ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins

EDITORA UFOP

2014

Sumário

Sumário **3**

1 Funções Elementares **17**

1.1 Introdução 17

1.2 Definição 17

1.3 Gráfico de uma função 18

1.4 Domínio de uma Função 19

1.4.1 Função Polinomial 19

1.4.2 Função Racional 20

1.4.3 Função Irracional 21

1.5 Composição de Funções 23

1.6 Tipos de Funções 24

1.6.1 Função Polinomial do Primeiro Grau 24

1.6.2 Função Polinomial do Segundo Grau 24

1.6.3 Função Modular 25

1.6.4 Funções Periódicas 26

1.6.5 Função Par 26

1.6.6 Função Ímpar 27

1.6.7 Função Injetora 27

1.6.8 Função Sobrejetora 27

1.6.9 Função Bijetora 28

1.6.10 Função Inversa 28

1.6.11 Caso Especial 29

1.6.12 Função Exponencial 31

1.6.13 Função Logarítmica 32
1.7 Funções Trigonométricas 33
1.7.1 Função seno 33
1.7.2 Função Arco Seno 33
1.7.3 Função Cosseno 34
1.7.4 Função Arco Cosseno 35
1.7.5 Funções Tangente 36
1.7.6 Função Arco Tangente 36
1.7.7 Função Cotangente 37
1.7.8 Função Arco Cotangente 38
1.7.9 Função Secante 38
1.7.10 Função Arco Secante 39
1.7.11 Função Co-secante 39
1.7.12 Função Arco Co-secante 40
1.8 Exercícios Resolvidos 41
1.9 Exercícios Propostos 57

2 Limites **61**
2.1 Definição 63
2.2 Limites Laterais 64
2.3 Propriedades e Operações com Limites 65
2.4 Indeterminações 66
2.5 Limites no Infinito 67
2.6 Limites Infinitos 67
2.7 Limites Fundamentais 69
2.8 Limites: Exercícios Resolvidos 69
2.9 Exercícios Propostos 92

3 Funções Contínuas **95**
3.1 Introdução 95
3.2 Definição 95
3.3 Propriedades 95
3.4 Teorema do Valor Intermediário 96

Capítulo 1

Funções Elementares

1.1 Introdução

Um dos mais relevantes conceitos da Matemática é sem dúvidas, o conceito de Função. Existem informações de que 300 a.C. Euclides já utilizava conceitos semelhantes. As primeiras ideias foram inicialmente apresentadas, mais formalmente, nos trabalhos de Newton[1] e Leibniz por volta do século XVII. Entretanto, somente com Leonard Euler é que este conceito foi apresentado de forma semelhante ao estilo de hoje.
Este capítulo consiste em apresentar as principais funções elementares e suas características, bem como, alguns gráficos especiais.

1.2 Definição

Diz-se que uma relação que associa o conjunto A em B é uma função, se esta relação associar cada elemento do conjunto A a um **<u>único</u>** elemento do conjunto B. Em resumo:

$$\begin{aligned} f: \ A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

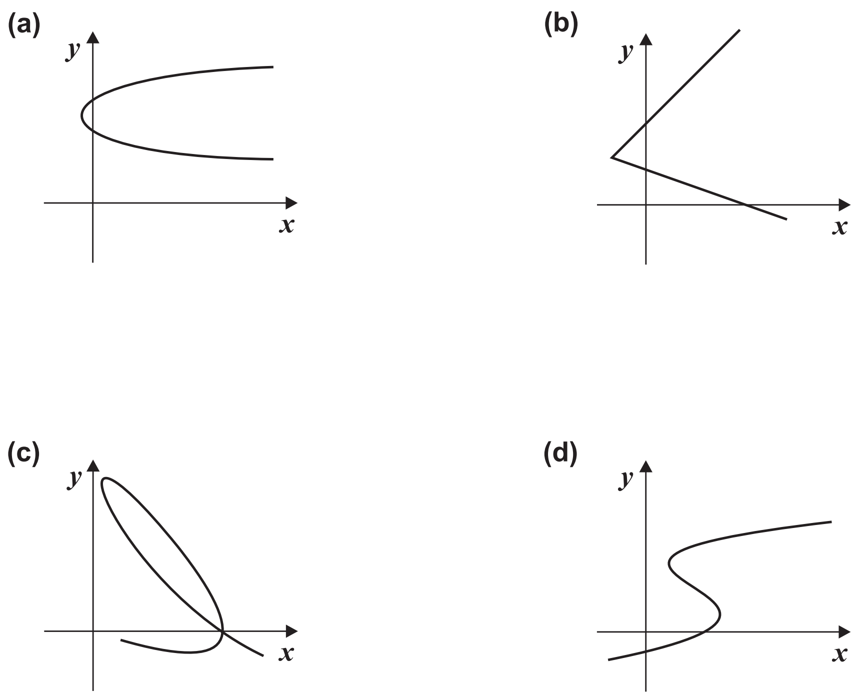
é uma função desde que para cada $x \in A$ implique que exista um **único** $f(x) \in B$.

[1] Boyer, Carl. História da Matemática

1.3 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados da forma $(x, f(x))$, isto é,

$$\mathrm{Gr}\,(f) \;=\; \{\,(x,y) \,\in\, A \times B\,,\; y = f(x)\}.$$



As figuras (a), (b), (c) e (d) são exemplos de ilustrações que não representam uma função.

No estudo de funções vamos entender uma função como sendo uma relação

$$\begin{aligned} f \;:\; A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

onde f é uma função cujo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é o domínio (i.e., o campo de existência de f e denotado por $\mathrm{D}_f =$ Domínio de f) e o subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ é o contra domínio de f.

Ao conjunto formado pelos elementos $f(x)$ do contra domínio chamamos de **Imagem** de f, ou seja,

$$\text{Im}_f = \{\, y \in B \text{ tal que } f(x) = y\,, \quad \text{com } x \in \text{D}_f\}.$$

Exemplo. Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\} \\ f(x) &= -x \end{aligned}$$

então o conjunto imagem desta função é dado por $\text{Im}_f = \{-3, -2, -1\}$. O leitor atento deverá observar que nem sempre o contra domínio de f (neste exemplo é o conjunto $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$) coincide com a imagem de f.

1.4 Domínio de uma Função

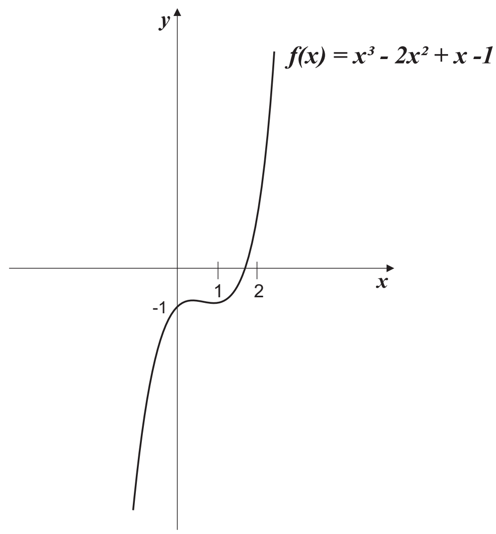
O domínio de uma função pode ser entendido como sendo o conjunto dos elementos x para os quais $f(x)$ tem sentido, ou seja, o campo de existência de f.

1.4.1 Função Polinomial

Toda função f definida por um polinômio tem como domínio o conjunto (subconjunto) dos números os reais.

Exemplo. Esboce o gráfico da função polinomial

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1\,.$$



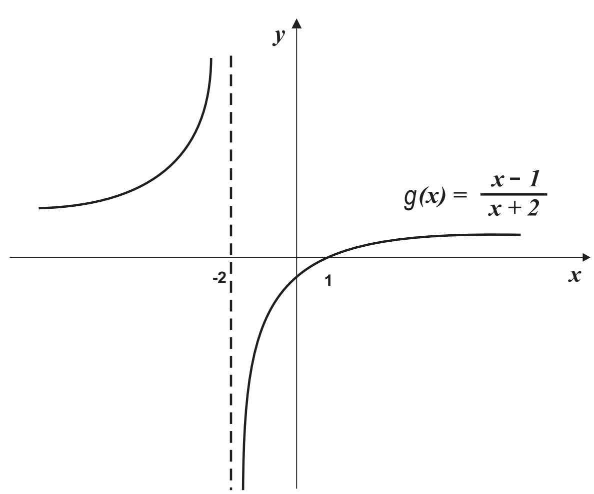
1.4.2 Função Racional

Toda função f definida por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, tem como domínio o conjunto formado pelos $x \in \mathbb{R}$ tais que $Q(x) \neq 0$, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad Q(x) \neq 0\}.$$

Exemplo. Dê o domínio e esboce o gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

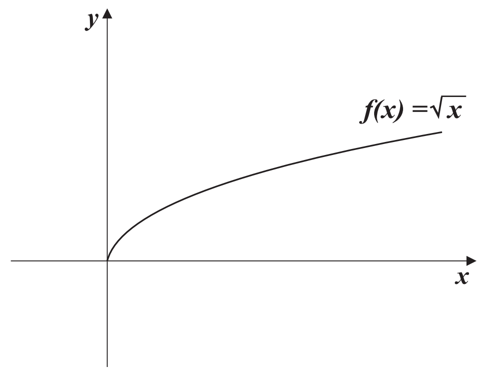


Solução. $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

1.4.3 Função Irracional

Toda função f definida por $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, tem como domínio o conjunto formado pelos elementos $x \in \mathbb{R}$ tais que $P(x) \geq 0$, caso n seja par, e todos os números reais, caso n seja ímpar.

