

MAT 216 Cálculo diferencial e integral 2 – 2º semestre de 2015
Bacharelado em Matemática e Matemática Aplicada
Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri
Resumo das aulas e exercícios sugeridos - Atualizado 27.11.2015

- 1. Segunda-feira, 3 de agosto de 2015 e**
- 2. Quarta-feira, 5 de agosto de 2015**

Apresentação do curso. Veja-se o arquivo pdf relativo às informações do curso na minha pagina web www.ime.usp.br/~pluigi

O primeiro conceito que iremos abordar é o de integral definida. Se trata de um conceito que foi introduzido no momento da invenção do cálculo infinitesimal por G. Leibniz e I. Newton nos últimos anos do sec. XVII.



G.W. Leibniz (1646-1716)



I. Newton (1642-1727)

O cálculo integral tem como origem o problema do cálculo das áreas de figuras planas não elementares (e volumes de sólidos). A geometria euclidiana resolveu o problema do cálculo das áreas para os polígonos. O gênio de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) calculou a área do subgrafico da uma parábola (dito “segmento” de parábola; o conceito de gráfico não era conhecido; assim como não era conhecido o conceito de função).

Outros matemáticos que deram uma contribuição importante, antes da invenção do cálculo infinitesimal, foram dois alunos de Galileo, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) e Evangelista Torricelli (1608–1647), o mesmo Torricelli que inventou o barômetro de mercúrio.

Neste curso apresentaremos a construção da integral na abordagem devida ao (grandíssimo) matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866).

A construção da integral definida precisa que antes seja dedicado um espaço (limitado) aos conceitos de *supremo* e *infimo* de um conjunto de números reais.

Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um número real M é dito *majorante* de E (em alguns livros *cota superior*) se $x \leq M$ para todo $x \in E$. Um número real m é dito *menorante* de E (ou *cota inferior*) se $x \geq m$ para todo $x \in E$.

Um conjunto E é dito *limitado superiormente* se admite pelo menos um majorante, enquanto é dito *limitado inferiormente* se admite pelo menos um menorante. É dito *limitado* se é limitado superiormente e inferiormente.

Definição 1 (Supremo e ínfimo). Se E é limitado superiormente definimos *supremo* de E , denotado por $\sup E$, o mínimo dos majorantes; se E é limitado inferiormente definimos *ínfimo* de E , denotado por $\inf E$, o máximo dos minorantes. Se E é ilimitado superiormente escrevemos $\sup E = +\infty$, se E é ilimitado inferiormente escrevemos $\inf E = -\infty$.

Exercício 1. Seja E um conjunto de números reais, limitado superiormente. Prove que $a = \sup E$ se e somente se

- (1) a é maior ou igual de cada elemento di E ;
- (2) para cada $\varepsilon > 0$ fixado, existe (pelo menos) um elemento $x \in E$ tal que $a - \varepsilon < x$.

Observe que o item 1 acima diz que a é majorante de E , enquanto o item 2 diz que a é o mínimo dos majorantes (de fato, se você “rebaixa” um pouco a , obtém um número que não é mais um majorante).

Exercício 2. Analogamente ao exercício anterior, seja E um conjunto de números reais, limitado inferiormente. Prove que $s = \inf E$ se e somente se

- (1) s é menor ou igual de cada elemento di E ;
- (2) para cada $\varepsilon > 0$ fixado, existe (pelo menos) um elemento $x \in E$ tal que $s + \varepsilon > x$.

Para entender melhor os dois exercícios acima, pense em alguns conjuntos simples como o intervalo $(0, 1)$ por exemplo.

O *máximo* de um conjunto E é o elemento maior, se existe, enquanto o *mínimo* é o elemento menor, se existe.

Um conjunto é dito *finito* se possui um número finito de elementos.

O fato seguinte é uma propriedade clássica (e crucial) dos números reais que enunciamos sem demonstração.

Teorema 2 (Existência do supremo e do ínfimo). *Um conjunto de números reais, limitado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo) em $\mathbb{R}$.*

$\mathbb{Q}$ por exemplo não verifica a propriedade acima. Considere E o subconjunto de $\mathbb{Q}$ dos números cujo quadrado é menor de 2. E não possui supremo. Verifique este fato como exercício. É praticamente a prova do fato de que não existe nenhum racional cujo quadrado seja 2.

Os exercícios seguintes podem ser complicados (alguns pelo menos). Tente dar uma olhada não se assustando pelas dificuldades encontradas.

Exercícios: Determine o supremo e o ínfimo dos conjuntos seguintes e, se existem, o máximo e o mínimo.

- | | |
|---|---|
| 3. $(2, 3)$ | 4. $[0, +\infty)$ |
| 5. $[-5, 1) \cup (1, 4]$ | 6. $(0, 3] \cup [3, 5]$ |
| 7. $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ | 8. $\bigcup_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ |
| 9. $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ | 10. $\left\{\frac{2n}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ |

Exercício 11. Determine supremo, ínfimo, máximo e mínimo (se existem) do conjunto:

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\},$$

Exercício 12. Seja $A = \bigcup_{n \geq 2} A_n$, onde, para cada n , $A_n = \left(-\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$. Determine supremo, ínfimo, máximo e mínimo (se existem).

Exercício 13. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subseteq B$. Prove que $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$.

Exercício 14. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que para $x \in A$ e para todo $y \in B$ temos $x \leq y$. Prove que $\sup A \leq \inf B$.

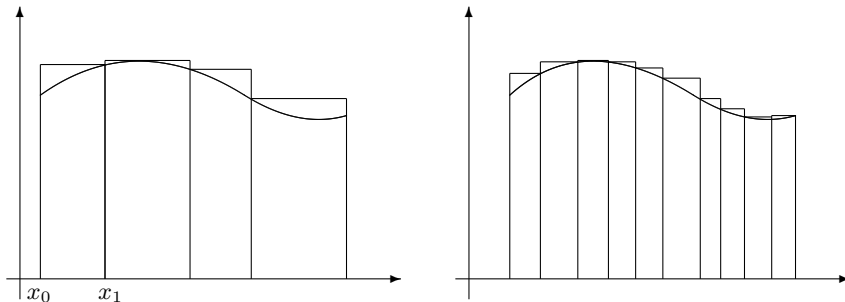
* * * * *

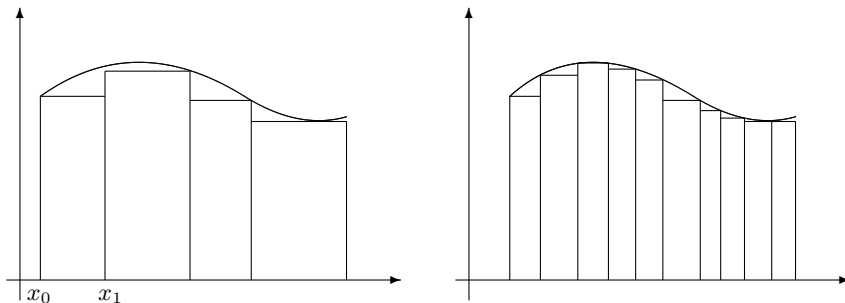
O processo para definir a integral de uma função é o seguinte. Dado um intervalo $[a, b]$ definimos *partição* de $[a, b]$ um conjunto finito P de pontos de $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada partição P de $[a, b]$ consideramos os dois números seguintes que dependem claramente de P :

$$S_+(f, P) = \sum_{j=1}^n \sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) (x_j - x_{j-1}) \quad \text{e} \quad S_-(f, P) = \sum_{j=1}^n \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) (x_j - x_{j-1}).$$

Os dois números acima são as vezes chamados *soma superior* e *soma inferior* de f (que dependem da partição usada). O leitor pode observar que é crucial a hipótese de que f seja limitada para que os vários $\sup f(t)$ e $\inf f(t)$ da fórmula acima não sejam $\pm\infty$.

As figuras abaixo mostram as somas superiores e inferiores relativas a duas diferentes partições para uma dada função f . As somas superiores e inferiores são dadas pelas somas das áreas dos retângulos determinados. Atenção: o desenho representa uma função positiva; se $f(x)$ for negativa, as somas superiores e inferiores serão negativas e seria impróprio chamá-las de áreas.





Exercício 15. Verifique que, dada uma qualquer partição P , temos $S_+(f, P) \geq S_-(f, P)$.

Dadas duas partições P_1 e P_2 de $[a, b]$ dizemos que P_2 é *mais fina* de P_1 (ou que P_2 é um refinamento de P_1) se todos os elementos de P_1 estão em P_2 . Sendo de fato P_1 e P_2 dois conjuntos, P_2 é mais fina de P_1 se $P_1 \subseteq P_2$.

Exercício 16. Prove que, se P_2 é mais fina de P_1 , então

$$S_+(f, P_2) \leq S_+(f, P_1) \quad \text{e} \quad S_-(f, P_2) \geq S_-(f, P_1). \quad (1)$$

Os dois exercícios acima permitem provar que, dadas duas partições quaisquer P e Q de $[a, b]$, temos

$$S_+(f, P) \geq S_-(f, Q).$$

O fato é bastante intuitivo se observamos um desenho (não esquecendo que o desenho não prova o resultado; mas ajuda a visualizar). Lembrando o exercício 15 acima e usando a desigualdade (1), podemos concluir que, denotando por $\mathcal{P}$ a família de todas as partições de $[a, b]$,

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P).$$

Podemos finalmente dar a definição de função integrável e de integral de uma função.

Definição 3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e limitada. Seja $\mathcal{P}$ a família de todas as partições de $[a, b]$. Dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$ se

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P).$$

O valor comum acima é dito *integral* de f em $[a, b]$ e é denotado pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Uma caracterização da definição acima é dada pelo teorema seguinte.¹

Teorema 4. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon$.

¹Quando se fala de *caracterização* de uma propriedade se entende uma propriedade equivalente. Por exemplo: as funções constantes em intervalos são todas as funções com derivada zero e somente aquelas.

Demonstração. $1 \Rightarrow$) Suponhamos que f seja integrável. Então, pela definição 3, temos $\sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P)$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Chamamos de I a integral de f .

Lembrando os exercícios 1 e 2 acima, seja $\varepsilon > 0$ fixado. Considere $\varepsilon/2$ e seja P uma partição de $[a, b]$ tal que

$$S_+(f, P) < I + \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad S_-(f, P) > I - \varepsilon/2.$$

Subtraindo, temos:

$$S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon.$$

Sendo ε acima arbitrário, o processo montado vale para qualquer ε (adaptando obviamente P , que depende de ε) e a primeira parte do teorema é provada.

$2 \Leftarrow$) Suponhamos agora que para todo $\varepsilon > 0$ exista uma partição P de $[a, b]$ tal que $S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon$. Por contradição seja f não integrável. Isso significa que $\sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P) < \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P)$. Considere um qualquer número positivo ε_0 menor de $\inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P) - \sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P)$. Pela definição de supremo e ínfimo, dada P partição qualquer de $[a, b]$, temos $S_+(f, P) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P)$ e $S_-(f, P) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P)$. Portanto, para qualquer partição P vale $S_+(f, P) - S_-(f, P) > \varepsilon_0$. Este fato é em contradição com a hipótese. Portanto a f se torna integrável. $\square$

Exercício 17. Refaça de novo a demonstração do teorema acima. Em particular, prove em detalhes que as desigualdades

$$S_+(f, P) < I + \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad S_-(f, P) > I - \varepsilon/2$$

implicam

$$S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon.$$

Observação: online o leitor pode encontrar páginas sobre os matemáticos citado acima:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes>

https://en.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri

https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli

https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Exercício 18. Seja $f(x) = c$ constante, definida em $[a, b]$. Prove, usando a definição, que $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a)$.

Exercício 19. Seja $f(x) = x$ definida em $[0, 1]$. Tente montar um processo, usando a definição, para calcular $\int_0^1 x dx$. Anote quais são as dificuldades para levar o processo até o final. Constata-se que a conclusão do processo é de fato um limite de sequência. Este exercício mostra como a aplicação da definição para o cálculo da integral encontre dificuldades pesadas até para uma função muito simples como $f(x) = x$. O caminho para o cálculo explícito das integrais deverá ser necessariamente bem mais simples!

3. Sexta-feira, 7 de agosto de 2015

Vamos agora apresentar uma série de propriedades do conceito de integração.

Proposição 5 (Propriedade 1: integral de uma soma). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Então, $f + g$ é integrável e*

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração. Aplicamos o teorema 4. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Queremos provar que existe uma partição R de $[a, b]$ tal que $S_+(f + g, R) - S_-(f + g, R) < \varepsilon$. Usamos o fato de que f e g são integráveis. Em correspondência do ε fixado acima consideramos duas partições P e Q de $[a, b]$ tais que

$$S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad S_+(g, Q) - S_-(g, Q) < \varepsilon/2.$$

Somando os termos esquerdos e direitos (respectivamente) das duas desigualdades, temos

$$S_+(f, P) + S_+(g, Q) - (S_-(f, P) + S_-(g, Q)) < \varepsilon.$$

Seja R uma partição mais fina de P e Q (por exemplo $P \cup Q$). Segue que (lembre o exercício 16)

$$S_+(f, R) + S_+(g, R) - (S_-(f, R) + S_-(g, R)) < \varepsilon.$$

Considere agora um intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ contido em $[a, b]$, determinado por R . É intuitivo observar que

$$\sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} (f(t) + g(t)) \leq \sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) + \sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} g(t) \quad \text{e} \quad \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} (f(t) + g(t)) \geq \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) + \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} g(t). \quad (2)$$

Não entramos nos detalhes: o leitor pode tentar a prova deste fato. Veja-se o exercício abaixo. O leitor pode também verificar o fato acima (não se trata de uma demonstração, somente de um exemplo) no caso de $\sin x$ e $\cos x$ em $[0, \pi/2]$.

A desigualdade (2) e aquela anterior permitem imediatamente de escrever

$$S_+(f + g, R) - S_-(f + g, R) < \varepsilon.$$

Isto prova a integrabilidade de $f + g$, usando o teorema 4. Agora usamos de novo o fato de que, para qualquer partição R ,

$$S_+(f + g, R) \leq S_+(f, R) + S_+(g, R) \quad \text{e} \quad S_-(f + g, R) \geq S_-(f, R) + S_-(g, R).$$

Estas desigualdades implicam que

$$\inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(f + g, R) \leq \inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(f, R) + \inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(g, R) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(porque f e g são por hipótese integráveis) e

$$\sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(f + g, R) \geq \sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(f, R) + \sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(g, R) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

onde $\mathcal{P}$ é a família de todas as partições de $[a, b]$. Necessariamente temos

$$\sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(f + g, R) = \inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(f + g, R).$$

E o valor comum acima, que de fato é $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$, coincide com a soma das integrais das duas funções, e a propriedade é provada. $\square$

Exercício 20. Refaça de novo a demonstração da proposição acima. Em particular, prove em detalhes que as desigualdades

$$S_+(f + g, R) \leq S_+(f, R) + S_+(g, R) \quad \text{e} \quad S_-(f + g, R) \geq S_-(f, R) + S_-(g, R)$$

implicam que

$$\inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(f+g, R) \leq \inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(f, R) + \inf_{R \in \mathcal{P}} S_+(g, R)$$

e

$$\sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(f+g, R) \geq \sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(f, R) + \sup_{R \in \mathcal{P}} S_-(g, R).$$

As propriedades seguintes são dadas sem demonstração. O leitor interessado pode tentar a prova, que não é difícil e é essencialmente baseada na definição de integral.

Proposição 6 (Propriedade 2: produto por um escalar). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e seja $c \in \mathbb{R}$ fixado. Então a função $c \cdot f$ é integrável e*

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Proposição 7 (Propriedade 3: monotonia). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Consequências imediatas da propriedade acima são: se $f(x) \geq 0$ para todo x , temos $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (isso porque a integral da função nula é zero e este fato pode ser provado usando diretamente a definição de integral). Outra consequência: dada f integrável, temos

$$\int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Proposição 8 (Propriedade 4: aditividade a respeito do domínio). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e seja $c \in (a, b)$ fixado. Então,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exercício 21. Prove algumas das propriedades acima apresentadas.

Exercício 22. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Prove que são integráveis as duas funções seguintes:

$$g(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad h(x) = \min\{f(x), 0\}.$$

Uma convenção que será útil é a seguinte: dada uma qualquer função $f(x)$ e dado a um ponto do domínio de f , temos $\int_a^a f(x) dx = 0$. Este fato pode ser visto assim:

1) se a construção da integral de uma função aceitasse também intervalos “degenerados”, reduzidos a um ponto, a igualdade acima seria uma consequência imediata da construção;

2) se a construção da integral de uma função não aceitasse intervalos “degenerados”, a igualdade acima pode ser aceita como uma convenção, não entrando em contradição com a construção da integral.

Podemos observar que, com esta convenção, a fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

inclue sem problemas o caso em c coincide com a ou b .

Concluimos esta parte com um aceno à relação entre a integral e a área de uma figura plana.

Definição 9. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que $f(x) \geq 0$ para todo x . Então, é possível definir a área do subgráfico de f , o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. A área deste conjunto é por definição a integral $\int_a^b f(x) dx$.

Esta definição abriria o espaço para fazer muitos comentários; não temos o tempo aqui para abordar o tema (que, inclusive, foge do espírito do nosso curso de cálculo 2).

- (1) A matemática clássica (Euclides e a escola grega, Arquimédes) determina a área de polígonos, da circunferência, do segmento de parábola. Cavalieri em 1640 elabora um método para o cálculo da áreas e volumes. Veja-se https://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

Mas não temos, até a invenção do cálculo e seu aperfeiçoamento (que se completa com Cauchy-Riemann-Peano-Weierstrass no sec. XIX) uma teoria geral das áreas (e dos volumes). A definição acima fornece uma ferramenta poderosa para definir (e, depois, calcular) áreas. É importante destacar que a igualdade da definição 9 entre área e integral de função é mesmo uma definição e não um teorema. Se fosse um teorema, eu deveria ter uma noção anterior de área. Eu tenho sim uma ideia intuitiva de área, mas que fica bem longe de ser uma definição.

- (2) A área de um conjunto é como geometria clássica, um valor positivo (ou nulo em caso de figuras degeneradas). Se $f(x) \leq 0$ para todo x , o valor $-\int_a^b f(x) dx$ será a área do supragráfico de f .
- (3) Calcular áreas em $\mathbb{R}^2$ ou volumes em $\mathbb{R}^3$ faz parte de uma teoria, que o leitor encontrará nos cursos avançados que se ocupam de *teoria da medida*. Não precisa dizer quanto seja importante estabelecer uma correta teoria da medida. Não erramos muito dizendo que a matemática nasce na noite dos tempos como tentativa de medir o espaço. A matemática moderna tem várias teorias da medida. Parece estranho, mas é assim. Elas têm pontos em comum:

- i) incluem e não recusam a geometria clássica (a área do retângulo será sempre base $\times$ altura);
- ii) se $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- iii) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ e vale a igualdade se e somente se $A \cap B = \emptyset$.

Vamos parar aqui. A teoria da integração de Riemann (assim como a quase igual de Cauchy, de poucos anos mais velha) permite a construção de uma teoria da medida, a primeira com um grau avançado de completude. Essa normalmente se chama *teoria da medida de Peano-Jordan*. Veja-se

<http://www.math.ucla.edu/~biskup/245a.1.14f/PDFs/Peano-Jordan-content.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_measure

https://en.wikipedia.org/wiki/Camille_Jordan

https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Os resultados extraordinários da teoria de Riemann, assim como da teoria da medida de Peano-Jordan, não impedem todavia falhas e problemas de difícil solução. Não podemos aqui aprofundar. A teoria da medida e da integração de Lebesgue do começo do sec. XX resolve boa parte dos problemas e se situa como um grande passo na frente. O leitor pode ver

https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_measure

https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue

4. Segunda-feira, 10 de agosto de 2015

Quais são as funções integráveis? Nesta aula iremos dar uma resposta parcial. Começamos por um exemplo de uma função não integrável. A *função de Dirichlet* é a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Devido ao fato de que qualquer intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ contém (infinitos) pontos racionais e irracionais, o leitor pode provar o fato seguinte: dada uma partição P qualquer de $[a, b]$ há $S_+(f, P) = 1$ e $S_-(f, P) = 0$.

Exercício 23. Verifique em detalhes o fato acima.

Portanto

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} S_-(f, P) = 0 \quad \text{e} \quad \inf_{P \in \mathcal{P}} S_+(f, P) = 1,$$

onde $\mathcal{P}$ é a família de todas as partições de $[0, 1]$. Portanto f não é integrável. A função de Dirichlet é descontínua em todos os pontos do domínio.

De fato, o teorema seguinte diz que a continuidade de uma função f garante a integrabilidade (se f é também limitada, como acontece nos intervalos limitados e fechados).

Teorema 10 (integrabilidades das funções contínuas). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, f é integrável.*

Observe que não precisa dizer que f é limitada, porque uma função contínua em um intervalo limitado e fechado é limitada (teorema de Weierstrass de Cálculo 1). Não podemos dar aqui a demonstração do teorema. Essa é baseada no conceito de continuidade uniforme de uma função. Conceito que será apresentado somente no curso de Análise Real.

A partir do teorema acima o seguinte resultado não é difícil e pode ser provado por exercício.

Corolário 11. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com a possível exceção de um número finito de pontos e limitada. Então, f é integrável.*

Observe que aqui sim precisa dizer que f é limitada. A falta de continuidade não permite mais o uso do teorema de Weierstrass (por exemplo $f(x) = 1/x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 2$ é contínua exceto um número finito de pontos; mas não é limitada).

Exercício 24. Prove o corolário 11 usando o teorema 10.

Apesar do nosso hábito de tratar essencialmente funções elementares (polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e as somas, produtos e combinações entre elas), a quantidade de funções “complicadas” é enorme na Análise Real; e enorme é a quantidade de funções com infinitas descontinuidades. Para este tipo de funções não vale a pena investigar a integrabilidade ou não. Primeiro, porque seriam necessárias noções que se situam muito além do nosso atual alcance. Segundo e mais importante, porque a questão é pouco interessante. Muitas funções com descontinuidades pesadas têm sim importância em muitas aplicações, mas a teoria da integração de Riemann não é adequada. Essa funciona bem com a continuidade. Será a teoria da integração de Lebesgue que terá a capacidade de lidar melhor com as funções com infinitas descontinuidades. De fato, na integração de Lebesgue a continuidade não é um conceito importante.

Teorema 12 (integrabilidades das funções crescentes). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente. Então, f é integrável.*

Demonstração. Sendo definida em um intervalo fechado, a função crescente f é limitada. Além disso, $f(b) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ e $f(a) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Para provar o teorema usamos o teorema 4. Seja ε positivo fixado.

Consideramos $\varepsilon' = \varepsilon / (f(b) - f(a))$. Seja $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $x_j - x_{j-1} < \varepsilon'$ para todo $j = 1, \dots, n$. Então, temos

$$S_+(f, P) = \sum_{j=1}^n \sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

e

$$S_-(f, P) = \sum_{j=1}^n \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t) (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

sendo f crescente. Então, temos

$$S_+(f, P) - S_-(f, P) = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) (x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \varepsilon' = \varepsilon' \cdot \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})).$$

Observamos agora que $\sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) = f(b) - f(a)$. Em conclusão,

$$S_+(f, P) - S_-(f, P) < \varepsilon' (f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

e o teorema é provado.

Exercício 25. O Teorema 10 (com o Corolário 11) e o Teorema 12 são dois resultados independentes um do outro. Tente determinar uma função definida em $[0, 1]$, crescente e com infinitos pontos de descontinuidade. O exercício é intuitivo, mas não fácil.

Não iremos além dos resultados anteriores. Para determinar a família de *todas* as funções integráveis segundo Riemann precisaríamos da teoria da integração de Lebesgue, que não faz parte do programa do nosso curso.

Convenção. Até agora, a integral foi definida pelo clássico símbolo, aquele tipo de letra “s” esticada,² colocando em baixo o primeiro extremo a do intervalo $[a, b]$ e colocando em cima o segundo extremo b . Será útil definir a integral $\int_b^a f(x) dx$, porque em várias aplicações e contas aparece a necessidade de considerar os extremos em posição tal que o maior esteja em baixo e o menor em cima. A definição desta integral com extremos na ordem inversa é

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

A igualdade acima é simplesmente uma definição, e não precisa de explicação lógica. Por outro lado, uma possibilidade de dar um significado à fórmula acima pode levar em conta a ideia de que na integral $\int_a^b f(x) dx$ a variável x é como se viajasse de a até b , enquanto na integral $\int_b^a f(x) dx$ x viaja no sentido oposto. Neste sentido podemos entender que as duas integrais têm sinal oposto. Em alguns textos se encontra o termo “integral orientada”.

Exercício 26. Pegue a proposição 8 e use a convenção acima para provar que $\int_T^S f(x) dx = \int_T^U f(x) dx + \int_U^S f(x) dx$, qualquer seja a ordem dos números reais S, T, U e posto que as três integrais acima existam.

