seção 1 - 2

Capítulo 5

Derivadas parciais

Suponha que a função $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ modele o lucro z de uma determinada empresa em termos dos insumos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Suponha ainda que se conheça o lucro z^* para uma escolha $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ dos insumos: $z^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Uma pergunta que surge imediatamente é como variações nos valores dos insumos $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ afetam o lucro da empresa. Por exemplo, aumentando-se *apenas* a quantidade do primeiro insumo e mantendo-se constantes os demais valores, o lucro da empresa estará aumentando ou diminuindo? E se fizéssemos isto para os outros tipos de insumo? O que seria mais lucrativo? Por que não variar todos os insumos ao mesmo tempo? Neste capítulo vamos introduzir os objetos matemáticos que permitem encontrar as respostas para estas perguntas.

5.1 Lembrando Cálculo I

Você aprendeu em Cálculo I que a derivada de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mede o quanto a função está variando: se $(df/dx)(x_0) > 0$ e df/dx é contínua, então f é crescente em um intervalo aberto contendo x_0. Do mesmo modo, se $(df/dx)(x_0) < 0$ e df/dx é contínua, então f é decrescente em um intervalo aberto contendo x_0. Quanto maior o valor da derivada, maior é a taxa de variação. Mais ainda, você viu que o valor da derivada $\frac{df}{dx}(x_0)$ no ponto x_0 é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto e este valor pode ser obtido através do limite do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ quando $x \to x_0$:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Podemos ainda reescrever este limite com a mudança de variável $x = x_0 + h$:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

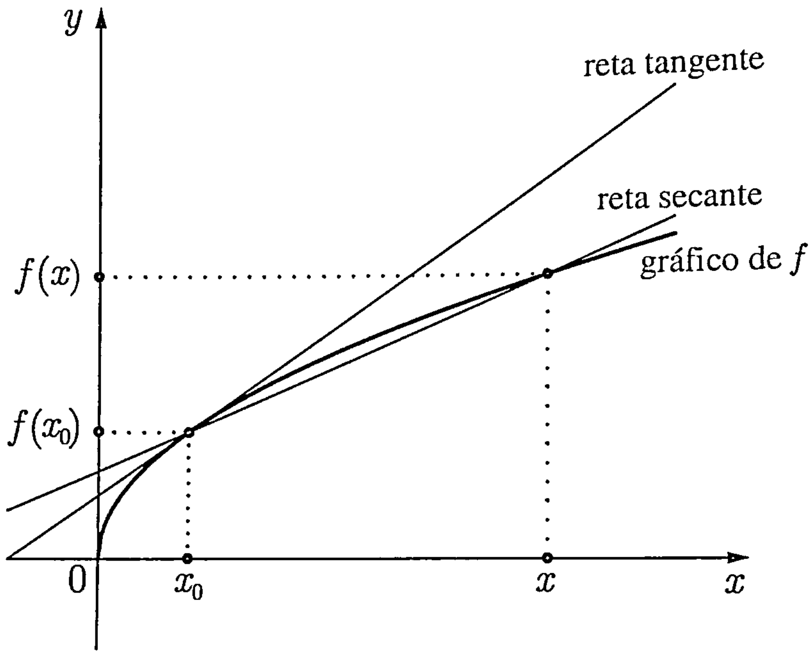

Figura 5.1: Interpretação geométrica da derivada de uma função de uma variável.

5.2 Definições e exemplos

Para começar, considere uma função

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) \end{array}$$

e $\mathbf{p} = (a, b)$. O que acontece com o valor $z = f(x, y)$ da função quando variamos x nas proximidades de a e mantemos y constante e igual a b? Ora, se $y = b$, então podemos construir uma nova função de uma única variável a partir de nossa função de duas variáveis:

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & z = g(x) = f(x, b) \end{array}.$$

Para saber a taxa de variação de f no ponto (a, b) mantendo-se $y = b$ constante, basta derivar g no ponto $x = a$:

$$\frac{dg}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Este limite é tão importante que vamos usar um símbolo especial para ele:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

$(\partial f / \partial x)(a, b)$ é denominada *derivada parcial* de f *com relação* a x no ponto (a, b). Geometricamente, estamos fazendo a *restrição* de f sobre a reta $y = b$ e olhando para a curva correspondente sobre o gráfico de f. Desta maneira, o número $(\partial f / \partial x)(a, b) = (dg/dx)(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto (a, b) (veja a figura (5.2)).

