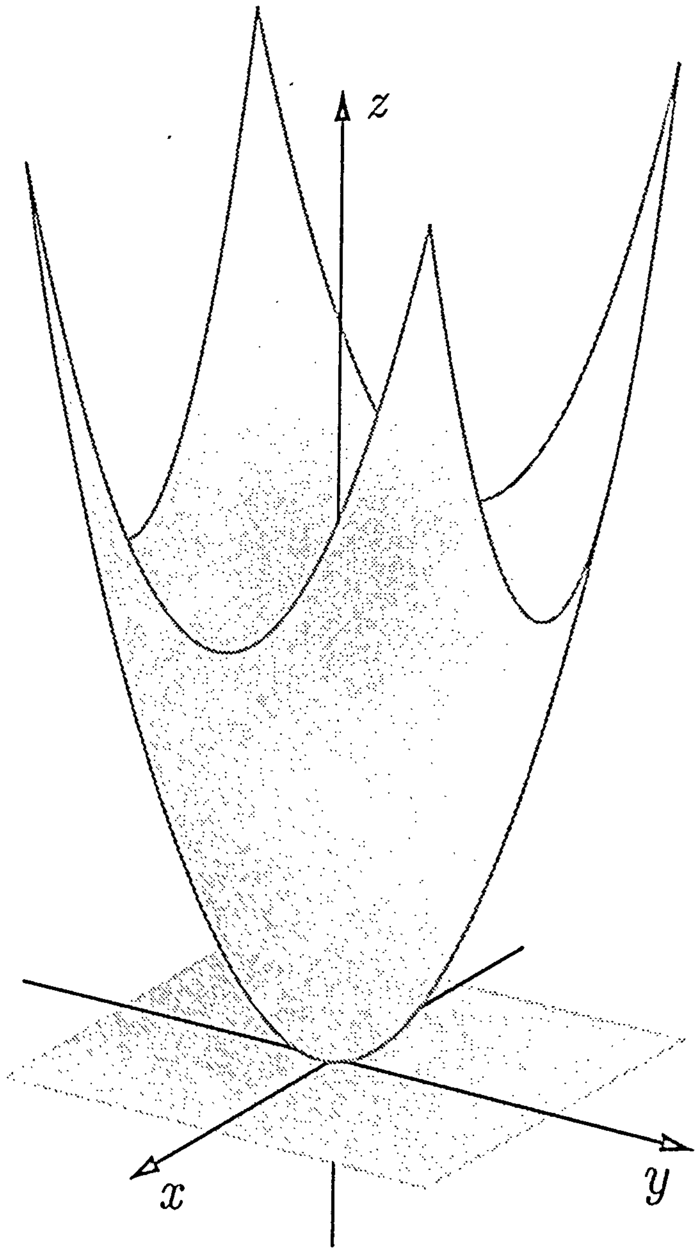

Figura 4.5: O gráfico de f definida em $D = \mathbb{R}^2$.

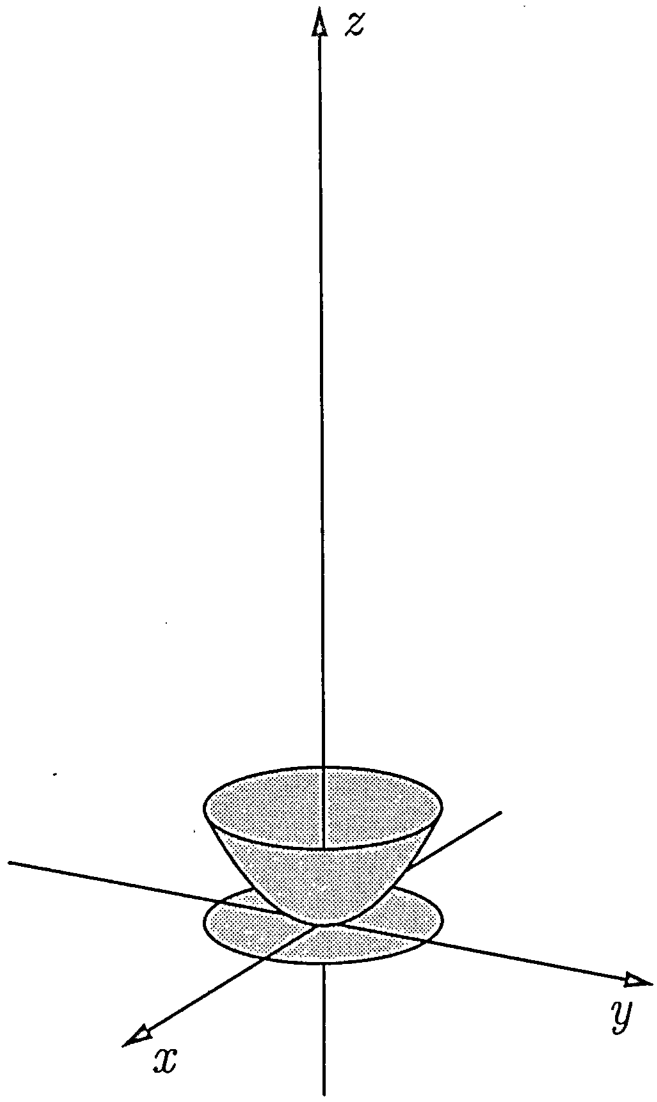

Figura 4.6: O gráfico de f definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

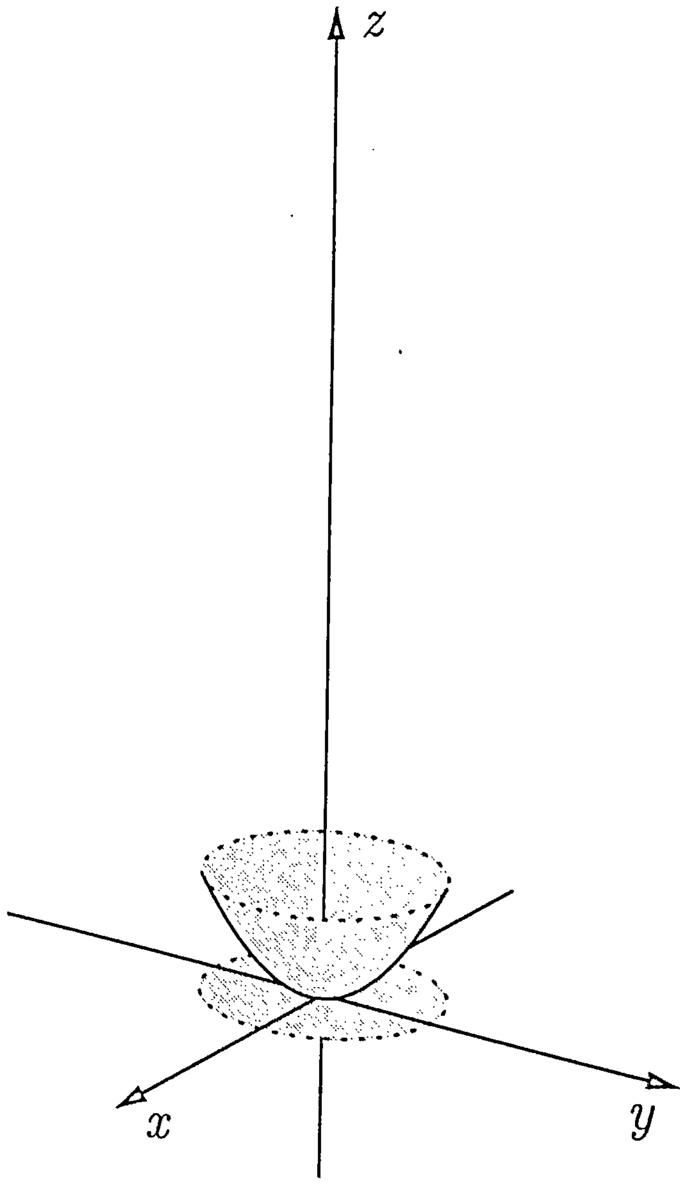

Figura 4.7: O gráfico de f definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