Vamos agora finalmente introduzir o método para o cálculo direto das integrais de muitas funções. O seguinte *teorema fundamental do cálculo integral* é o instrumento principal para resolver, quando for possível, o problema do cálculo da integral de uma função em um intervalo. O teorema precisa preliminarmente da introdução do conceito de *função integral*.

²Este símbolo deve-se ao fato que a “s” é inicial de *summa*, soma em Latim. Esta foi a notação escolhida por Leibniz no seu artigo publicado em 1684 (escrito em Latim).

Definição 13. Dado um intervalo qualquer, I , seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em todos os subintervalos limitados de I . Seja $c \in I$ fixado. A função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt,$$

é dita *função integral*.

Exercício 27. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não necessariamente limitada (pense por exemplo em x^2 ou e^x). A f é integrável em qualquer subintervalo limitado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$? Justifique a resposta.

Observação preliminar sobre os exercícios seguintes: os leitores quem já sabem que a função integral F é obtida a partir das primitivas de f , não usem este resultado, mas resolvam intuitivamente os exercícios, usando somente a definição de F e as propriedades, vistas acima, das funções integráveis.

Exercício 28. Considere $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ definida em tudo $\mathbb{R}$. Desenhe o gráfico de f (exercício de Cálculo 1). Em seguida considere $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Determine o domínio de F . Esboce o gráfico de F . Em particular, o desenho deve esclarecer os intervalos onde F cresce ou decresce. Se possível, as regiões onde F é positiva ou negativa.

Faça a mesma coisa nos exercícios seguintes.

Exercício 29.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Exercício 30.

$$G(x) = \int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt$$

Exercício 31.

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{(t+2)e^{t^3}} dt$$

Temos intervalos do domínio de F onde ela é decrescente?

Exercício 32.

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{2 + \cos t}{t^3 + 1} dt.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Esta última questão é um desafio difícil; o leitor tem que usar fortemente a propriedade de monotonia da integração, observando a “velocidade” de decrescimento da $f(t)$ e a velocidade de crescimento do intervalo de integração. A justificativa do resultado deve ser rigorosa, não somente intuitiva. Repito aqui a observação anterior: não devem ser usadas as primitivas.

Teorema 14 (da média integral). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, denotamos $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Então,

$$m \cdot (a, b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (a, b). \quad (3)$$

Se, em particular, f é contínua, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c). \quad (4)$$

Demonstração. Os números m e M podem ser vistos como funções constantes, definidas em $[a, b]$. As funções constantes são integráveis (sendo contínuas; por outro, a integrabilidade de uma função constante lado pode ser provada diretamente usando a definição de integral; veja-se o exercício 18). Aplicando diretamente a definição de integral, o leitor pode provar que $m \cdot (a, b) = \int_a^b m \, dx$ e $M \cdot (a, b) = \int_a^b M \, dx$. Pela propriedade de monotonia temos imediatamente a desigualdade (3).

Lembrando o Teorema dos valores intermediários para as funções contínuas (resultado de Cálculo 1), o número $\int_a^b f(x) \, dx / (b - a)$ se coloca entre o ínfimo e o supremo de f . Supondo f contínua em $[a, b]$, m se torna de fato mínimo de f e M máximo. Portanto $\int_a^b f(x) \, dx / (b - a)$ pertence à imagem de f , ou seja, existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) \, dx / (b - a) = f(c)$. Assim a prova é completa. $\square$

5. Quarta-feira, 12 de agosto de 2015

Agora podemos enunciar e provar o principal resultado que fornece um método para calcular integrais.

Teorema 15 (Teorema fundamental do cálculo integral). *Sejam dados um intervalo I de $\mathbb{R}$ e uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $c \in I$ fixado. Então, a função integral*

$$F(x) = \int_c^x f(t) \, dt$$

é derivável em cada $x \in I$ e temos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Além disso, seja agora $[a, b]$ um subintervalo de I . Se $G(x)$ é uma outra primitiva de f (definida em I), então

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

A igualdade anterior é chamada *fórmula fundamental do cálculo integral*.

Demonstração. Seja x_0 um ponto fixado em I . Para provar a primeira parte do teorema precisamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Daí, pela arbitrariedade de x_0 , segue o enunciado. Consideramos portanto a razão incremental da F . Usando a decomposição da integral a respeito do domínio, temos

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_c^x f(t) \, dt - \int_c^{x_0} f(t) \, dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) \, dt}{x - x_0}.$$

Observe que, pela convenção de que institue a integral qualquer seja a ordem dos extremos de integração, e usando o exercício 26, observamos que a segunda igualdade acima vale qualquer seja a relação de ordem entre c , x_0 e x . Sendo f contínua podemos aplicar o teorema da média integral e observar que existe (pelo menos) um ponto d entre x_0 e x ($d \in [x_0, x]$ ou $d \in [x, x_0]$ dependendo da ordem entre x_0 e x) tal que

$$\frac{\int_{x_0}^x f(t) \, dt}{x - x_0} = f(d).$$

O ponto d de fato depende de x . Quando x tende para x_0 , d tende necessariamente para x_0 também. De novo usando a continuidade de f , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(d) = f(x_0).$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

O limite acima é o limite da razão incremental de F . Provando que tal limite existe e é finito, caímos na definição de derivada conseguindo verificar que F é derivável em x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Pela arbitrariedade de x_0 , a primeira parte do teorema é provada.

Seja agora G uma outra primitiva de f . Sabemos que duas primitivas de uma mesma função definida em um intervalo (é crucial esta condição) diferem por uma constante. Consideramos portanto um subintervalo $[a, b]$ de I e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pela definição de F temos $F(b) = \int_a^b f(t) dt$. Por outro lado, $G(x) - F(x)$ é constante quando x varia. Ou seja, $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$. Isso implica, lembrando que $F(a) = 0$, $G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(t) dt$. Assim, a prova do teorema é completa. $\square$

Exercício 33. Refaça a demonstração do teorema, explicando os detalhes.

Exercício 34. Se uma função f é definida em um domínio D que não seja um intervalo e possui primitivas, duas primitivas não diferem necessariamente por uma constante. Isso é equivalente a afirmar que existem primitivas não constantes da função nula definida em D . Prove esta equivalência e mostre com um exemplo, onde D não é um intervalo, e primitivas não constantes da função nula em D .

Exercício 35. Calcule as integrais seguintes:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx & \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx & \quad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx & \quad \int_2^3 x^2 \, dx & \quad \int_3^4 3x + 5 \, dx & \quad \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \\ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & \quad \int_{-1}^1 e^x \, dx & \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx & \quad \int_0^1 e^{2x} \, dx & \quad \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \, dx \\ \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx & \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3} \, dx & \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Exercício 36. Calcule as integrais seguintes. Observe que as funções *integradas* (ou seja, as funções que estão dentro do símbolo de integral) não são contínuas em todo o domínio. A sugestão é: 1) dividir o domínio das funções integradas nos subintervalos onde vale a continuidade; 2) em seguida, aplicar o teorema fundamental do cálculo integral nos intervalos onde as funções são contínuas; 3) usar a propriedade de aditividade a respeito do domínio (proposição 8).

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) \, dx, \quad \text{onde} \quad f(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ x^2 & \text{se } \pi \leq x \leq 4. \end{cases} \\ \int_{-1}^2 \text{sign}(x) \, dx, \quad \text{onde} \quad \text{sign}(x) &= \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 37. Determine as áreas das porções de plano incluídas entre as curvas seguintes:

- 1) $y = x$, $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$
- 2) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$
- 3) $y = x^2$, $y = 2x$, $y = 2 - x$

Exercício 38. Calcule as integrais seguintes ($\log x$ é o logaritmo natural em base e):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} dx & \quad \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx & \quad \int_1^3 \frac{\log x}{x} dx & \quad \int_0^1 x^2 \cos x^3 dx \\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x (1 + \cos^2 x) dx & \quad \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx & \quad \int_1^e \frac{\cos(\log x)}{x} dx & \quad \int_1^e \frac{\log x + \log^2 x}{x} dx \\ \int_0^1 e^x \operatorname{tg} e^x dx & \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} dx & \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^4 x} dx \end{aligned}$$

Exercício 39. Calcule as integrais seguintes

$$\begin{aligned} \int_1^e x \log x dx & \quad \int_0^2 2x \operatorname{arctg} x dx & \quad \int_1^3 x^2 e^{-x} dx & \quad \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ \int_{-1}^1 x \operatorname{sen} x dx & \quad \int_0^1 2x \log(x+1) dx \end{aligned}$$

Exercício 40. As integrais seguintes precisam de uma oportuna troca de variável

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} dx \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Exercício 41. Sejam $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [\sqrt{x}]$ (parte inteira³) e $g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [x^2]$. Desenhe os gráficos de f e g . Em seguida, calcule

$$\int_0^{10} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^3 g(x) dx.$$

Explique porque as duas funções são integráveis. A integração não deve ser feita através de uma “abordagem gráfica”, ligada ao desenho, mas deve ser rigorosa, indicando quais propriedades/teoremas estão sendo usados. (Ou pode ser usada a definição.)

Os exercícios seguintes são relacionados com os exercícios 29, 30, 31, 32.

Exercício 42. Estudo da função

$$F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$$

Em particular, queremos determinar: o domínio de F , o sinal, a derivada, em quais intervalos F é crescente ou decrescente, os pontos de máximo e mínimo relativo.

Observe, inclusive, algumas diferenças com a função

$$G(x) = \int_1^x \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt,$$

em particular: como passando de $\operatorname{sen} x$ ao módulo se transforma a relativa função integral. Tente dar uma ideia através do desenho do gráfico.

³A função *parte inteira* de x , definida em $\mathbb{R}$, $[x]$ é o maior inteiro relativo que não supera x

Exercício 43. Estudo da função

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{(t+2)e^{t^3}} dt$$

Em particular, estudamos o domínio, a derivada de F . Podemos provar que F é decrescente em $(-2, +\infty)$.

Exercício 44. Seja a função

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{|t|+1}{t^4+1} dt$$

Determine: o domínio de F , $F'(x)$, o sinal de F e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercício 45. Sejam as funções

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Determine o domínio de F , os pontos de máximo e mínimo relativo. Tente determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (Observação: tente provar, preliminarmente, que a integranda f é contínua em zero e, usando a definição de derivada, que é derivável em zero).

Exercício 46. Seja a função

$$F(x) = \int_x^{x+2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t dt$$

Determine: o domínio de F , e calcule $F'(x)$. (Dica: lembre que a potência com expoente real, a^b é definida se $a > 0$).

Exercício 47. Seja a função

$$F(x) = \int_x^{x+4} \frac{1}{t(t-1)} dt$$

Determine (sem calcular a primitiva da função integranda): o domínio de F . Calcule $F'(x)$, o sinal de F os pontos de máximo e mínimo relativo, os limites interessantes de F . Desenhe o gráfico de F .

Exercício 48. Seja a função

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2} (t^2 - 1) dt$$

Determine (sem calcular a primitiva da função integranda): o domínio de F . Calcule $F'(x)$, os pontos de máximo e mínimo relativo, os limites interessantes de F , os intervalos de concavidade e convexidade. Desenhe o gráfico de F .

Exercício 49. Determine o domínio e o sinal da função

$$F(x) = \int_{x-1}^{(x-1)^3} \frac{1}{\log(t^2+2)} dt$$

Exercício 50. Determine o domínio e o limite para $x \rightarrow +\infty$ da função

$$F(x) = \int_{x-1}^{(x-1)^3} \frac{t^2 + \cos t}{t+1} dt$$

Outros exercícios sobre as funções integrais.

Exercício 51. Determine o domínio e tente determinar outras informações (sinal e crescimento) sobre o comportamento das funções seguintes:

$$\int_0^x \frac{\cos t}{1+t} dt, \quad \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{1-2t} dt, \quad \int_x^{1-2x} \frac{\cos t}{t^2+t} dt.$$

Exercício 52. Escreva as derivadas das funções acima.

6. Sexta-feira, 14 de agosto de 2015

Exercício 53. Considere as funções do exercício 36:

$$f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ x^2 & \text{se } \pi \leq x \leq 4 \end{cases}$$

e

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Prove que

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{e} \quad G(x) = \int_0^x \text{sign}(t) dt$$

não são deriváveis. Em particular, determine em quais pontos.

Exercício 54. Prove que F e G acima são contínuas. Em geral, seja dada uma função qualquer $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. Suponhamos que g seja integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ contido em I . Seja $c \in I$ fixado. Prove que $F(x) = \int_c^x g(t) dt$ é contínua.

Exercícios: calcule a área das regiões planas seguintes:

55. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3x + 2 \leq y \leq -x - 1\}$

56. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq |y| \leq 3\}$

57. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y, x \geq 0, -2 \leq x - y \leq 0\}$

58. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1, |x| \leq 2\}$

Testes múltipla escolha

59. Dada a função

$$f(x) = 2 \int_1^{x^2} \frac{\sin^2 t}{t^2 + 1} dt,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ é:

a) 0.

c) $x^2 - 1$.

e) $\geq \pi$.

b) $+\infty$.

d) $\leq \pi/2$.

f) nenhum dos anteriores.

60. Dadas duas funções f e g , contínuas em $[a, b]$ e tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo x , a área da região incluída entre os gráficos de f , g e entre as retas $x = a$ e $x = b$ é

- a) $\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx$.
 b) $(f(b) - g(b)) \cdot (f(a) - g(a))$.
 c) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$.
 d) $\int_a^b f(x) - g(x) dx$.
 e) $\int_a^b |f(x)| - |g(x)| dx$.
 f) nenhuma resposta anterior é correta.

61. Considere a função seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg(1 - x^2) & x \in (-1, 1) \\ (x - 1) \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

e, em seguida, $F : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_1^x f(x) dx.$$

Então, temos o seguinte:

- a) F não pode ser definida em $[0, 2]$ porque, sendo f definida em $(-1, +\infty)$, este intervalo deve também ser o domínio de F .
 b) F não pode ser definida em $[0, 2]$ porque, se $x < 1$, o segundo extremo de integração é menor do primeiro e isto não é admissível.
 c) F é derivável se e somente se $x \in (1, 2]$ e temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (1, 2]$.
 d) F é derivável em $[0, 2]$ exceto $x = 1$.
 e) F é derivável em $[0, 2]$ e vale $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 2]$.
 f) nenhuma resposta anterior é correta.

62. Considere a função seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

e considere a função $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-1}^x f(x) dx.$$

Temos:

- a) F não é derivável em nenhum ponto do domínio.
 b) F é derivável em $[-1, 2]$ e vale $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [-1, 2]$.
 c) F é derivável em $[-1, 2]$ e $F'(x) = f(x)$ se e somente se $x \in [-1, 0)$.
 d) F é derivável em $[0, 2]$ exceto $x = 0$.
 e) F não é definida $[-1, 2]$, somente em $[-1, 0)$.
 f) nenhuma resposta anterior é correta.

63. O domínio da função seguinte

$$f(x) = \int_x^{x+2} \frac{e^t}{t^2 + t} dt$$

é

- | | |
|--|--|
| a) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$. | b) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. |
| c) $(-3, -1)$. | d) $(-1, +\infty)$. |
| e) $(-\infty, -1)$. | f) nenhum dos anteriores. |

64. O domínio da função seguinte

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{\cos t}{t^2 - 2t} dt$$

é

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. | b) $(-1, 0)$. |
| c) $(0, +\infty)$. | d) $[-1, +\infty)$. |
| e) $(-1, +\infty)$. | f) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. |

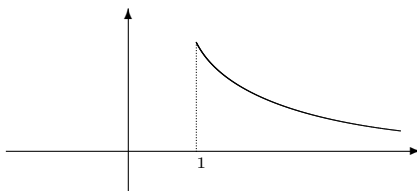
7. Segunda-feira, 17 de agosto de 2015 e

8. Quarta-feira, 19 de agosto de 2015

Integração imprópria.

Nas aulas anteriores temos estudado a integração segundo Riemann. Nesta teoria, condição necessária (mas não suficiente) para uma função ser integrável é que seja limitada e definida em um intervalo limitado. Vamos ver agora se e como é possível estender a teoria da integração a funções definidas em intervalos não limitados ou a funções não limitadas (ou a funções com ambas as características).

Consideramos uma função $f(x)$, cujo gráfico é representado no desenho com domínio $x \geq 1$. (No desenho a f é positiva e decrescente, mas isso não é de primária importância.)



Consideramos por exemplo as integrais $\int_1^n f(x) dx$, variando n em $\mathbb{N}$. Passando de um valor n para $n+1$, a integral incrementa do valor positivo $\int_n^{n+1} f(x) dx$ que é a área do subgráfico de $f(x)$ no intervalo $[n, n+1]$. Tal incremento, $\mathcal{I}_n$, é positivo mas decrescente. Ou seja $\int_1^n f(x) dx$ cresce, mas cresce de valores cada vez menores. Surge portanto a dúvida: estes incrementos são suficientemente pequenos para fazer com que o valor $\int_1^n f(x) dx$ converja (assintoticamente) para um número l (quando $n \rightarrow +\infty$)? Ou, mesmo tendendo a zero, os incrementos $\mathcal{I}_n$ provocam um crescimento de $\int_1^n f(x) dx$ tal que seu limite, quando $n \rightarrow +\infty$, será $+\infty$?

(Se por exemplo f fosse tal que $\mathcal{I}_1$ é igual a 1, $\mathcal{I}_2 = 0,1$, $\mathcal{I}_3 = 0,01$, $\mathcal{I}_4 = 0,001$, ... $\mathcal{I}_n = 10^{1-n}$, é imediato ver que $\int_1^n f(x) dx$ iria tender a $1, \bar{1} = 10/9$.)

A resposta é que o resultado depende de f . Pegando por exemplo $f(x) = 1/x$, e pondo $x \geq 1$, temos $\int_1^n 1/x dx = \log n$ e portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n 1/x dx = +\infty$. Em geral, não precisando mais que o extremo n seja inteiro, temos $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b 1/x dx = +\infty$.

Neste caso dizemos que a *integral imprópria* de $1/x$ em $[1, +\infty)$ não converge. Ou podemos dizer que $1/x$ não é integrável no sentido impróprio.

Vamos dar a definição geral.

Definição 16. Seja $f : [a, +\infty)$ uma função dada. Suponhamos que f seja integrável segundo Riemann em cada intervalo $[a, b]$ (com $b \geq a$). Dizemos que f é *integrável no sentido impróprio* em $[a, +\infty)$ se o limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

existe e é finito. Neste caso, o limite é a *integral imprópria* de f em $[a, +\infty)$. Em símbolos:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Também podemos dizer que a integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Exercício 65. Dê a definição de função integrável no sentido impróprio no caso de funções definidas em intervalos de tipo $(-\infty, a]$.

Exemplo 17. Estudamos a convergência das integrais impróprias

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

com $\alpha > 0$ e $a > 0$. O caso $\alpha = 1$ foi visto acima. Dado $b > 0$,

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\log x]_a^b = \log b - \log a.$$

Consequentemente $\lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b - \log a) = +\infty$ e a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

não converge.

Seja agora $\alpha \neq 1$. Fixado $b > a$, temos

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

Passando ao limite,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Em conclusão, a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

(com $\alpha > 0$) converge se e somente se $\alpha > 1$.

Exercício 66. Estude a convergência das integrais impróprias

$$\int_{-\infty}^a \frac{1}{|x|^\alpha} dx,$$

com $\alpha > 0$ e $a < 0$.

Exercício 67. Estude a convergência das integrais impróprias seguintes:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad a \in \mathbb{R}; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

No exercício e no exemplo anteriores é fácil determinar as primitivas das funções integrandas. Em geral, sabemos que não é assim. O teorema seguinte estabelece um critério de convergência para integração imprópria. O leitor pode ver a semelhança deste resultado com os teoremas de confronto dos limites do curso de cálculo 1.

Teorema 18 (critério de confronto). *Sejam dadas duas funções $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que:*

- (1) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$;
- (2) f e g são integráveis segundo Riemann em cada intervalo $[a, b]$.

Então:

- i) se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, também $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge; neste caso, em particular, temos que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx;$$

- ii) se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ não converge, também $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ não converge.

Demonstração. Seja dado $b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$. Supondo que f e g são integráveis segundo Riemann em $[a, b]$, sendo $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$ (aqui não serve a não negatividade das duas funções), podemos aplicar a propriedade de monotonia da integral; portanto

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Agora usamos o fato de que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$. Considerando as funções F e G definidas em $[a, +\infty)$ por

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad G(b) = \int_a^b g(x) dx,$$

temos $0 \leq F(b) \leq G(b)$. Sendo, em particular f e g não negativas, temos que F e G são funções crescentes. Portanto podemos aplicar o teorema de cálculo 1 que diz que uma função monótona sempre possui limite. Então, existem os limites

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} G(b),$$

e o primeiro limite é menor ou igual do segundo, sendo $F(b) \leq G(b)$ para todo b . Tais limites podem ser números reais ≥ 0 ou podem ser $+\infty$. Ficam claras em conclusão a i) e a ii). A desigualdade das integrais impróprias no caso i) segue imediatamente do teorema de cálculo 1 acima citado. $\square$

Exercício 68. Refaça a demonstração do teorema. Enuncie corretamente, inclusive, o teorema de cálculo 1 citado.

Exercício 69. Enuncie e prove o teorema no caso em que f e g sejam não positivas.

Exercício 70. Enuncie e prove o teorema no caso em que f e g sejam definidas em $(-\infty, a]$.

Exercício 71. Seja dada $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Observe a diferença entre as duas condições seguintes:

1. f é integrável segundo Riemann em cada $[a, b]$;
2. f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$.

Duas funções como x^2 ou e^x , por exemplo, verificam a 1. mas não a 2.

Exercício 72. (difícil) Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$. Necessariamente deve ser $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$? Em outras palavras: existem funções que não verificam o limite acima, mas que são integráveis em sentido impróprio em $[a, +\infty)$?

O resultado seguinte é um critério que ajuda a determinar a convergência de uma integral imprópria no caso de funções de sinal variável.

Teorema 19 (critério de convergência absoluta). *Seja dada uma função $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que:*

- (1) f é integrável segundo Riemann em cada intervalo $[a, b]$;
- (2) $|f|$ é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$.

Então, f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$ e vale a desigualdade

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (5)$$

Demonstração. O leitor observe, usando o exercício 22, que a integrabilidade de $|f|$ segundo Riemann em $[a, b]$ (dado $b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$) é uma consequência da integrabilidade de f segundo Riemann em $[a, b]$. De fato, chame

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Verifique que $|f| = f_+ + f_-$ e que $f = f_+ - f_-$. Logo, use o exercício 22 e a integrabilidade da soma de funções integráveis.

Agora observe que $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ e que $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \geq a$. Aplique o teorema 18. Como $|f|$ é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$, são integráveis em sentido impróprio em $[a, +\infty)$ também f_+ e f_- e vale

$$\int_a^{+\infty} f_+(x) dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f_-(x) dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (6)$$

Observe que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx - \int_a^b f_-(x) dx.$$

Como

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f_+(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f_-(x) dx$$

existem e são finitos, podemos aplicar a propriedade que diz que o limite da soma é a soma dos limites e concluir que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

existe e é finito, ou seja f é integrável em sentido impróprio em $[a, +\infty)$. A desigualdade 5 é consequência das 6 (o leitor prove em detalhes). $\square$

Exercício 73. Refaça a demonstração do teorema provando em detalhes todos os passos.

Exercício 74. Como visto em sala de aula, use o teorema acima para provar a convergência de

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Exercício 75. Usando o exercício anterior e a integração por partes prove que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge.

Exercício 76. (difícil) Prove que

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

não converge.

Os dois últimos exercícios mostram que se o valor absoluto de uma função f não é integrável em sentido impróprio, nada podemos dizer sobre a integrabilidade em sentido impróprio de f .

Exercício 77. Estude a convergência das integrais seguintes, determinando, quando possível, o valor exato:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x - 3} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{(\cos x)^2 + e^{1+1/x}}{x^2} dx$$

$$(\text{difícil}) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log |\sqrt{x+3}-1|} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin e^{-x} dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$$

Exercício 78. Estude a convergência da integral seguinte:

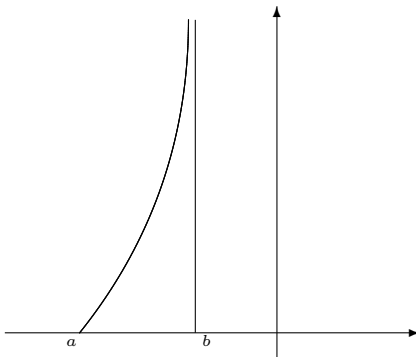
$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

Observação: não é possível determinar elementarmente uma primitiva de $\sin x^2$ (que é coisa bem diversa de $\sin^2 x$, atenção!). Pode tocar a variável por $t = x^2$, fazer um passo de integração por partes, e, enfim, estudar o limite que define a integração imprópria. Tente!!