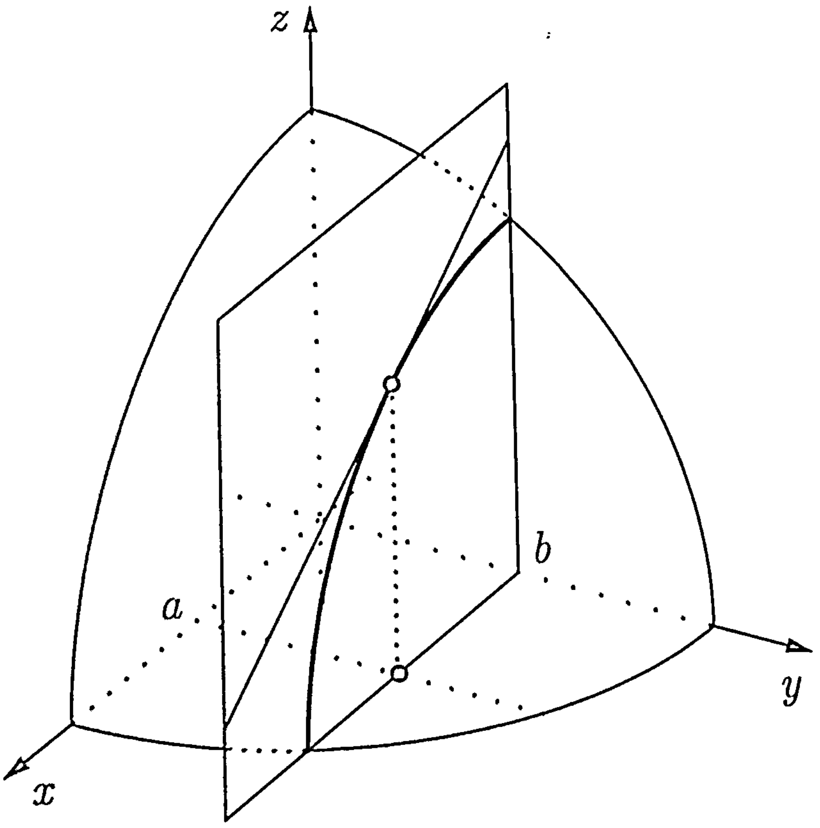

Figura 5.2: Interpretação geométrica da derivada parcial de $z = f(x, y)$ com relação a x.

Analogamente, podemos perguntar o que acontece com o valor da função $z = f(x, y)$ quando variamos y nas proximidades de b e mantemos o valor de x constante e igual a a. Novamente, se $x = a$, então podemos construir uma nova função de uma única variável a partir de nossa função de duas variáveis:

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto z = h(y) = f(a, y) \end{aligned}.$$

Para saber a taxa de variação de f no ponto (a, b), mantendo-se $x = a$ constante, basta derivar h no ponto $y = b$:

$$\frac{dh}{dy}(b) = \lim_{y \to b} \frac{h(y) - h(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Como antes, vamos usar um símbolo especial para denotar este limite:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

$(\partial f/\partial y)(a, b)$ é denominada *derivada parcial* de f *com relação* a y no ponto (a, b). Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $x = a$ e olhando para a curva correspondente sobre o gráfico de f. Assim, $(\partial f/\partial y)(a, b) = (dh/dy)(b)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto (a, b) (veja a figura (5.3)).

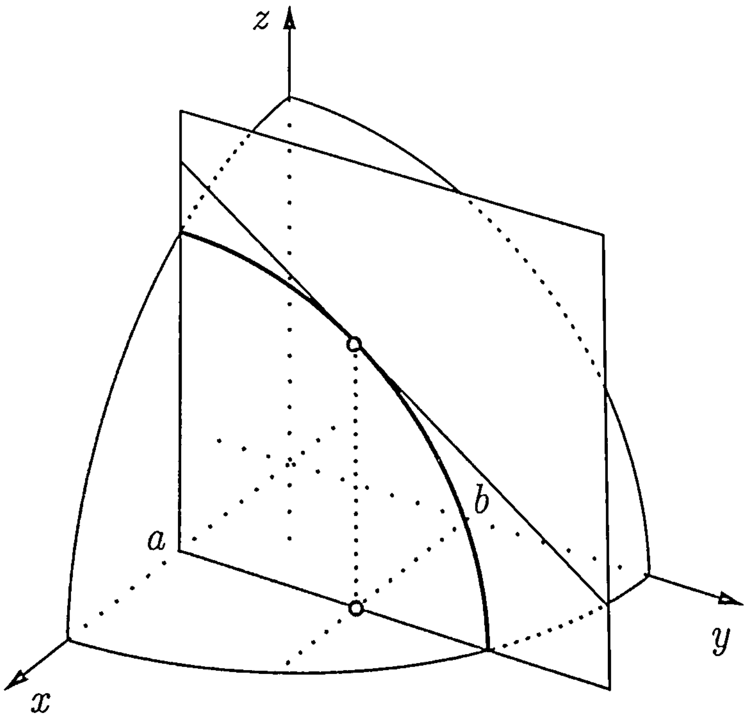

Figura 5.3: Interpretação geométrica da derivada parcial de $z = f(x, y)$ com relação a y.

Como $(\partial f/\partial x)(a, b)$ e $(\partial f/\partial y)(a, b)$ são derivadas, você pode aplicar tudo o que aprendeu em Cálculo I para concluir propriedades sobre o comportamento de f. Por exemplo, para funções f tais que suas derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas, vale que:

- Se $(\partial f/\partial x)(a,b) > 0$, então f cresce quando mantemos $y = b$ constante e aumentamos localmente o valor de x com relação a a.
- Se $(\partial f/\partial y)(a,b) > 0$, então f cresce quando mantemos $x = a$ constante e aumentamos localmente o valor de y com relação a b.
- Se $(\partial f/\partial x)(a,b) < 0$, então f decresce quando mantemos $y = b$ constante e aumentamos localmente o valor de x com relação a a.
- Se $(\partial f/\partial y)(a,b) < 0$, então f decresce quando mantemos $x = a$ constante e aumentamos localmente o valor de y com relação a b.

Vamos ver como tudo isto funciona com um exemplo.