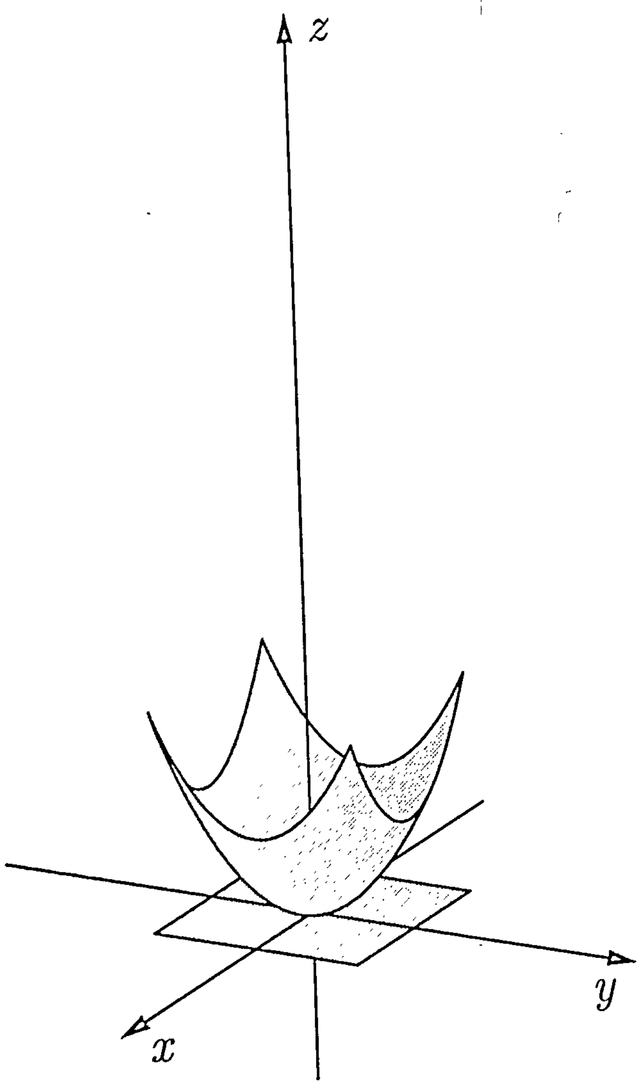

Figura 4.8: O gráfico de f definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$.

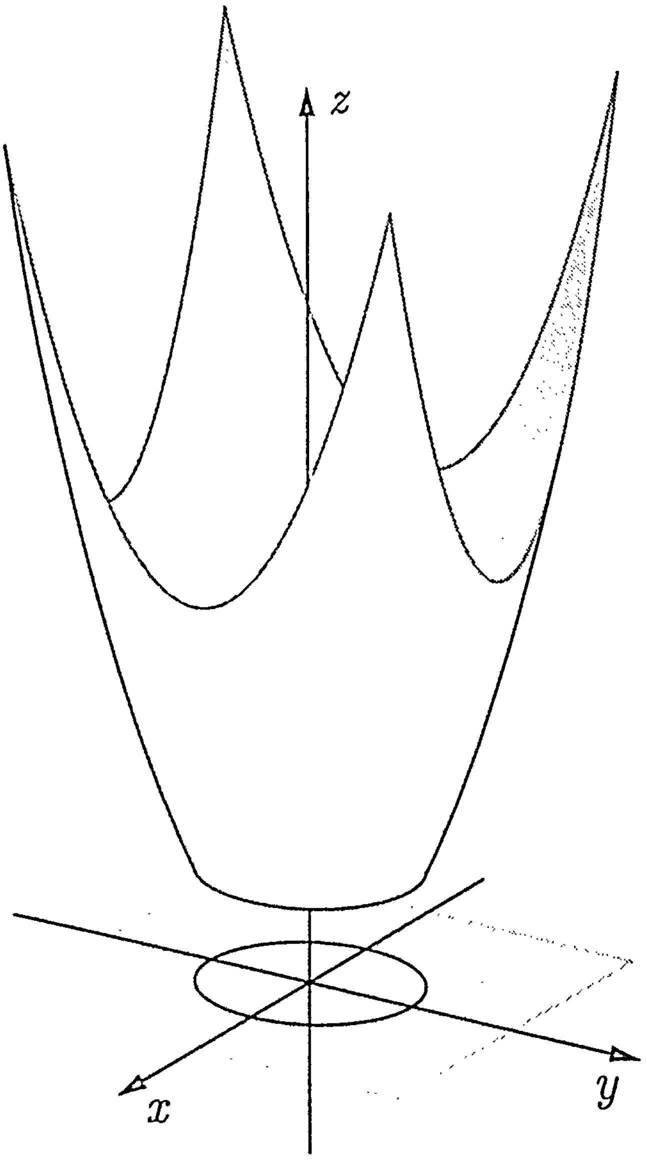

Figura 4.9: O gráfico de f definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2\}$.