9. Sexta-feira, 21 de agosto de 2015

Ao lado da integração imprópria vista acima, podemos considerar funções que não são limitadas em intervalos limitados. A motivação geométrica é a mesma. Ver se é possível estender o conceito de área (de “medida”, em uma linguagem mais geral) a conjuntos não limitados. Que todavia se apresentam de uma forma um pouco diferente dos casos anteriores.

Observe a função seguinte:



Acompanhando o desenho, imaginamos que a função f seja definida em $[a, b)$, que seja contínua e que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$. No intervalo $[a, b - \varepsilon]$, para qualquer $\varepsilon > 0$ e tal que $a < b - \varepsilon$, f é contínua e portanto limitada. E também integrável segundo Riemann. O subgráfico de f é um conjunto não limitado em $\mathbb{R}^2$. A área do subgráfico de f entre a e $b - \varepsilon$ é bem definida e corresponde a integral de Riemann $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Quando ε diminui, a integral acima cresce. Queremos saber se tende para $+\infty$ ou para um valor finito.

Podemos dar a definição seguinte.

Definição 20. Seja $f : (a, b]$ uma função dada. Suponhamos que f seja integrável segundo Riemann em cada intervalo $[a + \varepsilon, b]$, onde $\varepsilon > 0$ e tal que $a + \varepsilon < b$. Dizemos que f é *integrável no sentido impróprio* em $(a, b]$ se o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

existe e é finito. Neste caso, o limite é a *integral imprópria* de f em $(a, b]$. Em símbolos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Também podemos dizer que a integral $\int_a^b f(x) dx$ *converge*.

Exercício 79. Dê a definição de função integrável no sentido impróprio no caso de funções definidas em intervalos de tipo $[a, b)$.

Exercício 80. Como observado em sala de aula, temos uma pequena diferença entre a definição acima e a definição 16. A integração em intervalos ilimitados está necessariamente fora da teoria da integral de Riemann. A definição acima, por outro lado, é sim pensada para funções que tendem para $\pm\infty$ se x tende a um extremo do intervalo, mas em princípio, funciona se a função f for integrável segundo Riemann *em tudo o intervalo* $(a, b]$. Só que neste caso não estamos dizendo nada de novo a respeito das páginas anteriores (no máximo podemos dizer que a integral varia com continuidade; veja o exercício 54). Observe agora a definição acima, levando em conta este argumento.

Exemplo 21. Analogamente ao exemplo 17, estudamos a convergência das integrais impróprias

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

com $\alpha > 0$. O estudo é análogo. As conclusões serão opostas exceto pelo caso $\alpha = 1$. No caso $\alpha = 1$ temos, dado $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_\varepsilon^1 = -\log \varepsilon.$$

Consequentemente $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\log \varepsilon) = +\infty$ e a integral imprópria

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

não converge.

Seja agora $\alpha \neq 1$. Fixado $\varepsilon > 0$, temos

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Passando ao limite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Em conclusão, a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

(com $\alpha > 0$) converge se e somente se $\alpha < 1$.

Exercício 81. Estude a convergência das integrais impróprias seguintes, dependendo do parâmetro $\alpha > 0$:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx, \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx.$$

Os dois teoremas seguintes são análogos aos teoremas 18 e 19. As demonstrações são semelhantes e são deixadas como exercício ao leitor.

Teorema 22 (critério de confronto). *Sejam dadas duas funções $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que:*

- (1) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x ;
- (2) f e g são integráveis segundo Riemann em cada intervalo $[a + \varepsilon, b]$.

Então:

- i) se $\int_a^b g(x) dx$ converge, também $\int_a^b f(x) dx$ converge; neste caso, em particular, temos que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

- ii) se $\int_a^b f(x) dx$ não converge, também $\int_a^b g(x) dx$ não converge.

Teorema 23 (critério de convergência absoluta). *Seja dada uma função $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que:*

- (1) f seja integrável segundo Riemann em cada intervalo $[a + \varepsilon, b]$;
- (2) $|f|$ seja integrável em sentido impróprio em $(a, b]$.

Então, f é integrável em sentido impróprio em $(a, b]$ e vale a desigualdade

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7)$$

Exercício 82. Estude a convergência das integrais seguintes, determinando, quando possível, o valor exato:

$$\begin{aligned} & \int_0^{-2} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx & \int_0^1 \frac{x}{\log(1 + x^2)} dx & \int_2^e \frac{1}{1 - \log x} dx \\ & \int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{\sqrt{\cos x}} dx & \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx & \int_0^1 x \log x dx \\ & \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx & \int_2^4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x-3} \right) dx & \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}} dx \\ & \int_0^1 \log x dx & \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4x} dx \end{aligned}$$

10. Segunda-feira, 24 de agosto de 2015 e

11. Quarta-feira, 26 de agosto de 2015

Curvas em $\mathbb{R}^n$.

Definição 24. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$. Uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada *curva*. Além disso, chamamos *trajetória* o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é imagem de ϕ . Dado um subconjunto T de $\mathbb{R}^n$ tal que existe uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$) tal que T é imagem de ϕ , chamamos ϕ *parametrização* de T .

Definição de curva em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Definição de trajetória. Parametrização de uma trajetória.

Exemplo 25. Uma reta r em $\mathbb{R}^3$ é uma trajetória. Para conhecer uma reta podemos ter por exemplo 2 pontos por ela ou um ponto e um vetor. No segundo caso, dado um vetor de $\mathbb{R}^3$ $v = (a, b, c)$, não nulo, e um ponto $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ a reta que passa por P e com direção determinada por v tem parametrização:

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = \bar{x} + at \\ y(t) = \bar{y} + bt \\ z(t) = \bar{z} + ct. \end{cases}$$

Exercício 83. Determine outras parametrizações da reta acima (por exemplo mudando o comportamento do parâmetro t , escolhendo um outro ponto no lugar de P ou um outro vetor no lugar de v .)

Exercício 84. Determine uma parametrização da reta pelos pontos $(1, 2 - 1)$ e $(0, 1, 3)$.

Observação 26. Em $\mathbb{R}^3$ não existe a possibilidade de representar uma reta por uma equação cartesiana. Uma equação do tipo $ax + by + cz = d$ representa sempre um plano.

Exemplo 27. A circunferência C de centro a origem e raio r em $\mathbb{R}^2$ é uma trajetória. Entre as infinitas parametrizações possíveis uma é a seguinte:

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t. \end{cases}$$

Exercício 85. Determine outras parametrizações de C . Em particular determine parametrizações definidas ainda em $[0, 2\pi]$, mas cadauma com a característica seguinte: a) o ponto inicial é $(0, 1)$; b) o ponto inicial é $(0, -1)$; c) o sentido é horário (escolha o ponto inicial).

Exercício 86. Desenhe a trajetória da curva $\phi : [\pi/4, \pi/2]$, $\phi(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$.

Exercício 87. Desenhe a trajetória da curva $\phi : [\pi, 2\pi]$, $\phi(t) = (-\sin t, \cos 2t)$.

Exercício 88. Determine uma parametrização da trajetória obtida como interseção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2 - 2$ e do plano de equação $y - z = 3$. Esboce o desenho da figura.

Exercício 89. Escreva uma parametrização da elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Exercício 90. Desenhe a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercício 91. Determine uma parametrização da circunferência com centro em $(2, 1)$ e raio 3. Escreva também a sua equação cartesiana.

Exercício 92. Escreva a equação cartesiana da elipse que tem como focos os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Escreva, em seguida, uma parametrização dela.

Exercício 93. Determine uma parametrização da parábola de equação $y^2 + x - 1 = 0$.

Exercício 94. Desenhe a trajetória da curva

$$\phi : [-\pi/4, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = \operatorname{tg} t \\ y(t) = (\operatorname{tg} t)^2. \end{cases}$$

Exemplo 28. A hipérbole H de equação $x^2 - y^2 = 1$ é uma trajetória. Ela é composta por dois ramos conexos e não possível ter uma parametrização através de uma *única* curva (si for definida em um intervalo). O ramo com $x \geq 0$ pode ser parametrizado por

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 + 1} \\ y(t) = t. \end{cases}$$

Exercício 95. Verifique que a parametrização acima é correta.

Exercício 96. Recupere nos livros de geometria a definição geométrica de hipérbole. Prove que o conjunto que verifica a equação do exemplo acima é de fato uma hipérbole.

Exercício 97. Escreva duas parametrizações dos dois ramos da hipérbole H de equação $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$. Desenhe H .

Os dois ramos da hipérbole do exemplo 28 podem ser parametrizados em coordenadas chamadas hiperbólicas. As funções hiperbólicas são

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

As duas funções acima são definidas em todo $\mathbb{R}$. São deriváveis e vale:

$$D(\cosh t) = \sinh t \quad \text{e} \quad D(\sinh t) = \cosh t.$$

Além disso há $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

Exercício 98. Verifique as duas propriedades acima de seno e cosseno hiperbólico. Desenhe os gráficos das duas funções.

Exercício 99. Verifique que os dois ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ podem ser parametrizados por

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = \begin{cases} x(t) = -\cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}$$

Exercício 100. Parametrize os dois ramos da hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ usando as funções hiperbólicas.

Definição 29. Uma curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, de componentes $\phi_1, \dots, \phi_n$ é dita:

- a) contínua se cada componente ϕ_j é contínua;
- b) derivável se cada componente ϕ_j é derivável;
- c) C^1 se cada componente ϕ_j C^1 .

Definição 30. Uma curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita fechada se $\phi(a) = \phi(b)$.

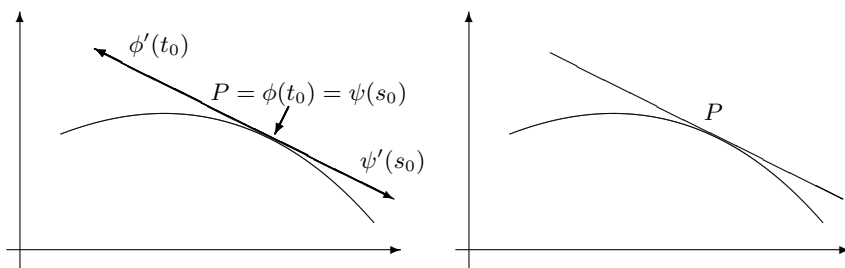
Exercício 101. Considere as duas curvas $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $\phi(t) = (t, |t|)$ e $\psi(t) = (\text{sign}(t) \cdot t^2, t^2)$ (veja o exercício 36 para a definição da função sign). Verifique que ψ é derivável em todo o domínio enquanto ϕ não é derivável em zero. Verifique que as duas curvas têm a mesma trajetória.

Exercício 102. Desenhe a trajetória da curva $\phi(t) = (t^2, t^3)$, definida em $\mathbb{R}$. Determine a função $x = f(y)$ tal que a trajetória de ϕ é o gráfico de f . Observe que f não possui derivada em $y = 0$, porém ϕ é derivável (obviamente, enquanto as componentes são potências).

Definição 31. Seja dada curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivável em um ponto $t_0 \in I$. O vetor $\phi'(t_0)$ (que tem como coordenadas $\phi'(t_0) = (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0))$) é chamado *vetor tangente* a ϕ em t_0 (as vezes é chamado *vetor velocidade*, usando uma linguagem mais próxima à física).

Se o vetor tangente for não nulo, podemos definir a *reta tangente* à trajetória de ϕ em $\phi(t_0)$: será a reta de equação $r(t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0) \cdot t$.

Observação 32. Em um certo sentido a definição de vetor tangente é analítica enquanto a de reta tangente é geométrica.



As curvas ϕ e ψ (que supomos deriváveis) podem parametrizar a mesma trajetória do desenho acima, por exemplo em sentidos opostos (de direita para esquerda a ϕ e o contrário a ψ). Supondo que s_0 do

domínio da ψ e t_0 do domínio da ϕ sejam tais que $\phi(t_0) = \psi(s_0)$, teremos que os dois vetores tangentes têm sentido oposto (no desenho são âmbos não nulo).

Pode se provar (não vamos ver agora) que os dois vetores são paralelos e portanto definem a mesma reta tangente. Tal reta tangente pode ser portanto um conceito que não depende da escolha da parametrização e diretamente associada à trajetória.

Exercício 103. Escreva uma parametrização dos gráficos das funções seguintes:

- a) $x^2 + 1$, $x \in [-1, 2]$; b) $\arctg x$, $x \in [-\pi, \pi]$; c) $x \log x$, $x \in (0, e]$; d) $|x|x$, $x \in [-2, 1]$.

Exercício 104. Escreva a definição de vetor tangente e de reta tangente (colocando todos os detalhes).

Exercício 105. Desenhe as trajetória das curvas seguintes (todas definidas em tudo $\mathbb{R}$):

- a) $\phi(t) = (t(t-1), (t-1)(t-2))$, b) $\phi(t) = (-t(t+1), (t-1/2)(t-1)(t-2))$.

Exercício 106. Estude as três curvas seguintes (todas definidas em tudo $\mathbb{R}$):

- a) $\phi(t) = (t, |t|)$, b) $\psi(t) = (t^3, |t^3|)$, c) $\chi(t) = (t^2, t^3)$.

Diga se o vetor tangente é sempre definido, se é nulo em alguns pontos. Analise a relação entre as duas primeiras curvas: explique porque, na sua opinião, do ponto de vista físico, um particular vetor tangente deve ser nulo. Enfim, desenhe as trajetórias.

Exercício 107. Escreva a equação da reta tangente às trajetórias parametrizadas seguintes nos pontos escritos ao lado:

$$x = \cos t, y = 1 - t, \quad (1, 1)$$

$$x = e^t, y = t + t^2, \quad (1, 0)$$

$$x = \sin t \cos t, y = 1/\sin t, \quad (0, 1)$$

$$x = t^2, y = t^3, \quad (1, 1)$$

$$x = \log(1+t), y = 2t - t^2, \quad (0, 0)$$

$$x = \operatorname{tg} t, y = \cos 2t, \quad (1, 0)$$

$$x = 1 - \arctg t, y = 1 - t^2, \quad (1 - \pi/4, 0)$$

12. Sexta-feira, 28 de agosto de 2015

Aula de Diego A. Sandoval

O material seguinte foi preparado, redigido por Diego e revisitado por mim.

Exercício 108. Construir uma função crescente com infinitas descontinuidades e que seja integrável. Consideramos a serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

A fórmula acima deve ser entendida na abordagem seguinte: dado $r \in \mathbb{R}$ fixado, a soma finita seguinte

$$\sum_{n=0}^N r^n$$

depende claramente de N e vale, para todo N inteiro, positivo a igualdade

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r},$$

Não é difícil provar (não entramos aqui em detalhes) que o limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$ é finito se e somente se $|r| < 1$. Neste caso o limite vale claramente $\frac{1}{1-r}$.

O símbolo acima $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ deve ser pensado como um limite, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N r^n,$$

Seja agora a função definida por

$$f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad \text{se } x \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}\right].$$

Observe que o domínio da função é $(0, 1)$, dado que

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Além disso, os pontos de descontinuidade são todos os extremos dos intervalos acima, ou seja, os pontos da forma $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}$ para todo $n \geq 1$. A função é crescente, sendo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^n > \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Observe que o comprimento do n -ésimo intervalo é $\frac{1}{2^n}$.

Então, a área do n -ésimo retângulo é $A_n = \frac{1}{2^n} f(x) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Usando a definição de integral de Riemann, pode-se provar que

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

O leitor pode fazer a conta em detalhes; se trata de uma conclusão não totalmente trivial, querendo uma correta aplicação da definição de integral.

Exercício 109. *Cálculo de integrais usando o teorema fundamental do cálculo integral.*

Calcule a integral (com primitiva)

$$\int_1^2 \frac{1}{(t^2 + t)} dt.$$

A função integranda é uma fração:

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

A função f é integrável em $[1, 2]$ sendo contínua.

$$\int_1^2 \frac{1}{(t^2 + t)} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right|_1^2 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{3}.$$

Exercício 110. *Cálculo de área*

Calcule a área da região limitada por $y = 2 - x^2$ e por

$$y = \begin{cases} |x| & x \leq 0 \\ x^3 & x \geq 0. \end{cases}$$

Pontos de interseção:

$-x = 2 - x^2$ implica $x = 2, -1$, (lembramos que, aqui, temos $x \leq 0$) e

$x^3 = 2 - x^2$ implica $x = 1$. Logo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 2 - x^2 - (-x) dx + \int_0^1 2 - x^2 - x^3 dx \\ &= \int_{-1}^0 2 - x^2 + x dx + \int_0^1 2 - x^2 - x^3 dx \\ &= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= -(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) + (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \\ &= \frac{7}{6} + \frac{17}{12} = \frac{31}{12}. \end{aligned}$$

Exercício 111. *Função integral*

Seja

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}(t^2 - 1) dt.$$

- O domínio de F é $\mathbb{R}$: de fato a função integranda é contínua em tudo $\mathbb{R}$; portanto é integrável em cada intervalo limitado.
- É imediato ver que $F(1) = 0$.
- $F(0) > 0$, porque $F(0) = -\int_0^1 f(x)dx > 0$ e $f(x) \leq 0$ no intervalo $(0, 1)$
- Calcule $F'(x)$

Usando o teorema fundamental do cálculo integral temos $F'(x) = f(x) = e^{x^2}(x^2 - 1)$.

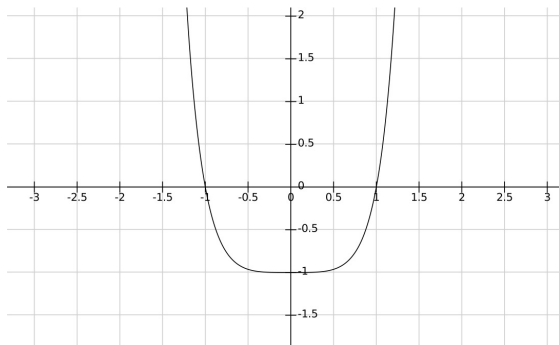


FIGURE 1. Gráfico de f

- Possíveis pontos de máximo e mínimo relativo de F .

Analizando o sinal de f , temos que $x = 1$ é ponto de mínimo relativo e $x = -1$ ponto de máximo relativo.

Pontos críticos de F : $x = \pm 1$ e $F''(x) = f'(x) = 2x^3 e^{x^2}$. Logo

$F''(1) = 2e > 0$ implica que $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo, e

$F''(-1) = -2e < 0$ implica que $x = -1$ é um ponto de máximo relativo.

Em $x = 0$ temos um ponto de inflexão, onde o gráfico muda de concavidade.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

Observando o gráfico de F podemos imaginar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$. A observação do gráfico não basta. Serve analisar o comportamento ao limite da função integranda e usar a definição de integral imprópria (o leitor pode provar em detalhes a coisa).

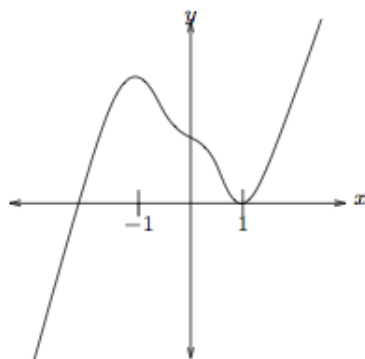
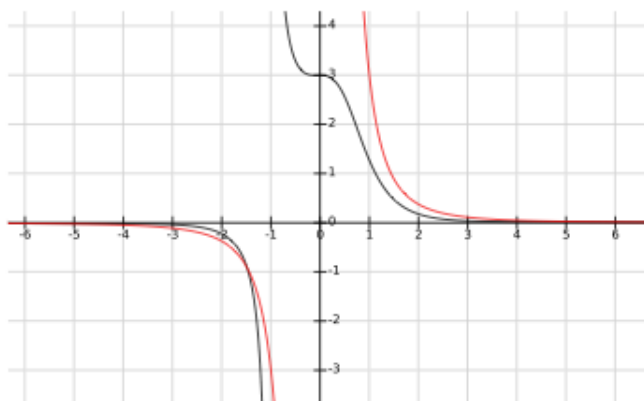


FIGURE 2. Gráfico de F

Exercício 112. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, onde

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{2 + \cos t}{t^3 + 1} dt.$$

Observe-se que a função integranda não está definida em $t = -1$.

FIGURE 3. Comparação da função integranda com $\frac{3}{t^3}$

Para $x > 1$ suficientemente grande temos

$$0 \leq \frac{2 + \cos t}{t^3 + 1} \leq \frac{3}{t^3}$$

Usando a propriedade da monotonia da integração obtemos

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{2 + \cos t}{t^3 + 1} dt \leq \int_x^{2x} \frac{3}{t^3} dt$$

Mas $\int_x^{2x} \frac{3}{t^3} dt = -\frac{3}{2t^2} \Big|_x^{2x} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{9}{8x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Portanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Exercício 113. Considere $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ definida em tudo $\mathbb{R}$. Desenhe o gráfico de f . Em seguida considere $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Determine o domínio de F . Esboce o gráfico de F e determine os intervalos onde F cresce ou decresce. Se possível, as regiões onde F é positiva ou negativa.

O domínio é tudo $\mathbb{R}$ devido à contibuidade de f .

A função f é positiva em $[-2, 1] \cup [3, \infty)$ e negativa em $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$. Por tanto, usando o teorema fundamental do calculo, obtemos que F é crescente no intervalo $[-2, 1]$ e em $[3, \infty)$ separadamente (mas não em $[-2, 1] \cup [3, \infty)$) e decrescente em $(-\infty, -2]$ e $[1, 3]$ separadamente como acima (mas não em $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$),

Assim, em -2 e 3 são pontos de mínimo relativo e $x = 1$ de máximo relativo.

F é negativa num intervalo I que contem $(-2, 3)$. É difícil determinar I .

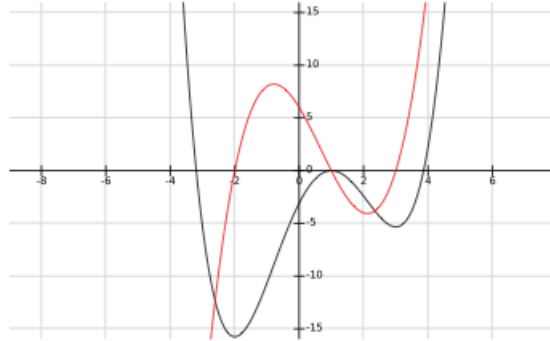


FIGURE 4. Comparação da função integranda com $\frac{3}{t^3}$

Exercício 114. Encontre o valor de α tal que a integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{\alpha x}{4x^2 + 1} - \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) dx$$

converga, e avalie a integral neste caso. Temos, fixado R positivo

$$\begin{aligned} \int_1^R \left(\frac{\alpha x}{4x^2 + 1} - \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) dx &= \int_1^R \left(\frac{(\alpha - 12)x^4 - 3x^2 + \alpha x}{(4x^2 + 1)(x^3 + 1)} \right) dx \\ &\leq \int_1^R \left(\frac{(\alpha - 12)x^4 - 3x^2 + \alpha x}{x^5} \right) dx \\ &= \int_1^R \left(\frac{(\alpha - 12)x^4}{x^5} - \frac{3x^2}{x^5} + \frac{\alpha x}{x^5} \right) dx \\ &= \int_1^R \frac{(\alpha - 12)}{x} dx - 3 \int_1^R \frac{1}{x^3} dx + \int_1^R \frac{\alpha}{x^4} dx \end{aligned}$$

Observe que as ultimas duas integrais convergem, quando $R \rightarrow +\infty$ porque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge para $p > 1$. Além disso, a primeira integral diverge se $\alpha \neq 12$. Portanto, a integral converge quando $\alpha = 12$.

Se $\alpha < 12$ então a integral diverge para $-\infty$.

Se $\alpha > 12$ então a integral diverge para $+\infty$.

Se $\alpha = 12$ então integral converge e seu valor é:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \left(\frac{\alpha x}{4x^2 + 1} - \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) dx &= 12 \int_1^{+\infty} \frac{x}{4x^2 + 1} dx - \int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \ln(4x^2 + 1) \Big|_1^a - \ln(x^3 + 1) \Big|_1^a \right) + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 5 \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \ln(4a^2 + 1) - \ln(a^3 + 1) \right) + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 5 \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(4a^2 + 1)^{3/2}}{a^3 + 1} \right) + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 5 \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(4 + 1/a^2) \sqrt{4 + 1/a^2}}{1 + 1/a^3} \right) + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 5 \\
 &= \ln 8 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 5 = \ln 16 - \frac{3}{2} \ln 5.
 \end{aligned}$$

Exercício 115. Sobre a propriedade de aditividade a respeito do domínio

Calcule $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} h(s) ds$ onde

$$h(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos s & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi \\ 2 \sin s & \pi < s \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} h(s) ds &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} \cos s ds + \int_{\pi}^{3\pi/2} 2 \sin s ds \\
 &= -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Exercício 116. Convergência de integrais impróprias.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

A primeira integral é definida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$$

e portanto converge se e somente se convergem os dois termos a segundo membro.