Exemplo 5.1 A função de produção *Cobb-Douglas*

$$z = f(x,y) = 4 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4}$$

modela a produção de uma certa empresa em função do *capital* x e do *trabalho* y. Assim, por exemplo, com capital $x^* = 10000$ e trabalho $y^* = 625$, a produção desta firma é de

$$z^* = f(x^*, y^*) = f(10000, 625) = 4 \cdot \left(10^4\right)^{3/4} \cdot \left(5^4\right)^{1/4} = 20000$$

unidades. Vamos agora calcular a taxa de variação da produção no ponto $(10000, 625)$ quando mantemos a quantidade de trabalho constante e variamos a quantidade de capital [o que significa calcular $(\partial f/\partial x)(10000, 625)$] e, de maneira recíproca, calcular a taxa de variação da produção no ponto $(10000, 625)$ quando mantemos a quantidade de capital constante e variamos a quantidade de trabalho [o que significa calcular $(\partial f/\partial y)(10000, 625)$]. Para isto, vamos construir as funções auxiliares

$$\begin{aligned} z &= g(x) &= f(x, 625) &= 4 \cdot x^{3/4} \cdot (5^4)^{1/4} &= 20 \cdot x^{3/4}, \\ z &= h(y) &= f(10000, y) &= 4 \cdot (10^4)^{3/4} \cdot y^{1/4} &= 4000 \cdot y^{1/4}. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(10000, 625) &= \frac{dg}{dx}(10000) &= 15 \cdot x^{-1/4}\Big|_{x=10000} &= 1.5, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(10000, 625) &= \frac{dh}{dy}(625) &= 1000 \cdot y^{-3/4}\Big|_{y=625} &= 8. \end{aligned}$$

Uma vez que $(\partial f/\partial x)(10000, 625) = 1.5$, se a quantidade de trabalho y^* é mantida constante e aumentamos a quantidade de capital x^* em h unidades, então a produção sofrerá um aumento de aproximadamente $1.5 \cdot h$ unidades. Por exemplo, para um *acréscimo* de 10 unidades no capital x^*, a produção aumentará em aproximadamente 15 unidades. Analogamente, uma vez que $(\partial f/\partial y)(10000, 625) = 8$, para um *decréscimo* de 2 unidades no trabalho y^*, a produção diminuirá em aproximadamente 16 unidades.

Para esta empresa, no ponto $(x^*, y^*) = (10000, 625)$, entre aumentar o capital ou aumentar o trabalho, é mais produtivo aumentar o trabalho. Contudo, como veremos, a estratégia mais produtiva de todas é aumentar o trabalho e o capital ao mesmo tempo na proporção $1.5/8 = 0.1875$ (veja o capítulo 8 sobre derivadas direcionais e o vetor gradiente). □

Dada uma função f e um ponto (a, b), podemos calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$

(caso os limites existam) associadas ao ponto (a, b):

$$(a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \text{e} \qquad (a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Se fizermos esta associação para cada ponto (a, b) de $\mathbb{R}^2$ (supondo que os limites sempre existam) estaremos criando duas novas funções de *duas variáveis*:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y}: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array},$$

que a cada ponto (x, y) em $\mathbb{R}^2$ associam, respectivamente, as derivadas parciais com relação a x e a y no ponto (x, y).

Mais ainda, a própria definição de derivadas parciais sugere um método prático para calcular estas funções de derivada parcial: *quando queremos derivar f com relação a x, consideramos y como uma constante e efetuamos a derivada como se estivéssemos em Cálculo I e, analogamente, quando* *queremos derivar f com relação a y, consideramos x como uma constante e procedemos normalmente com o cálculo da derivada.*

Exemplo 5.2 Considere a função $z = f(x,y) = 3\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 7\,y$. Vamos calcular $\partial f/\partial x$ considerando y como uma constante. A primeira parcela é x^2 vezes uma "constante" $(3\,y^2)$ de modo que sua derivada é $2\,x$ vezes a constante, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3\,x^2y^2\right) = 2\,x \cdot 3y^2 = 6\,xy^2.$$

A segunda parcela é uma "constante" vezes x, assim, sua derivada é a própria constante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\,xy^3\right) = 4\,y^3.$$

Finalmente, desde que consideramos $7\,y$ como uma constante no cálculo da derivada parcial com relação a x, segue-se que sua derivada é zero:

$$\frac{\partial}{\partial x}(7\,y) = 0.$$

Colocando tudo isto junto e usando o fato de que a derivada da soma é a soma das derivadas, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 7\,y\right) = 6\,xy^2 + 4\,y^3.$$

Para calcular a derivada parcial com relação a y, tratamos x como uma constante. A primeira parcela de f é y^2 vezes uma constante de modo que sua derivada com relação a y é $2\,y$ vezes a constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2y^2\right) = (2\,y)\cdot\left(3\,x^2\right) = 6\,x^2y.$$

A segunda parcela é y^3 vezes uma constante, assim, sua derivada com relação a y é $3\,y^2$ vezes a constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4\,xy^3\right) = \left(3\,y^2\right)\cdot(4\,x) = 12\,xy^2.$$

Finalmente, a derivada com relação a y de $7\,y$ é, naturalmente, 7. Colocando tudo isto junto, encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 7\,y\right) = 6\,x^2y + 12\,xy^2 + 7.$$

□

Para o caso de uma função f de três variáveis x, y e z, temos três derivadas parciais, uma para cada variável:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x,b,c)-f(a,b,c)}{x-a},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &= \lim_{y\to a}\frac{f(a,y,c)-f(a,b,c)}{y-b},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &= \lim_{z\to c}\frac{f(a,b,z)-f(a,b,c)}{z-c}.
\end{aligned}$$

A regra prática continua valendo: quando derivamos f com relação a x consideramos y e z constantes, quando derivamos f com relação a y consideramos x e z constantes e quando derivamos f com relação a z consideramos x e y constantes. Mais geralmente, para uma função de n variáveis. temos a definição a seguir.