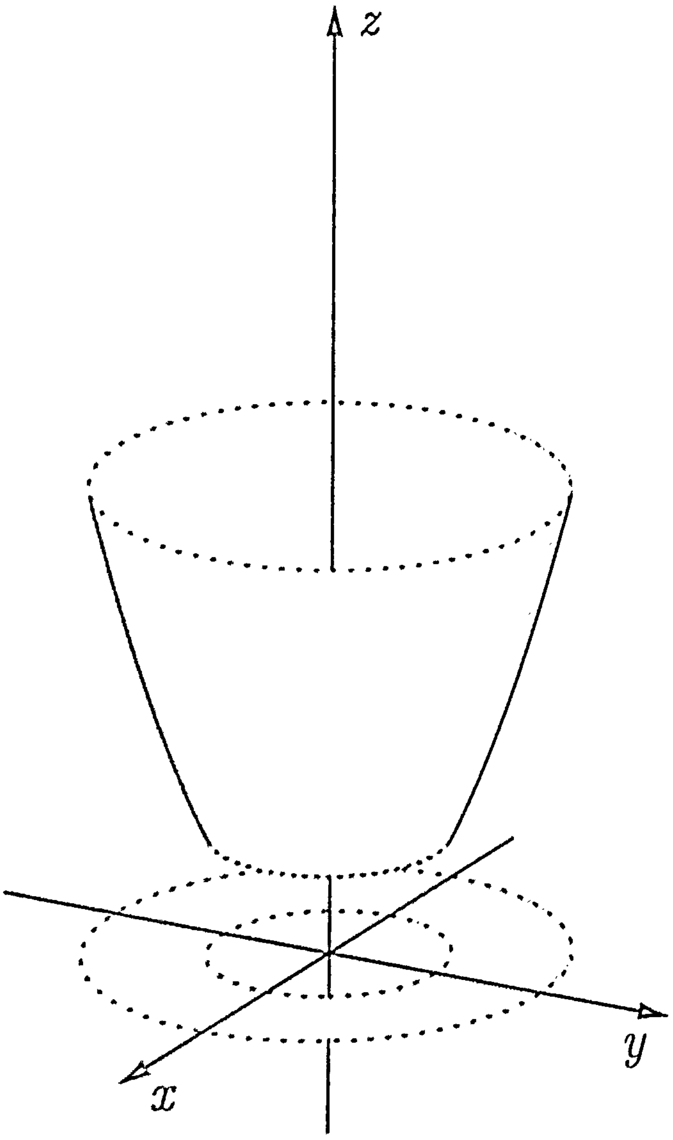

Figura 4.10: O gráfico de f definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

No caso (2), $(0,0)$ é ainda o único ponto de mínimo global de f em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Como *não podemos tomar pontos arbitrariamente distantes* de $(0,0)$, segue-se que f não assume valores arbitrariamente grandes. De fato, os pontos de D mais distantes de $(0,0)$ são os pontos da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1 sendo, portanto, os pontos de máximo global de f em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

No caso (3), $(0,0)$ é ainda o único ponto de mínimo global de f em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$. Como no caso (2), não podemos tomar pontos arbitrariamente distantes de $(0,0)$ em D e, portanto, f não pode assumir valores arbitrariamente grandes em D. Mas, agora, não existe um ponto em D que seja considerado o ponto "mais distante" de $(0,0)$. Dado qualquer ponto em D, é sempre possível conseguir um outro ponto em D ainda mais distante de $(0,0)$. Quanto mais nos aproximamos da "fronteira" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^1 = 1\}$, mais o valor da função f aumenta, aproximando-se cada vez mais do valor 1. Mas não existem pontos de D que realizem este valor. Sendo assim, f não possui pontos de máximo global no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

No caso (4), $(0,0)$ é o único ponto de mínimo global de f no quadrado $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$. Por outro lado, os pontos $(-1,-1)$, $(-1,+1)$, $(+1,-1)$ e $(+1,+1)$ são os pontos de máximo global de f em D. *Justifique!*

No caso (5), os pontos da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1 são os pontos de mínimo global de f em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2\}$. Não existem pontos de máximo global de f em D. *Justifique!*

No caso (6), f não possui pontos de mínimo global e nem pontos de máximo global em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$. *Justifique!*

A fim de garantirmos a existência de máximos e mínimos globais, além da continuidade da função-objetivo, estes exemplos sugerem que o conjunto admissível D também deve ter certas propriedades especiais:

- D deve ser *limitado*, isto é, D não pode possuir pontos arbitrariamente distantes da origem (veja os casos (1) e (5)) e
- D deve conter seus pontos de *"fronteira"* (veja os casos (3) e (6)).

Surpreendentemente, estas duas propriedades (junto com a continuidade da função-objetivo) são *suficientes* para se estabelecer a existência de máximos e mínimos globais.

Para se formalizar estas propriedades (e estabelecer outras de interesse), vamos precisar de alguns conceitos topológicos: distância euclidiana, bola aberta, bola fechada, ponto interior, conjunto aberto, ponto de fronteira, conjunto fechado, conjunto limitado e conjunto compacto.

Distância euclidiana

Definição 4.4 (Distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$). No plano $\mathbb{R}^2$, a *distância euclidiana* entre dois pontos (a, b) e (x, y) pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras que fornece o tamanho do segmento de reta que une os dois pontos:

$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

No espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, ainda com o auxílio do famoso teorema, podemos encontrar a *distância euclidiana* entre dois pontos (a, b, c) e (x, y, z) calculando-se o tamanho do segmento de reta que une os dois pontos:

$$d((x, y, z), (a, b, c)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Mais geralmente, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a *distância euclidiana* entre dois pontos $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é calculada por:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_n - p_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)^2}.$$

Vamos ver alguns exemplos.

(a) A distância entre os pontos $(1, 2)$ e $(3, 4)$ é $\sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{8}$.

(b) A distância entre os vértices $(0, 0)$ e $(1, 1)$ do quadrado $Q_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ é $\sqrt{(1 - 0))^2 + (1 - 0))^2} = \sqrt{2}$.

(c) A distância entre os vértices $(0, 0, \ldots, 0)$ e $(1, 1, \ldots, 1)$ do cubo n-dimensional $Q_n = [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ é $\sqrt{n}$.

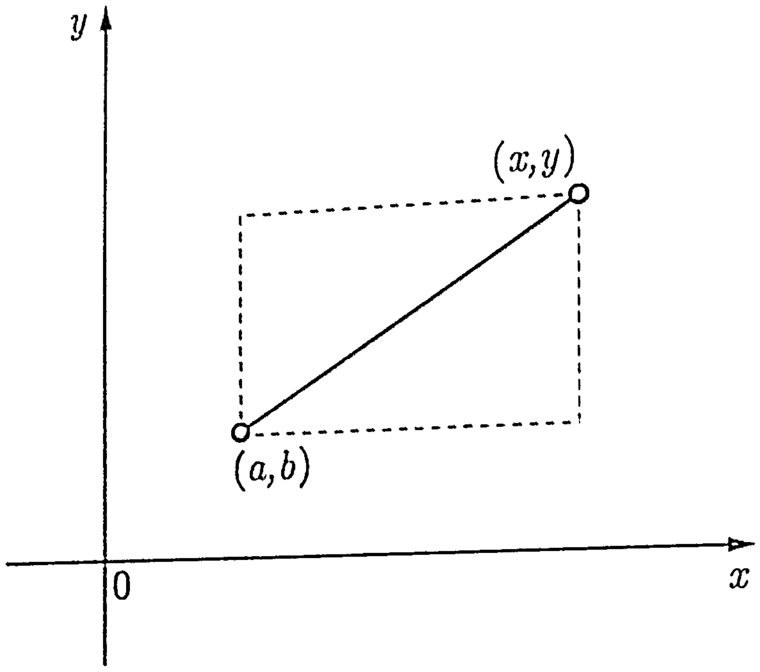

Figura 4.11: Distância euclidiana entre dois pontos de $\mathbb{R}^2$.