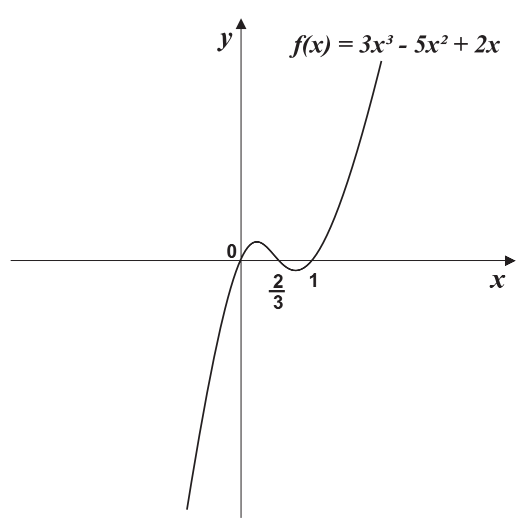
Exemplo. Dê o domínio e esboce o gráfico da função irracional $f(x) = \sqrt{x}$.



Solução. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

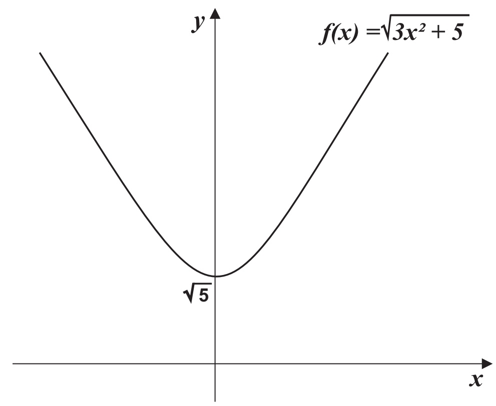
Exemplo 1. Encontre o domínio e a imagem das funções:

a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$



Solução. Neste caso temos, $D_f = \mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$



Solução. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 + 5 \geq 0\} = \mathbb{R}$, pois, $3x^2 + 5 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Já a imagem desta função é dada por $Im_f = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq \sqrt{5}\}$.

Exemplo 2. Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

Solução. Esta função fica bem definida desde que o denominador não se anule. Assim sendo, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{x}$

Solução. O domínio de f será obtido a partir da intersecção dos domínios das três expressões que integram a função, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 > 0,\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ e } x \neq 0\}.$$

Para facilitar o entendimento colocamos $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$, onde
D_{f_1} é o domínio de $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, cujo domínio é dado por

$$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 > 0\} =]-\infty\,, -1[\cup]\,1\,, \infty[.$$

D_{f_2} é o domínio de $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, onde o domínio é dado por

$$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

E por fim, D_{f_3} é o domínio de $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$. O resultado é dado por

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Portanto,

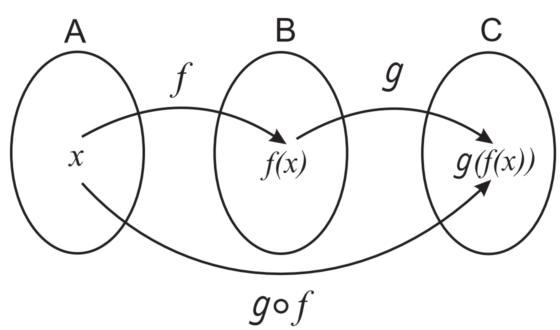
$$D_f =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,\infty\,[-\{2\}.$$

1.5 Composição de Funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções com $f(B) = D_g$ então,

$$\begin{aligned} (gof) \ &: \ A \to C \\ & \quad\ x \to g(f(x)) \end{aligned}$$

as notações $gof(x)$ ou $g(f(x))$ expressam a função g composta com f, que é obtida aplicando-se g a imagem de f no ponto x do domínio de f.



Exemplos. Considere $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = 2x + 3$:

(**a**) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \sqrt{(2x+3)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 + 12x + 8}$

(**b**) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2-1}) = 2(\sqrt{x^2-1}) + 3$

(**c**) $(fof)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^2-1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2 - 1} = \sqrt{x^2-2}$

1.6 Tipos de Funções

1.6.1 Função Polinomial do Primeiro Grau

Chama-se função polinomial do primeiro grau toda função da forma

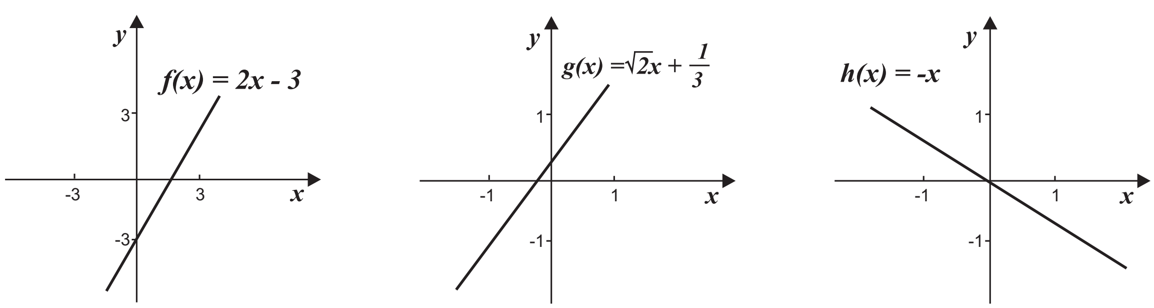
$$f(x) = ax + b \qquad \text{onde} \qquad a,\, b \in \mathbb{R} \quad \text{com}\, a \neq 0.$$

O gráfico de uma função polinomial do primeiro grau é sempre uma reta, que pode passar ou não pela origem. Dependendo do valor de a podemos ter informações se $f(x) = ax + b$ é crescente ou decrescente, ou seja,

$$\begin{cases} f \;\text{ é crescente quando } \; a > 0; \\ f \;\text{é decrescente quando } \; a < 0; \\ f \;\text{é constante quando } \; a = 0. \end{cases}$$

Exemplo. Considere as funções

$$f(x) = 2x - 3\,, \qquad g(x) = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad h(x) = -x.$$



Nestes casos temos $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$. É fácil ver que f e g são funções crescentes e h é decrescente.

1.6.2 Função Polinomial do Segundo Grau

Chama-se função polinomial do segundo grau toda função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \quad \text{com}\, a \neq 0.$$

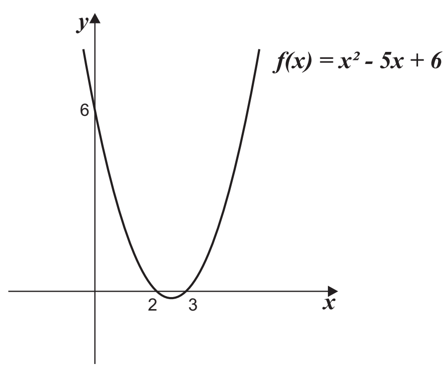
Neste caso, à respeito das raízes da equação associada à função acima pode-se afirmar que

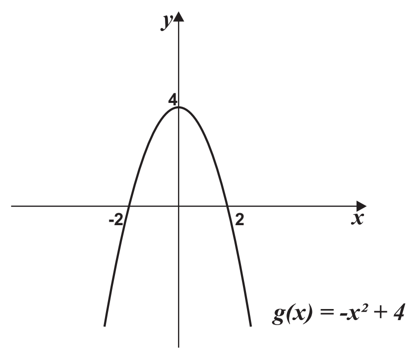
$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \text{raízes reais e distintas;} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{raízes reais e iguais;} \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{raízes não reais ou complexas.} \end{cases}$$

O domínio deste tipo de função é sempre o conjunto $\mathbb{R}$. O gráfico desta função é uma **parábola** que pode ser voltada para cima ou para baixo, caso o sinal de a seja positivo ou negativo, isto é,

$$\begin{cases} \text{Parábola voltada para cima} & \text{se} \quad a > 0; \\ \text{Parábola voltada para baixo} & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Exemplo. Esboce os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 4$.



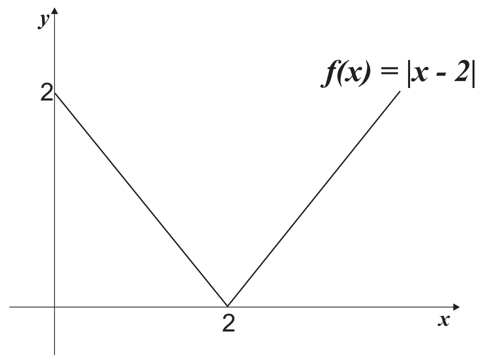


1.6.3 Função Modular

Define-se a função modular por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Exemplo. Esboce o gráfico da função modular $f(x) = |x - 2|$, depois encontre seu domínio e imagem.



Neste caso tem-se, $D_f = \mathbb{R}$ e $Im_f = \mathbb{R}_+$.

1.6.4 Funções Periódicas

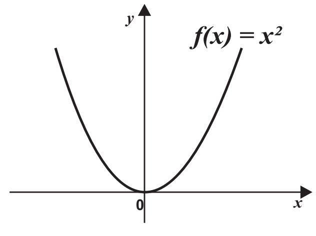
Diz-se que f é periódica se existe um número real $t \neq 0$ tal que $f(x+t) = f(x)$ $\forall x \in D_f$.
A função $f(x) = 2$ é periódica, basta observar que, $f(x+t) = f(x) = 2$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

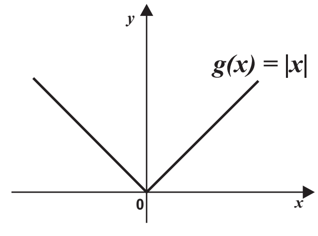
Observação. As funções trigonométricas são exemplos clássicos deste tipo de função. Uma boa leitura sobre estes exemplos pode ser feita pelo leitor já nas próximas seções deste livro.