Definição 5.1 (Derivada parcial) Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Então para cada variável x_i em cada ponto $\mathrm{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ no domínio de f, definimos a *derivada parcial de f com relação a x_i no ponto* p como o número

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\ldots,p_n)=\lim_{x_i\to x_i}\frac{f(p_1,\ldots,x_i,\ldots,p_n)-f(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n)}{x_i-p_i},$$

caso o limite exista. Somente a i-ésima coordenada sofre variação. As demais coordenadas permanecem constantes.

Com a mudança de variável $x_i=p_i+h$, podemos escrever ainda

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\ldots,p_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p_1,\ldots,p_i+h,\ldots,p_n)-f(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n)}{h}.$$

Existem outras duas notações para a derivada parcial de uma função $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ com relação a x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\ldots,p_n)=f_{x_i}(p_1,\ldots,p_n)=D_if(p_1,\ldots,p_n).$$

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

O "x" que aparece na notação $\partial f/\partial x$ serve apenas para indicar que estamos derivando a função f com relação à *primeira* variável! Por exemplo, as duas funções abaixo

$$z = f(x,y) = 4 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4} \qquad \text{e} \qquad u = g(s,t) = 4 \cdot s^{3/4} \cdot t^{1/4}$$

são *iguais* pois elas possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de associação, apesar de aparecerem "letras" diferentes na definição de cada uma. Assim, tanto $\partial f/\partial x$ quanto $\partial g/\partial s$ querem dizer a mesma coisa: a derivada parcial da (mesma) função com relação à *primeira* variável. Neste sentido, a notação $D_1 f$ é a mais clara, uma vez que ela não se compromete com o uso de "variáveis auxiliares".

A definição (5.1) de derivada parcial pressupõe que a função f esteja definida em *todo* $\mathbb{R}^n$. Contudo, é possível fazer uma extensão desta definição para funções mais gerais: se $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in D_f$, então basta garantirmos que seja possível avaliar o *quociente de Newton*

$$\frac{f(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{x_i - p_i}$$

em pontos $(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n)$ para todo x_i suficientemente próximo de p_i e, sendo assim, podemos indagar se o limite

$$\lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{x_i - p_i}$$

existe ou não. Caso ele exista, definimos o seu valor como sendo a derivada parcial de f com relação a x_i no ponto $\mathbf{p}$.

Geometricamente, dizer que é possível avaliar o quociente de Newton para todos os pontos $(p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n)$ próximos de $(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ significa dizer que existe um segmento de reta paralelo ao eixo x_i inteiramente contido em D_f, onde $\mathbf{p}$ é o ponto médio deste segmento. Mais informalmente, podemos "caminhar" um pouco para frente e para trás, a partir do ponto $\mathbf{p}$, paralelamente ao eixo x_i, sem sairmos do domínio D_f de f.

Por exemplo, considere uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto D_f dado na figura (5.4). Podemos definir as duas derivadas parciais de f no ponto **p**. Agora, para o ponto **q**, podemos definir apenas a derivada parcial de f com relação a x. No ponto **r** não podemos definir nem a derivada parcial com relação a x e nem a derivada parcial com relação a y.

Observe que sempre podemos definir todas as derivadas parciais em um ponto interior do domínio da função.

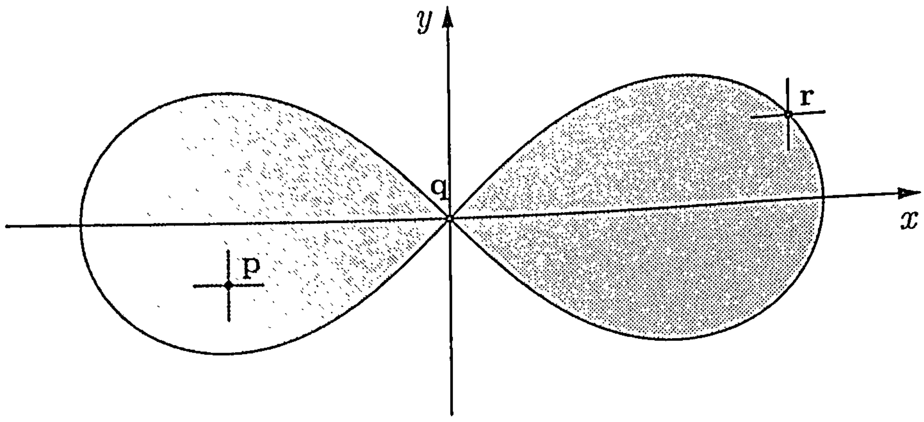

Figura 5.4: A relação entre a topologia do domínio de uma função e o conceito de derivada parcial.

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

Um abuso de notação cometido por muitos autores é o de se omitir os pontos onde as derivadas parciais são calculadas, com a justificativa de economia de espaço nas fórmulas. Assim, por exemplo, as derivadas parciais de $z = f(x,y) = 4\,x^{3/4}y^{1/4}$ são indicadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^{-1/4}y^{1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{-1/4}y^{1/4}$$

ao invés de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\,x^{-1/4}y^{1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{-1/4}y^{1/4}.$$

Mais ainda, alguns autores trocam o nome da função pela variável que representa o valor da função em um ponto do domínio:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,x^{-1/4}y^{1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{-1/4}y^{1/4}.$$

Estes abusos de notação podem causar confusão (veja, por exemplo, as observações da página 278 sobre as complicações deste abuso de notação com relação à regra da cadeia). Em nosso texto, estes abusos foram evitados ao máximo e eles aparecem apenas em alguns exercícios.