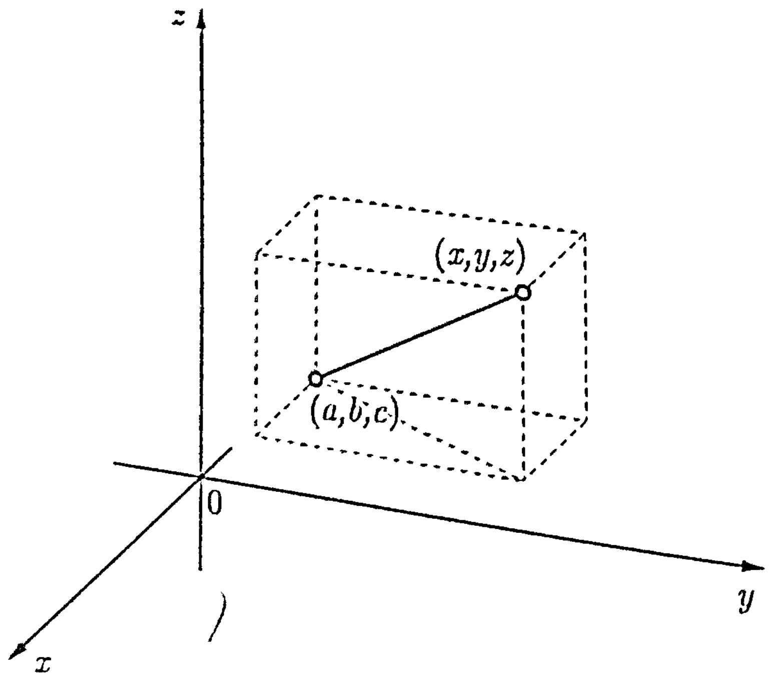

Figura 4.12: Distância euclidiana entre dois pontos de $\mathbb{R}^3$.

O próximo teorema estabelece algumas propriedades da distância euclidiana.

Teorema 4.3 (PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DISTÂNCIA) Considere p, q e r pontos em $\mathbb{R}^n$. Então

(1) $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) \geq 0$ e $d(\mathrm{p},\mathrm{p}) = 0$,

(2) $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) = d(\mathrm{q},\mathrm{p})$ e

(3) (Desigualdade triangular) $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) \leq d(\mathrm{p},\mathrm{r}) + d(\mathrm{r},\mathrm{q})$,

onde $d(\mathrm{p},\mathrm{q})$ é a distância euclidiana entre os pontos p e q.

A primeira propriedade diz que a distância entre dois pontos é sempre ≥ 0 e que a distância de um ponto p até ele mesmo é zero, a segunda propriedade afirma que a distância de p até q é igual à distância de q até p e, finalmente, a terceira propriedade (a desigualdade triangular) afirma que dado um triângulo de vértices p, q e r, a medida de um dos seus lados $(d(\mathrm{p},\mathrm{q}))$ é sempre menor ou igual que à soma das medidas dos outros dois lados $(d(\mathrm{p},\mathrm{r}) + d(\mathrm{r}),\mathrm{q}))$.

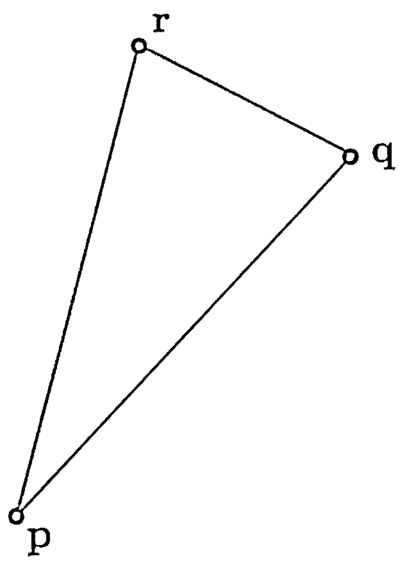

Figura 4.13: A desigualdade triangular: $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) \leq d(\mathrm{p},\mathrm{r}) + d(\mathrm{r},\mathrm{q})$.

As propriedades (1) e (2) são fáceis de se demonstrar. No exercício [25] indicamos como obter a desigualdade triangular (propriedade (3)) a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Bola aberta

Agora que sabemos como medir distâncias em $\mathbb{R}^n$, uma pergunta muito natural que se põe é: dado um ponto p em $\mathbb{R}^n$, quais são todos os pontos x em $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância menor do que um número r (fixo) com relação a p? No caso do plano ($n = 2$), temos

$$d(\mathrm{p},\mathrm{x}) < r \Leftrightarrow d((p_1,p_2),(x_1,x_2)) < r \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} < r \Leftrightarrow (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2 < r^2,$$

isto é, um ponto $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ está a uma distância menor do que r com relação a $\mathrm{p} = (p_1, p_2)$ se, e somente se, x está no disco sem "casca"

$$\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2 < r^2\right\},$$

de centro em p e raio r. Não é difícil de ver que no caso tridimensional ($n = 3$), um ponto $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ está a uma distância menor do que r com relação a $\mathrm{p} = (p_1, p_2, p_3)$ se, e somente se, x está na bola aberta

$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2+(x_3-p_3)^2 < r^2\right\},$$

de centro em p e raio r. Isto motiva a definição de uma bola aberta n-dimensional:

Definição 4.5 (Bola aberta) A *bola aberta* de centro em $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(\mathrm{p}) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1-p_1)^2+\cdots+(x_n-p_n)^2 < r^2\right\}$$

formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, cuja distância até p é menor do que r.

Bola fechada

Analogamente, podemos nos perguntar quais são todos os pontos x em $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância menor ou igual a um número r (fixo) com relação a um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ dado. Não é difícil ver que a resposta é uma bola aberta com sua "casca": a bola fechada.

Definição 4.6 (BOLA FECHADA) A *bola fechada* de centro em $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de raio $r \geq 0$ é o conjunto

$$\overline{B_r(\mathrm{p})} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_n - p_n)^2 \leq r^2\right\}$$

formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, cuja distância até p é menor ou igual a r.

Conjunto limitado

Com o conceito de bola fechada, podemos definir o que é um conjunto limitado:

Definição 4.7 (CONJUNTO LIMITADO) Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é dito ser *limitado* se existe uma bola fechada $\overline{B_r(\mathbf{0})}$ de centro em $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ e raio r tal que $D \subset \overline{B_r(\mathbf{0})}$.

Em outras palavras, um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é limitado se é possível colocá-lo dentro de alguma bola fechada de centro na origem $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Considere os exemplos a seguir.

(a) Os conjuntos dos casos (2), (3), (4) e (6) da página 130 são limitados. Os demais conjuntos não são limitados.

(b) O quadrado $Q_2 = [0,1] \times [0,1]$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ pois ele está contido na bola fechada $\overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)}$ de centro em $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$. Mais geralmente, o cubo n-dimensional $Q_n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots [0,1]$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ pois ele está contido na bola fechada $\overline{B_{\sqrt{n}}(0,0,\ldots,0)}$ de centro em $(0,0,\ldots,0)$ e raio $\sqrt{n}$.

(c) O semiplano superior $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\right\}$ não é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ pois não é possível colocá-lo em nenhuma bola fechada.

Ponto de fronteira

Vamos agora tornar mais formal a noção de "fronteira", um conceito que guiou nossa intuição na discussão sobre a existência de extremos globais de uma função contínua. Intuitivamente falando, um ponto $\mathbf{p}$ está na fronteira de um conjunto D se é possível aproximá-lo por pontos que estão em D e por pontos que não estão em D. Mais formalmente,

Definição 4.8 (Fronteira de um conjunto) Um ponto $\mathbf{p}$ é *ponto de fronteira* de um conjunto D se *toda* bola aberta com centro $\mathbf{p}$ contém pontos que estão em D e pontos que não estão em D. A *fronteira* de D é o conjunto formado por todos os pontos de fronteira de D.