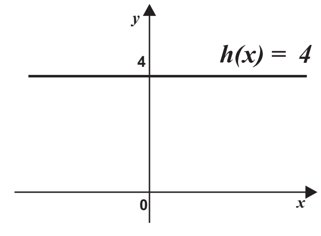
1.6.5 Função Par

Diz-se que f é uma função par, caso ela cumpra a condição $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D_f$.
Geometricamente, as funções pares são simétricas em relação ao eixo dos y.

Exemplo. As funçoes $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = 4$ são pares. Veja os seus respectivos gráficos abaixo:



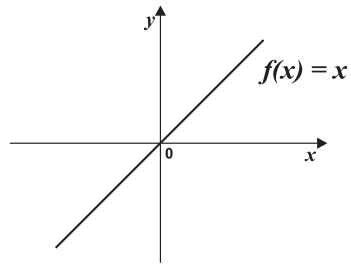


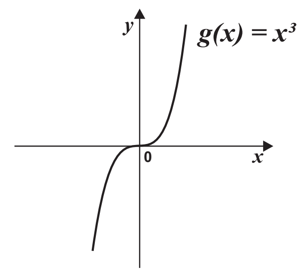


1.6.6 Função Ímpar

Diz-se que f é uma função ímpar, caso ela cumpra a condição $f(x) = -f(-x)\ \ \forall x \in D_f$. Geometricamente, as funções ímpares são simétricas em relação à origem.

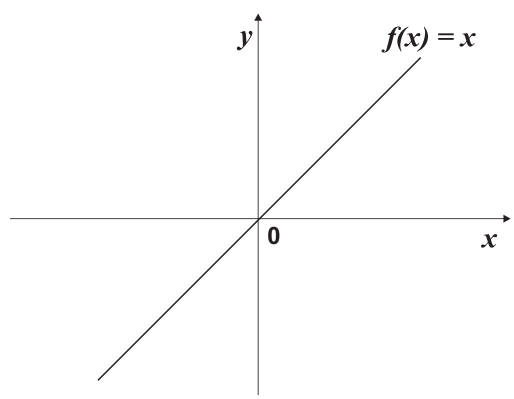
Exemplo. Observe que $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$ são exemplos de funções ímpares. Veja seus respectivos gráficos abaixo:





1.6.7 Função Injetora

Uma função $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é dita injetora quando cumpre a propriedade de que para quaisquer que sejam $x_1 \neq x_2$ no domínio de f (em A) implicar que $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B. A função $f(x) = x$, conhecida como função identidade, é um exemplo de função injetora.



1.6.8 Função Sobrejetora

Diz-se que uma função f é sobrejetora quando o contra domínio de f for igual a sua imagem. ($\mathrm{CD}_f = \mathrm{Im}_f$). A mesma função $f(x) = x$ é um exemplo clássico de função sobrejetora.

1.6.9 Função Bijetora

Diz-se que f é uma função bijetora quando for injetora e sobrejetora simultaneamente. Consequentemente, $f(x) = x$ é uma função bijetora.

1.6.10 Função Inversa

Seja $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ uma função bijetora então a inversa de f é uma função denotada por f^{-1} que tem a característica de levar os elementos do conjunto B nos do conjunto A, isto é,

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ &\quad x \;\; \to \;\; f(x) \\ f^{-1} \quad &: \quad \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ &\quad y \;\; \to \;\; f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Exemplo 1. Encontre a função inversa da função bijetora

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \qquad x \neq -2\,.$$

Solução. Escreve-se inicialmente a função da seguinte forma

$$y = \frac{3x-1}{x+2}$$

agora trocam-se as variáveis x por y e vice-versa, isto é,

$$x = \frac{3y-1}{y+2}.$$

Finalmente, isola-se y, o resultado é dado por;

$$x(y+2) = 3y-1 \quad \Rightarrow \quad xy+2x = 3y-1 \quad \Rightarrow \quad xy-3y = -2x-1.$$

Portanto,

$$y = \frac{(2x+1)}{(3-x)} \qquad x \neq 3.$$

Assim sendo,

$$\text{se} \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad \text{então} \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3-x}.$$

Exemplo 2. Encontre a função inversa de

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Solução.
Seja

$$y = x^2 - 1.$$

Inicialmente, trocam-se as variáveis, isto é,

$$x = y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x+1}\,.$$

Neste caso, a inversa depende das escolhas do domínio e da imagem para que a função f seja bijetora. Ou seja, escolhe-se a função bijetora

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{R}_+ &\to [-1,\infty[\\ f(x) &= x^2 - 1\,. \end{aligned}$$

Então f^{-1} será dada por

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ [-1,\infty[&\to \mathbb{R}_+ \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x+1}\,. \end{aligned}$$

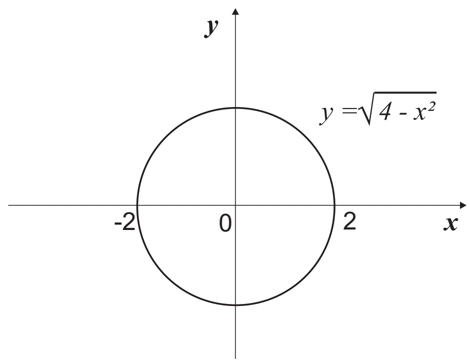
1.6.11 Caso Especial

Considere a expressão $y = \sqrt{4 - x^2}$.

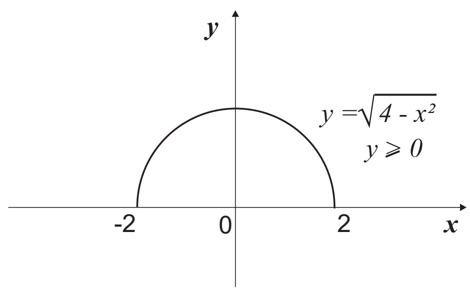
Da expressão acima podemos dizer que $y \geq 0$. Portanto,

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 4\,.$$

Mas, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$ é a equação da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2.



Como $y \geq 0$, o gráfico de $y = \sqrt{4 - x^2}$ é somente a parte positiva da curva, observe o gráfico abaixo.



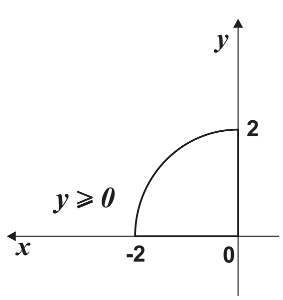
Neste caso, a função não é inversível por não ser injetora. Para ver que esta função não é injetora, basta o leitor observar, que para $x = -2$ *e* $x = 2$ a função tem como imagem o mesmo valor $f(-2) = f(2) = 0$. Portanto, não é bijetora, sendo assim, não é inversível. Para torná-la inversível, basta fazer uma das escolhas abaixo:

$y = \sqrt{4 - x^2}$ $f : [-2, 0] \to [0, 2]$,

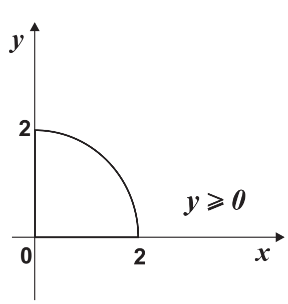
ou

$y = \sqrt{4 - x^2}$ $f : [0, 2] \to [0, 2]$.

Assim sendo, ambas são inversíveis. Como tarefa faça o gráfico destas funções e encontre a lei que define a inversa em cada caso. Veja gráficos abaixo.



$y = \sqrt{4 - x^2}$
$f : [-2, 0] \to [0, 2]$



$y = \sqrt{4 - x^2}$
$f : [0, 2] \to [0, 2]$

1.6.12 Função Exponencial

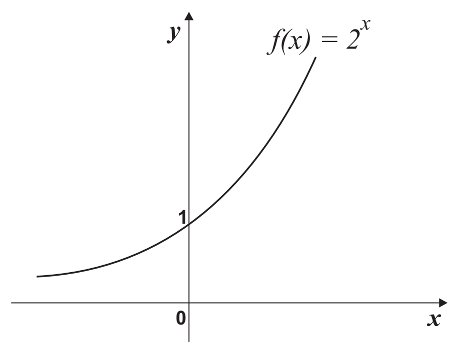
Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se função exponencial de base a, a função que a cada número real x associa o número real a^x, ou seja,

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = a^x. \end{aligned}$$

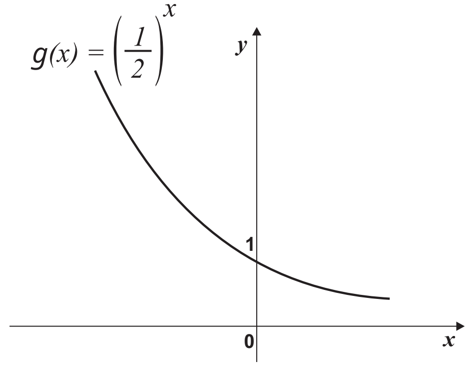
O domínio da função exponencial é dado por $\mathbb{R}$ e a imagem por $\mathbb{R}_+^*$.