Uma vez que a derivada parcial de uma função de várias variáveis nada mais é do que a derivada de uma função adequada de uma única variável, as propriedades da derivada com relação à soma, multiplicação e divisão transferem-se imediatamente para o caso de funções de várias variáveis.

Teorema 5.1 (Propriedades da derivada parcial) Considere $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{p} \in D_f \cap D_g$. Suponha que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{p}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathrm{p})$$

de f e g com relação a x_i no ponto p existam. Então:

(a) A derivada parcial de $f+g$ com relação a x_i no ponto p existe e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(\mathrm{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{p}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathrm{p}).$$

(b) A derivada parcial de $f \cdot g$ com relação a x_i no ponto p existe e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(\mathrm{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{p}) \cdot g(\mathrm{p}) + f(\mathrm{p}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathrm{p}).$$

(c) Se $g(\mathrm{p}) \neq 0$, então a derivada parcial de f/g com relação a x_i no ponto p existe e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(\mathrm{p}) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{p}) \cdot g(\mathrm{p}) - f(\mathrm{p}) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\mathrm{p})}{\big(g(\mathrm{p})\big)^2}.$$

5.3 Derivadas parciais de ordem superior

Dada uma função $z = f(x,y)$ de duas variáveis, suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

também são funções de duas variáveis! Podemos então derivar parcialmente $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ gerando as derivadas parciais de *segunda ordem* da função f:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
f \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{tikzcd}$$

Exemplo 5.3 No exemplo (5.2) calculamos as derivadas parciais da função $z = f(x,y) = 3\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 7\,y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6\,xy^2 + 4\,y^3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6\,x^2y + 12\,xy^2 + 7.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(6\,xy^2 + 4\,y^3\right) &&= 6\,y^2,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(6\,xy^2 + 4\,y^3\right) &&= 12\,xy + 12\,y^2,\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(6\,x^2y + 12\,xy^2 + 7\right) &&= 12\,xy + 12\,y^2,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(6\,x^2y + 12\,xy^2 + 7\right) &&= 6\,x^2 + 24\,xy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6\,y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12\,xy + 12\,y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12\,xy + 12\,y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6\,x^2 + 24\,xy. \qquad \square$$

Uma função de três variáveis possui 9 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Uma função de n variáveis possui n^2 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$. A derivada de segunda ordem com relação a $x_i x_i$ é usualmente denotada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

ao invés de $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_i$. As derivadas parciais de segunda ordem da forma $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$, com $i \neq j$, são denominadas *derivadas parciais mistas*. Como as derivadas parciais de segunda ordem de uma função de n variáveis também são funções de n variáveis, podemos derivá-las parcialmente e obter as *derivadas parciais de terceira ordem* de f. Este processo pode ser continuado a fim de obter as derivadas parciais de ordem superior, enquanto os limites que definem as derivadas parciais existirem. Observe que uma função de n variáveis possui n^3 derivadas de terceira ordem, n^4 derivadas parciais de quarta ordem, etc.

A definição a seguir estabelece um critério de suavidade da função em termos da continuidade das derivadas parciais de ordem superior.

Definição 5.2 (Função de classe C^k) Dizemos que uma função $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^k se todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ existem e são contínuas em D_f. Uma função é de *classe* C^0 se ela é contínua e é de *classe* C^∞ se possui todas as derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

5.4 O teorema de Young

No exemplo (5.2), calculamos as derivadas parciais de segunda ordem de $z = f(x, y) = 3\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 7\,y$. Observe que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12\,xy + 12\,y^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

isto é, as duas derivadas parciais mistas de f são iguais. Isto não é uma coincidência!

Teorema 5.2 (Young) Suponha que $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ seja de classe C^2 em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $\mathbf{x} \in U$ e para cada par de índices i, j, vale que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

A demonstração do teorema de Young requer o uso do teorema do valor médio de Cálculo I. Você pode encontrá-la na referência [01], página 277.

Exemplo 5.4 Considere a função de produção Cobb-Douglas geral $z = f(x, y) = k\,x^a y^b$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ak\,x^{a-1}y^b, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= bk\,x^a y^{b-1},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= abk\,x^{a-1}y^{b-1} \quad \text{e} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= abk\,x^{a-1}y^{b-1},
\end{aligned}$$

com as duas últimas expressões iguais, como afirma o teorema de Young. □

O teorema de Young pode ser generalizado para derivadas parciais de ordem superior. Por exemplo, se $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é de classe C^3 então

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_4} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_4 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_4} =$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_4 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_4 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_4 \partial x_2 \partial x_1}.$$

Notação. Outra notação freqüentemente usada para derivadas parciais de segunda ordem inclui

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D_{2,1} f \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_j x_i} = D_{ji} f.$$

Estes mesmos truques de notação também são usados para indicar derivadas parciais de ordem superior, tais como f_{ijk} e assim por diante.

5.5 Exercícios

[01] Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções de duas variáveis abaixo.

(a) $z = f(r,s) = \sqrt{r^2 + s^2}$.

(b) $z = f(s,t) = t/s - s/t$.

(c) $z = f(x,y) = 2\,x^4 y^3 - xy^2 + 3\,y + 1$.

(d) $z = f(t,v) = \ln \sqrt{(t+v)/(t-v)}$.

(e) $z = f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$.

(f) $z = f(x,y) = xe^y + y\,\text{sen}(x)$.

(g) $z = f(x,y) = e^x \ln(xy)$.

(h) $z = f(x,y) = x\cos(x/y)$.

[02] Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções de três variáveis abaixo.