Por exemplo, qualquer ponto da circunferência

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

é um ponto da fronteira da bola aberta $B_1(0,0)$. Observe que um ponto da fronteira de um conjunto não precisa estar no conjunto! Com relação aos conjuntos definidos na página 130, temos o que se segue.

(1) $D = \mathbb{R}^2$ não possui pontos de fronteira.

(2) Os pontos de fronteira de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ são os pontos do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(3) Os pontos de fronteira de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ são os pontos do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(4) Os pontos de fronteira de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$$

são os pontos do conjunto

$$(\{+1\} \times [-1, +1]) \cup (\{-1\} \times [-1, +1]) \cup \\ ([-1, +1] \times \{-1\}) \cup ([-1, +1] \times \{+1\}),$$

isto é, os pontos dos quatro lados de D.

(5) Os pontos de fronteira de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2\}$ são os pontos do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(6) Os pontos de fronteira de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ são os pontos do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Conjunto fechado

O conceito que vamos definir agora — o de conjunto fechado — possui um papel fundamental na geometria e análise dos espaços euclidianos.

Definição 4.9 (Conjunto fechado) Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é dito ser *fechado* em $\mathbb{R}^n$ se *todos* os pontos de fronteira de D pertencem a D.

Considere os exemplos a seguir.

(a) Os conjuntos dos casos (1), (2), (4) e (5) da página 130 são fechados. Os demais conjuntos não são fechados.

(b) A bola fechada $\overline{B_r(\mathrm{p})}$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^n$.

(c) O quadrado $Q_2 = [0,1] \times [0,1]$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^2$. Mais geralmente, o cubo n-dimensional $Q_n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots [0,1]$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^n$.

(d) O semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.

(e) A bola aberta $B_1(0,0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (note a desigualdade estrita) de centro em $(0,0)$ e raio 1 não é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^2$, pois os pontos de fronteira de $B_1(0,0)$ (isto é, os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$) não pertencem a $B_1(0,0)$.

(f) A bola "furada" $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ de centro em $(0,0)$ e raio 1 não é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^2$, pois $(0,0)$ é um ponto de fronteira de X que *não pertence* a X. Observe, contudo, que existem pontos de fronteira de X que pertencem a X.

A próxima proposição estabelece uma outra caracterização de conjuntos fechados: se p é um ponto qualquer e se existem pontos em um conjunto fechado D arbitrariamente próximos de p, então p também deve estar em D.

Proposição 4.1 Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é *fechado* em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, *toda* seqüência *convergente* de pontos x_n *em* D tem seu limite também em D, isto é, se $\mathrm{x}_n \in D$ é uma seqüência tal que $\mathrm{x}_n \to \mathrm{p}$, então $\mathrm{p} \in D$.

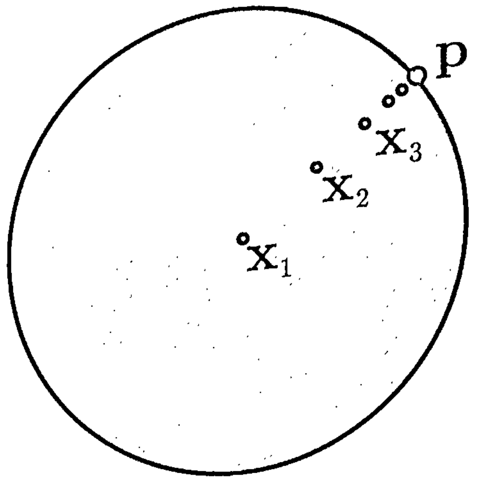

Figura 4.14: D é fechado, $x_n \in D$ e $x_n \to p$, logo, $p \in D$.

Existe uma maneira muito simples de se identificar conjuntos fechados:

Proposição 4.2 Se $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *contínua*, então o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq c\},$$

é fechado em $\mathbb{R}^n$, onde c é uma constante real.

A demonstração segue-se facilmente da proposição (4.1) e será deixada como exercício (veja o exercício [11] no final do capítulo).

Conjunto compacto

Podemos definir agora o objeto em $\mathbb{R}^n$ "equivalente" a um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ na reta $\mathbb{R}$:

Definição 4.10 (Conjunto compacto) Um subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ é dito ser *compacto* se ele é *limitado* e *fechado* em $\mathbb{R}^n$.

Assim, a bola fechada $\overline{B_1(0,0)}$ e o quadrado Q_2 são exemplos de conjuntos compactos. A bola aberta $B_1(0,0)$ não é compacta porque ela não é fechada (apesar de ser limitada). O semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ não é compacto porque ele não é limitado (apesar de ser fechado).

Os conjuntos dos casos (2) e (4) da página 130 são compactos. Os demais conjuntos não são compactos.

O teorema de Weierstrass

Com tudo isto, podemos finalmente enunciar o teorema de Weierstrass no caso de funções que dependam de n variáveis:

Teorema 4.4 (Weierstrass) Toda função $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *contínua* definida no *conjunto compacto* K (não-vazio) possui pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global em K.

Como vimos, os conjuntos dos casos (2) e (4) da página 130 são compactos e uma vez que $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ é uma função contínua, podemos usar o teorema de Weierstrass para garantir a existência de máximos e mínimos globais de f nestes conjuntos.

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

O teorema de Weierstrass diz que uma função *contínua* f definida em um conjunto *compacto* K *não-vazio* possui pelo menos um máximo global e pelo menos um mínimo global em K. E se f não for contínua ou K não for compacto? Nesta situação, o teorema de Weierstrass não se aplica: f pode possuir ou não extremos globais em K. Por exemplo, $D = \mathbb{R}^2$ não é um conjunto compacto, mas $z = g(x, y) = \cos(xy)$ possui máximos e mínimos globais em D. Por outro lado, $z = h(x, y) = x + y$ não possui máximo e nem mínimo global em D. Cada caso é um caso. Você precisa usar outras ferramentas para decidir se f possui ou não extremos globais.

O teorema (4.2) fornece uma maneira simples de se identificar funções contínuas. Mas como identificar conjuntos compactos? Freqüentemente, em problemas de otimização, o conjunto admissível é modelado da seguinte forma:

$$D = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\mathrm{x}) \leq c_1, \ldots, h_m(\mathrm{x}) \leq c_m\},$$

onde $h_1, \ldots, h_m$ são funções de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$. Agora, se as funções $h_1, \ldots, h_m$ são *contínuas*, então pela proposição (4.2), os conjuntos

$$D_1 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\mathrm{x}) \leq c_1\}, \quad \ldots, \quad D_m = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_m(\mathrm{x}) \leq c_m\}$$

são fechados. Como a interseção de um número finito de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado (veja o exercício [15]), segue-se que

$$D = D_1 \cap \cdots \cap D_m$$

também é fechado. Infelizmente, ainda não se conhece um critério simples que permita dizer se um conjunto da forma

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathrm{x}) \leq c\}$$

é limitado ou não. Veja, entretanto, o exercício [12].