Exemplo. Se $a > 1$ então a função exponencial é crescente. Entretanto, se $0 < a < 1$ então a função exponencial é decrescente. Para ilustrar este fato, observe os gráficos das funções abaixo;

a) $f(x) = 2^x$



b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



1.6.13 Função Logarítmica

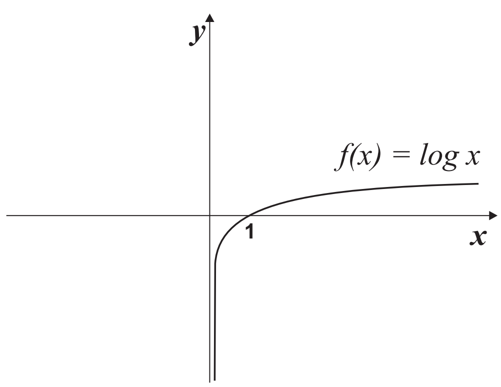
Chama-se função logarítmica de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$ a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+^*$ o número real $\log_a x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \log_a x. \end{aligned}$$

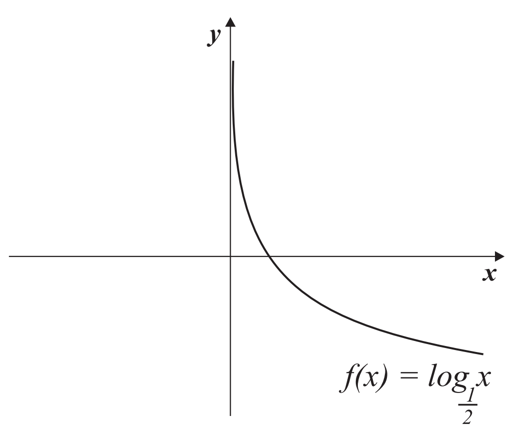
O domínio da função logarítmica é dado por $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem por $\mathbb{R}$.

Exemplo. Se $a > 1$ a função logarítmica é crescente. Entretanto, se $0 < a < 1$ então a função é decrescente. Observe os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log x$



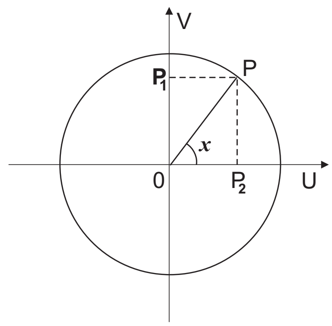
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



1.7 Funções Trigonométricas

1.7.1 Função seno

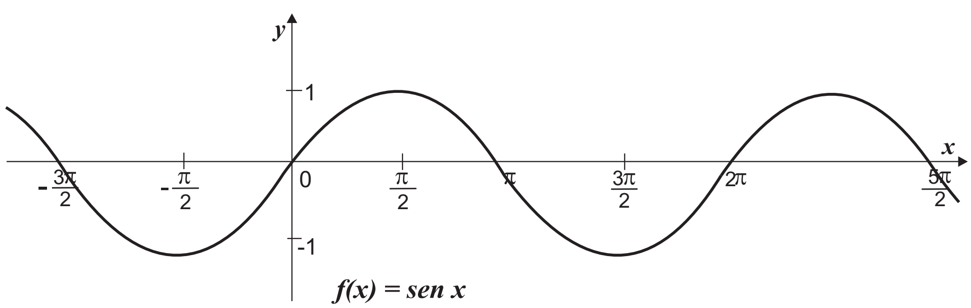
Considere o plano UOV e a circunferência de centro $C(0,0)$ e raio $r=1$. Sejam, um ângulo com medida x radianos e P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x com a circunferência.



Denomina-se seno de x a ordenada P_1 do ponto P. A função seno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \operatorname{sen} x$, isto é,

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo real $[-1,1]$. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é periódica de período 2π, pois, $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{D}_f$.



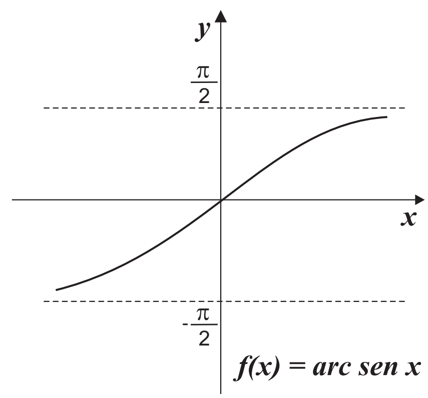
1.7.2 Função Arco Seno

Para obter a função inversa da função seno considera-se a função bijetora

$$\begin{aligned} f: \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1,1] \\ f(x) &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

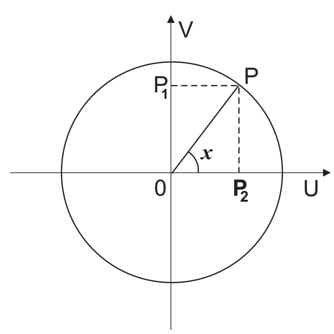
Então a inversa de $f(x) = \text{sen}\, x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} \ &: \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\to f^{-1}(x) = \text{arc sen}\, x \end{aligned}$$



1.7.3 Função Cosseno

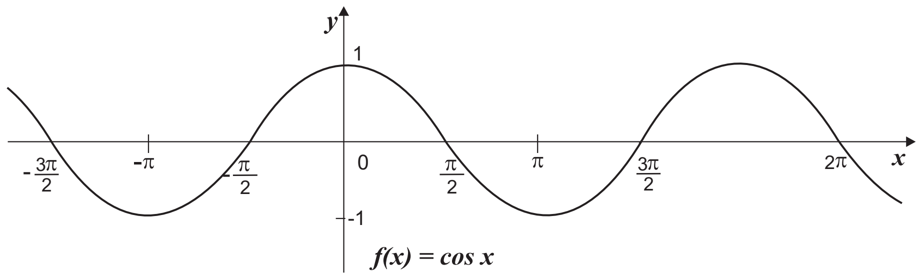
Considerando a circunferência anterior com as mesmas informações, denomina-se cosseno, a abscissa P_2, do ponto P.



A função cosseno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \cos x. \end{aligned}$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1,1]$. A função $f(x) = \cos x$ também é uma função periódica de período 2π, pois $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.



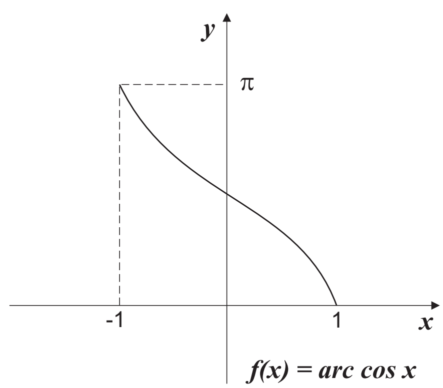
1.7.4 Função Arco Cosseno

Para obter a função inversa da função cosseno considera-se a função bijetora:

$$\begin{aligned} f: \quad [0,\pi] &\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) &= \cos\, x \end{aligned}$$

então a inversa de $f(x) = \cos\, x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc}\ \cos x. \end{aligned}$$

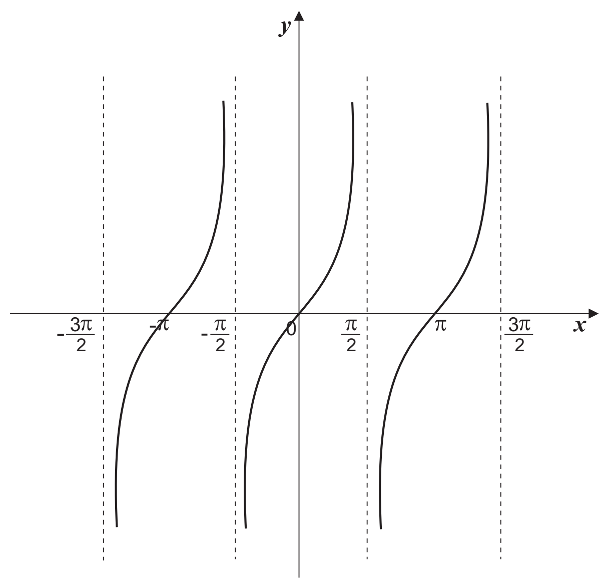


1.7.5 Funções Tangente

A função tangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é definida para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função tangente é dada por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.



f(x) = tg x

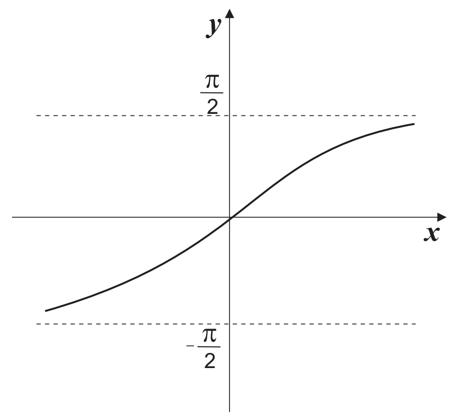
1.7.6 Função Arco Tangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f: \ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\to f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x. \end{aligned}$$