(a) $w = f(x,y,t) = (x^2 - t^2)/(1 + \text{sen}(3\,y))$.

(b) $w = f(x,y,z) = (y^2 + z^2)^x$.

(c) $w = f(r,s,v) = (2\,r + 3\,s)^{\cos(v)}$.

(d) $w = f(r,s,t) = r^2 e^{2\,s}\cos(t)$.

(e) $w = f(x,y,z) = xe^z - ye^x + ze^{-y}$.

(f) $w = f(x,y,z) = xyze^{xyz}$.

[03] Na figura (5.5) encontram-se os gráficos de três funções de duas variáveis:

$$f, \quad \partial f/\partial x \quad \text{e} \quad \partial f/\partial y.$$

Faça uma identificação entre os gráficos e as funções.

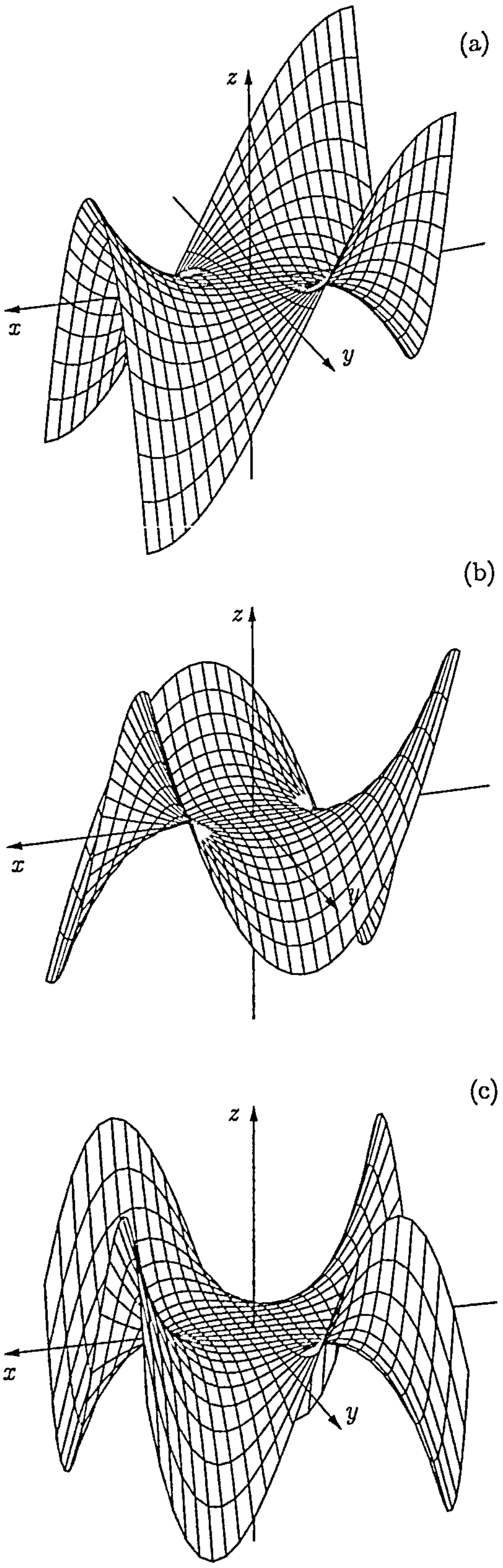

Figura 5.5: Os gráficos de f, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

[04] Para cada uma das funções abaixo verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

(a) $w = xyz$.
(b) $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$.
(c) $w = x^2/(x+y)$.
(d) $w = x^3e^{-2y} + y^{-2}\cos(x)$.
(e) $w = y^2e^{x^2} + 1/(x^2y^3)$.
(f) $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

[05] Resolva as questões abaixo.

(a) Calcule w_{xyz} para $w = 3x^2y^3z + xy^4z^2 - yz$.
(b) Calcule w_{tut} para $w = u^4vt^2 - 3uv^2t^3$.
(c) Calcule w_{zzy} para $w = y\ln(x^2+z^4)$.

[06] Resolva as questões abaixo.

(a) Calcule $\partial^3 w/\partial z\partial y^2$ para $w = x^2/(y^2+z^2)$.
(b) Calcule $\partial^3 w/\partial z\partial y\partial x$ para $w = \operatorname{sen}(xyz)$.

[07] (**Função harmônica**) Uma função $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ é *harmônica* se ela satisfaz a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0.$$

Mostre que $z = f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ e $z = g(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ são funções harmônicas.

[08] Quais destas funções satisfazem a equação de Laplace (veja a questão anterior)?

(a) $z = f(x,y) = x^2 - y^2$.
(b) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.
(c) $z = f(x,y) = xy$.
(d) $z = f(x,y) = y^3 + 3x^2y$.
(e) $z = f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.

[09] Se $w = e^{-c^2t}\operatorname{sen}(cx)$, mostre que $w_{xx} = w_t$ para todo real c.

[10] Mostre que $v = \operatorname{sen}(k\,x) \cdot \operatorname{sen}(ak\,t)$ satisfaz a *equação da onda*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

[11] Seja C a curva resultante da interseção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 1$. Determine a equação da tangente l a C no ponto $P = (1, 2, 4)$. Esboce o gráfico do parabolóide, de C e de l.

[12] Calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{3 + (x + y + h)^2 z - (3 + (x + y)^2 z)}{h}.$$

[13] Utilizando diretamente a definição de derivadas parciais, calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ para as funções f dadas abaixo.

(a) $z = f(x, y) = x + 2\,y$.

(b) $z = f(x, y) = x^2 + 3\,y^2$.