Ponto interior

Intuitivamente, um ponto $\mathbf{p}$ é interior a um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ se $\mathbf{p}$ pertence a D e qualquer "pertubação" suficientemente pequena de $\mathbf{p}$ ainda está em D.

Definição 4.11 Um ponto $\mathbf{p}$ é *interior* a um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ se existe uma bola aberta de centro $\mathbf{p}$ contida em D. O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto D é denominado *conjunto interior* de D.

Por exemplo, a origem $(0,0)$ é um ponto interior da bola fechada $\overline{B_1(0,0)}$ de centro na origem $(0,0)$ e raio 1, pois podemos conseguir facilmente uma outra bola aberta de centro em $(0,0)$ contida em $\overline{B_1(0,0)}$. Por outro lado, o ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ não é um ponto interior de $\overline{B_1(0,0)}$, pois sempre existirá um ponto que não pertence a $\overline{B_1(0,0)}$ em *qualquer* bola aberta de centro em $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (veja a figura (4.15)).

Não é difícil de se convencer que o conjunto interior da bola fechada unitária $\overline{B_1(0,0)}$ é a bola aberta unitária $B_1(0,0)$. Alertamos ainda que o interior de um conjunto pode ser o conjunto vazio. Isto acontece, por exemplo, para uma reta em $\mathbb{R}^2$ ou um plano em $\mathbb{R}^3$.

Conjunto aberto

Um conceito fortemente relacionado com a definição de ponto interior é o conceito de conjunto aberto.

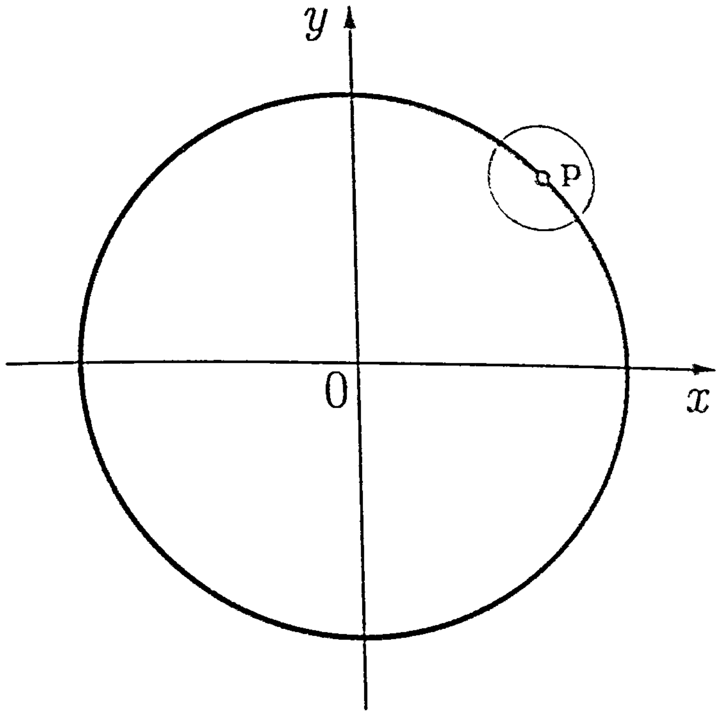

Figura 4.15: O ponto $p = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ não é um ponto interior da bola fechada $\overline{B_1(0,0)}$.

Definição 4.12 (Conjunto aberto) Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* se todos os seus pontos são interiores a D, isto é, se para todo ponto $p \in D$ existe uma bola aberta $B_r(p)$ de centro em p e raio $r > 0$ contida em D.

A palavra "aberto" tem a conotação de "sem fronteira": a partir de qualquer ponto podemos sempre nos mover a uma pequena distância em *qualquer* direção e ainda ficar dentro do conjunto. A definição de um conjunto aberto torna esta idéia precisa: cada elemento de um conjunto aberto possui uma bola com centro neste elemento contida no conjunto.

Exemplo 4.2 A bola aberta $B_1(0)$ de centro em $0 = (0,0)$ e raio 1 é um conjunto aberto. De fato: seja $p = (x, y)$ um ponto de $B_1(0)$. Devemos mostrar que existe uma bola aberta $B_r(p)$ de centro em p contida em $B_1(0)$. Seja

$$r = 1 - d(p, 0).$$

(veja a figura (4.16)). Para mostrar que $B_r(p)$ está contida em $B_1(0)$, considere q um ponto em $B_r(p)$. Pela desigualdade triangular (veja o teorema (4.3)),

$$d(q, 0) \leq d(q, p) + d(p, 0) = d(p, q) + d(p, 0).$$

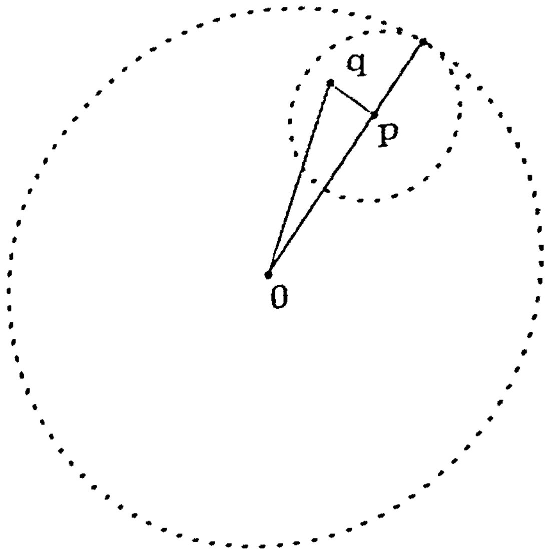

Figura 4.16: A bola $B_{1-d(\mathrm{p},0)}(\mathrm{p})$ está contida na bola $B_1(0)$

Como $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) < 1 - d(\mathrm{p},0)$ vem que

$$d(\mathrm{q},0) < 1 - d(\mathrm{p},0) + d(\mathrm{p},0) = 1$$

□

A definição de um conjunto aberto também implica que estes conjuntos devem ser "cheios", pois um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ contém uma bola aberta n-dimensional com centro em cada um de seus pontos. Conseqüentemente, uma reta em $\mathbb{R}^2$ não é um conjunto aberto (veja a figura (4.17)). Analogamente, retas e planos em $\mathbb{R}^3$ não são conjuntos abertos.

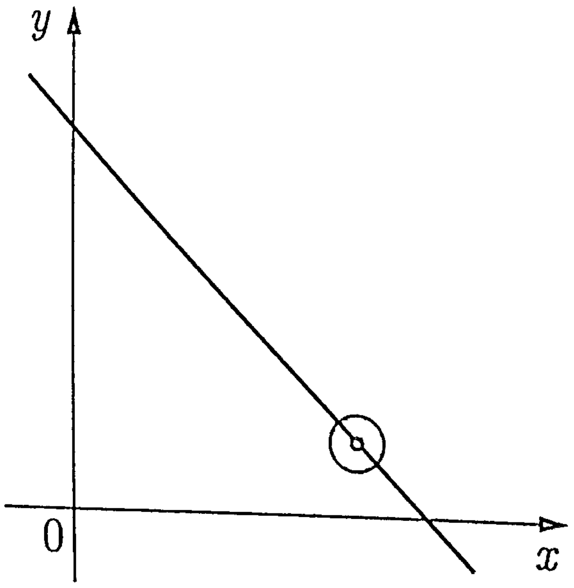

Figura 4.17: Toda bola aberta com centro em um ponto da reta contém pontos fora da reta.