- Observe-se $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$ diverge. De fato, se $a > 0$, temos

$$\int_{-a}^0 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx \geq \int_{-a}^0 \frac{-x}{1+x^2} dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{2} \Big|_{-a}^0$$

A conclusão é obtida passando ao limite para $a \rightarrow +\infty$.

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$ converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

- $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ converge:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_0^a \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^4}} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsen(x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &\geq 1 \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &\geq (1 - x^2) \\ \sqrt{1 - x^4} &\geq \sqrt{1 - x^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} &\geq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

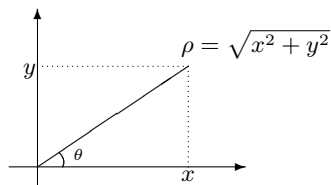
13. Segunda-feira, 31 de agosto de 2015 e

14. Quarta-feira, 2 de setembro de 2015

A *espiral de Arquimédes* é uma particular trajetória expressa implicitamente pela equação $\rho = \theta$, dada em coordenadas polares.

Todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ podem ser representados através de *coordenadas polares*. De fato: seja dado $P = (x, y)$. Se $P \neq 0$, a sua distância da origem é positiva, vale $\sqrt{x^2 + y^2}$ e chamamos ela de ρ (a "r" grega) pensando no raio da circunferência centrada na origem e que passa por P . Além disso a semireta de $\mathbb{R}^2$ nascente em $O = (0, 0)$ e que passa por P forma com o semieixo positivo das abscissas um ângulo, que chamamos de θ .

Na verdade, os ângulos seriam dois: aquele que nós escolhemos é o ângulo do semieixo X até a semireta OP em sentido anti-horário.



É fácil ver que, dado $P \neq 0$, às coordenadas cartesianas (x, y) são associadas univocamente duas coordenadas polares e vice-versa. É igualmente fácil ver que $\rho \in [0, +\infty)$ e que será nulo se e somente se $P = 0$. Como intervalo de variação de θ escolhemos $[0, 2\pi)$ (se escolhermos θ em $\mathbb{R}$ a sua determinação, dado P , não será única – coisa que, em princípio, poderia não ser um problema).

Exercício 117. O leitor prove os fatos acima.

Exercício 118. Determine as fórmula que colocam em correspondência (x, y) com (ρ, θ) .

Quando $P = 0$, o raio é evidentemente nulo e o ângulo não pode ser determinado.

Voltando à espiral de Arquimédes, a equação $\rho = \theta$, onde aqui consideramos θ em tudo $[0, +\infty)$, é satisfeita pelos pontos tais que *o raio coincide com o ângulo*. Em princípio, este conjunto de pontos não necessariamente é uma trajetória. Se torna tal se conseguimos encontrar uma sua parametrização. Que de fato é dada pela curva

$$\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t. \end{cases}$$

Exercício 119. Verifique que um ponto é imagem da curva anterior se e somente se satisfaz a equação polar $\rho = \theta$.

Exercício 120. Desenhe a espiral de Arquimédes.

Exercício 121. Escolha um ponto, diverso da origem, sobre a trajetória acima e escreva a equação parametrizada e cartesiana da reta tangente à espiral por ele.

Exercício 122. Considere uma espiral de Arquimédes $\rho = a\theta$, onde a é positivo e fixado. Seja r uma semireta pela origem O de $\mathbb{R}^2$. Chame P_n a sequência de pontos interceptados da reta sobre a espiral tais que a sequência dos raios ρ_n relativos seja uma sequência crescente. Prove que para o valor $\rho_n - \rho_{n-1}$ é constante, variando n em $\mathbb{N}$.

Exercício 123. Considere a trajetória T dada em coordenadas polares por $\rho = \sin \theta$, onde $\theta \in [0, \pi/2]$.

a) Desenhe T

b) Escreva uma parametrização de T

Exercício 124. Considere a trajetória T dada em coordenadas polares por $\rho = e^\theta$, onde $\theta \in [0, +\infty)$. Tal trajetória se chama espiral logarítmica. Desenhe T e encontre uma parametrização dela. Como no exercício 121 escolha um ponto, diverso da origem, sobre a trajetória acima e escreva a equação parametrizada e cartesiana da reta tangente à espiral por ele.

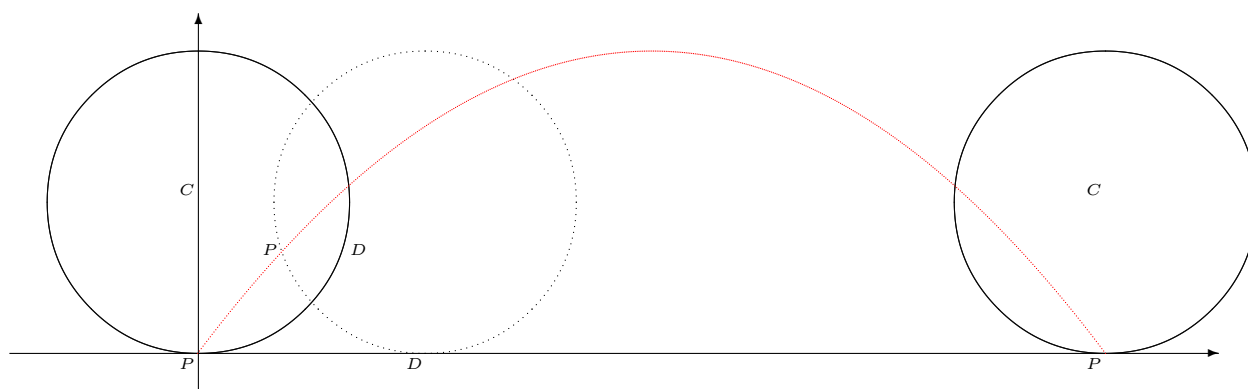
Pode ser interessante ver a página da wikipedia relativa à espiral de Arquimédes e logarítmica e as referências colocadas:

https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_spiral

https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral

* * *

Uma outra curva interessante é a cicloide. Geometricamente é obtida da maneira seguinte: considere um disco D colocado em $\mathbb{R}^2$, com raio r fixado e com o centro na posição de coordenadas $(0, r)$. Então, D se apoia sobre o eixo X . Considere o ponto $P = (0, 0)$, que coincide por enquanto com a origem O . Agora imagine que D comece a rolar sem atrito sobre o eixo X , por exemplo no sentido das abscissas positivas. A cicloide é a trajetória das posições ocupadas em $\mathbb{R}^2$ pelo ponto P enquanto o disco se desloca. Quando P assume novamente a altura zero, é fácil ver que sua abscissa, assim como a abscissa do centro, é $2\pi r$.



em vermelho é a cicloide (o arco PD e o segmento PD têm o mesmo comprimento)

Uma parametrização da cicloide é a seguinte:

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = \begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Exercício 125. Verifique que a parametrização acima é correta (como visto por exemplo em sala de aula).

A cicloide é uma trajetória importante porque resolve dois problemas clássicos da física, a determinação da curva *braquistócrona* e da curva *tautócrona*. O problema da braquistócrona é o seguinte: colocamos dois pontos A e B em um plano vertical, com B que está a uma altura menor do que A . Sob a ação da força peso qual é a curva T que une A e B tal que um ponto material que corre de A a B ao longo de T gasta (sem atrito) o tempo menor? E tal curva existe? Ou seja este problema tem solução? Galileo pensava que o problema tivesse solução e propôs um arco de circunferência como trajetória minimizante. Johann Bernoulli resolveu o problema em 1697, descobrindo que a trajetória minimizante é um arco de cicloide. Um outro método foi elaborado por um jovem matemático em 1755, Joseph Louis Lagrange, que tinha na época 18 anos.

Veja-se

https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve

https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange

A cicloide é também solução do problema da curva tautócrona: como sabemos, um pêndulo simples desenha uma circunferência. Podemos construir um pêndulo simples montando um arco de circunferência e deixando uma bola cair de uma determinada altura. Desconsiderando todos os atritos, a bolinha que é deixada livre em um ponto A de altura h chegará ao ponto B , do lado oposto do arco, colocado na mesma altura h ; as oscilações serão repetidas infinitas vezes (sem perda de energia, repetimos, no caso ideal, sem fricção). O tempo necessário para ir de A a B depende da posição inicial, ou seja, da altura? A resposta é sim. As oscilações não são *isócronas*. O matemático e físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) era também apaixonado de relógios. Ele provou que a trajetória tal que o tempo das oscilações completas não dependia da altura era um arco de cicloide. Ele realizou assim um pêndulo cicloidal e um relógio baseado nisso.

https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve

Exercício 126. Escreva uma parametrização da espiral de equação polar $\rho = 2\theta$, onde $\theta \in [0, +\infty)$.

Exercício 127. Escreva uma parametrização da espiral de equação polar $\rho = 3\theta e^\theta$, onde $\theta \in [0, 4\pi]$.

Exercício 128. Desenhe as duas trajetórias acima.

Exercício 129. Escreva uma parametrização da cardióide de equação polar $\rho = 1 + \cos \theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$.

* * *

Exercícios com alunos na lousa para preparar a prova P1.

15. Sexta-feira, 4 de setembro de 2015

Prova P1

16. Segunda-feira, 14 de setembro de 2015 e

17. Quarta-feira, 16 de setembro de 2015 e

Definição 33 (Comprimento de uma curva). Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva C^1 . Definimos o *comprimento* de ϕ como

$$l(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt,$$

onde lembramos que a norma $\|v\|$ de um vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é definida por $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$.

Observação 34. Podemos ver como a integral da definição acima seja bem definida. De fato, supondo ϕ de classe C^1 , temos que as derivadas das componentes de ϕ , as ϕ'_j , onde $j = 1, \dots, n$, são contínuas em um intervalo limitado $[a, b]$ (portanto limitadas – Teorema de Weierstrass de cálculo 1). Portanto a função $t \mapsto \|\phi'(t)\|$ é contínua, limitada e integrável em $[a, b]$.

Observação 35. A definição acima pode ser estendida aos casos onde ϕ é C^1 por partes; ou seja, os casos em que a derivada não está definida em um número finito de pontos, mas continua sendo limitada no resto de $[a, b]$ (perdendo a continuidade de ϕ' em alguns pontos, não temos mais garantia de que $\|\phi'(t)\|$ seja limitada; isto deve ser assumido como hipótese). Um exemplo típico é $\phi(t) = (t, |t|)$, $t \in [a, b]$, onde $a < 0$ e $b > 0$. A derivada de $|t|$ não é definida em $t = 0$. Porém a integral $l(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt$ não é afetada pela falta de definição do vetor tangente em $t = 0$, sendo um ponto isolado, e podemos calcular o comprimento como

$$l(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_a^0 \|\phi'(t)\| dt + \int_0^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Exercício 130. Considere a circunferência C centrada na origem de $\mathbb{R}^2$ de raio r e as seguintes três parametrizações de C :

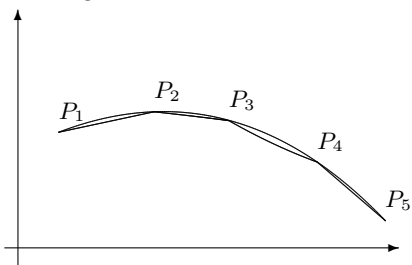
$$\begin{aligned} \phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) &= \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t, \end{cases} \\ \psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) &= \begin{cases} x(t) = r \cos 2t \\ y(t) = r \sin 2t, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t. \end{cases}$$

Calcule o comprimento de ϕ , ψ e γ . Verifique que $l(\phi) = l(\psi) = 2\pi r$ enquanto $l(\gamma) = 4\pi r$.

Observação 36. Observando a definição 33, vemos que o comprimento das curva é definido para as curvas e não para as trajetórias, como seria mais natural pensar. Assim, o resultado do exercício acima não é contraditório, embora pareça estranho. O comprimento de γ não necessariamente coincide com os de ϕ e ψ . Portanto, duas parametrizações da mesma trajetória podem ter comprimentos diferentes, porque, repetimos, o comprimento é um conceito que é associado a uma função e não a um objeto geométrico (como é uma trajetória). Por outro lado, seria mais interessante definir o comprimento como um número, de fato, associado a uma trajetória, que possa dar a medida da trajetória mesma. Isso é possível e será visto mais para frente.

Observação 37. Apesar da definição de comprimento ser associada a uma curva (ou seja, a uma função) e não a uma trajetória (como seria mais natural), a razão da definição 33 é geométrica. Vamos considerar o desenho seguinte:



Na trajetória T consideramos, por exemplo, cinco pontos P_j , $j = 1, \dots, 5$ e os quatro segmentos S_i , $i = 1, \dots, 4$, pelos pontos acima.

Suponhamos, para simplificar as coisas, que o arco de T entre P_1 e P_2 seja parametrizado por uma curva $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $x(t) = t$. Ou seja, suponhamos que este arco seja gráfico de uma função $y(x)$.

O comprimento do segmento S_1 é $\|P_2 - P_1\| = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2}$. Aplicando o teorema do valor médio de Lagrange à função $y(t)$, temos que existe um valor c entre t_1 e t_2 tal que $y(t_2) - y(t_1) = (t_2 - t_1) \cdot y'(c)$. Portanto, $\|P_2 - P_1\| = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + ((t_2 - t_1) \cdot y'(c))^2} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 + y'(c)^2}$. Observe que $\sqrt{1 + y'(c)^2} = \|\phi'(c)\|$.

Agora introduzimos o fato seguinte: é intuitivo ver que o comprimento da trajetória (que ainda não foi definido) pode ser aproximado pela soma dos comprimentos dos segmentos nos quais é decomposta a trajetória. A palavra "aproximado" acima é um pouco confusa ou genérica; aquilo que acontece é o seguinte: se o número dos segmentos nos quais é dividida a trajetória aumenta e os comprimentos deles tendem a zero, a soma de todos os comprimentos tende a se estabilizar a um valor: este valor é o supremo de todas as somas finitas de todos os comprimentos dos segmentos nos quais é dividida a trajetória.

Com uma linguagem ligada "aos infinitesimos", poderíamos dizer que o comprimento de T é a soma dos infinitos comprimentos dos segmentos de comprimento infinitesimo nos quais é decomposta a trajetória. No caso do S_1 acima, se P_2 se aproxima cada vez mais a P_1 , $t_2 - t_1$ tende a zero (ou a ser infinitesimo e ao valor dt), c tende a t_1 e $\sqrt{1 + y'(c)^2}$ tende a $\sqrt{1 + y'(t_1)^2}$ que coincide com $\|\phi'(t_1)\|$. O comprimento do segmento infinitesimo S_1 é portanto $\|\phi'(t_1)\| \cdot dt$. Repetindo o processo para todos os segmentos infinitesimos, a soma se torna um integral, aquele da definição 33.

Não podemos todavia esconder uma dificuldade em manipular os conceitos acima. A soma infinita de valores infinitesimos parece uma coisa não tão clara. E, apesar de tudo, a teoria dos limites que funda a nossa análise optou para eliminar os infinitesimos.

A ideia acima se torna compatível com o conceito de limite com o fato seguinte. Chamamos *poligonal* uma trajetória feita de segmentos cujos extremos se apoiam em T (como no desenho). O comprimento $l(P)$ de uma poligonal P é um conceito fácil a ser definido: é a soma dos comprimentos de todos os segmentos que formam a poligonal. Agora chamamos $\mathcal{P}$ a família de todas as poligonais de T . Se prova (não vamos fazer aqui, porque difícil) que

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} l(P) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt,$$

não esquecendo que ϕ deve ser uma parametrização injetora. Esta é a justificativa da fórmula da definição 33.

Exercício 131. Calcule o comprimento das curvas seguintes:

$$(t - \sin t, 1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(e^t - 1, e^{2t} + 1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(\arccos t, \log t) \quad 1/2 \leq t \leq 1$$

$$(\sin t - t \cos t, t \sin t + \cos t) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(\sin t - t \cos t, t \sin t + \cos t + t^2/2) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(\cos^2 t, \cos t \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(\arcsen t, \log(1+t)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\left(\frac{\cos 2t}{4}, \cos^3 t, \sin^3 t\right) \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$

$$(t^2 + 10t, 4t^2 + 5t) \quad -1 \leq t \leq 1$$

Observação 38. Como dito acima, a definição 33 fala de comprimento de uma curva e não de uma trajetória. Contudo, vamos ver como este segundo conceito pode ser definido. Se voltamos ao exercício 130, podemos comentar que o comprimento da curva γ não parece representar uma possível definição de comprimento de C , não sendo injetora e "percorrendo duas vezes" a trajetória. As parametrizações ϕ e ψ são injetoras, com a exceção dos extremos, coisa que não é importante porque é irrelevante na integração. Podemos definir comprimento de uma trajetória como comprimento de uma qualquer parametrização injetora? A resposta pode ser afirmativa, posto que sejamos capazes de provar que todas as parametrizações injetoras têm o mesmo comprimento. Este fato é provado no próximo teorema 43. Antes disso precisamos de alguns conceitos e de um lema.

Definição 39 (curva regular). Uma curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo, é chamada *regular* se é C^1 e o vetor tangente é sempre diferente de zero para todo $t \in I$.

A curva $\phi(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, não é regular, não sendo derivável em $t = 0$. É todavia *regular por partes* no sentido de que o domínio pode ser decomposto em um número finito de subintervalos $I_1, \dots, I_n$ nos quais ϕ é regular. Em particular, pegamos $I_1 = (-\infty, 0]$ e $I_2 = [0, +\infty)$. Assim, $\phi(t) = (t, -t)$ se $t \in I_1$ é regular e $\phi(t) = (t, t)$ se $t \in I_2$ também é regular.

A curva $\phi(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é C^1 , mas não é regular porque $\phi'(0) = (0, 0)$. Pode se provar (não entramos em detalhes aqui) que nenhuma parametrização da trajetória $x^3 = y^2$ é regular (no ponto t que parametriza a origem).

Definição 40 (curva simples). Uma curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo, é chamada *simples* se $\phi(t) \neq \phi(s)$ para todo $s, t \in I$ com a única possível exceção dos extremos de I (se pertencem a I) que podem ter a mesma imagem.

De fato queremos classificar as curvas injetoras, pela definição acima. Porém, quando uma curva é fechada não temos como evitar que a imagem dos extremos seja a mesma. Esta exceção não atrapalha as aplicações e é admitida.

É imediato ver que as duas primeiras curvas do exercício 130 são simples enquanto γ não é. As curvas do exercício 105 não são simples, como é fácil observar.

Definição 41 (curvas equivalentes). Duas curvas C^1 , $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I e J são intervalos, são ditas *equivalentes* se existe uma função $p : I \rightarrow J$, C^1 , bijetora e com inversa C^1 tal que

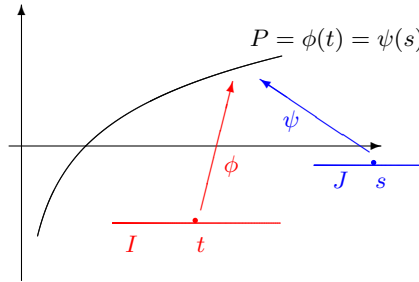
$$\phi(t) = \psi(p(t)) \quad \forall t \in I.$$

Lema 42. Sejam $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas regulares, simples e que têm a mesma trajetória T . Então, são equivalentes.

Para enunciar as coisas mais corretamente, precisa dizer que se $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ e as duas curvas são fechadas, precisa impor a condição que $\phi(a) = \phi(b) = \psi(c) = \psi(d)$. Do contrário não temos a função p bijetora.

Exercício 132. O leitor verifique este fato com duas parametrizações fechadas da circunferência que começam e acabam em pontos diferentes.

Demonstração do lema. Vamos dar a demonstração no caso particular em que ϕ e ψ são globalmente injetoras. Vamos construir p como na definição 41. Dado $t \in I$, consideramos o ponto $P = \phi(t)$. Sendo T a trajetória comum às duas curvas, P se torna imagem de pelo menos um elemento $s \in J$ pela função ψ . Sendo ψ injetora, tal s é na verdade único. Assim definimos $p(t) = s$.



Esta função p se torna bem definida pela injetividade de ψ , e injetora sendo ϕ injetora. Como a trajetória é comum, p é sobrejetora e enfim globalmente inversível. Temos $\phi(t) = \psi(p(t))$, para todo $t \in I$, em particular a igualdade vale para as componentes das duas curvas:

$$\phi_i(t) = \psi_i(p(t))$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Vamos agora provar que p é C^1 . Consideramos $\bar{t} \in I$ e denotamos $\bar{s} = p(\bar{t})$. Sendo por hipótese ψ regular, o vetor tangente $\psi'(\bar{s})$ é não nulo. Ou seja, pelo menos uma das componentes

dele é diferente de zero. Suponhamos sem perder em generalidade que seja a primeira. Supondo portanto $\psi'_1(\bar{s}) \neq 0$, pelo fato de que ψ é C^1 e ψ'_1 é contínua, $\psi'_1(s) \neq 0$ para todo s em oportuno intervalo $(\bar{s} - \delta, \bar{s} + \delta) \subseteq J$ (eventualmente este intervalo deve ser um pouco adaptado no caso particular em que $\bar{s}$ seja um extremo de J). Portanto ψ se torna estritamente crescente ou decrescente, dependendo do sinal de $\psi'_1(s)$ em $(\bar{s} - \delta, \bar{s} + \delta)$ e inversível. Assim podemos escrever

$$p(t) = \psi_1^{-1}(\phi_1(t))$$

para todo $t \in (\bar{t} - \sigma_1, \bar{t} + \sigma_2)$, onde $p(\bar{t} - \sigma_1) = \bar{s} - \delta$ e $p(\bar{t} + \sigma_2) = \bar{s} + \delta$. A consequência é que $p(t)$ se torna composição de duas funções C^1 e portanto é C^1 , no intervalo $(\bar{t} - \sigma_1, \bar{t} + \sigma_2) \cap I$. Pela arbitrariedade de $\bar{t}$, p é C^1 em tudo I . A propriedade de ser C^1 da inversa p^{-1} é análoga, escrevendo oportunamente a composição necessária, e é deixada como exercício. $\square$

Exercício 133. O leitor refaça de novo a demonstração cuidando de todos os detalhes.

Exercício 134. Uma vez que é definida p tal que $\phi(t) = \psi(p(t))$, porque, na demonstração acima, não podemos trabalhar fazendo diretamente a inversão com $\phi(t) = \psi(p(t))$, mas precisamos trabalhar com uma componente $\phi_i(t) = \psi_i(p(t))$?

Agora podemos finalmente enunciar o teorema que permitirá dar a definição de comprimento de uma trajetória.

Teorema 43. *Seja T uma trajetória. Sejam $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas parametrizações regulares e simples de T . Então,*

$$l(\phi) = l(\psi).$$

Demonstração. Para simplificar a demonstração, suponhamos que ϕ e ψ sejam globalmente injetoras e suponhamos $\phi(a) = \psi(c)$ e $\phi(b) = \psi(d)$. Esta última hipótese diz que as duas parametrizações percorrem T "no mesmo sentido". Consideramos o comprimento de ψ ,

$$l(\psi) = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds.$$

Pelo lema anterior, ϕ e ψ são equivalentes e chamamos $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $\phi(t) = \psi(p(t))$, $t \in [a, b]$. Pelas igualdades acima sobre os extremos, temos que p é estritamente crescente, ou seja $p'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$.

(**Exercício 135.** Verifique com cuidado este fato.)

Abordando a integral indefinida acima, consideramos $G(s) = \int \|\psi'(s)\| ds$. Trocamos a variável, colocando $s = p(t)$ e tendo $ds = p'(t)dt$. Pela regra da substituição na integração indefinida temos

$$\int \|\psi'(s)\| ds = \int \|\psi'(p(t))\| p'(t) dt,$$

onde as duas integrais devem ser igualdadas pelo fato de ter $s = p(t)$, senão a fórmula acima seria sem sentido, sendo uma função em uma variável e a outra integral numa outra variável. Sendo $p'(t) > 0$ para todo t , há $\|\psi'(p(t))\| p'(t) = \|\psi'(p(t))p'(t)\|$, e portanto

$$\int \|\psi'(s)\| ds = \int \|\psi'(p(t))p'(t)\| dt,$$

Agora observe que, se definimos $F(t) = G(p(t))$, aplicando a regra da cadeia para as derivadas de cálculo 1, temos

$$F'(t) = G'(p(t))p'(t) = \|\psi'(p(t))p'(t)\|,$$

a segunda igualdade sendo de fato a definição de G como primitiva de $\|\psi'(s)\|$. Sempre aplicando a regra da cadeia, há

$$\|\phi'(t)\| = \|\psi'(p(t))p'(t)\|,$$

pelo simples fato de que $\phi(t) = \psi(p(t))$ para todo $t \in [a, b]$. Juntando as várias igualdades acima, chegamos à conclusão de que $F'(t) = \|\phi'(t)\|$.