[14] Encontre $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ para

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

e $g_x(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, para

$$z = g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[15] Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para as funções abaixo.

(a) $z = f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \ln(\operatorname{sen}(t))\, dt$.

(b) $z = f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^{\cos(t)}\, dt$.

[16] Calcule todas as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$u = g(x, y, z) = xz + e^z \left(\int_0^x t^2 e^t \, dt \right).$$

[17] Calcule todas as derivadas de terceira ordem da função de produção $Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$. Use o teorema de Young para acelerar o processo.

[18] Seja $z = f(x,y) = x^4y^3 - x^8 + y^4$.

(a) Calcule $\partial^3 z/\partial y\partial x\partial x$, $\partial^3 z/\partial x\partial y\partial x$ e $\partial^3 z/\partial x\partial x\partial y$.

(b) Calcule $\partial^3 z/\partial x\partial y\partial y$, $\partial^3 z/\partial y\partial x\partial y$ e $\partial^3 z/\partial y\partial y\partial x$.

*[19] O objetivo deste exercício é examinar uma função de classe C^1 para a qual a tese do teorema de Young falha: as derivadas parciais mistas não são iguais. Seja

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Prove que f se anula sobre os eixos x e y. Conclua então que $(\partial f/\partial x)(0,0)$ e $(\partial f/\partial y)(0,0)$ são iguais a zero.

(b) Calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ para pontos $(x,y) \neq (0,0)$ e conclua que $(\partial f/\partial x)(0,y) = -y$ e $(\partial f/\partial y)(x,0) = x$.

(c) Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1.$$

(d) Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = +1$$

e conclua que as derivadas parciais mistas de f não são iguais em $(0,0)$.

(e) Calcule $(\partial^2 f/\partial x\partial y)(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(f) Use o item anterior para mostrar que $(\partial f^2/\partial x\partial y)(x,x) = 0$ para $x > 0$.

(g) Conclua que $(\partial^2 f/\partial x\partial y)(x,y)$ é descontínua na origem $(0,0)$ (assim, f não é uma função de classe C^2) que é a hipótese do teorema de Young não se verifica.

[20] Seja $z = f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ onde g e h são funções diferenciáveis de uma única variável. Encontre uma expressão para $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$. *Dica: lembre-se como calcular uma derivada parcial de maneira prática!*

[21] Estabeleça os mesmos resultados da questão anterior com o uso direto da definição de derivadas parciais.

[22] Qual é a diferença (se é que existe) entre $\partial^2 f / \partial x^2$ e $(\partial f / \partial x)^2$?

[23] Calcule todas as derivadas parciais de ordem 1 da função

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

[24] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo $f_x(0, 0, 0) = 0$, $f_y(0, 0, 0) = 0$ e $f_z(0, 0, 0) = 0$, então $f(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo $f_x(x, y, z) = 0$, $f_y(x, y, z) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $f(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

[25] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

satisfazendo $f_x(x, y, z) = 0$, $f_y(x, y, z) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in D$, então $f(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in D$.

(b) Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

satisfazendo $f_x(x, y, z) = 0$, $f_y(x, y, z) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in D$ e $f(0, 0, 0) = 0$, então $f(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in D$.

[26] A Companhia ACME produz três tipos de *roller skates*. O custo em reais para se produzir x, y e z unidades de cada tipo de *skate* é

$$c(x, y, z) = 30000 + 27\,x + 36\,y + 47\,z.$$

(a) O valor $\partial c/\partial x$ representa a taxa variação no custo devido ao acréscimo de uma unidade na produção do *skate* mais barato, sendo que os níveis de produção das outras unidades mais caras permanecem constantes. Encontre esta taxa.

(b) Encontre $\partial c/\partial z$ e forneça uma interpretação.

[27] Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração $C(x, y)$ (em μ/m^3) do poluente em um ponto P situado a y metros acima do chão e cuja projeção ortogonal sobre o chão está a x quilômetros da base da chaminé pode ser representada por

$$C(x, y) = \frac{a}{x^2}\left(e^{-b\,(y-h)^2/x^2} + e^{-b\,(y+h)^2/x^2}\right)$$

em que a e b são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente (veja a figura (5.6)). Suponha que

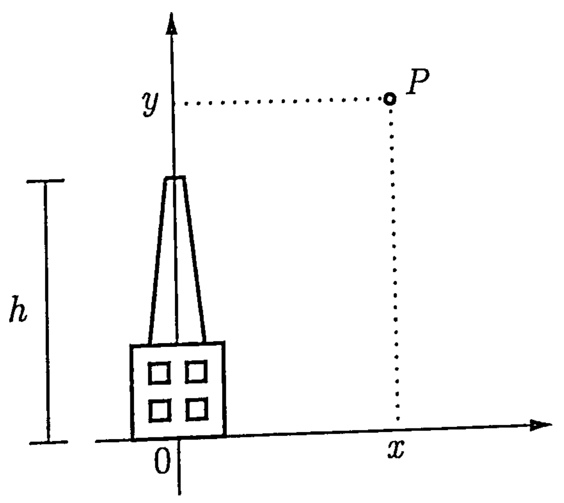

Figura 5.6: Concentração de um poluente emitido por uma chaminé.

$$C(x, y) = \frac{200}{x^2}\cdot\left(e^{-0.02\,(y-10)^2/x^2} + e^{-0.02\,(y+10)^2/x^2}\right).$$

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $P = (2, 5)$.