Existe uma proposição análoga à proposição (4.2) para conjuntos abertos:

Proposição 4.3 Se $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *contínua*, então o conjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathrm{x}) < c\},$$

é aberto em $\mathbb{R}^n$, onde c é uma constante real.

4.4 Exercícios

[01] Dê três exemplos de funções contínuas e três exemplos de funções descontínuas definidas em $\mathbb{R}^2$.

[02] No exercício resolvido (4.3) mostramos que $f(x,y) = x$ é uma função contínua. Mostre agora que $g(x,y) = y$ e $h(x,y) = k =$ constante são funções contínuas.

[03] Complete a demonstração do teorema (4.2) da página 128.

[04] Mostre que toda função polinomial

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^{k-i} \cdot y^i = \\ a_0 \cdot x^k + a_1 \cdot x^{k-1} \cdot y + \cdots a_{k-1} \cdot x \cdot y^{k-1} + a_k \cdot y^k$$

em duas variáveis x e y é contínua em $\mathbb{R}^2$.

[05] Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

[06] Enuncie outros teoremas importantes envolvendo continuidade que você aprendeu no curso de Cálculo I.

*[07] Seja $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathrm{p} \in D$. Mostre que se $f(\mathrm{p}) > 0$, então existe uma bola aberta $B_r(\mathrm{p})$ de centro em p e raio $r > 0$ tal que $f(\mathrm{x}) > 0$ para todo $\mathrm{x} \in B_r(\mathrm{p}) \cap D$.

[08] Resolva as questões abaixo.

(a) Dê três exemplos de conjuntos limitados e três exemplos de conjuntos não-limitados.

(b) Dê três exemplos de conjuntos abertos e três exemplos de conjuntos que não são abertos.

(c) Dê três exemplos de conjuntos fechados e três exemplos de conjuntos que não são fechados.

[09] Represente geometricamente cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ abaixo e diga se ele é um conjunto fechado ou não, aberto ou não, limitado ou não, compacto ou não. Determine também o interior e a fronteira de cada um destes subconjuntos.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < +1 \text{ e } y = 0\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ são números inteiros}\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$.

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$.

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

(j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ mas } x^2 + y^2 \neq 0\}$.

[10] O conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ e } x + y + z \leq 1\}$ é compacto? Justifique sua resposta. *Dica: represente geometricamente este conjunto em* $\mathbb{R}^3$.

[11] Mostre que se $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então os conjuntos $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathrm{x}) = c\}$ — o nosso já conhecido conjunto de nível da função h — e $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathrm{x}) \leq c\}$ são conjuntos fechados para qualquer escolha do número c.

[12] Mostre que o conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_m \leq x_m \leq b_m\}$$

é limitado, onde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ são constantes reais.

[13] Mostre que o teorema de Weierstrass não é mais válido se removermos a hipótese de continuidade ou de compacidade do domínio da função f exibindo:

(a) Uma função descontínua definida em um subconjunto K compacto em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em K.

(b) Uma função contínua definida em um subconjunto F fechado mas não-limitado (e, portanto, não-compacto) em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em F.

(c) Uma função contínua definida em um subconjunto L limitado mas não-fechado (e, portanto, não-compacto) em $\mathbb{R}^2$ que não possui nem máximo global e nem mínimo global em L.

[14] Use o teorema de Weierstrass para dizer se é possível garantir, *a priori*, se cada um dos problemas de otimização abaixo possui ou não uma solução.

(a) Maximizar $f(x,y) = x + y$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Maximizar $f(x,y) = x^2 - y^2$
sujeito às restrições: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(c) Minimizar $f(x,y) = x \cdot y$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $x + y = 1$.

(d) Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 < 1$.

(e) Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 \leq 1$.

(f) Maximizar $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
sujeito à restrição: $x^2 + y^2 = 1$.

(g) Maximizar $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ e $x + y + z \leq 1$.

(h) Maximizar $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \leq x^2 + y^2$.

(i) Maximizar $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
sujeito às restrições: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1$ e $z \leq 1$.

*[15] Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Qualquer conjunto *finito* é um conjunto limitado.

(b) A interseção de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(c) A interseção de um número *infinito* de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(d) A união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(e) A união de um número *finito* de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(f) A união de um número *infinito* de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(g) Qualquer conjunto *finito* é um conjunto fechado.

(h) A união de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(i) A união de um número *finito* de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(j) A união de um número *infinito* de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(k) A interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(l) A interseção de um número *finito* de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(m) A interseção de um número *infinito* de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(n) Um subconjunto fechado de um conjunto compacto é um conjunto compacto.

(o) A união de um número *finito* de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

(p) A união de um número *infinito* de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

(q) A interseção de um número *finito* de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

(r) A interseção de um número *infinito* de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

[16] Dê um exemplo de um conjunto que é aberto e fechado e dê um exemplo de um conjunto que não nem aberto e nem fechado.

*[17] Seja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ o subconjunto dos números racionais. $\mathbb{Q}$ é aberto? $\mathbb{Q}$ é fechado? $\mathbb{Q}$ é limitado? $\mathbb{Q}$ é compacto? Qual é o interior de $\mathbb{Q}$? Qual é a fronteira de $\mathbb{Q}$? Responda a estas mesmas perguntas para o subconjunto dos números irracionais.

*[18] Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Considere a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(t, p_2, \ldots, p_n)$. Mostre que g é contínua em p_1. Este resultado implica que se f é contínua, então sua *restrição* em qualquer reta paralela a um eixo coordenado é também contínua. Contudo, a recíproca deste resultado é falsa. Considere a função

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Mostre que $f_1(t) = f(t, p)$ e $f_2(t) = f(p, t)$ são funções contínuas em t para cada valor de p fixo.

(b) Mostre que f, por sua vez, não é contínua em $(0, 0)$.

(Limite de funções) Intuitivamente falando, dizemos que uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possui limite $L \in \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ (não necessariamente no domínio D_f de f) se $f(\mathbf{x})$ pode ser considerado uma aproximação de L tão boa quanto se queira desde que $\mathbf{x}$ esteja suficientemente próximo de $\mathbf{p}$. Mais formalmente:

Definição 4.13 Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ se para toda seqüência $\mathbf{x}_n \to \mathbf{p}$, com $\mathbf{x}_n \in D_f$ e $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{p}$, tem-se $f(\mathbf{x}_n) \to L$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L.$$

Estamos considerando os pontos $\mathbf{p}$ para os quais existe pelo menos uma seqüência $\mathbf{x}_n \in D_f$ que converge para $\mathbf{p}$ (nesta situação, dizemos que $\mathbf{p}$ é um *ponto de acumulação* de D_f).

[19] Calcule os limites abaixo, caso eles existam. Justifique sua resposta.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{(x-1)^2+1}$.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^2y+y^3+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4\,x^2+3\,y^2+x^3y^3}{x^2+y^2+x^4y^4}$.