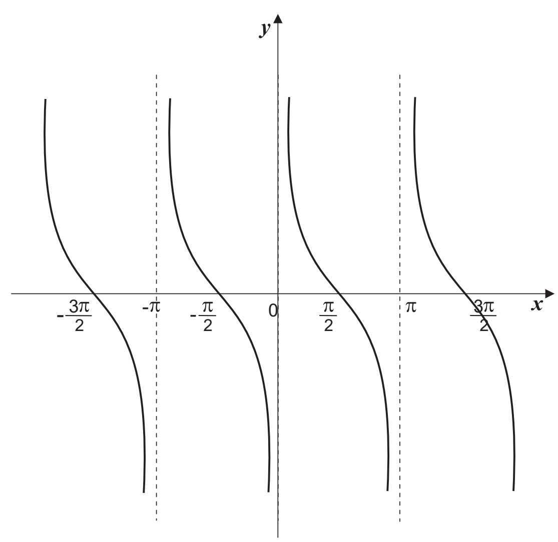
f(x) = arc tg x

1.7.7 Função Cotangente

A função cotangente é definida por

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.



f(x) = cotg x

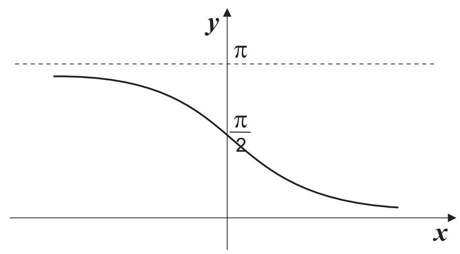
1.7.8 Função Arco Cotangente

Considere a função bijetora

$$\begin{array}{rl} f: \ ]0\,,\,\pi[& \longrightarrow [-1,1] \\ f(x) & = \operatorname{cotg} x. \end{array}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{array}{rl} f^{-1}: \ [-1,1] & \longrightarrow]0\,,\,\pi[\\ x & \longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\ cotg} x. \end{array}$$

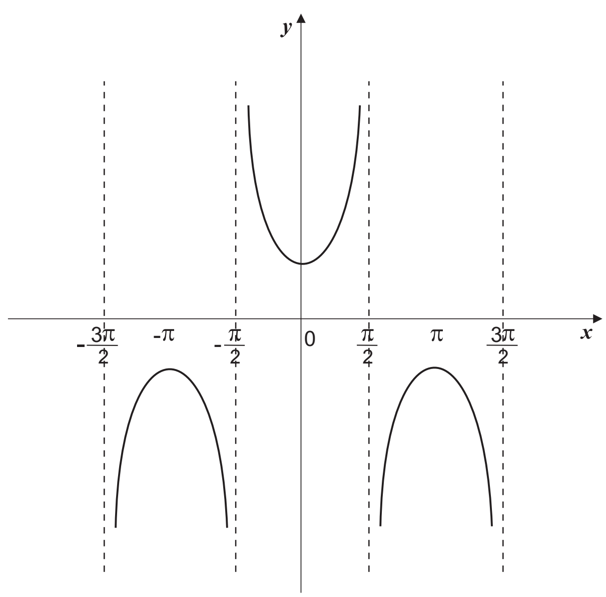


f(x) = arc cotg x

1.7.9 Função Secante

Define-se a função secante como sendo

$$\begin{array}{rl} f: \ \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow f(x) = sec\, x = \dfrac{1}{\cos x}\,. \end{array}$$



f(x) = sec x

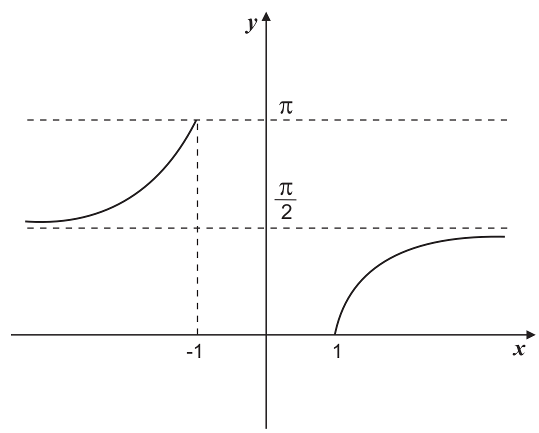
1.7.10 Função Arco Secante

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f: \ \ ]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\} & \longrightarrow]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ x & \longrightarrow f(x) = sec\, x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ \ ]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \longrightarrow]0,\pi[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ x & \longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc sec}\, x. \end{aligned}$$

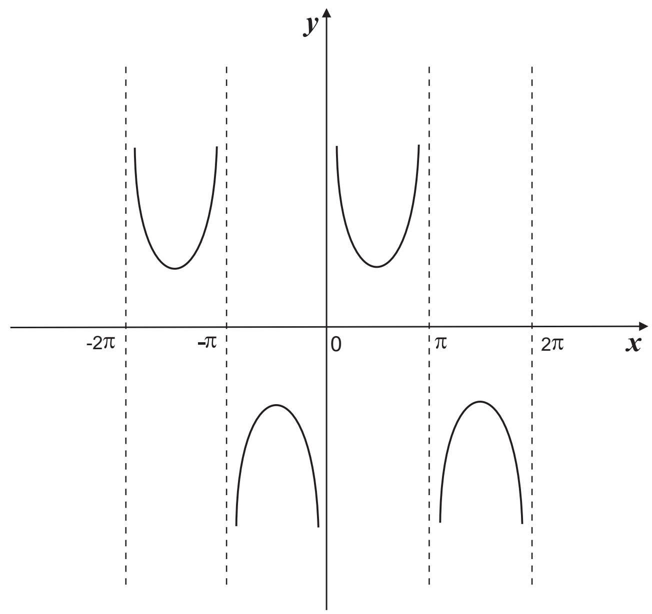


f(x) = arc sec x

1.7.11 Função Co-secante

Define-se função co-secante por

$$\begin{aligned} f: \ \ \{x \in \mathbb{R} \mid \ \ x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow f(x) = \text{cosec}\, x = \frac{1}{sen\, x}. \end{aligned}$$



f(x) = cosec x

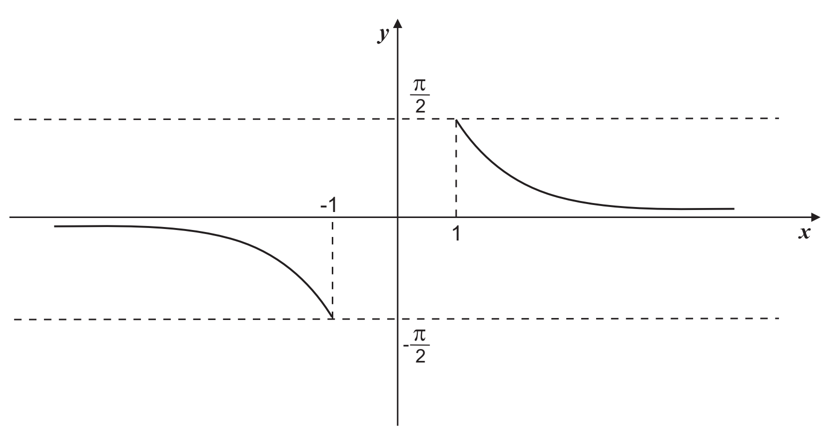
1.7.12 Função Arco Co-secante

Considere a função bijetora

$$\begin{array}{llll} f: & \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\} & \to &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ & x & \to & f(x) = cosec\, x\,. \end{array}$$

A inversa da função arco co-secante é definida por

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \to & \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right] \\ & x & \to & f^{-1}(x) = \text{arc cosec}\, x \end{array}$$



f(x) = arc cosec x

1.8 Exercícios Resolvidos

(1) Considere a função

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}\,.$$

Determine:

a) $\dfrac{f(1) - 3f(0) + 5f(2)}{f(-2)}$ **b)** $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ **c)** $[f(f(1))]^2\,.$

Solução.

a) $\dfrac{f(1) - 3f(0) + 5f(2)}{f(-2)} = \dfrac{\frac{1}{2} - 3.(-1) + 5.1}{5} = \dfrac{\frac{1}{2} + 3 + 5}{5} = \dfrac{\frac{17}{2}}{5} = \dfrac{17}{10}\,.$

b) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\frac{(2h-1)}{(h+1)} + 1}{h} = \dfrac{\frac{3h}{(h+1)}}{h} = \dfrac{3h}{h(h+1)} = \dfrac{3}{(h+1)}$

c) $[f(f(1))]^2 = \left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^2 = [0]^2 = 0$

(2) Se $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ e $a = -d$ mostre que $f(f(x)) = x\,.$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \left(\frac{a\frac{(ax+b)}{(cx+d)} + b}{c\frac{(ax+b)}{(cx+d)} + d}\right) = \left(\frac{\frac{a^2x+ab+cbx+db}{(cx+d)}}{\frac{acx+cb+cdx+d^2}{(cx+d)}}\right) \\ &= \left(\frac{a^2x + ab + cbx + db}{acx + cb + cdx + d^2}\right) = \left(\frac{a^2x + cbx}{cb + d^2}\right) \\ &= \frac{x(a^2+cb)}{(d^2+cb)} = \frac{x(a^2+cb)}{(a^2+cb)} = x\ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(3) Se $f(x) = |x| - 2x$ então mostre que $f(|a|) = -|a|\,.$

Demonstração. Com efeito, se $a \geq 0$ então $|a| = a$ e assim,

$$f(|a|) = ||a|| - 2|a| = a - 2a = -a\,.$$

Por outro lado, se $a < 0$ então $|a| = -a$ e desta forma,

$$f(|a|) = ||a|| - 2|a| = -a + 2a = +a\,.$$

Portanto,

$$f(|a|) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ a & \text{se} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Desta forma,

$$f(|a|) = -|a|\,. \qquad \blacksquare$$

(4) Seja $\psi(x) = 2x - 7$ então determine $\psi \circ \psi$ e $[\psi(x)]^2$.