Aplicando o teorema fundamental do cálculo integral, obtemos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt \quad \text{e} \quad G(d) - G(c) = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds.$$

Pela definição de F e lembrando que $p(a) = c$ e $p(b) = d$, temos

$$F(b) - F(a) = G(d) - G(c), \quad \text{ou seja,} \quad \int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds.$$

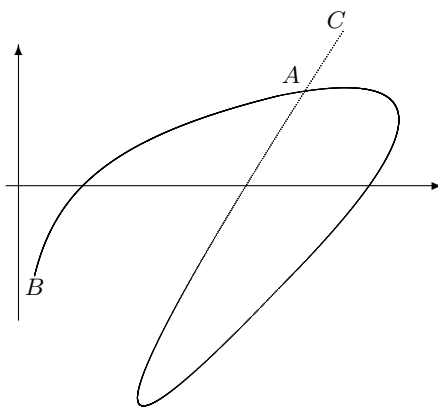
Portanto, os comprimentos de ϕ e ψ coincidem e a demonstração é completa. $\square$

Exercício 136. Refaça a demonstração provando com atenção todos os passos.

Exercício 137. Dê a prova no caso em que $p(a) = d$ e $p(b) = c$.

Observação 44. Se a trajetória é fechada, as parametrizações não podem ser globalmente injetoras, mas sim simples. Nestes casos a demonstração é muito parecida. Precisa somente tomar cuidado com o comportamento nos extremos. Deixamos os detalhes do lado.

Agora podemos dar a definição do conceito mais intuitivo de comprimento de trajetória. Seja T uma trajetória que possui pelo menos uma parametrização regular e simples. O *comprimento* de T é definido como o comprimento de uma *qualquer* parametrização regular e simples de ϕ . Se a trajetória for regular por partes podemos dividir ela em partes, calcular o comprimento de cada uma e somar os resultados. A mesma coisa se a trajetória não for simples.



Na trajetória do desenho acima, podemos parametrizar três partes dela: a trajetória fechada por A , o arco AB e o arco AC . Na verdade, se uma parametrização da trajetória acima tem somente dois valores do parâmetro t com imagem A , uma única integral seria suficiente, mesmo não sendo simples a parametrização. A perda de injetividade, se dando somente em um número finito de pontos, não altera a integração.

Exercício 138. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, escritas em coordenadas polares:

- a) $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (cardióide);

b) $\rho = a\theta$, $a > 0$ fixado, $0 \leq \theta \leq \pi/6$ (espiral de Arquimedes);

c) $\rho = a \sin^5 \theta$, $a > 0$ fixado, $0 \leq \theta \leq 5\pi/6$.

Exercício 139. Escreva a parametrização de uma hélice cilíndrica, em um intervalo limitado, e calcule o comprimento.

Exercício 140. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, que são gráficos de funções:

a) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $1 \leq x \leq 2$;

b) $y = e^x$, $1 \leq x \leq 2$;

c) $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq a$.

Exercício 141. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, expressas como gráficos de funções:

$y = \log \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/3$

$y = \log x$, $3/4 \leq x \leq 4/3$

$y = (e^x + e^{-x})/2$, $a \leq x \leq b$ (catenária)

$y = 2 - 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$

$y = \sqrt{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$

$y = x + e^x$, $0 \leq x \leq \log 2$

Exercício 142. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, expressas em coordenadas polares:

$\rho = \sin \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$

$\rho = \theta^2$ $0 \leq \theta \leq 3/2$ (espiral quadrática)

$\rho = \theta^3$ $0 \leq \theta \leq 4$ (espiral cúbica)

$\rho = e^\theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$

18. Sexta-feira, 18 de setembro de 2015,

19. Segunda-feira, 21 de setembro de 2015 e

20. Quarta-feira, 23 de setembro de 2015

Introdução ao estudo das funções reais de várias variáveis reais

Vamos primeiramente resumir alguns conceitos básicos de topologia dos espaços euclidianos.

Definição 45. Sejam dados um ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e um número $r > 0$. A *bola* (aberta) de centro $\bar{x}$ e raio r , denotada por $B(\bar{x}, r)$, é definida como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\|x - \bar{x}\| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2} < r.$$

Se trata do conjunto de todos os pontos cuja distância de $\bar{x}$ é estritamente menor de r .

Definição 46. Seja agora um conjunto A contido em $\mathbb{R}^n$. A é dito *aberto* se para todo ponto $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.

Exercício 143. Prove que uma bola aberta $B(\bar{x}, r)$ é de fato um conjunto aberto. Para provar isso, se trata de aplicar a definição acima. Ou seja, considere um ponto $y \in B(\bar{x}, r)$ qualquer. É claro que $\|\bar{x} - y\| < r$. Se agora pegar um número a que seja menor de $r - \|\bar{x} - y\|$, se trata de prova que a bola $B(y, a)$ está contida em $B(\bar{x}, r)$. Desenvolva este exercício com todos os detalhes.

Exercício 144. Verifique que o semiplano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 145. Prove que o conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$. Para fazer o exercício, se trata de verificar que a definição de aberto não é respeitada. Como esta definição requer uma propriedade a ser verificada *para todos os pontos do conjunto*, se deve encontrar *pelo menos um ponto do conjunto* que não a verifica.

Dado um conjunto E contido em $\mathbb{R}^n$, o *complementar* de E em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem a E . O complementar pode ser denotado por E^C ou $\mathbb{R}^n \setminus E$. Neste sentido, há que $E \cap E^C = \emptyset$ e $E \cup E^C = \mathbb{R}^n$.

Definição 47. Um subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ é dito *fechado* se E^C é aberto.

Exercício 146. Sejam $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$ fixados. Prove que $D = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \bar{x}\| \leq a\}$ é fechado. Este conjunto é a união da bola aberta $B(\bar{x}, a)$ com a sua "borda" (observe que usamos o termo "borda" mesmo não sendo definido com precisão).

Exercício 147. Prove que um conjunto C feito de um número finito de pontos é fechado.

Observação 48. O leitor não confunda o conceito de conjunto infinito com aquele de conjunto ilimitado. Um *conjunto finito* é constituído por um número finito de pontos; enquanto um conjunto é dito *limitado* se pode ser incluído dentro de uma bola de raio finito.

Exercício 148. Prove que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2\}$ é fechado.

Exercício 149. Prove que uma circunferência é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$

Exercício 150. Prove que uma reta é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$

Existem conjuntos que não são abertos nem fechados. Veja o exercício seguinte.

Exercício 151. Prove que os conjuntos seguintes não são abertos nem fechados.

- (1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, \text{ e } 0 < x < 1\}$
- (2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$
- (3) $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

Definição 49. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dado. O ponto $\bar{x}$ é dito *ponto de acumulação* de E se cada bola $B(\bar{x}, r)$ contém infinitos pontos de E .

Em um certo sentido, um ponto é de acumulação para um conjunto E se, usando uma linguagem um pouco aproximada, "infinitos pontos de E tendem para $\bar{x}$ ". Observe $\bar{x}$ pode pertencer ou não a E .

Exercício 152. Determine os pontos de acumulação dos conjuntos dos exercícios anteriores.

Exercício 153. Determine os pontos de acumulação de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Q}$.

Definição 50. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dado. O ponto $\bar{x}$ é dito *ponto de fronteira* de E se cada bola $B(\bar{x}, r)$ contém pontos de E e pontos de E^C . A *fronteira* de E (ou *borda*) é o conjunto dos pontos de fronteira de E .

Exercício 154. Determine os pontos de fronteira dos conjuntos dos exercícios anteriores.

Exercício 155. Encontre um conjunto de $\mathbb{R}$ que não tem pontos de acumulação.

Exercício 156. Encontre um conjunto de $\mathbb{R}$ que não tem pontos de fronteira.

Exercício 157. Considere o quadrado em $\mathbb{R}^2$ $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Determine os pontos de fronteira e de acumulação de Q . Faça o mesmo com Q privado da diagonal.

Exercício 158. Prove que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se contém todos os pontos de acumulação dele.

Exercício 159. Dado um subconjunto E de $\mathbb{R}^m$, prove que, se $p \in E$ não é de acumulação, então é de fronteira.

* * *

Exercício 160. Desenhe a interseção com os planos coordenados ($x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$) dos planos de equação seguinte:

$$x + 3y - 4z + 2 = 0, \quad 2x - 3z + y = 1, \quad x = 4$$

Exercício 161. Escreva a equação paramétrica da reta obtida como interseção dos planos seguintes:

$$x + y + z + 2 = 0 \text{ e } z - y = 4, \quad 2y = 3z - 2x, \text{ e } z - x + 2y = 5.$$

Tente desenhar as retas acima.

Exercício 162. Desenhe as superfícies descritas pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 & z &= x^2 - y^2 & x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0 & x^2 + y^2 - z^2 &= 1 & x^2 + y^2 - z^2 &= -1 \end{aligned}$$

Exercício 163. Determine o domínio e a imagem das funções seguintes. Diga se são limitadas. Desenhe o domínio e os conjuntos onde as funções são positivas e negativas. Diga se são injetoras.

$$f(x, y) = x^2 - y^3 \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(x + y)} \quad f(x, y) = \log(xy)$$

$$f(x, y, z) = \log(1 - x^2 - y^2 - z^2) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^4 - 2} \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + 2y^2}$$

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{|\cos t|}{t(t+1)} dt \quad (*) \quad f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad f(x, y) = \log(2 \sin(x^2 + y^2))$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad f(x, y) = \frac{x \log(1 + x^2 - y)}{y} \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{2x - y + 2}$$

(*) Considere a existência da função só na teoria integral de Riemann e desconsidere as integrais impróprias.

Exercício 164. Escreva algumas das funções acima como $f(x, y) = g(h(x, y))$, determinando h , função de 2 (ou 3) variáveis e g função de uma variável.

21. Sexta-feira, 25 de setembro de 2015

Definição 51. Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de D . Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é *limite* de $f(x)$ para x que tende a $\bar{x}$, em símbolos,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D$ e verifica $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Analogamente dizemos que $+\infty$ é *limite* de $f(x)$ para x que tende a $\bar{x}$, em símbolos,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty,$$

se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D$ e verifica $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$, então $f(x) > M$.

A definição é praticamente a mesma do caso das funções de uma variável. Observe que, se $\bar{x}$ não for ponto de acumulação de D , não faz sentido imaginar pontos de D que tendem a $\bar{x}$. Neste caso não se estuda o limite. Cabe destacar que, na definição, $\bar{x}$ não necessariamente pertence a D . Aquilo que interessa é o comportamento de $f(x)$ nos pontos que se aproximam a $\bar{x}$ e ver se eles têm um "comportamento em um certo sentido comum"; mas não interessa o valor de f em $\bar{x}$. Valor que pode nem ser dado, coisa que há se $\bar{x} \notin D$.

O leitor deve lembrar por exemplo o exemplo de cálculo 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A função $\sin x/x$ não é definida em zero.

Uma função pode ser definida no ponto $\bar{x}$, mas ser diferente do "comportamento comum" de $f(x)$ quando $x \rightarrow \bar{x}$. Por exemplo, podemos considerar, sempre no caso de uma variável,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Aplicando a definição de limite temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

que não coincide com o valor de $f(0)$. Podemos dizer que f não é contínua em zero; mas essa é outra questão.

O fato de que o valor da função no ponto $\bar{x}$, na definição 51, assim como nos dois exemplos acima, não seja levado em conta está colocado naquela condição " $0 < \|x - \bar{x}\|$ " da definição. Essa significa que não estamos interessados em avaliar f em $\bar{x}$, esteja este ponto no domínio ou não.

Exercício 165. (feito em sala de aula) Prove, aplicando a definição, que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Exercício 166. Dê a definição de limite $-\infty$.

Exercício 167. Prove, usando a definição de limite, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$.

Muitos dos teoremas sobre os limites de cálculo 1 continuam valendo no caso de funções de várias variáveis. Vamos dar aqui sem demonstração somente alguns dos resultados que poderiam ser provados.

Teorema 52 (Álgebra dos limites - formas finitas). *Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de E ; sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções dadas e sejam dados os limites*

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Então,

- (1) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x)) = l + m$ (soma);
- (2) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$ (produto);
- (3) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x)/g(x)) = l/m$, se $m \neq 0$ (quociente).

Não vamos analisar os casos onde os limites acima são $\pm\infty$ ou o caso do denominador nulo.

Os teoremas do confronto dos limites de cálculo 1 se transportam para funções de várias variáveis com uma simples adaptação de linguagem. Vamos dar os enunciados seguintes sem demonstração. O leitor pode, se quiser, dar a prova. Essa é análoga aos casos de cálculo 1.

Teorema 53 (do confronto dos limites). *Primeiro resultado. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de E . Seja $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas. Suponhamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para cada x . Seja dados os limites*

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = l, \quad \text{onde } l \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = l.$$

Segundo resultado. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de E . Seja $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para cada x . Suponhamos que existam os limites

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = m.$$

Então, $m \geq l$.

Terceiro resultado. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de E . Seja $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para cada x . Seja dado o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = +\infty.$$

Exercício 168. Prove o primeiro e o segundo resultado.

Exercício 169. Prove este terceiro resultado. Em seguida, dê o enunciado no outro caso possível (limite igual a $-\infty$).

Também a definição de função contínua é análoga ao caso das funções de uma variável.

Definição 54 (função contínua). *Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x} \in E$ um ponto dado. Dizemos que f é contínua em $\bar{x}$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ para todo $x \in B(\bar{x}, \delta) \cap E$. A f é dita contínua se é contínua em todos os pontos do domínio.*

A definição de função contínua é ligada ao conceito de limite, como sabemos. Veja-se o exercício seguinte

Exercício 170. Seja $\bar{x}$ ponto de acumulação de E (continuando ser ponto de E). prove que f é contínua em $\bar{x}$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$.

Exercício 171. A definição de função contínua dada em termos de limites, como no exercício acima, é muito familiar. Todavia se $\bar{x}$ pertence a E , mas não é de acumulação, não podemos falar de limite. Neste caso, o leitor pode verificar que f é de fato contínua. Prove por exemplo que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é contínua em todos os pontos do domínio.

O teorema seguinte é o análogo para este curso de um resultado clássico das funções de uma variável. Vamos enunciar sem demonstração.

Proposição 55 (Álgebra das funções contínuas). *Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em um ponto $\bar{x} \in E$. Então:*

- (1) $f + g$ é contínua em $\bar{x}$;
- (2) $f \cdot g$ é contínua em $\bar{x}$;
- (3) f/g é contínua em $\bar{x}$ (posto que $g(\bar{x})$ seja $\neq 0$).

Proposição 56 (Continuidade das funções compostas). *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\bar{x} \in A$. Seja $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva contínua cuja imagem é contida em A . Seja $\bar{t} \in I$ tal que $\phi(\bar{t}) = \bar{x}$. Então, a composição $f \circ \phi$ é contínua em $\bar{t}$.*

Um problema no caso de funções de várias variáveis é aquele de determinar quando uma função é contínua. Vamos enunciar o teorema seguinte, um pouco genérico e impreciso, mas intuitivamente claro e de grande praticidade.

Teorema 57. *Todas as funções de várias variáveis obtidas como soma, produto, diferença, quociente, composição de potências, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas são contínuas nos domínios delas.*

A ideia é aquela de utilizar as duas proposições acima junta com uma outra observação: vamos pegar uma função de uma variável, que supomos ser contínua. Por exemplo $f(x) = e^x$. Seja agora $g(x, y) = e^x$. As duas funções não são iguais sendo diferente o domínio. Podemos provar usando a definição que g é contínua usando a continuidade de f . Em outras palavras, se uma função de várias variáveis $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ depende de fato de uma variável somente, e como função de cálculo 1 é contínua, então é contínua como função de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Assim, pegamos por exemplo $f(x, y) = e^{x+y}$. Essa pode ser escrita como $f(x, y) = l(x, y) \cdot m(x, y)$, onde $l(x, y) = e^x$ e $m(x, y) = e^y$. As duas funções l e m são contínuas porque as correspondentes funções de uma variável são contínuas. Assim f se torna função de uma variável.

Exercício 172. Escolha outros exemplos de funções de duas ou três variáveis e aplique o argumento acima para provar que são contínuas.

Exercício 173. Prove o enunciado anterior: se $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ depende de fato de uma variável somente, e como função de cálculo 1 é contínua, então é contínua como função de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Em algumas das formas indeterminadas (por exemplo quase todas aquelas dos próximos exercícios) quando queremos provar que o limite $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ não existe (se, claramente, esta suposição for correta), uma técnica pode ser a seguinte: determinar uma curva contínua $\phi(t)$ que passa por $\bar{x}$ é provar que o limite de f ao longo desta curva não existe; ou determinar, se for possível, duas curvas $\psi(t)$ e $\gamma(t)$, que

passam por $\bar{x}$ tais que f tem dois limites diferentes ao longo das duas curvas. Este argumento é baseado no resultado seguinte

Proposição 58. *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Seja $\bar{x}$ ponto de acumulação de D . Suponhamos que exista o limite*

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad (\text{onde } l \in \mathbb{R} \text{ ou } l = \pm\infty)$$

e que $f(\bar{x}) = l$ se l é real.⁴ Seja I intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva contínua tal que $\phi(\bar{t}) = \bar{x}$, para $\bar{t} \in I$ oportuno. Considere o subintervalo J de I dos parâmetros t tais que $\phi(t) \in D$ e suponhamos que $\bar{t}$ seja ponto de acumulação de J . Então,

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} f(\phi(t)) = l.$$

Exercício 174. Analise as hipóteses da proposição acima e explique porque a existência do intervalo J é importante.

Demonstração. Vamos dar a prova no caso em que $l \in \mathbb{R}$. Os casos $l = \pm\infty$ são análogos e precisam somente de um pequeno reajuste (que é deixado ao leitor como exercício).

Chamamos $g(t) = f(\phi(t))$, definida em J com imagem real. Se trata de uma função de cálculo 1. Queremos provar, aplicando a definição de limite, que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|g(t) - l| < \varepsilon$ se $t \in J$ e $0 < |t - \bar{t}| < \delta$. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Pela existência do limite $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$, existe $\delta' > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ se $x \in D$ e verifica $\|x - \bar{x}\| < \delta'$. Aplicando a hipótese de continuidade de ϕ em $\bar{t}$, temos que existe δ (em dependência de δ') tal que $\|\phi(t) - \bar{x}\| < \delta'$ se $t \in J$ e $|t - \bar{t}| < \delta$. Juntando os dois argumentos acima, se $t \in J$ e verifica $0 < |t - \bar{t}| < \delta$, então $|g(t) - l| < \varepsilon$. Aquilo que queríamos provar. Pela arbitrariedade de ε a prova é completa. $\square$

Exercício 175. O leitor estude a demonstração acima, refaça todos os passos e tente entender e explicar os detalhes.

Exercício 176. Calcule (se existem) os limites seguintes:

$$\begin{array}{lll} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^4 + y^2} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{y} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} & \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin(\pi x)}{(x-2) + (y-1)^2} & \end{array}$$

Exercício 177. Diga se é contínua na origem a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

⁴Coloquei esta correção posteriormente. O teorema é falso sem a continuidade de f . O leitor pode procurar contraexemplos.

Exercício 178. Calculem, se existem,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

Exercício 179. Prove que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$.

Exercício 180. Prove que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x - y^2}$.

Exercício 181. Prove que a função seguinte não é contínua na origem.

$$f(x, y) = \begin{cases} x e^{x/y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

22. Segunda-feira, 28 de setembro de 2015 e

23. Quarta-feira, 30 de setembro de 2015

Introdução ao cálculo diferencial para funções reais (ou seja, com imagem real) de várias variáveis reais.

Diversamente dos conceitos de limites e de continuidade, para os quais a dimensão do domínio não produz diferenças substanciais, a derivação é bastante influenciada pelo fato do domínio ter dimensão estritamente maior de 1. As noções de derivada que iremos introduzir são a de derivada direcional (que tem a derivada parcial como caso particular) e a de diferencial, conceito mais profundo e que mais reflete as propriedades importantes da derivada de cálculo 1.

Começamos pela definição de derivada direcional.

Definição 59 (derivada direcional). Consideramos um vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e suponhamos $\|v\| = 1$. O versor v será chamado *direção*. Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Seja $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$ um ponto fixado. Consideramos a reta r por $\bar{x}$, na direção de v , e a parametrização de r , $\phi(t) = \bar{x} + tv = (\bar{x}_1 + tv_1, \dots, \bar{x}_n + tv_n)$. Suponhamos que exista $\delta > 0$ tal que $\phi(t)$ pertença a D para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Consideramos a função $g(t) = f(\phi(t))$ definida (pelo menos) em $(-\delta, \delta)$.

Dizemos que f possui *derivada direcional* em $\bar{x}$ na direção v se g é derivável (no sentido do cálculo 1) em 0. Dizemos, neste caso, que a derivada direcional de f em $\bar{x}$ na direção v é definida como $g'(0)$. Em símbolos,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = g'(0).$$

Observação 60. Observe que a hipótese sobre a existência do δ na definição acima significa que queremos que todo um segmento de r que inclui $\bar{x}$ seja contido em D (sendo $\phi(0) = \bar{x}$). Isso serve para definir g e poder falar em $g'(0)$ (definida em cálculo 1, sabemos, como limite da razão incremental).

Exercício 182. Escreva de novo a definição de derivada direcional de uma função f ao longo de um vetor unitário v em um ponto interior P do domínio. Tente fazer um desenho representando o domínio de f , P , v e a reta r .

Exercício 183. Considere as funções $x \log(xy^2)$, $\cos(xy) + \sin(x+y)$, xe^y . Considere os vetores unitários $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e os pontos $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(-1, -4)$.

Calcule as derivadas das funções dadas ao longo dos vetores dados e nos pontos dados.

Definição 61 (derivada parcial). Consideramos todas as condições da definição 59. Suponhamos que v seja uma das *direções principais* de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $v = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Ou seja, v tem todas as coordenadas zero, exceto em uma posição j entre 1 e n . Podemos ver como sejam n as direções principais de $\mathbb{R}^n$ (desconsiderando o caso dos coeficientes -1 , que igualmente dariam versores). A j -ésima direção principal é denotada também por e_j . Em $\mathbb{R}^3$ as três direções principais são frequentemente denotadas por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, (em particular nos livros de física).

A derivada direcional de f em $\bar{x}$ ao longo de uma direção principal e_j é chamada *derivada parcial* e é denotada pelo símbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$$

Exercício 184. Considere a função $xyz - \sin xz + ye^{x^2y}$. Calcule as derivadas ao longo das direções dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na origem de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 185. Considere a função $\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$. Seja $w = (1, -1, 1)$. Calcule o vetor unitário v na mesma direção e sentido de w . Em seguida, calcule a derivada direcional da função ao longo de v no ponto $(1, 1, -1)$.

Exercício 186. Calcule as derivadas e parciais de $f(x, y) = e^{xy}$, em um ponto genérico (x, y) . Em seguida, escolha algumas direções e calcule as derivadas direcionais ao longo das direções escolhidas em um ponto genérico (x, y) .

Exercício 187. Determine o domínio e calcule as derivadas parciais das funções seguintes

- a) $x \log(xy^2)$, b) $\cos(x/y) + \cos(y/x)$, c) $\sin(x+y) + xe^y$, d) $(x+y)e^{x-y}$, e) $\arctg(x/y)$
 f) $\log(x \log y)$, g) $2\sqrt{xy^3} - \sqrt{x\sqrt{y}}$, h) $e^{\sqrt{x} \sin y}$, i) $xyz - \sin xz + ye^{x^2z}$, l) $\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$.

Exercício 188. Prove que a função seguinte não é contínua na origem e que possui as derivadas em qualquer direção na origem.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercício 189. Observe, graças ao exercício anterior, que em duas variáveis é falso que se uma função admite derivada então é contínua (em cálculo 1 é verdadeiro)

Exercício 190. Considere a função $f(x, y) = |x| + |y|$. Sejam as direções $w = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$. Calcule as derivadas direcionais de f nos pontos $(2, 0)$ $(0, -3)$ ao longo dos vetores w e v . Todas estas derivadas existem? Analise o problema.

Exercício 191. Considere a função $g(x, y) = |x + y|$. Sejam as direções $w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $v = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Calcule as derivadas direcionais de g nos pontos $(2, 2)$ $(1, -1)$ ao longo dos vetores w e v . Todas estas derivadas existem? Analise o problema.

Exercício 192. Prove que a função seguinte (que não é contínua na origem, como visto num exercício anterior) possui as derivadas em qualquer direção na origem.

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{x/y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Definição 62 (gradiente). Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Seja $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$ um ponto fixado e suponhamos que existam as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})$ de f em $\bar{x}$. Então, definimos *gradiente* de f em $\bar{x}$ o vetor

$$\text{grad}f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right).$$

Exercício 193. Escreva o gradiente de algumas das funções dos exercícios anteriores em alguns pontos do domínio delas.