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} (e^x\cos(\pi y))$.

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (e^{xy}\cos(\pi xy))$.

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+\ln(1+1/(x^2+y^2))}$.

(Seqüências em $\mathbb{R}^m$) Como vimos, uma seqüência em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação $\mathbf{x}\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}^m$ que a cada $n\in\mathbb{N}$ associa uma n-upla $\mathbf{x}_n=(x_{1,n},x_{2,n},\ldots,x_{m,n})$ em $\mathbb{R}^m$. Observe que $\mathbf{x}_n$ nada mais é do que uma coleção de N seqüências numéricas:

$$\begin{aligned} x_1\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}\\ n &\mapsto x_{1,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}\\ n &\mapsto x_{2,n}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_m\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}\\ n &\mapsto x_{m,n}\end{aligned}$$

Como em Cálculo I, podemos definir o conceito de convergência: $\mathbf{x}_n$ converge para $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ se, e somente se, cada seqüência numérica $x_{i,n}$ converge para p_i, isto é, $x_{1,n}\to p_1$, $x_{2,n}\to p_2$, $\ldots$, $x_{m,n}\to p_m$. Uma outra maneira de se caracterizar seqüências convergentes em $\mathbb{R}^m$ é através da função distância e das bolas fechadas.

> Dizemos que x_n converge para p se, dado qualquer $K \in \mathbb{N}$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se que a distância entre x_n e p é menor ou igual a $1/10^K$.

Ora, dizer que a distância entre x_n e p é menor ou igual a $1/10^K$ é justamente dizer que x_n está na bola fechada $\overline{B_{1/10^K}(\mathrm{p})}$ de centro em p e raio $1/10^K$. Assim:

> Dizemos que x_n converge para p se, dado qualquer $K \in \mathbb{N}$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se que $\mathrm{x}_n \in \overline{B_{1/10^K}(\mathrm{p})}$, isto é, o elemento x_n da seqüência está na bola fechada de centro em p e raio $1/10^K$.

Intuitivamente falando, uma seqüência x_n converge para p se, dada qualquer bola fechada de centro em p (e por menor que seja o raio desta bola), existe um índice n_0 a partir do qual todos os elementos da seqüência ficam dentro da bola.

*[20] Mostre que $\mathrm{x}_n \to \mathrm{p}$ segundo a definição que vimos agora se, e somente se, cada seqüência $x_{i,n} \to p_i$, $i = 1, \ldots, N$.

*[21] Mostre que se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ e $f(\mathrm{p}) > 0$, então existe uma bola fechada $\overline{B_r(\mathrm{p})}$ de centro em p e raio $r > 0$ tal que $f(\mathrm{q}) > 0$ para todo $\mathrm{q} \in \overline{B_r(\mathrm{p})}$.

Vamos agora generalizar o conceito de distância introduzido na seção (4.3).

Definição 4.14 (Distância em $\mathbb{R}^n$) Uma *distância* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz três propriedades:

(1) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geq 0$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 0$, para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$.

(2) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$.

(3) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d(\mathrm{z}, \mathrm{y})$, para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$.

A última condição é conhecida como *desigualdade triangular*.

[22] Mostre que $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

com $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$, é uma função distância em $\mathbb{R}^2$. Faça um desenho da bola de centro em $(0,0)$ e raio 1 construída com esta distância. Mais geralmente, mostre que $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\},$$

com $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é uma distância em $\mathbb{R}^n$.

[23] Mostre que $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

com $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$, é uma função distância em $\mathbb{R}^2$. Faça um desenho da bola de centro em $(0,0)$ e raio 1 construída com esta distância. Mais geralmente, mostre que $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

com $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é uma distância em $\mathbb{R}^n$.

*[24] Mostre que $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{x} = \mathrm{y}, \\ 1 & \text{se } \mathrm{x} \neq \mathrm{y}. \end{cases}$$

é uma função distância em $\mathbb{R}^2$. Faça um desenho da bola de centro em $(0,0)$ e raio 1 construída com esta distância.

*[25] O objetivo deste exercício é demonstrar o teorema (4.3), isto é, provar que a distância euclidiana definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

com $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ atende as três propriedades da definição de função distância.

(a) Mostre que $d(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 0$ para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$.

(A desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para demonstrarmos que a distância euclidiana satisfaz a desigualdade triangular, vamos precisar de uma desigualdade auxiliar, conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Para simplificar, vamos usar a notação:

$$||\mathrm{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{e} \qquad ||\mathrm{y}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(c) Mostre que $||\mathrm{x}|| = 0$ se, e somente se, $x_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

(d) Mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz é imediata se $||\mathrm{x}|| = 0$ ou $||\mathrm{y}|| = 0$.

Assim, resta demonstrarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tais que $||\mathrm{x}|| \neq 0$ e $||\mathrm{y}|| \neq 0$. Ora, para quaisquer números reais a e b, $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ou, equivalentemente,

$$2 \cdot a \cdot b \leq a^2 + b^2. \tag{$*$}$$

Como a e b são números arbitrários, podemos fazer $a = |x_i|/||\mathrm{x}||$ e $b = |y_i|/||\mathrm{y}||$ em $(*)$. Assim, para qualquer i

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{||\mathrm{x}||} \cdot \frac{|y_i|}{||\mathrm{y}||} \leq \frac{|x_i|^2}{||\mathrm{x}||^2} + \frac{|y_i|^2}{||\mathrm{y}||^2}. \tag{$**$}$$

Então, somando $(**)$ com relação a i e usando $|x_i \cdot y_i| = |x_i| \cdot |y_i|$, temos

$$2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i|}{||\mathrm{x}|| \cdot ||\mathrm{y}||} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{||\mathrm{x}||} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|}{||\mathrm{y}||} = \frac{||\mathrm{x}||}{||\mathrm{x}||} + \frac{||\mathrm{y}||}{||\mathrm{y}||},$$

isto é,

$$2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i|}{||\mathrm{x}|| \cdot ||\mathrm{y}||} \leq 1.$$

Multiplicando-se ambos os membros por $||\mathrm{x}|| \cdot ||\mathrm{y}||$, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Com a desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos facilmente demonstrar a desigualdade triangular para a distância euclidiana:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d(\mathrm{z}, \mathrm{y}).$$

Observe que se $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, então a desigualdade é imediata. Suponha então que $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$. Agora,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \cdot |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|$$

Pela desigualdade triangular para números reais temos que

$$|(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|.$$

Assim,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |z_i - y_i|.$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_i - z_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |z_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_i - z_i| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \qquad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \cdot |z_i - y_i| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot d(\mathrm{z}, \mathrm{y}).$$

Então $d(\mathrm{x}, \mathrm{y})^2 \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot d(\mathrm{z}, \mathrm{y})$. Como estamos supondo $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$, podemos dividir por $d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ e obter a desigualdade triangular $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d(\mathrm{z}, \mathrm{y})$ para a distância euclidiana d.

[26] O toro do exercício [42] da página 119, definido como o nível $w = 0$ da função

$$w = f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4\,R^2\,(x^2 + y^2),$$

é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$?