[28] A análise de certos circuitos eletrônicos envolve a fórmula

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega}},$$

em que I é a corrente, V a voltagem, R a resistência, L a indutância e ω uma constante positiva. Calcule e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

[29] A maioria dos computadores tem apenas um processador que pode ser utilizado para cálculos. Os supercomputadores modernos, entretanto, têm entre dois a vários milhares de processadores. Um supercomputador multiprocessador é comparado a um computador uniprocessador em termos de *speed up*. A *speed up* S é o número de vezes mais rápido que um cálculo pode ser feito com um multiprocessador do que com um uniprocessador. A *lei de Amdahl* é uma fórmula para determinar S:

$$S(p,q) = \frac{p}{q + p \cdot (1-q)},$$

em que p é o número de processadores e q é a fração de cálculo que pode ser realizada utilizando todos os processadores disponíveis em paralelo, isto é, usando-os de maneira que os dados sejam processados concomitantemente por unidades separadas. A situação ideal, *paralelismo completo*, ocorre quando $q = 1$.

(a) Se $q = 0.8$, ache o *speed up* quando p é igual a 10, 100 e 1000. Mostre que o *speed up* S não pode exceder 5, independentemente do número de processadores disponíveis.

(b) Ache a taxa de variação de S em relação a q.

(c) Qual a taxa de variação no item anterior se há paralelismo completo? Como o número de processadores afeta esta taxa de variação?

A *eficiência* E de um cálculo por multiprocessador pode ser calculada pela equação

$$E = \frac{S(p,q)}{p} = \frac{1}{q + p \cdot (1-q)}.$$

(d) Mostre que se $0 \leq q < 1$, então E é uma função decrescente de p. Conclua que sem paralelismo completo, o aumento do número de processadores não aumenta a eficiência do cálculo.

[30] No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por

$$T = T_0\, e^{-\lambda \cdot x}\ \mathrm{sen}(\omega\, t - \lambda\, x),$$

em que T_0, ω e λ são constantes.

(a) Calcule e interprete as derivadas parciais $\partial T/\partial t$ e $\partial T/\partial x$.

(b) Mostre que T satisfaz a *equação unidimensional do calor*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

com $k = 2\,\lambda^2/w$.

[31] A *capacidade vital* V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino com x anos de idade e y centímetros de altura, V pode ser aproximada pela fórmula

$$V = 27.63\, x - 0.112\, y.$$

Calcule e interprete as derivadas parciais $\partial V/\partial x$ e $\partial V/\partial y$.

[32] Em um dia claro, a intensidade da luz solar às t horas após o nascente e à profundidade oceânica de x metros, pode ser aproximada por

$$I(x, t) = I_0\, e^{-k\, x}\ \mathrm{sen}^3(\pi\, t/D),$$

com I_0 a intensidade da luz solar ao meio-dia, D a quantidade horas do dia com luz solar e k uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete as derivadas parciais $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ horas e $x = 5$ metros.

[33] Em Economia, a *elasticidade de preço de procura* de um artigo indica a reação dos consumidores a uma alteração no preço de mercado do artigo. Suponhamos que n artigos A_1, A_2, $\dots$, A_n tenham preços p_1, p_2, $\dots$, p_n, respectivamente, e que a demanda pelo artigo A_k seja uma função q_k dos preços p_1, p_2, $\dots$, p_n:

$$q_k = f_k(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

A *elasticidade* de preço do artigo A_k é a função e_k (que depende dos preços p_1, p_2, $\dots$, p_n) definida por

$$e_k = \frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial p_k}.$$

Mostre que se modelarmos a demanda q_k com uma Cobb-Douglas

$$q_k = b_k \cdot p_1^{-a_{k,1}} \cdot p_2^{-a_{k,2}} \cdot \dots \cdot p_n^{-a_{k,n}}, \qquad (*)$$

onde $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, ..., $a_{k,n}$ são constantes não-negativas, então a elasticidade e_k será uma função constante.

Diz-se que o artigo A_k é *independente* do artigo A_j se uma variação no preço p_k de A_k não afeta a demanda q_j de A_j. Isto equivale à condição $\partial q_j/\partial p_k = 0$. Mostre que se a demanda q_k é modelada pela Cobb-Douglas $(*)$, então A_k é independente de A_j se, e somente se, $a_{j,k} = 0$.

[34] Mostre que para toda constante positiva c, a função

$$u(x,t) = \frac{12\, c\, e^{(x-ct)\sqrt{c}}}{\left(e^{(x-ct)\sqrt{c}} + 1\right)^2}$$

satisfaz a equação de Korteweg-de Vries (KdV):

$$u_t(x,t) + u_{xxx}(x,t) + u(x,t) \cdot u_x(x,t) = 0$$

Esta solução (denominada *sóliton*) representa o perfil de uma onda de água navegando por um canal estreito.

5.6 Nota histórica

A notação $\partial u/\partial x$ foi usada pela primeira vez por Adrien Marie Legendre em 1786 em sua obra *"Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations"*. Na página 8 está escrito:

> *Pour éviter toute ambiguité, je représenterai par $\partial u/\partial x$ le coefficient de x dans la différence de u, & par du/dx la différence complète de u divisée par dx.*

Legendre abandonou o símbolo e ele foi reintroduzido por Carl Gustav Jacob Jacobi, em 1841, em seu artigo *"De determinantibus Functionalibus"*:

> *Sed quia uncorum accumulatio et legenti et scribenti molestior fieri solet, praetuli characteristica d differentialia vulgaria, differentialia autem partialia characteristica ∂ denotare.*

O símbolo ∂ é algumas vezes chamado de delta de Jacobi e ele corresponde à letra "d" do alfabeto russo.