Solução.

$$(\psi \circ \psi)(x) = \psi(\psi(x)) = \psi(2x-7) = 2(2x-7) - 7 = 4x - 14 - 7 = 4x - 21\,.$$

Por outro lado,

$$[\psi(x)]^2 = [2x-7]^2 = 4x^2 - 28x - 49\,.$$

(5) Seja $h(x) = ax + b$ encontre os valores de a e b para que $h(h(x)) = 4x - 9$.

Solução. Com efeito,

$$h(h(x)) = h(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b = a^2x + (ab+b)\,.$$

Para obter os valores de a e b deve-se encontrar a solução da equação

$$h(h(x)) = a^2x + (ab+b) = 4x - 9\,.$$

Portanto,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -3 \quad \text{ou} \quad a = -2 \quad \text{e} \quad b = 9\,.$$

(6) Seja $f(x) = x^2$ encontre a função g para que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.
Solução. Com efeito, como $f(x) = x^2$ então

$$4x^2 - 12x + 9 = (f \circ g)(x) = (f(g(x)) = [g(x)]^2\,.$$

Portanto,

$$g(x) = \pm\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \pm\sqrt{(2x-3)^2} = \pm(2x-3)\,.$$

(7) Seja $f(x)=\dfrac{1}{x}$ então mostre que $f(h+1)-f(1)=-\dfrac{h}{(h+1)}$.

Demonstração. Com efeito, utilizando-se a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, tem-se

$$f(h+1)-f(1)=\frac{1}{h+1}-\frac{1}{1}=\frac{1}{(h+1)}-1=-\frac{h}{(h+1)}\,. \qquad \blacksquare$$

(8) Determine o domínio de cada uma das funções abaixo

a) $f(x)=x^2-2x+1$ **b)** $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ **c)** $h(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **d)** $\phi(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

Solução.

a) O domínio da função f são todos os números reais, isto é, $D_f=\mathbb{R}$, haja vista que esta função é definida por um polinômio do segundo grau.

b) Para obter o domínio da função g deve-se lembrar que esta função está definida por uma raiz quadrada o que significa que a sua existência somente se dá quando a expressão $4-x^2\geq 0$. Portanto,

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\,|\,4-x^2\geq 0\}=[-2,2]\,.$$

c) Analogamente, a função h existe desde que $\dfrac{x}{x+1}\geq 0$, pois, são para estes valores que a raiz quadrada faz sentido. Assim sendo;

$$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{x}{x+1}\geq 0\right\}=]-\infty,-1[\cup[0,\infty[\,.$$

d) O domínio da função ϕ é composto pela intersecção dos valores de existência para as expressões integrantes. Isto é, a expressão x tem como domínio todos os números reais (pois, é um polinômio). Já a existência da expressão $\dfrac{1}{x}$ se dá para todos os números reais, exceto o zero. Como o domínio é determinado pela intersecção (ou seja, a existência simultanea destas expressões), o resultado é dado por

$$D_\phi=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*\,.$$

(9) Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 16} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad h(x) = 3x - 1\,.$$

Determine:

a) $f(x) + g(x) + h(x)\,,$ **b)** $f(x).g(x)\,,$ **c)** $(f \circ g)(x)$ e **d)** $\dfrac{h(x) - g(x)}{f(x)}\,.$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) + h(x) &= \sqrt{x^3 - 16} + \frac{x}{1+x^2} + (3x - 1) \\ &= \frac{(1+x^2)\sqrt{x^3 - 16}) + x + (3x-1)(1+x^2)}{(1+x^2)}\,. \end{aligned}$$

b)

$$f(x).g(x) = \left(\sqrt{x^3 - 16}\right)\left[\frac{x}{(1+x^2)}\right] = \frac{x\,\sqrt{x^3 - 16}}{(1+x^2)}\,.$$

c)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{(1+x^2)}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{(1+x^2)}\right)^3 - 16}\,.$$

Isto é,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 16(1+x^2)^3}{(1+x^2)^3}}\,.$$

d)

$$\frac{h(x) - g(x)}{f(x)} = \frac{(3x-1) - \frac{x}{1+x^2}}{\sqrt{x^3 - 16}} = \frac{\frac{(1+x^2)(3x-1) - x}{(1+x^2)}}{\sqrt{x^3 - 16}} = \frac{3x^3 - x^2 + 2x - 1}{(1+x^2)\left(\sqrt{x^3 - 16}\right)}\,.$$

(10) Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$ encontre uma função h tal que

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = x - 1\,.$$

Solução. Com efeito,

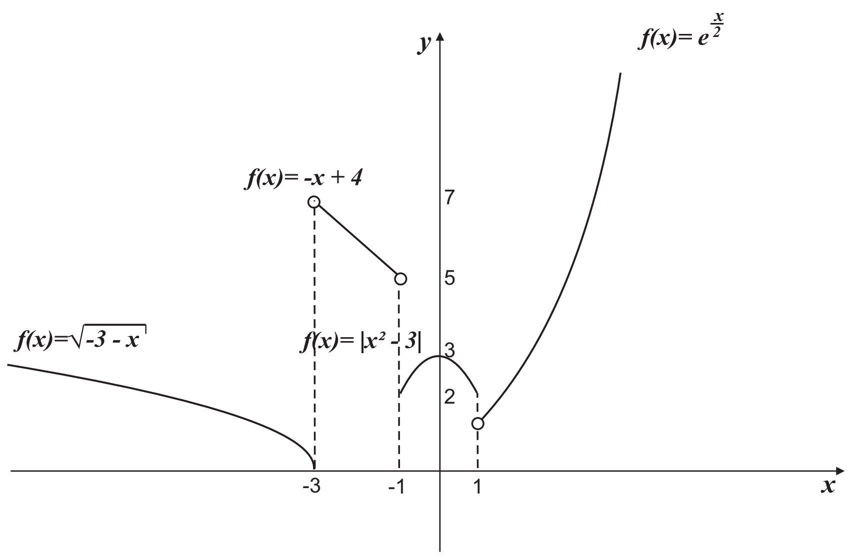
$$x - 1 = \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{h(x)}\,.$$

Portanto,

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)} = x - 1\,.$$

(11) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3-x} & \text{se} \quad x \leq -3 \\ \\ -x+4 & \text{se} \quad -3 < x < -1 \\ \\ |x^2 - 3| & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \\ e^{\frac{x}{2}} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



(12) Seja f uma função do primeiro grau, se $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$ então encontre a lei de formação desta função.

Solução. Com efeito, como f é uma função do primeiro grau então ela pode ser escrita como $f(x) = ax + b$ onde a e b são números reais. Deve-se então obter os valores de a e b. Assim sendo,

$$2 = f(-1) = -1a + b = b - a \qquad \text{e} \qquad 3 = f(2) = 2a + b\,.$$

A solução deste sistema é dado por $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = \dfrac{7}{3}$.

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

(13) Mostre que $f(x) = x^3 - 2x$ é uma função impar.

Demonstração. Com efeito, é necessário demonstrar que $f(-x) = -f(x)$, para qualquer que seja $x \in D_f$. De fato, considere $x \in D_f$, então

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in D_f.$$

Segue então que $f(x) = x^3 - 2x$ é uma função impar. ■

(14) Mostre que $f(x) = |x|$ é uma função par.

Demonstração. Para que f seja considerada uma função par é necessário demonstrar que para todo $x \in D_f$ tem-se $f(-x) = f(x)$. Desta forma, considere $x \in D_f$, então

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Portanto, $f(x) = |x|$ é uma função par. ■

(15) Mostre que $\Phi(x) = \ln \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$ é uma função ímpar.

Demonstração. Com efeito, seja $x \in D_\Phi$ então

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \ln \frac{(-x+1)}{(-x-1)} = \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \ln \frac{(x-1)}{(x+1)} \\
&= \ln \left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]^{-1} = -\ln \frac{(x+1)}{(x-1)} = -\Phi(x).
\end{aligned}$$

Portanto, Φ é uma função ímpar. ■

(16) Mostre que, se f e g são funções impares então $h(x) = f(x).g(x)$ é par.

Demonstração. De fato, considere $x \in D_f$ e $x \in D_g$ então , como f e g são funções ímpares, tem-se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad g(-x) = -g(x)\,.$$

Portanto,

$$h(-x) = f(-x).g(-x) = [-f(x)].[-g(x)] = f(x).g(x) = h(x)\,.$$

Segue que h é uma função par. $\blacksquare$

(17) Mostre que, se f e g são funções impares então $T(x) = f(x) + g(x)$ é ímpar.

Demonstração. Com efeito, considere $x \in D_f$ e $x \in D_g$ então, como f e g são funções ímpares, tem-se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad g(-x) = -g(x)\,.$$

Portanto,

$$T(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -T(x)\,.$$

Segue que T é uma função ímpar. $\blacksquare$

(18) Mostre que para qualquer que seja a função f tem-se

$$H(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad \text{é par} \quad \text{e} \quad M(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad \text{é ímpar}\,.$$

Demonstração. Seja f uma função qualquer e $x \in D_f$ então

$$H(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = H(x)\,.$$

Portanto, H é par. $\blacksquare$

Por outro lado,

$$M(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -M(x)\,.$$

Assim sendo, M é ímpar. $\blacksquare$

(19) Se f e g são funções periódicas de período T então $f+g$ é periódica de período T.

Prova. De fato, como f e g são funções periódicas de período T então

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{e} \qquad g(x+T) = g(x).$$

Assim sendo,

$$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)\,.$$

Portanto, $f+g$ é periódica de período T. $\blacksquare$

(20) Seja f uma função periódica de período T então mostre que $3T$ também é período de f.