24. Sexta-feira, 2 de outubro de 2015

Aula de Diego A. Sandoval

O material seguinte foi preparado, redigido por Diego e revisado por mim.

Exercício 194. Considere a equação $4x^2 - y^2 - z^2 + 8x + 6y - 4z + 7 = 0$.

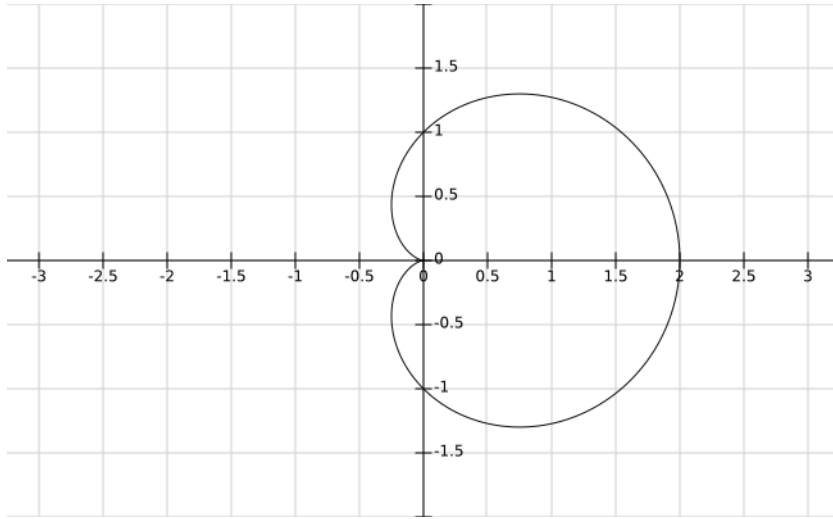
- a) Desenhe a superfície descrita pela equação acima. A operação seguinte visa destacar a presença de quadrados de binômios dentro da equação:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) - (z^2 + 4z + 4) &= -7 + 4 - 9 - 4 = -16 \\ -4(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 &= 16 \\ -\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{16} + \frac{(z + 2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Observemos que para qualquer valor de $x = a$ temos uma circunferência centrada no ponto $(3, -2)$ no plano $x = a$ paralelo ao plano yz . Se fixamos valores para y ou z nós temos hipérboles. Ou seja, a interseção da superfície com um plano $y = b$ ou $z = c$ é uma hipérbole.

A superfície em questão é chamada *hiperbolóide hiperbólico*.

Exercício 195. (Comprimento de curvas) Calcule o comprimento da cardióide de equação polar $\rho = 1 + \cos \theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$.



Consideremos a parametrização $\gamma(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta)$

$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= (-2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta, -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta) \\ &= (-(2 \cos \theta + 1) \sin \theta, -1 + (1 + 2 \cos \theta) \cos \theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + 2 \cos \theta)^2 + 1 - 2(1 + 2 \cos \theta) \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 4 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta\end{aligned}$$

Usando a identidade $\cos(2\theta) + 1 = 2 \cos^2 \theta$, obtemos

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta \\ &= 2 \left[\int_0^{\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta + \int_0^{\pi} |\cos(\theta/2 + \pi)| d\theta \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta + \int_0^{\pi} |-\cos(\theta/2)| d\theta \right] \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta \\ &= 8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi} \\ &= 8.\end{aligned}$$

Observação: Dada uma curva polar da forma $\rho(\theta)$ (onde ρ é uma função de θ) com $\alpha \leq \theta \leq \beta$, uma parametrização da curva é dada por

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Logo $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)$. Assim

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}$$

Portanto, o comprimento da curva é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

Exercício 196. Calcular o comprimento da curva polar (espiral de Arquimedes) $\rho = k\theta$, $k > 0$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Calculamos o comprimento usando a formula acima.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{k^2\theta^2 + k^2} d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \end{aligned}$$

Vamos agora usar a troca de variável para integração indefinida, $1/\cos \phi = \theta$, obtendo

$$\begin{aligned} &= k \int \sec \varphi \sec^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{k}{2} [\sec \varphi \tan \varphi + \ln |\sec \varphi + \tan \varphi|] \end{aligned}$$

Voltando à integral definida, temos

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi k \sqrt{1 + 4\pi^2} + k \ln \sqrt{2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}}. \end{aligned}$$

Exercício 197. Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ entre os pontos $(1, 1, 0)$ e $(e^2, e^{-2}, 2\sqrt{2})$.

$\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, então $\|\gamma'(t)\|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = 4 \cosh^2(t)$. Lembremos que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\begin{aligned} L(\gamma(t)) &= \int_0^2 2 \cosh(t) dt \\ &= 2 \sinh(t) \Big|_0^2 \\ &= 2 \sinh(2) \end{aligned}$$

O valor acima pode ser aproximado por 7.254.

Exercício 198. (Topologia) Sejam A, B dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Prove que, se A, B são abertos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ também serão abertos.

Se temos uma família $\{A_n\}$ de subconjuntos de abertos de $\mathbb{R}^2$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ serão abertos?

Seja $\bar{x} \in A \cup B$. Claramente, $\bar{x} \in A$ ou $\bar{x} \in B$. Se $\bar{x} \in A$, sendo A aberto, então existe $r_1 > 0$ tal que $B(\bar{x}, r_1) \subset A \subset A \cup B$. De maneira similar, se $\bar{x} \in B$, existe $r_2 > 0$ tal que $B(\bar{x}, r_2) \subset B \subset A \cup B$. Portanto $A \cup B$ é aberto.

Seja $\bar{x} \in A \cap B$. Há que $\bar{x} \in A$ e $\bar{x} \in B$. Então existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(\bar{x}, r_1) \subset A$ e $B(\bar{x}, r_2) \subset B$. Seja, logo $B(\bar{x}, r) \subset A \cap B$. Por tanto $A \cap B$ é aberto.

De maneira semelhante para a união de uma família é aberto. Más na interseção só é certo se a família é finita.

Por exemplo, $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ é aberto qualquer seja n , mas $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ é fechado.

Exercício 199. Determine se os seguintes conjuntos são abertos, fechados e os pontos de acumulação.

- $A = \{(x, y) : x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$. A é fechado, não é aberto. $A' = \emptyset$, $\partial A = A$ onde A' denota o conjunto dos pontos de acumulação de A e ∂A a fronteira.
- $B = \{(x, y) : x \text{ e } y \text{ racionais}\}$. B não é fechado, não é aberto. $B' = \mathbb{R}^2$, $\partial B = \mathbb{R}^2$.
- (**feito em sala de aula anteriormente**) $C = \{(1, \frac{1}{n}) : n \neq 0 \text{ natural}\}$. C não é fechado, não é aberto. $C' = \{(1, 0)\}$, $\partial C = (1, 0)$.
- $D = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$. D é aberto por ser a união de três conjuntos abertos, não é fechado. $D' = D \cup \partial D$ onde $\partial D = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$.
- $E = \{(x, y) : y = \sin(\frac{1}{x})\}$. E não é aberto, nem fechado. $E' = E \cup (0 \times [0, 1])$. (Use o teorema do valor intermédio) e considere os intervalos $I_n = [\frac{2}{(2n+3)\pi}, \frac{2}{(2n+1)\pi}]$ com $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 200.

Calcule os seguintes limites.

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{2x + y + xy + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5}$

Se $y = -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{2x + y + xy + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5} &= \lim_{y \rightarrow -2} \frac{0}{x^2 - 2y + 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow -2} \frac{0}{(x-1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{2x + y + xy + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5} &= \lim_{y \rightarrow -2} \frac{4 + 2y}{y^2 + 4y + 4} \\ &= \lim_{y \rightarrow -2} \frac{2(y+2)}{(y+2)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow -2} \frac{2}{y+2} \end{aligned}$$

Como o limite $\lim_{y \rightarrow -2^+} \frac{2}{y+2} = +\infty$ e $\lim_{y \rightarrow -2^-} \frac{2}{y+2} = -\infty$, então o limite acima não existe.

- b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
 Observe-se

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \leq 1 \\ -(x+y)^2 &\leq (x+y)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \leq (x+y)^2 \end{aligned}$$

Como $\pm(x+y)^2 \rightarrow 0$ quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Exercício 201. Considere o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (a) Determine a continuidade de f em $(0,0)$.

Pela conta anterior temos que f é contínua em $(0,0)$.

- (b) Determine as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

Usando a definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Existem as derivadas parciais.

- (d) Determine se existem as derivadas direcionais em $(0,0)$.

Seja um vetor diretor unitário $v = (a, b) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(a+b)^2 \cos\left(\frac{1}{t^2(a^2+b^2)}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Exemplo 202. Considere o campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine a continuidade de f em $(0, 0)$.

Como o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0$. Então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \frac{\text{sen } r}{r} = 0 = f(0, 0)$$

onde $r(x, y) = x^2 + y^2$. Portanto f é continua em $(0, 0)$.

(b) Determine as derivadas parciais de f em $(0, 0)$.

Usando a definição

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(h^2)}{|h|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h^2)}{h|h|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(h^2)}{|h|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h^2)}{h|h|}\end{aligned}$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(h^2)}{h|h|} = 1$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(h^2)}{h|h|} = -1$. Então as derivadas parciais não existem..

(d) Determine se existem as derivadas direcionais em $(0, 0)$.

Seja um vetor diretor unitário $v = (a, b) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(t^2(a^2+b^2))}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t|t|}\end{aligned}$$

Pelo o mesmo argumento em (b) temos que f não tem derivadas direcionais.

Exercício 203. Considere o campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^3}{\sqrt{x^4+y^6}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine a continuidade de f em $(0, 0)$.

Se consideramos as curvas $x = 0$, $y = 0$ e qualquer reta que passa pelo origem o limite da 1. Mas considere $y = x^{2/3}$ obtemos

$$f(x, x^{2/3}) = \frac{2x^2}{\sqrt{2x^4}} = \sqrt{2}.$$

Portanto o limite quando $x \rightarrow 0$ de $f(x, x^{2/3})$ é $\sqrt{2} \neq 1$. Logo f é descontínua em $(0, 0)$.

(b) Determine as derivadas parciais de f em $(0, 0)$.

Usando a definição

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^4}} - 1}{h} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{\sqrt{h^6}} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{|h^3|} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - |h^3|}{h|h^3|}\end{aligned}$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 - |h^3|}{h|h^3|} = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 - |h^3|}{h|h^3|} = +\infty$. Portanto, o limite anterior não existe.

(d) Determine se existem as derivadas direcionais em $(0, 0)$.

Seja um vetor diretor unitário $v = (a, b) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2(a^2 + tb^3)}{\sqrt{t^4(a^4 + t^2b^6)}} - 1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^2 + tb^3 - \sqrt{a^4 + t^2b^6}}{t \sqrt{a^4 + t^2b^6}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a^2 + tb^3)^2 - (a^4 + t^2b^6)}{t \sqrt{a^4 + t^2b^6} (a^2 + tb^3 + \sqrt{a^4 + t^2b^6})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2a^2b^3}{\sqrt{a^4 + t^2b^6} (a^2 + tb^3 + \sqrt{a^4 + t^2b^6})} \\
 &= \frac{b^3}{a^2}
 \end{aligned}$$

Exercício 204. Considere o função escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine se f em $(0, 0)$ é continua.

Se consideramos as curvas $x = 0$, $y = 0$ o limite da 0. Mas considere $y = x$ obtemos

$$f(x, x) = \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2}} = \sqrt{2} \frac{x^2}{|x|} = \sqrt{2}|x|.$$

Portanto o limite quando $x \rightarrow 0$ de $f(x, x)$ é 0. Logo podemos pensar que f é continua em $(0, 0)$.

(Temos que provar-ló!!!)

Como temos $x^2 \leq x^2 + y^2$. Então $0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$. Por tanto, $0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |y|$.

Por outro lado, como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$. Então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0.$$

Usando o fato que a função valor absoluto é continua, mostramos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

(b) Determine as derivadas parciais de f em $(0, 0)$.

Usando a definição

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{|h|} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{|h|} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto as derivadas parciais existem e são nulas.

(d) Determine se existem as derivadas direcionais em $(0,0)$.

Seja um vetor diretor unitário $v = (a,b) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 ab}{\sqrt{t^2(a^2+b^2)}}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{abt}{|t|}\end{aligned}$$

Não existe este limite, devido $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} = -1$. Portanto, não existem as derivadas direcionais excepto nas direções $(1,0)$ e $(0,1)$.

25. Segunda-feira, 5 de outubro de 2015

Além dos conceitos de derivada direcional (e parcial), para as funções de várias variáveis existe um outro conceito de derivação que estende o conceito de derivada de cálculo 1. Para introduzi-lo consideramos uma função de uma variável. Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $\bar{x} \in I$ fixado. consideramos as duas funções

$$T(x) = f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}), \quad \text{e} \quad S(x) = f(x) - f(\bar{x}) - m(x - \bar{x}),$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é fixado. De fato, $S(x)$ pode ser vista não simplesmente como uma função, mas como uma família de funções, variando m em $\mathbb{R}$. O gráfico de T é a reta tangente ao gráfico de f em $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, enquanto os gráficos das S representam, para cada m , as retas secantes ao gráfico de f em $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (todas as secantes exceto a secante vertical que não é gráfico de uma função de x e é escrita como $x = \bar{x}$). Se $m = f'(\bar{x})$ temos uma secante muito particular, ou seja, a tangente.

Lembramos que a reta que é gráfico de $T(x)$ é *definida como reta tangente ao gráfico de f no ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$* . Ou seja, na análise matemática *não existe uma noção anterior de reta tangente* (por exemplo uma noção geométrica).

$T(x)$ e $S(x)$ aproximam f em $\bar{x}$, onde "aproximar em $\bar{x}$ " significa que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - T(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) - S(x) = 0.$$

Exercício 205. Verifique os limites acima, sabendo que f é contínua em $\bar{x}$, sendo derivável.

A aproximação dada por T é "melhor" do que todas as aproximações dadas pelas $S(x)$, porque

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - T(x)}{x - \bar{x}} = 0 \quad \text{enquanto} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - S(x)}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) - m \neq 0, \quad \text{se } m \neq f'(\bar{x}).$$

Exercício 206. Verifique os limites acima.

Dizemos que $f(x) - T(x)$ (o resto, ou erro, da aproximação por T) tende a zero "mais rapidamente" do que $x - \bar{x}$, enquanto $f(x) - S(x)$ (o resto, ou erro, da aproximação por S) tende para zero "com a mesma velocidade" do que $x - \bar{x}$.

Lembramos agora algumas noções de álgebra linear: uma função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada *linear* (ou *operador linear*) se $L(x + y) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e se $L(ax) = aL(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $a \in \mathbb{R}$. Às funções lineares são sempre associadas matrizes. Se é dada $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a L é associada uma matriz $m \times n$ (m linhas e n colunas) e temos

$$Lx = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

No caso particular de operadores lineares com contradomínio de dimensão 1, ou seja do tipo $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o operador é associado a uma matriz linha e há

$$Lx = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Outro caso particular há se $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $Lx = ax$. O gráfico de L é a reta pela origem de $\mathbb{R}^2$ com coeficiente angular a .

Imaginamos agora a derivada como operador linear $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja $x \mapsto f'(\bar{x}) \cdot x$.

Exercício 207. Prove que função $x \mapsto f'(\bar{x}) \cdot x$ é uma função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Atenção a uma possível confusão: se consideramos por exemplo a função $f(x) = e^{x^2}$, a derivada dela não é uma função linear, sendo $f'(x) = 2xe^{x^2}$. Fixamos agora $\bar{x} = 3$ (por exemplo). Neste caso $f'(3) = 6e^9$ e devemos pensar este número como o valor a acima que define um operador linear. Isto é, $Lx = 6e^9x$. O gráfico de L é a reta pela origem que é paralela à reta tangente ao gráfico de f em $(3, e^9)$.

Voltando ao limite acima

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - T(x)}{x - \bar{x}} = 0,$$

podemos escrevê-lo com a troca de variável $x - \bar{x} = h$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh}{h} = 0,$$

e dar uma definição de derivabilidade para as funções de uma variável equivalente àquela conhecida: *f é dita derivável em $\bar{x}$ se existe um operador linear $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o limite acima seja verificado.*

Para as funções de várias variáveis, o novo conceito de derivação que introduzimos agora é a tradução em dimensão n do limite acima.

Definição 63 (função diferenciável). Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto fixado. Dizemos que f é *diferenciável* em $\bar{x}$ se existe um operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

O operador L é chamado *diferencial* de f em $\bar{x}$.

A primeira novidade que o conceito de função diferenciável introduz, a respeito da noção de derivada direcional, é sobre seu relacionamento com a continuidade.

Proposição 64. *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto fixado. Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$. Então, f é contínua naquele ponto.*

Demonstração. Pela definição acima existe um operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (que depende de $\bar{x}$) tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh}{\|h\|} = 0. \quad (8)$$

É intuitivo observar que $\lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh = 0$, mas vamos prová-lo em detalhes, usando a definição de limite. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Pelo limite da fórmula (8), sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh|}{\|h\|} < \varepsilon$$

para todo $h \neq 0$ tal que $\|h\| < \delta$. Reduzindo δ se for necessário, vamos supor que δ seja menor de 1. Portanto, se $\|h\| < \delta$, temos

$$|f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh| < \varepsilon.$$

Portanto, a definição de limite é aplicada para provar que $\lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh = 0$. É imediato ver que $\lim_{h \rightarrow 0} Lh = 0$, sendo Lh um polinômio de grau 1 nas variáveis $h_1, \dots, h_n$. Portanto, pela soma dos limites (teorema 52) há $\lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) = 0$, que de fato prova a continuidade de f em $\bar{x}$. $\square$

Exercício 208. Verifique que as funções dos exercícios 188 e 192 não são diferenciáveis na origem de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 209. Escreva de novo a prova e o enunciado da proposição acima.

Exercício 210. Escreva alguns exemplos de operadores lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ variando as dimensões dos dois espaços.

Os dois conceitos de derivada direcional (ou parcial) e de diferencial são distintos, como temos visto. Porém, têm algo em comum. Primeiramente, os dois são obtidos como limites de quocientes que são "do tipo razão incremental", coisa bastante natural porque estamos tentando estender o conceito de derivada de cálculo 1. O teorema seguinte apresenta uma outra conexão, muito mais forte.

Teorema 65. *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto fixado. Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$. Suponhamos que $\bar{x}$ seja um ponto interior de D , ou seja que exista uma bola com centro $\bar{x}$ contida em D . Então, f possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})$ em $\bar{x}$ e a matriz linha associada ao diferencial L de f em $\bar{x}$ é o gradiente $\nabla f(\bar{x})$, ou seja*

$$L \text{ é associado à matriz linha } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right).$$

Demonstração. Seja $(a_1 \quad \dots \quad a_n)$ a matriz linha associada ao diferencial L em $\bar{x}$. Vamos provar que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})$ existe e coincide com a_1 . A prova para as derivadas nas outras direções principais é análoga e é deixada como exercício ao leitor. Sendo f diferenciável em $\bar{x}$, chamando L o diferencial de f em $\bar{x}$ e $(a_1 \quad \dots \quad a_n)$ a matriz linha associada, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Lh}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n a_j h_j}{\|h\|} = 0.$$

O limite acima continua valendo, em particular, se h tende a zero ao longo do primeiro eixo principal. Neste caso temos que h é da forma $(h_1, 0, 0, \dots, 0)$ e o limite se torna

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}) - a_1 h_1}{|h_1|} = 0.$$

Observamos agora que

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0^+} \frac{a_1 h_1}{|h_1|} = a_1 \quad \text{e} \quad \lim_{h_1 \rightarrow 0^-} \frac{a_1 h_1}{|h_1|} = -a_1.$$

Isso implica imediatamente que

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x})}{|h_1|} = a_1 \quad \text{e} \quad \lim_{h_1 \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x})}{|h_1|} = -a_1.$$

Dai,

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x})}{h_1} = a_1.$$

O limite acima coincide de fato com a definição da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})$. E obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = a_1.$$

Analogamente, como já dito, podemos proceder nas outras direções e o teorema é provado. $\square$

Uma observação sobre a notação e a linguagem: uma vez que se toma confiança com o conceito de diferencial de uma função em um ponto, a tendência é considerar diferencial e gradiente como se fossem a mesma coisa. Na verdade, é sempre bom lembrar que o gradiente de uma função em um ponto é um *vetor*, enquanto o diferencial de uma função em um ponto é uma outra *função*. Não devemos esquecer, inclusive, que o gradiente pode existir, mas a função não ser diferenciável.

Exercício 211. Vimos alguns exemplos de funções que não são contínuas em um ponto $\bar{x}$ dado, e portanto não são diferenciáveis naquele ponto. Este fato não deve levar a pensar que toda função não diferenciável em um ponto deva ser descontínua no mesmo ponto. O leitor escreva alguns exemplos de funções *que são contínuas em um ponto dado, mas não são diferenciáveis neste ponto*. Pense, para abordar o exercício, àquilo que acontece em uma variável.

26. Quarta-feira, 7 de outubro de 2015

O resultado seguinte complementa o teorema 65.

Teorema 66. *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto fixado. Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$. Suponhamos que $\bar{x}$ seja um ponto interior de D (veja o teorema 65 sobre o ponto interior). Então, f possui derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ em $\bar{x}$ ao longo de qualquer direção $v = (v_1, \dots, v_n)$ e vale fórmula:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) v_j.$$

Demonstração. Consideramos a parametrização clássica (que não é a única, somente a mais simples) da reta que passa por $\bar{x}$ e é paralela a v , $\phi(t) = \bar{x} + tv$, $t \in \mathbb{R}$. Dizer que $\bar{x}$ interno a D implica dizer que existe a positivo tal que $\phi(t) = \bar{x} + tv \in D$ para todo $t \in (-a, a)$. Portanto, se $t \in (-a, a)$, fica em definida a composição $g(t) = f(\phi(t))$. Queremos provar que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}$$

existe, é finito e vale $\nabla f(\bar{x}) \cdot v$. Sabemos que f é diferenciável em $\bar{x}$, então temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Aplicando a proposição 58 sobre o limite de uma composição, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot tv}{\|tv\|} = 0.$$

Agora vamos aplicar um argumento parecido àquele usado para a prova do teorema 65. Temos, lembrando que v tem norma 1,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot tv}{\|tv\|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot tv}{t} = \nabla f(\bar{x}) \cdot v \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot tv}{\|tv\|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot tv}{-t} = -\nabla f(\bar{x}) \cdot v.$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{\|tv\|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{\|tv\|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{-t} = -\nabla f(\bar{x}) \cdot v.$$

Em conclusão,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \nabla f(\bar{x}) \cdot v.$$

O limite acima é de fato a derivada direcional procurada e conclue a prova do teorema. $\square$

Observação 67. Se a f não for diferenciável, o teorema não vale. Pegamos por exemplo a função do exercício 192. Dada uma direção $v = (a, b)$, com a e b não nulos, aplicando a definição de derivada direcional, há $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = ae^{a/b}$, enquanto a aplicação mecânica da fórmula do teorema acima daria $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v = 0$, sendo o gradiente nulo (verifique!). Como explicamos esta incongruência? É a fórmula do teorema acima que está errada. Melhor: tal fórmula não pode ser aqui aplicada porque f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 212. Prove que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em cada ponto do domínio.

Exercício 213. Escreva o gradiente em $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x \sin \frac{y}{x}$. Prove que f é diferenciável.

Exercício 214. Seja a função

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|^a e^{-x^2/y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Estude a continuidade, derivadas parciais e diferenciabilidade de f respeito ao parâmetro real a .

Exercício 215. Verdadeiro ou falso?

a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são definidas para todos (x, y) . f é diferenciável?

b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são definidas e contínuas para todos (x, y) . f é diferenciável?

Exercício 216. Calcule as derivadas parciais de $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

Exercício 217. Calcule a derivada direcional na direção $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ de $f(x, y) = x^2y - e^{x+y}$

Exercício 218. Calcule as derivadas parciais das funções seguintes:

$$x^3y^2 \quad x^2y \sin xy \quad \arctg(x/y) \quad x^y \quad x^2y^{-3} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \quad \log(x^2 + y^2) \quad \operatorname{tg}(x + y^2)$$

Exercício 219. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Resolva os problemas seguintes:

- (1) Prove que f é contínua na origem;
- (2) a continuidade acima que informação dá sobre a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$?
- (3) Prove que f admite derivada direcional em $(0, 0)$ ao longo de qualquer direção $v = (\cos \theta, \sin \theta)$. Compare este resultado com o produto escalar $\nabla f(0, 0) \cdot v$
- (4) o item acima o que diz sobre a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$?

27. Sexta-feira, 9 de outubro de 2015

Quais são as funções diferenciáveis? Até agora os poucos exemplos encontrados foram de funções não diferenciáveis. O teorema seguinte dá uma condição suficiente para determinar se uma função é diferenciável. A condição não é necessária, portanto pelo teorema seguinte não será possível determinar todas as funções diferenciáveis, mas somente uma parte (por outro lado significativa e ampla).