Prova. Com efeito, como f é uma função periódica de período T então

$$f(x+T) = f(x)\,.$$

Assim sendo,

$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)\,.$$

Desta forma então, f é periódica de período $3T$. $\blacksquare$

(21) Considere $h(x) = 2^x$ então

$$h(x+3) - h(x-1) = \frac{15}{2}h(x)\,.$$

Prova. De fato,

$$h(x+3) - h(x-1) = 2^{(x+3)} - 2^{(x-1)} = 2^x\,2^3 - 2^x\,2^{-1} = 2^x\left[8 - \frac{1}{2}\right] = \frac{15}{2}h(x)\,. \qquad \blacksquare$$

(22) Sejam

$$A(x) = \frac{1}{2}\left[a^x + a^{-x}\right] \qquad \text{e} \qquad B(x) = \frac{1}{2}[a^x - a^{-x}]\,.$$

Mostre que

$$A(x+y) = A(x)A(y) + B(x)B(y)\,.$$

Prova. Com efeito,

$$A(x+y) = \frac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{-(x+y)}\right] = \frac{1}{2}\left[a^x a^y + a^{-x}a^{-y}\right]\ .$$

Por outro lado,

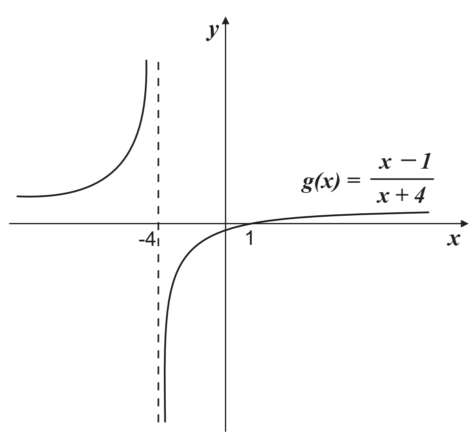
$$\begin{aligned} A(x)A(y) + B(x)B(y) &= \frac{1}{2}\left[a^x + a^{-x}\right]\frac{1}{2}\left[a^y + a^{-y}\right] + \frac{1}{2}[a^x - a^{-x}]\frac{1}{2}[a^y - a^{-y}] \\ &= \frac{1}{4}\left[a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y}\right] \\ &+ \frac{1}{4}\left[a^{x+y} - a^{x-y} - a^{-x+y} + a^{-x-y}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{-x-y}\right] = \frac{1}{2}\left[a^x a^y + a^{-x}a^{-y}\right] = A(x+y)\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(x+y) = A(x)A(y) + B(x)B(y)\,. \qquad \blacksquare$$

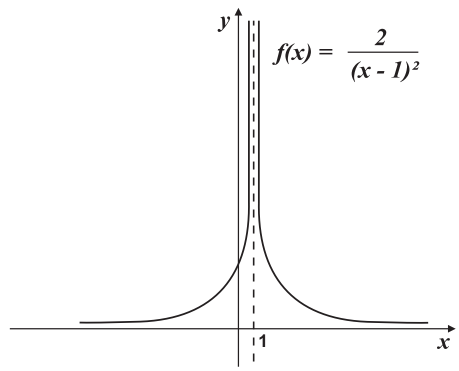
(23) Esboce o gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x+4}\,.$$



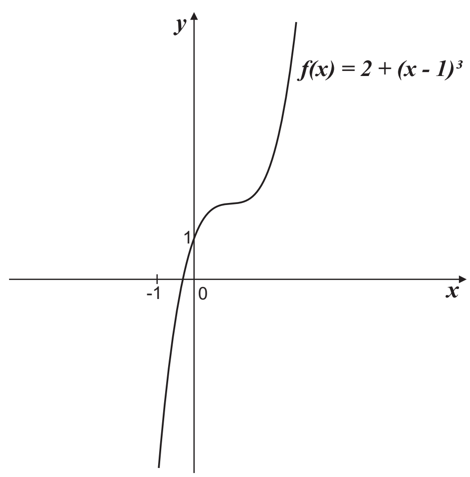
(24) Esboce o gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\,.$$



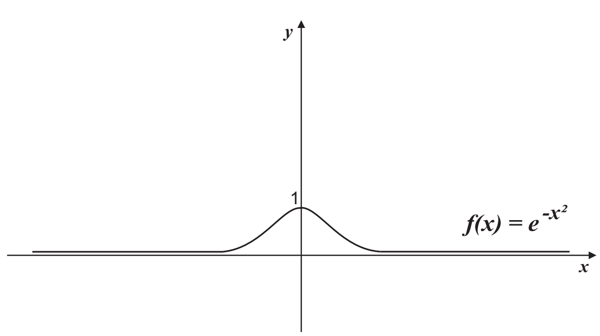
(25) Esboce o gráfico da função polinomial

$$f(x) = 2 + (x-1)^3\,.$$



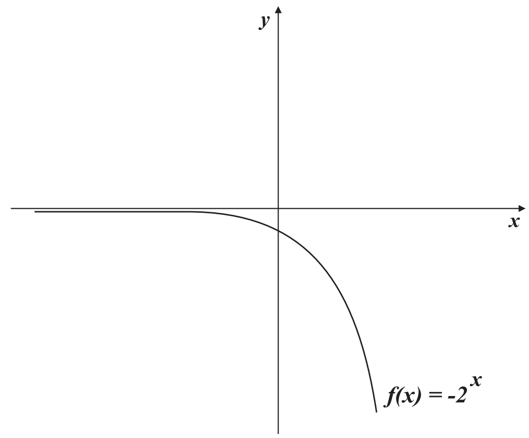
(26) Esboce o gráfico da função exponencial

$$f(x) = e^{-x^2}\,.$$



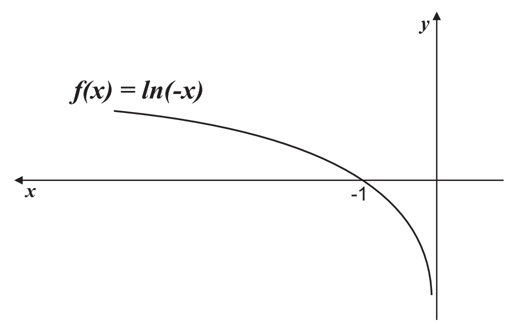
(27) Esboce o gráfico da função exponencial

$$f(x) = -2^x\,.$$



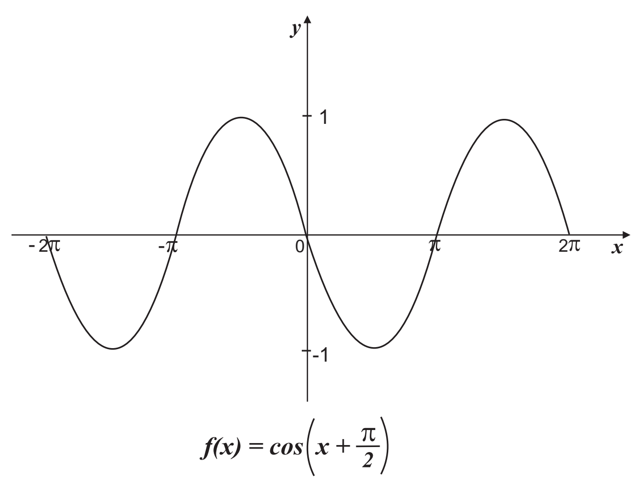
(28) Esboce o gráfico da função logarítmica

$$f(x) = \ln(-x)\,.$$



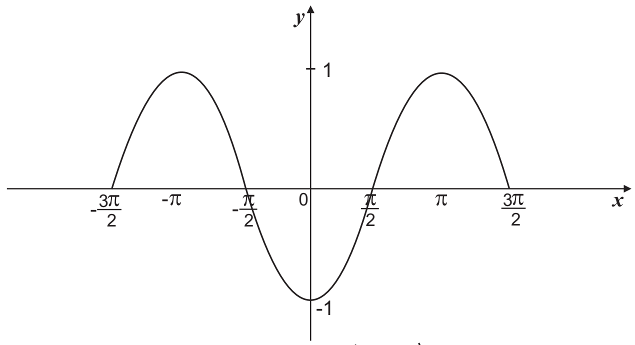
(29) Esboce o gráfico da função trigonométrica

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$



(30) Esboce o gráfico da função trigonométrica

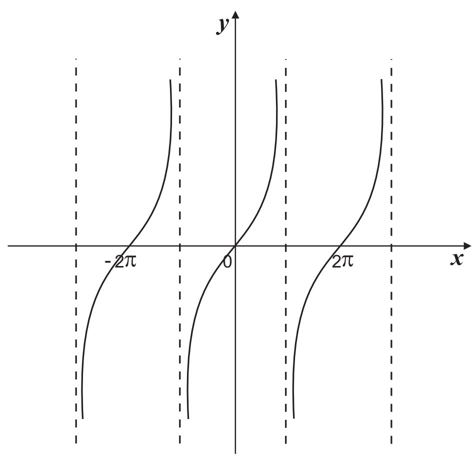
$$f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) .$$



$f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(31) Esboce o gráfico da função trigonométrica

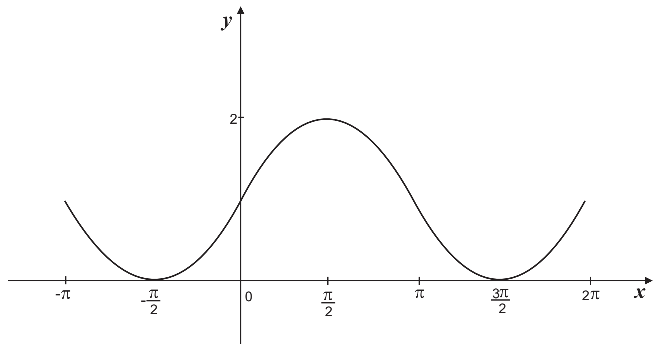
$$f(x) = \text{tg}\,\frac{x}{2} .$$



$f(x) = tg\left(\frac{1}{2}x\right)$

(32) Esboce o gráfico da função trigonométrica

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x\,.$$



f(x) = 1 + sen(x)

(33) Considere (funções hiperbólicas)

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,.$$

Então

a) Mostre que $\operatorname{senh}(x)$ é uma função ímpar;

b) Mostre que $\cosh(x)$ é uma função par.

Prova.

a) Com efeito,

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x)\,.$$

Portanto, $\operatorname{senh}(x)$ é uma função ímpar. ■

b) De fato,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\,.$$

Assim sendo, $\cosh(x)$ é uma função par. ■

(34) Mostre que se $f(x) = \cosh(x)$ então

$$f[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})] = x\,.$$

Prova. Com efeito, como $f(x) = \cosh(x)$ segue que

$$f[\ln(x+\sqrt{x^2-1})] = \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{-(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))}\right]}{2}.$$

Por outro lado, lembre-se que

$$\ln\, u = \log_e\, u = y \Longleftrightarrow e^y = u \Longleftrightarrow \ln u = \ln e^y = y \ln e = y\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f[\ln(x+\sqrt{x^2-1})] &= \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{-(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))}\right]}{2} \\
&= \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1})^{-1})}\right]}{2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1}) + (x+\sqrt{x^2-1})^{-1}}{2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} \\
&= \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} = \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \frac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})} = x \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(35) Determine a inversa da função

$$f(x) = \frac{x+a}{x-a}\,.$$

Solução. Com efeito, seja $y = f(x)$ então segue que

$$y = \frac{x+a}{x-a}\,.$$

Efetuando-se a troca de variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned}
x = \frac{y+a}{y-a} &\Longleftrightarrow (y-a)x = y+a \Longleftrightarrow yx - ax = y + a \\
&\Longleftrightarrow yx - y = ax + a \Longleftrightarrow y(x-1) = a(x+1) \\
&\Longleftrightarrow y = \frac{a(x+1)}{(x-1)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)} \quad \text{desde que} \quad x \neq 1\,.$$

(36) Mostre que a função inversa de $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ é a própria função f .

Prova. De fato, considerando $y = f(x)$ e realizando a troca de variável, tem-se

$$\begin{aligned} x = \frac{y+2}{2y-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad x(2y-1) = y+2 \Longleftrightarrow 2xy - x = y+2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2xy - y = x+2 \Longleftrightarrow y(2x-1) = x+2 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{x+2}{2x-1}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-1} = f(x)\,. \qquad \blacksquare$$

(37) Encontre a função inversa de $g(x) = \sqrt{a-x}$.

Solução. Seja $g(x) = y$, a troca de variável permite escrever;

$$x = \sqrt{a-y} \Longleftrightarrow x^2 = a - y \Longleftrightarrow y = a - x^2\,.$$

Portanto, o resultado é dado por

$$g^{-1}(x) = a - x^2\,.$$

(38) Determine a inversa da função $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Solução. Com efeito, efetuando a troca de variável e levando-se em conta que $h(x) = y$, tem-se

$$\begin{aligned} x = \frac{y^2}{y^2+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad x(y^2+1) = y^2 \Longleftrightarrow xy^2 + x = y^2 \Longleftrightarrow xy^2 - y^2 = -x \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2(x-1) = -x \Longleftrightarrow y^2 = \frac{-x}{x-1} \Longleftrightarrow y^2 = \frac{x}{1-x} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,. \end{aligned}$$

Esta é uma das possíveis escolhas. Como desafio (exercício) ao leitor deixa-se a verificação, em todos os exercícios acima, do campo de existência das funções ou as considerações necessárias para a existência de cada uma dessas funções.

(39) Se $\Phi(x) = \ln \dfrac{1-x}{x+1}$, então prove que $\Phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) &= \ln \frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{\frac{a+b}{1+ab}+1} \\
&= \ln \frac{\frac{1+ab-a-b}{(1+ab)}}{\frac{(a+b)+(1+ab)}{(1+ab)}} = \ln \frac{1+ab-a-b}{a+b+1+ab} \\
&= \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(a+1)(b+1)} = \ln \left[\frac{(1-a)}{(a+1)}\frac{(1-b)}{(b+1)}\right] \\
&= \ln \frac{(1-a)}{(a+1)} + \ln \frac{(1-b)}{(b+1)} = \Phi(a) + \Phi(b) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(40) Encontre a função inversa de

$$H(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Solução. Com efeito, utilizando-se $H(x) = y$ e a troca de variável, tem-se

$$\begin{aligned}
x = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} &\iff x(\sqrt{y^2+1}) = y \iff x^2(y^2+1) = y^2 \\
&\iff y^2x^2 - y^2 = -x^2 \iff y^2 = \frac{-x^2}{x^2-1} \\
&\iff y^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \iff y = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, um inversa para a função $H(x)$ é dada por

$$H^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,.$$

Observe que a existência da função H^{-1} e a escolha da raiz quadrada positiva é apenas uma opção. O leitor deve analisar outras possibilidades, bem como o campo de existência desta função.

1.9 Exercícios Propostos

(1) Um retângulo cuja base tem comprimento x está inscrito em um círculo de raio 2. Expresse a área deste retângulo em função de x.

(2) Determine o domínio da função definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3} + \frac{2x}{\sqrt{x+4}}$$

(3) Considere a função:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R \to R \\ f(x) \quad &= 2x + 5 + |x-5| \end{aligned}$$

Determine se a função é inversível. Caso afirmativo, escreve a expressão que representa a sua inversa.

(Sugestão: reescreva a função como uma função definida por mais de uma sentença. Faça a análise e o gráfico de cada uma destas sentenças, e determine a inversa de cada uma delas).

(4) Verifique se a função

$$f(x) = \frac{x}{2x+4}$$

é bijetora. Em caso afirmativo, determine a sua inversa.

(5) Dadas as funções

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$

calcule, se possível:

a) (fog);

b) (fof);

(6) Dadas as funções

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad x < 0 \\ 2x \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \quad \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

determine (fog).

(7) Esboce os gráficos da funções abaixo, depois, determine o domínio e a imagem de cada uma delas.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3-x} \quad \text{se} \quad x \leq -3 \\ \\ -x+4 \quad \text{se} \quad -3 < x < -1 \\ \\ |x^2-3| \quad \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \\ e^x \quad \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 + senx \quad \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{-x^2}{2} \quad \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ \\ \sqrt{4-(x-5)^2} \quad \text{se} \quad 3 < x < 7 \\ \\ \log x \quad \text{se} \quad x \geq 7 \\ \end{cases}$$

c) $f(x) = |x^2 - 3x| + x + 1$

d) $f(x) = |3x - 6| + |-2x + 1|$

e) $f(x) = |1 + 2\cos x|$

f) $f(x) = 2 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$

g) $f(x) = -2 + \operatorname{cosec} x$

h) $f(x) = \text{arc sen}\, 2x$

8) Represente graficamente, dê o domínio e a Imagem de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = 2x^2 - 4$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

d) $f(x) = 2 + (x-1)^3$ **e)** $f(x) = \left|2x - \dfrac{1}{3}\right|$ **f)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

$$\textbf{g)}\ f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

(9) Encontre o domínio e a imagem da função inversa de

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1} \ .$$

(10) Sejam

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) \qquad \text{e} \qquad \Psi(x) = \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right) \ .$$

Mostre que

$$\Phi(x+y) = \Phi(x).\Phi(y) + \Psi(x).\Psi(y) \ .$$

(11) Construa os gráficos das seguintes funções

a) $f(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{2})$ **b)** $f(x) = \text{tg}\, \dfrac{x}{2}$ **c)** $f(x) = 1 + 2\text{sen}\, x$.

(12) Esboce o gráfico das seguintes funções

a) $f(x) = 5^x$ **b)** $f(x) = e^{x^2}$ **c)** $f(x) = \ln(x+1)$.

(13) Usando funções, encontre a solução de cada uma das inequações abaixo.

a) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ **b)** $\dfrac{\frac{x}{2} - 3}{4 - x} > 1$ **c)** $x^4 \geq x^2$.

(14) Determine a inversa das seguintes funções (bijetoras)

a) $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x-3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(15) Assinale com V (Verdadeira) ou F (Falsa).

( ) $f(x) = |x|$ é uma função par;

( ) o gráfico de $g(x) = 2x - \sqrt{2}$ é uma reta crescente;

( ) Se $f(x) = \sqrt{1-x}$ então o domínio de f é dado por $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x > 1\}$;

( ) se f é inversível então existe f^{-1} e $(f \circ f^{-1})(x) = x$;

( ) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ então f é bijetora ;

( ) Toda função constante é injetora ;

( ) Toda função bijetora admite inversa ;

( ) Toda função injetora e sobrejetora é par ;

( ) se $f(x) = x^2 + x$ então necessariamente $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

( ) se $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ então $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$;

( ) o gráfico da função $g(x) = e^x$ é crescente desde que $D_g = \mathbb{R}_+$.