Teorema 68 (do diferencial). *Sejam D um domínio de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Suponhamos que as derivadas parciais sejam definidas em todos os pontos de D e sejam contínuas em um ponto $\bar{x}$. Seja, por simplicidade, $\bar{x}$ interno a D .⁵ Então, f é diferenciável em $\bar{x}$.*

Demonstração. Vamos apresentar a demonstração no caso particular, e um pouco mais simples, de uma função de duas variáveis. Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ o ponto considerado. Precisamos provar que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Para $(h, k) \neq (0, 0)$, vamos expressar o quociente

$$\frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

na soma das duas frações seguintes:

$$\frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad \text{e} \quad \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Em relação à primeira das duas frações acima, imaginamos k fixado e consideramos a função $h \mapsto f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k)$. Esta função, definida em um oportuno intervalo $(-a, a)$ pelo fato de $(\bar{x}, \bar{y})$

⁵Esta hipótese poderia ser um pouco mais geral. Deixamos as coisas assim, por razões de simplicidade.

ser interno, é derivável porque f possui derivadas parciais em todo D . Vamos aplicar o teorema do valor médio de Lagrange à função de h : obtemos que

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + c, \bar{y} + k),$$

onde c é um ponto oportuno tal que $|c| \leq |h|$, que depende de h (e também de k). Analogamente,

$$f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y} + d),$$

onde d é um ponto oportuno tal que $|d| \leq |k|$, que depende de k . Substituindo acima, temos

$$\frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + c, \bar{y} + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

e

$$\frac{f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y} + d) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Usando finalmente a continuidade das derivadas parciais em $(\bar{x}, \bar{y})$ e o fato de que $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ são funções limitadas, temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + c, \bar{y} + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y} + d) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Exercício 220. O leitor prove por exercício este fato em detalhes, observando que c e d tendem a zero se h e k tendem a zero, respectivamente.

Portanto

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Finalmente, o limite inicial é provado e a demonstração é completa. $\square$

O resultado seguinte generaliza em um certo sentido o teorema 66 substituindo curvas deriváveis às retas ao longo de direções fixadas.

Teorema 69 (fórmula de derivação de funções compostas, ou regra da cadeia). *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x}$ um ponto fixado que pertence a D . Seja $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva tal que $\phi(t) \in D$ para todo $t \in I$ e suponhamos exista $\bar{t} \in I$ tal que $\phi(\bar{t}) = \bar{x}$. Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$ e que ϕ seja derivável em $\bar{t}$. Então, a função composta $g(t) = f(\phi(t))$ é derivável em $\bar{t}$ e vale fórmula:*

$$g'(\bar{t}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \phi'(\bar{t}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) \phi'_j(\bar{t}).$$

Demonstração. Queremos provar que o limite da razão incremental

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{g(t) - g(\bar{t})}{t - \bar{t}}$$

existe e vale $\nabla f(\bar{x}) \cdot \phi'(\bar{t})$. Daqui em diante, vamos usar seja a notação $\phi'(\bar{t})$ seja $\bar{x}$ (são a mesma coisa). Sendo f diferenciável em $\bar{x}$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Aplicamos a proposição 58. No lugar de $h \rightarrow 0$ temos que $\phi(t) \rightarrow \phi(\bar{t})$ quando $t \rightarrow \bar{t}$. Ou seja $\bar{x} + h$ tende a $\bar{x}$ não uniformemente, mas ao longo da trajetória imagem de ϕ . O limite acima é portanto avaliado somente ao longo da trajetória e se torna

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{f(\phi(t)) - f(\phi(\bar{t})) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (\phi(t) - \phi(\bar{t}))}{\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\|} = 0.$$

Vamos escrever os dois limites acima (o geral e o particular, ao longo da trajetória de ϕ) com uma outra notação, equivalente. Seja

$$p(h) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot h}{\|h\|}$$

A função não pode ser definida em $h = 0$, mas vale claramente $\lim_{h \rightarrow 0} p(h) = 0$. Fazendo a composição com ϕ , temos

$$f(\phi(t)) - f(\phi(\bar{t})) = \nabla f(\bar{x}) \cdot (\phi(t) - \phi(\bar{t})) + \|\phi(t) - \phi(\bar{t})\| \cdot p(\phi(t) - \phi(\bar{t})).$$

Dividindo por $t - \bar{t}$ (supondo não nulo),

$$\frac{f(\phi(t)) - f(\phi(\bar{t}))}{t - \bar{t}} = \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot (\phi(t) - \phi(\bar{t}))}{t - \bar{t}} + \frac{\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\|}{t - \bar{t}} \cdot p(\phi(t) - \phi(\bar{t})).$$

Observamos agora o seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot (\phi(t) - \phi(\bar{t}))}{t - \bar{t}} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\phi(t) - \phi(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \phi'(\bar{t}),$$

porque ϕ é derivável em $\bar{t}$ (no limite acima, $\nabla f(\bar{x})$ é simplesmente um coeficiente de multiplicação constante). Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \frac{\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\|}{t - \bar{t}} = \|\phi'(\bar{t})\| \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \frac{\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\|}{t - \bar{t}} = -\|\phi'(\bar{t})\|.$$

Aquilo que interessa dos dois limites (diferentes) acima é que a razão incremental é limitata em um intervalo que inclui $\bar{t}$; isso porque os dois limites acima são finitos. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\|}{t - \bar{t}} \cdot p(\phi(t) - \phi(\bar{t})) = 0.$$

Em conclusão,

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{f(\phi(t)) - f(\phi(\bar{t}))}{t - \bar{t}} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \phi'(\bar{t}),$$

e o teorema é provado. □

Exercício 221. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Em alguns exercícios anteriores foi calculada a derivada direcional em $(0, 0)$ ao longo de qualquer direção $v = (\cos \theta, \sin \theta)$. Foi usada a definição de derivada.

Compare o resultado com o produto escalar $\nabla f(0, 0) \cdot v$ e observe que não coincide com a derivada direcional. Porque não coincide? Ou seja: o que diz este fato a respeito da diferenciabilidade de f em $(0, 0)$?

Exercício 222. Pegue algumas das funções encontradas em exercícios anteriores. Escolha pontos do domínio, direções e calcule a derivada direcional usando a fórmula do teorema acima. Confronte este resultado com a mesma derivada obtida aplicando diretamente a definição.

28. Quarta-feira, 14 de outubro de 2015 e

29. Sexta-feira, 16 de outubro de 2015

Definição 70. Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $(\bar{x}, \bar{y})$ um ponto interior de D e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(\bar{x}, \bar{y})$. O plano de equação $z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$ se chama *plano tangente* ao gráfico de f em $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

Exercício 223. Considere $f(x, y) = x^2 + y^2$. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Exercício 224. Prove que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em cada ponto do domínio. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Exercício 225. Escreva o gradiente em $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x \sin \frac{y}{x}$. Prove que f é diferenciável. Calcule o plano tangente ao gráfico no ponto $(1, \pi, f(1, \pi))$.

Exercício 226. Seja $f(x, y) = \sin(ax + y^2)$. Diga para quais valores do parâmetro real a o plano tangente ao gráfico de f em $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ é paralelo à reta interseção dos planos de equações $x = y$ e $y = 2z$. Existem valores de a tais que o plano tangente é ortogonal à reta acima?

Exercício 227. Calcule as derivadas parciais de $f(x, y) = e^{x^2 y}$. Em seguida, escolha alguns pontos do gráfico e determine o plano tangente ao gráfico de f nestes pontos.

Observação 71. O significado geométrico do plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ é análogo ao da reta tangente ao gráfico de uma função g (de uma variável) em um ponto $\bar{x}$, lembrando a aula 25 de 5 de outubro de 2015.

Exercícios em sala de aula com os alunos para a preparação da prova P2.

30. Segunda-feira, 19 de outubro de 2015

Prova P2.

31. Quarta-feira, 21 de outubro de 2015

Definição 72. Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $c \in \mathbb{R}$ fixado. O subconjunto do domínio

$$N_c = \{x \in D : f(x) = c\}$$

é chamado *conjunto de nível* de f , relativo ao nível c .

Observamos que os conjuntos de nível são subconjuntos do domínio (não do gráfico).

Exercício 228. No caso da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ verifique que N_0 é um ponto, a origem de $\mathbb{R}^2$. Se $c < 0$, N_c é o conjunto vazio. Se $c > 0$, N_c é a circunferência de $\mathbb{R}^2$ centrada na origem com raio $\sqrt{c}$.

Exercício 229. Se função $f(x, y) = x^2 - y^2$, N_0 é a união de duas retas. Se $c \neq 0$, N_c é uma hipérbole. Verifique e desenhe N_c nos vários casos.

Exercício 230. Seja $f(x, y) = \cos x + \sin y$. Desenhe N_2 e N_{-2} .

Exercício 231. Desenhe os conjuntos de nível de $f(x, y) = |x| + |y|$ e de $g(x, y) = |x + y|$.

Como mostram os exercícios anteriores, nem sempre o conjunto de nível de uma função de duas variáveis é uma trajetória. Quando esta condição se verifica, ela se torna ortogonal ao gradiente da função, caso esta seja diferenciável. Mais precisamente temos o teorema seguinte.

Teorema 73. *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Seja $c \in \mathbb{R}$ dado e suponhamos que N_c (ou parte dele) seja uma trajetória que admite uma parametrização $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seja $(\bar{x}, \bar{y}) \in N_c$ dado, e suponhamos que f seja diferenciável em $(\bar{x}, \bar{y})$. Denotamos por $\bar{t}$ um ponto de I tal que $\phi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$. Então,*

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \phi'(\bar{t}) = 0.$$

Demonstração. Consideramos a composição $g(t) = f(\phi(t))$, definida em I . Sendo ϕ a parametrização da curva de nível N_c , então $g(t) = f(\phi(t)) = c$ constante. Portanto, $g'(t) = (f \circ \phi)'(t) = 0$ para todo t . Sabemos que, em particular, f é diferenciável em $(\bar{x}, \bar{y})$. Podemos portanto aplicar o teorema 69, ou regra da cadeia, obtendo que

$$0 = (f \circ \phi)'(\bar{t}) = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \phi'(\bar{t}).$$

□

Lembre que a regra da cadeia não pode ser aplicada se f não for diferenciável no ponto considerado.

Observação 74. O teorema pode ser provado também na condição mais fraca de que ϕ seja derivável e não necessariamente regular. Neste caso, se $\phi'(\bar{t}) = 0$, o anulamento do produto escalar fica automaticamente verificado. Todavia, neste caso, podemos não ter existência da reta tangente à trajetória. Lembre os casos b) e c) do exercício 106. Para ter uma interpretação geométrica de ortogonalidade entre vetores não nulo, prefiro portanto colocar a hipótese de regularidade.

Derivadas de ordem superior. Analogamente àquilo que acontece no estudo das funções de uma variável, podemos definir as derivadas parciais das derivadas parciais de uma função dada, ou seja as derivadas parciais segundas (e até de ordem maior).

Consideramos um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos, por simplicidade, D aberto. Fixada uma direção principal, digamos j , suponhamos que f admita derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ para todo $x \in D$. Neste caso, sabemos que estamos definindo uma nova função de D in $\mathbb{R}$, precisamente a função

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

As derivadas parciais como funções de x foram já utilizadas no teorema do diferencial.

Podemos nos perguntar se a nova função admita derivada parcial ao longo de uma outra direção principal i (que poderia coincidir com j , ou não) em algum ponto de D . Fixamos $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in D$. Se o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + t, \dots, \bar{x}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)}{t}$$

existe e é finito, tal limite é de fato a derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ao longo da direção principal x_i , calculada em $\bar{x}$ e é definida como *derivada parcial segunda* de f ao longo das direções i e j , calculada em $\bar{x}$.

O símbolo que expressa a derivada parcial segunda é

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}).$$

A ordem das direções colocadas no denominador não é casual. Significa que primeiramente fazemos a derivada na direção j e, depois, desta fazemos a derivada parcial na direção i no ponto $\bar{x}$.

Observe que, enquanto a existência da derivada parcial (primeira) na direção j deve existir em todos os x de uma vizinhança de $\bar{x}$ (isso é para poder construir o limite acima), a derivada segunda é acima definida, em princípio, somente em $\bar{x}$.

Se invertemos a ordem de derivação o resultado muda ou é o mesmo? Em outras palavras, dado $\bar{x} \in D$, é verdadeiro ou falso que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) ?$$

A resposta é: depende de f . Uma condição suficiente para verificar a igualdade acima é dada no teorema seguinte. Omitimos a demonstração.

Teorema 75 (di Schwarz). *Dada uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é aberto em $\mathbb{R}^N$, e dadas duas direções principais i e j , suponhamos que as derivadas parciais segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ existam para todo $x \in D$ (ou pelo menos numa vizinhança de $\bar{x}$). Suponhamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ sejam contínuas em $\bar{x}$ (como funções de x). Então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}).$$

Observação 76. A condição do teorema é suficiente. Se ela não for verificada, nada podemos dizer, em geral, sobre a igualdade das derivadas segundas. Depende em cada caso de f . Isso se aplica em cada teorema que manifesta uma condição suficiente. No teorema 68, por exemplo, se as derivadas parciais não são contínuas, a f em questão pode ser diferenciável ou não, depende da verificação do limite da definição de diferenciabilidade.

Exercício 232. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas no generico ponto (x, y) das funções seguintes:

$$\text{a) } x^2 \log x + xy, \quad \text{b) } \frac{x}{x^2 + y}, \quad \text{c) } \sin(x - y) + \cos(x + y), \quad \text{d) } xe^{2y}.$$

Exercício 233. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas no generico ponto (x, y) da função seguinte:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctg(x/y) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Prove que as derivadas primeiras na origem existem (calcule os valores) e que as segundas mistas na origem são diversas.

Exercício 234. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas de

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Diga se as derivadas segundas mistas na origem são iguais.

Exercício 235. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Diga se as derivadas segundas mistas na origem são iguais.

Exercício 236. Procure todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , que verifiquem, para cada (x, y) , a condição $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ para cada (x, y) . Entre essas determine aquelas que verifiquem $f(0, y) = \sin y$ e $f(x, 0) = \cos x - 1$.

Exercício 237. Calcule o gradiente e as derivadas parciais segundas no genérico ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ das funções seguintes:

- $f(x) = \langle x, \bar{x} \rangle$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ fixado.
- $f(x) = \|x\|^2$.

Exercício 238. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy - e^x, x \sin(xy))$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = xy - 1$. Calcule a função composta $F = g \circ f$. Calcule as derivadas parciais de F usando seja a sua forma explícita seja a regra da cadeia e compare os resultados obtidos.

Exercício 239. Faça o que foi feito no exercício acima, para os pares de funções seguintes:

- $f(x, y) = (x, xy)$, $g(x, y) = (xe^y, ye^x)$,
- $f(x, y) = (x - y, x + y)$, $g(x, y) = xy \cos y$
- $f(t) = (t + 2, t^2 + t, t^3 - t^2)$, $g(x, y, z) = xy - 2z$
- $f(x, y) = (x^2 + 2y)$, $g(t) = (te^t, \sin 2t)$

32. Sexta-feira, 23 de outubro de 2015 e

33. Segunda-feira, 26 de outubro de 2015

Começamos agora o estudo dos problemas de máximo e mínimo de uma função real de várias variáveis reais. Precisamos primeiramente de algumas definições.

Definição 77. Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. O *máximo absoluto* de f é o máximo (se existe) da imagem de f . O *mínimo absoluto* de f é o mínimo (se existe) da imagem de f .

Um ponto $x_0 \in D$ é dito *ponto de máximo absoluto* se $f(x_0)$ é o máximo absoluto de f . Um ponto $x_0 \in D$ é dito *ponto de mínimo absoluto* se $f(x_0)$ é o mínimo absoluto de f .

Cabe observar que, caso exista, o máximo de uma função é único, mas pode ser atingido em vários (até infinitos) pontos (de máximo absoluto). Considerando por exemplo $f(x, y) = \cos x + \sin y$, é fácil verificar que $\max f = 2$ e que infinitos são os pontos de máximo.

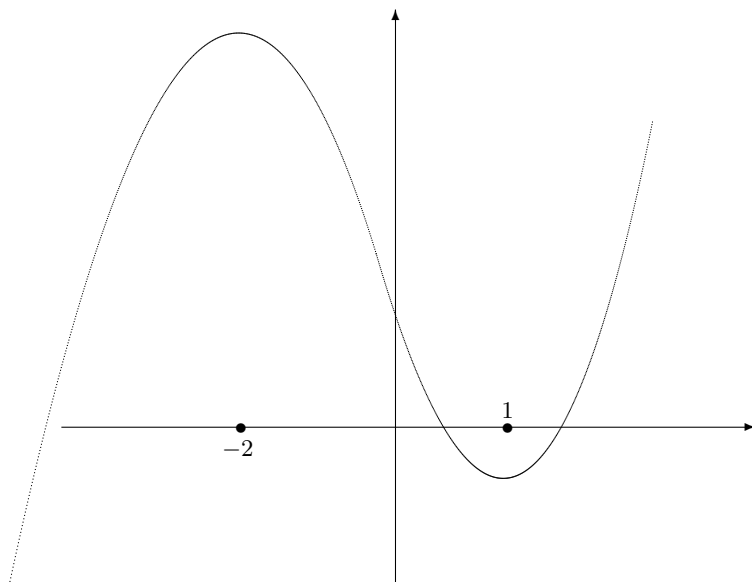
Exercício 240. O leitor complete a observação acima, determinando todos os pontos de máximo (absoluto).

Definição 78. Sejam como acima D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Um ponto $\bar{x} \in D$ é dito *ponto de máximo relativo* se existe uma bola $B(\bar{x}, \delta)$, de centro $\bar{x}$ e raio δ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$, para cada $x \in D \cap B(\bar{x}, \delta)$. Um ponto $x_0 \in D$ é dito *ponto de mínimo relativo* se existe uma bola $B(x_0, \delta)$, tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para cada $x \in D \cap B(x_0, \delta)$.

Exemplo 79. Os conceitos de máximo e mínimo de uma função (se usamos esta expressão, significam automaticamente absolutos) e os de pontos de máximo e mínimo relativo são basicamente os mesmos dos análogos conceitos encontrados em cálculo 1. Consideramos por exemplo a função real de uma variável real $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$. O estudo das propriedades desta função (e o conseguinte esboço do gráfico) pode ser feito usando todas as ferramentas estudadas no curso de cálculo 1. Cabe notar uma primeira simples informação: $f(0) = 3$. A função é ilimitada, sendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Em outras palavras, f não possui máximo nem mínimo. Para verificar se possui pontos de máximo ou mínimo relativo, consideramos a derivada $f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$, que se anula em $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. A análise do sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ e $(1, +\infty)$ diz que f é estritamente crescente no primeiro e no último intervalo e decrescente no central. Portanto x_1 é ponto de máximo relativo e x_2 é ponto de mínimo relativo. Para verificar que $f(-2)$ é positiva, basta fazer a conta. Ou observar o seguinte: f é decrescente em $(-2, 0]$ (sendo assim em $(-2, 1)$), f vale 3 em $x = 0$ e portanto $f(-2)$ é necessariamente maior de 3. Uma observação análoga não se aplica para detectar o sinal de $f(1)$. Precisa fazer a conta direta.

Se pegamos a e b , por exemplo $a < -2$ e $b > 1$, a restrição de f ao intervalo $[a, b]$ possui máximo e mínimo absoluto, porque f é contínua e o novo domínio é limitado e fechado (teorema de Weierstrass). Os valores que realizam o máximo e o mínimo de f devem ser procurados entre $f(a)$, $f(b)$, $f(-2)$ e $f(1)$. Observe que $f'(a)$ e $f'(b)$ não se anulam. São pontos extremos do intervalo considerado e neles o teorema de Fermat⁶ não vale. A figura seguinte ilustra o exemplo.

⁶que diz: se x é ponto interior do domínio da função analisada e é de máximo ou mínimo relativo, a derivada (se existe) se anula



Os dois resultados seguintes são os análogos para funções de várias variáveis de resultados clássicos de cálculo 1. São resultados profundamente diferentes entre si (assim como em cálculo 1). O teorema de Weierstrass dá uma condição suficiente para a existência do máximo e do mínimo absoluto de uma função. É um teorema global que "se ocupa" da imagem de uma função. A demonstração é um pouco complicada e será (provavelmente) apresentada (no caso de funções de uma variável) no curso de análise real. É um teorema de existência que não ajuda minimamente na busca do máximo ou do mínimo da função investigada.

O teorema de Fermat fornece uma condição necessária para a existência de pontos de máximo ou mínimo relativos. É portanto um teorema local que "se ocupa" de elementos do domínio de f . Além disso tal resultado tem uma utilidade prática: não exatamente a de encontrar pontos de máximo ou mínimo relativos, mas sim a de selecionar candidatos.

Teorema 80 (de Weierstrass). *Sejam C um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f possui máximo e mínimo absolutos.*

Teorema 81 (de Fermat). *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Seja $\bar{x}$ um ponto interno a D e, ao mesmo tempo, ponto de máximo ou mínimo relativo de f . Suponhamos que f possua derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ ao longo de qualquer direção v . Então:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = 0.$$

Em particular, o gradiente de f em $\bar{x}$ é nulo.

Demonstração. Consideramos uma direção v , genérica, de $\mathbb{R}^n$. A $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\phi(t) = \bar{x} + tv$ parametriza a reta por $\bar{x}$ na direção v . Sendo, por hipótese, $\bar{x}$ um ponto interno de D , então existe $\delta > 0$ tal que $\phi(t) \in D$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

(**Exercício 241.** Prove em detalhes este fato.)

Agora suponhamos sem perda de generalidade que $\bar{x}$ seja ponto de máximo relativo de f . Fica fácil provar que $t = 0$ se torna ponto de máximo relativo de $f \circ \phi$, restrita ao intervalo $(-\delta, \delta)$.

(**Exercício 242.** Prove em detalhes também este fato.)

Tendo f derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$, então fica bem definida a derivada $f \circ \phi$ em $t = 0$.

(**Exercício 243.** Prove em detalhes também este fato.)

Seendo t interno ao intervalo $(-\delta, \delta)$, podemos aplicar o teorema de Fermat de cálculo 1 e concluir que $(f \circ \phi)'(0) = 0$. Pela definição de derivada direcional, temos que $(f \circ \phi)'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ e portanto o teorema é provado. $\square$

Exercício 244. Faça de novo a demonstração do teorema, cuidando dos vários detalhes.

Definição 82 (ponto crítico). Um ponto onde o gradiente de uma função se anula é chamado *ponto crítico* (ou *ponto estacionário*).

Observação 83. Como em cálculo 1, o leitor deve prestar atenção para alguns fatos importantes:

- (1) A condição expressa pelo teorema de Fermat é necessária: se um ponto interno não for crítico, não pode ser de máximo ou mínimo relativo. Neste sentido o teorema de Fermat é um teorema que fornece candidatos a serem de máximo ou mínimo relativo. Ou, em outras palavras, exclui todos os pontos internos que não são críticos.
- (2) A condição por outro lado não é suficiente. Por exemplo, no caso de $f(x, y) = x^2 - y^2$, a origem de $\mathbb{R}^2$ é ponto crítico de f , mas como é fácil ver não é nem de máximo nem de mínimo relativo. (**Exercício 245.** Verifique os detalhes.)
- (3) Não pode esquecer que o teorema de Fermat se aplica somente a pontos internos ao domínio da função investigada. Considere por exemplo $f(x, y) = x + y$ definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. É imediato ver que $(0, 0)$ é ponto de mínimo relativo (e absoluto), mas $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$. Ou seja, a origem não é ponto crítico. Não tem contradição com o teorema de Fermat, porque este resultado só avalia pontos internos.
- (4) O leitor não deve cometer um erro frequente: aquele de definir o ponto de máximo ou de mínimo relativo como um ponto onde o gradiente se anula. A definição de ponto de máximo ou de mínimo relativo se aplica a funções quaisquer, enquanto o teorema de Fermat somente avalia funções que têm derivadas direcionais.
- (5) Em relação ao teorema de Weierstrass, a condição que o teorema descreve é suficiente. Se faltar uma das hipóteses do teorema (por exemplo a função não é contínua, ou o domínio não é fechado ou o domínio não é limitado), nada se pode dizer a priori sobre a existência do máximo ou do mínimo absolutos. Depende dos casos. O leitor pode por exercício determinar exemplos nos quais se manifestam as várias situações.

Exercício 246. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - y$ no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + y \leq 3, y \geq x\}$. Porque com certeza o máximo e o mínimo de f existem?

Exercício 247. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no retângulo $[1, 3] \times [2, 4]$. Aborde o problema no retângulo $[1, 3] \times (2, 4)$.

Exercício 248. Considere $f(x, y) = x(1 - x^2 - 4y^2)$ restrita ao conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

- a) Prove que f possui máximo e mínimo restrita a E .
- b) Calcule o máximo e mínimo e os pontos de máximo e mínimo absolutos.

Exercício 249. Considere $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ restrita ao conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

- a) Prove que f possui máximo e mínimo restrita a E .
- b) Calcule o máximo e mínimo e os pontos de máximo e mínimo absolutos.

Exercício 250. Escreva uma função que possua máximo absoluto em um ponto onde o gradiente não se anula.

Exercício 251. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - y$, onde f é definida em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + y \leq 3, y \geq x\}$.

Exercício 252. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - y$, onde f é definida em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + y \leq 3, y \geq x\}$.

Exercício 253. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - y$, onde f é definida na elipse de equação $x^2/4 + y^2/9 = 1$

Qual é a estratégia para abordar os exercícios anteriores? Se trata de exercícios, todos, onde as funções são contínuas e definidas em conjuntos limitados e fechados. Se um ponto for de máximo ou de mínimo absoluto, é também de máximo ou de mínimo relativo. Se os conjuntos em questão das funções acima possuem pontos internos, os pontos críticos internos serão naturalmente candidatos a serem pontos de máximo ou de mínimo absoluto. As fronteiras dos conjuntos devem ser tratadas a parte. Alí o teorema de Fermat não serve. Se for possível parametrizar a fronteira, a análise da função sobre a fronteira parametrizada é de fato um exercício de cálculo 1 e fornecerá novos pontos candidatos. O máximo absoluto de f será o maior valor de f em todos os pontos candidatos. Analogamente para o mínimo.

34. Quarta-feira, 28 de outubro de 2015

A aula é dedicada a uma rápida exposição (e sem demonstração) da **fórmula de Taylor para funções de várias variáveis**, limitadamente à aproximação de segunda ordem.

Voltamos à aula 25 do 5 de outubro. Alí foi visto, para introduzir o conceito de diferencial, o limite seguinte: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for derivável em um ponto dado $\bar{x}$, então há

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x})}{x - \bar{x}} = 0$$

enquanto, se $m \neq f'(\bar{x})$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - m(x - \bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) - m \neq 0.$$

Ou seja "a qualidade da aproximação" dada pela tangente é "melhor" da qualidade da aproximação dada por uma secante qualquer.

Acontece algo parecido se procuramos uma aproximação de segunda ordem? Ou seja: utilizando polinômios de grau 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$, tem um polinômio que aproxima f , numa região perto de $\bar{x}$, melhor de todos os outros polinômios? e o que significa neste caso "aproxima melhor"? Vamos ver.⁷

Suponhamos que f possua derivada segunda, pelo menos numa vizinhança de $\bar{x}$. Analogamente à aproximação de primeira ordem (aquela feita com a reta tangente), queremos um polinômio (se ele existe), que chamo $T_2(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2$, tal que, analogamente ao caso linear,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - \bar{x})^2} = 0. \quad (\bullet)$$

Observe que estamos passando a potências de grau 2 e queremos uma "velocidade" de convergência a zero maior do que $(x - \bar{x})^2$. Observe que é imediato verificar que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{a_2(x - \bar{x})^2}{(x - \bar{x})^2} = a_2.$$

⁷Geometricamente, podemos dizer que estamos tentando aproximar o gráfico de f por uma parábola, e não por uma reta.

Sendo

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^2} = \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - \bar{x})^2} + \frac{a_2(x - \bar{x})^2}{(x - \bar{x})^2},$$

pelos resultados sobre os limites das somas de funções (os clássicos resultados de cálculo 1), há que o limite (●) acima é verificado se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^2} = a_2. \quad (*)$$

(**Exercício 254.** Verifique os detalhes.) Portanto, aquilo que precisamos é provar que existem a_0 , a_1 e a_2 (finitos, e não $\pm\infty$) que permitam verificar o limite (*) acima.

Este limite (*) se apresenta em uma forma indeterminada? Depende de a_0 . Sabemos que f é contínua (porque é derivável). Portanto o limite se apresenta em uma forma indeterminada se e somente se $a_0 = f(\bar{x})$. Observe que se a_0 fosse diferente de $f(\bar{x})$ teríamos

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^2} = \pm\infty,$$

dependendo do sinal do numerador perto de $\bar{x}$. Ou, tal limite poderia ser ∞ com sinais opostos dependendo dos limites laterais direto e esquerdo. Seria, de qualquer jeito, uma situação indesejada. Portanto para que o limite (*) seja finito é necessário que a_0 seja $f(\bar{x})$.

(**Exercício 255.** Verifique os detalhes e refaça o argumento acima.)

Posto agora $a_0 = f(\bar{x})$, o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - a_1(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^2}$$

se apresenta em uma forma indeterminada e podemos aplicar o teorema de De l'Hôpital. Passando às derivadas, temos que o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x) - a_1}{2(x - \bar{x})}$$

existe finito se e somente se $a_1 = f'(\bar{x})$. Neste caso, se trata do limite da razão incremental em $\bar{x}$ da função f' e portanto

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x) - f'(\bar{x})}{2(x - \bar{x})} = \frac{1}{2}f''(\bar{x}).$$

Em conclusão, o raciocínio que acabamos de fazer prova aquele que é o Teorema de Taylor para funções de uma variável *no caso das aproximações de segunda ordem*.

Teorema 84. (de Taylor) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou definida em um intervalo de $\mathbb{R}$) uma função dada e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ dado. Seja f derivável (pelo menos) em um intervalo que contém $\bar{x}$ e derivável duas vezes (pelo menos) em $\bar{x}$. Seja $T_2(x)$ o polinômio de grau ≤ 2 , definido por $T_2(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x - \bar{x})^2$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}) - \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x - \bar{x})^2}{(x - \bar{x})^2} = 0.$$

Além disso, se $P(x) = b + c(x - \bar{x}) + d(x - \bar{x})^2$ é um polinômio qualquer de grau ≤ 2 , o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - P(x)}{(x - \bar{x})^2} \quad (9)$$

não será zero. Neste sentido, o polinômio T_2 fornece a melhor "aproximação de segunda ordem" (ou "aproximação quadrática") de f "perto de $\bar{x}$ ". O polinômio T_2 é chamado polinômio de Taylor de ordem 2, de f com centro em $\bar{x}$.

Observe que no enunciado foi escrito que T_2 tem grau ≤ 2 e não necessariamente 2. Isso porque a segunda derivada em $\bar{x}$ poderia ser zero (e isso não é em contradição com nada).

* * *

Agora voltamos às funções de várias variáveis e mostramos que se obtém um teorema análogo. Volto a dizer que toda a conta acima foi feita em dimensão 1 porque é muito mais simples da análoga em dimensão maior. Por isso a fórmula de Taylor foi explicada e provada em dimensão 1. Mas a lógica que está por trás é a mesma em qualquer dimensão.

Sejam D subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que por simplicidade supomos aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x} \in D$ dado. Suponhamos que f seja de classe C^2 em D (ou, um pouco mais geral, se D não for aberto, suponhamos que $\bar{x}$ seja interno e que f seja de classe C^2 numa bola que contém $\bar{x}$ e que é contida em D).

Consideramos o diferencial de f em $\bar{x}$ (o diferencial existe porque f é C^2 e portanto automaticamente C^1). Sabemos que o diferencial é um operador linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, associado ao gradiente de f em $\bar{x}$. Ou seja, a função linear

$$x \mapsto \nabla f(\bar{x}) \cdot x.$$

As segundas derivadas de f em $\bar{x}$ são organizadas para constituir uma matriz quadrada

$$H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

$H_f(\bar{x})$ é chamada *matriz hessiana* de f em $\bar{x}$. É uma matriz quadrada $n \times n$ e é simétrica se f for C^2 , ou seja, com derivadas parciais segundas contínuas em $\bar{x}$.

A matriz hessiana de f em $\bar{x}$, $H_f(\bar{x})$, é associada a função

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = H_f(\bar{x}) x \cdot x,$$

que se chama *forma quadrática*. Como deve ser lida a função acima? Para explicar melhor, vamos fazer as contas com uma notação um pouco mais simplificada ou seja tomando uma matriz qualquer, quadrada, $n \times n$, simétrica, M :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, a notação Mv denota o produto da matriz M pelo vetor coluna v . E o resultado será um vetor de $\mathbb{R}^n$.

$$Mv = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

A função forma quadrática $g(v) = Mv \cdot v$ será portanto o produto escalar de Mv com v . De fato, se trata de um polinômio de grau 2 nas variáveis $v_1, \dots, v_n$. Em detalhes:

$$g(v) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) v_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_j v_i.$$

(Exercício 256. Verifique.)

Podemos agora enunciar o Teorema de Taylor.

Teorema 85 (formula de Taylor de ordem 2 para funções de várias variáveis). *Seja D subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e $\bar{x} \in D$ dado. Suponhamos que $\bar{x}$ seja interior e que f seja de classe C^2 numa bola que contém $\bar{x}$ e que é contida em D . Então,*

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) - \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0.$$

Se $P(x) = a + v \cdot (x - \bar{x}) + M(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$ é um outro (qualquer) polinômio de grau ≤ 2 nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - \bar{x}\|^2}$$

não será zero. O polinômio $T_2(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$ é chamado polinômio de Taylor de ordem 2, de f com centro em $\bar{x}$.

Exercício 257. Dada uma forma quadrática g associada a uma matriz A qualquer, simétrica, prove que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$,

$$g(tv) = A(tv) \cdot tv = t^2(Av \cdot v).$$

Exercício 258. Escreva explicitamente as formas quadráticas associadas às matrizes seguintes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 259. Considere as funções seguintes:

$$xyz^2, \quad xe^{xy} \quad \sin x \cos(xy) \quad x \sin y - y \sin x \quad \log \frac{1+x}{1-y}$$

Escreva o polinômio de Taylor de cada função acima, de ordem 2 e centro na origem.

Exercício 260. Escreva as matrizes hessianas, calculadas em um ponto genérico (x, y) , das funções seguintes:

$$\text{a) } x^2 \log x + xy, \quad \text{b) } \frac{x}{x^2 + y}, \quad \text{c) } \sin(x - y) + \cos(x + y), \quad \text{d) } xe^{2y}.$$

Exercício 261. Escreva as matrizes hessianas, calculadas em um ponto genérico (x, y, z) , das funções seguintes: $x^2z + \cos(y + z) + e^{xy}$, $xy^2 + z^3 + \cos x$.

Exercício 262. Escolha alguns pontos específicos dos domínios das funções dos dois exercícios anteriores e calcule as matrizes hessianas naqueles pontos.

35. Quarta-feira, 4 de novembro de 2015

Aula do Professor Oswaldo Rio Branco Oliveira. Exercícios sobre máximos mínimos absolutos de funções definidas em domínios limitados e fechados.

36. Sexta-feira, 6 de novembro de 2015

Aula de Diego A. Sandoval

O material seguinte foi preparado, redigido por Diego e revisado por mim.

Exercício 263. (*Topologia- abertos/fechados*)

- $A = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ é fechado.

Provemos que $A^c = \{(x, y) : ax + by + c < 0\} \cup \{(x, y) : ax + by + c > 0\}$ é aberto (a união de dois abertos é um aberto). Mostremos $\{(x, y) : ax + by + c > 0\}$ é aberto (de maneira análoga para $\{(x, y) : ax + by + c < 0\}$). Seja $(x_0, y_0) \in \{(x, y) : ax + by + c > 0\}$, procuramos uma bola $B_d(x_0, y_0) \subset \{(x, y) : ax + by + c > 0\}$ com $d > 0$. Encontramos o raio: A distancia do ponto à reta $ax + by + c = 0$. A inclinação desta reta é $m = -\frac{a}{b}$, logo a recta perpendicular tem coeficiente angular $m_1 = \frac{b}{a}$ e sua equação é $bx - ay = bx_0 - ay_0$. Então o ponto de interseção (x_1, y_1) das duas retas satisfaz

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= -c \\ bx_1 - ay_1 &= bx_0 - ay_0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \\ y_1 &= \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Portanto a distancia entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \\ &= \left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} > 0. \end{aligned}$$

Lembremos as equações das retas paralelas e perpendicular a $ax + by + c = 0$ que passam por (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} ax + by - ax_0 - by_0 &= 0 \\ bx - ay - bx_0 + ay_0 &= 0. \end{aligned}$$

Consideremos a bola $B_d(x_0, y_0)$. Mostremos $B_d(x_0, y_0) \subset \{(x, y) : ax + by + c > 0\}$. Isto é equivalente a mostrar que para todo $(x_2, y_2) \in B_d(x_0, y_0)$ a distancia à reta é positiva, ou seja $ax_2 + by_2 + c > 0$. Como $(x_2, y_2) \in B_d(x_0, y_0)$, então

$$\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} < d,$$

isto é,

$$\begin{aligned}(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 &< \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \\ \frac{[ax_2 + by_2 - ax_0 - by_0]^2 + [bx_2 - ay_2 - bx_0 + ay_0]^2}{a^2 + b^2} &< \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \\ \frac{[ax_2 + by_2 - ax_0 - by_0]^2}{a^2 + b^2} &< \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \\ (ax_2 + by_2 - ax_0 - by_0)^2 &< (ax_0 + by_0 + c)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|ax_2 + by_2 - ax_0 - by_0| &< ax_0 + by_0 + c \\ -ax_0 - by_0 - c &< ax_2 + by_2 - ax_0 - by_0 < ax_0 + by_0 + c \\ 0 &< ax_2 + by_2 + c < 2(ax_0 + by_0 + c).\end{aligned}$$

- Sejam A, B dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Prove que se A, B são abertos então $A \cup B$ e $A \cap B$ também serão abertos. Se temos uma família A_n de subconjuntos de abertos de $\mathbb{R}^2$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ serão abertos?

Seja $\bar{x} \in A \cup B$; então $\bar{x} \in A$ ou $\bar{x} \in B$. Se $\bar{x} \in A$, então existe $r_1 > 0$ tal que $B(\bar{x}, r_1) \subset A \subset A \cup B$. Portanto $A \cup B$ é aberto. De maneira similar, se $\bar{x} \in B$, então existe $r_2 > 0$ tal que $B(\bar{x}, r_2) \subset B \subset A \cup B$. Portanto, $A \cup B$ é aberto.

Seja $\bar{x} \in A \cap B$; então $\bar{x} \in A$. Então existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(\bar{x}, r_1) \subset A$ e $B(\bar{x}, r_2) \subset B$. Seja agora $B(\bar{x}, r) \subset A \cap B$. Portanto $A \cap B$ é aberto. De maneira semelhante para a união de uma família é aberto. Más na interseção só é certo se a família é finita. Por exemplo, $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ é aberto, mas $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ é fechado.

- $B = [0, 1] \times [0, 1]$. B é fechado. O complementar de B ,

$$\{(x, y) | x > 1 \text{ ou } x < 0\} \cup \{(x, y) | y > 1 \text{ ou } y < 0\},$$

é união de conjuntos abertos, portanto é aberto.

- $C = (a, b) \times (c, d)$. $C = \{(x, y) | x < b \text{ e } x > a\} \cap \{(x, y) | y < d \text{ e } y > c\}$ é aberto, sendo interseção finita de abertos.
- $D = \{(1, \frac{1}{n}) : n \neq 0 \text{ natural}\}$. D não é fechado, porque o ponto $(1, 0) \in D^c$ mas não possui uma bola contida no complementar de D . O conjunto dos pontos de acumulação é $D' = \{(1, 0)\}$, $\partial D = (1, 0)$.
- $E = \{(x, y) : x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$. E é fechado, não é aberto. $E' = \emptyset$, $\partial E = E$.
- $F = \{(x, y) : x \text{ e } y \text{ racionais}\}$. F não é fechado, não é aberto. $F' = \mathbb{R}^2$, $\partial F = \mathbb{R}^2$.
- $G = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$. De fato,

$$G = \{(x, y) | x + y < 1\} \cap \{(x, y) | -x + y < 1\} \cap \{(x, y) | x - y < 1\} \cap \{(x, y) | x + y > -1\}$$

é aberto por ser a interseção finita de conjuntos abertos, não é fechado. $G' = G \cup \partial G$ onde $\partial G = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$.

- $E = \{(x, y) : y = \sin(\frac{1}{x})\}$. E não é aberto, nem fechado. $E' = E \cup (0 \times [0, 1])$. (Use o teorema do valor intermédio) e considere os intervalos $I_n = [\frac{2}{(2n+3)\pi}, \frac{2}{(2n+1)\pi}]$ com $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 264. (*Planos Tangentes*).

- Encontre o plano de “melhor” aproximação de ordem 1 da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

na origem. Ele existe?

Observe-se que a aplicação não é contínua em $(0, 0)$, logo não é diferenciável. Assim não existe plano tangente. Mas podemos falar do seu possível plano tangente, suas derivadas parciais são nulas, portanto, o plano na origem é $z = 0$. Observe-se que a reta tangente à curva $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$ no ponto $\gamma(0) = (0, 0, 0)$:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0).$$

De fato, o acima não é o plano tangente no ponto considerado, que de fato não existe.

- Para a função acima calcular o plano tangente nos pontos $(1, 0, f(1, 0))$, $(0, 1, f(0, 1))$, $(1, 1, f(1, 1))$.

Às derivadas parciais nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são nulas então o plano tangente é $z = 0$.

Agora calculemos as derivadas parciais em $(1, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^2y + xy^2 + y^3 - 2x^2y - xy^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ &= \frac{-x^2y + y^3}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - 2xy^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} \end{aligned}$$

Então $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$. Logo o plano tangente é $z = 1/3$.

- Escreva o gradiente em $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x \sin(y/x)$. Prove que f é diferenciável. Calcule o plano tangente ao gráfico no ponto $(1, \pi, f(1, \pi))$.

Gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(\sin(y/x) - \frac{y}{x} \cos(y/x), \cos(y/x) \right).$$

$$\nabla f(1, \pi) = (\pi, -1).$$

f em diferenciável em $(1, \pi)$: devido que as derivadas parciais são funções contínuas em $(1, \pi)$.

O plano tangente:

$$\begin{aligned} z &= 0 + \pi(x - 1) - (y - \pi) \\ &= \pi x - y. \end{aligned}$$

- Calcule o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$ no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

$\nabla f(x, y) = e^{x^2-y^2}(1 + 2x^2, -2xy)$, no ponto $\nabla f(2, 2) = (9, -8)$. Portanto o plano tangente é

$$z = 2 + 9(x - 2) - 8(y - 2) = 9x - 8y.$$

- Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.
O gradiente $\nabla f(x, y) = (y, x)$. Então o plano tangente no ponto (x_0, y_0) é dado pela equação

$$z = x_0y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = y_0x + x_0y - x_0y_0.$$

Como passa pelos pontos, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} 2 &= y_0 + x_0 - x_0 y_0 \\ 1 &= -y_0 + x_0 - x_0 y_0. \end{aligned}$$

Subtraindo, obtemos $1 = 2y_0$, ou seja, $y_0 = \frac{1}{2}$. Logo $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}x_0$. Portanto $(x_0, y_0) = (3, \frac{1}{2})$.
O plano procurado é $z = \frac{1}{2}x + 3y - \frac{3}{2}$, ou seja, $x + 6y - 2z = 3$.

Exercício 265.

- a) Determine o plano tangente à superfície $z = 3x^2 + 2xy + y^2$ no ponto $(1, 1, 6)$.

Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 = z$. Então o plano tangente é dada pela expressão

$$\begin{aligned} z - f(1, 1) &= f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\ &= (6 + 2)(x - 1) + (2 + 2)(y - 1) \\ &= 8x - 8 + 4y - 4 \\ &= 8x + 4y - 12. \end{aligned}$$

Logo $z = 8x + 4y - 6$ é o plano tangente.

- b) Considere a equação $4x^2 - y^2 - z^2 + 8x + 6y - 4z + 7 = 0$. Encontre a equação do plano tangente e da reta normal no ponto $(1, -1, 2)$.

Seja $F(x, y, z) = 4x^2 - y^2 - z^2 + 8x + 6y - 4z + 7$. Então $\nabla F(x, y, z) = (8x + 8, -2y + 6, -2z - 4)$.

Portanto, o vetor normal é $n = \nabla F(1, -1, 2) = (16, 8, -8) = 8(2, 1, -1)$.

O plano tangente está dada pela equação

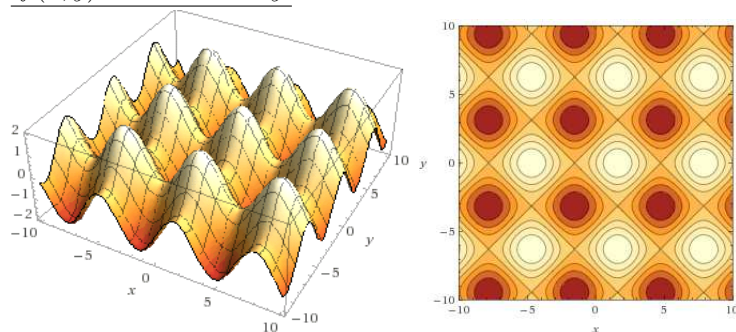
$$\begin{aligned} 2(x - 1) + (y + 1) - (z - 2) &= 0 \\ 2x + y - z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

A reta normal está dada pela equação

$$\begin{aligned} l(t) &= (1, -1, 2) + t(2, 1, -1) \\ &= (1 + 2t, -1 + t, 2 - t) \end{aligned}$$

Exercício 266. (Curvas de nível)

– $f(x, y) = \sin x + \cos y$.



Para $|c| > 2$: não temos curva.

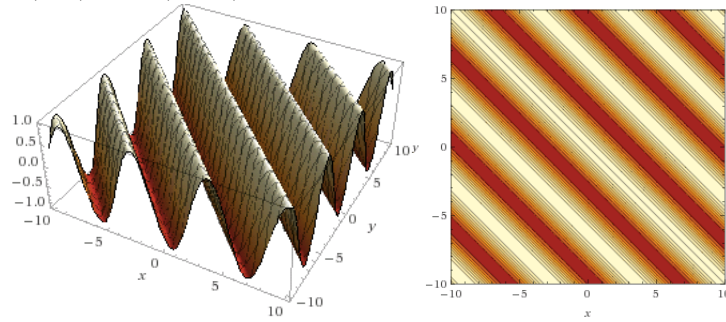
Para N_2 : $N_2 = \{(x, y) \mid \sin y + \cos x = 2\}$. Logo temos $\sin y = 1$ e $\cos x = 1$, isto implica que $x = 2\pi k$ e $y = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$. Portanto

$$N_2 = \left\{ \left(2\pi k, \frac{\pi}{2}(4l + 1) \right) \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

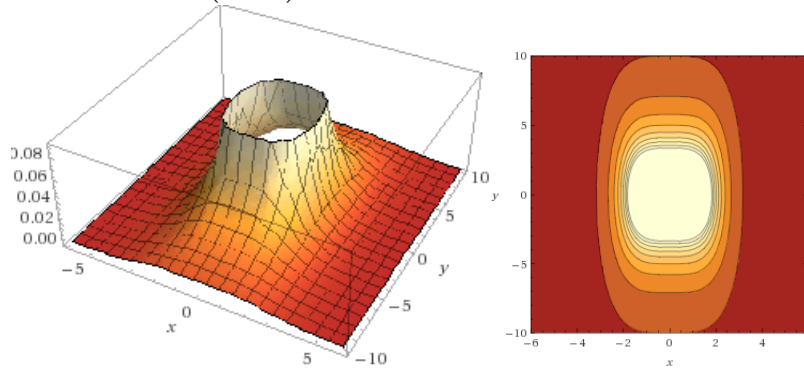
Para N_{2-} : $N_{2-} = \{(x, y) | \operatorname{Sen} y + \cos x = -2\}$. Logo temos $\operatorname{sen} y = -1$ e $\cos x = -1$, isto implica que $x = (2k + 1)\pi$ e $y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Portanto,

$$N_2 = \left\{ \left((2k + 1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\pi l \right) \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

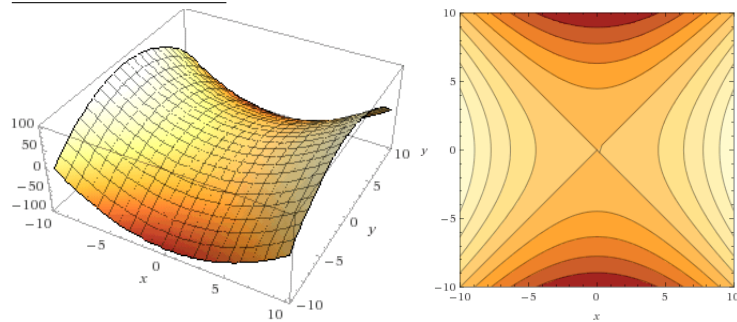
– $f(x, y) = \cos(x + y)$.



– $f(x, y) = \arctan\left(\frac{1}{x^4 + y^2}\right)$



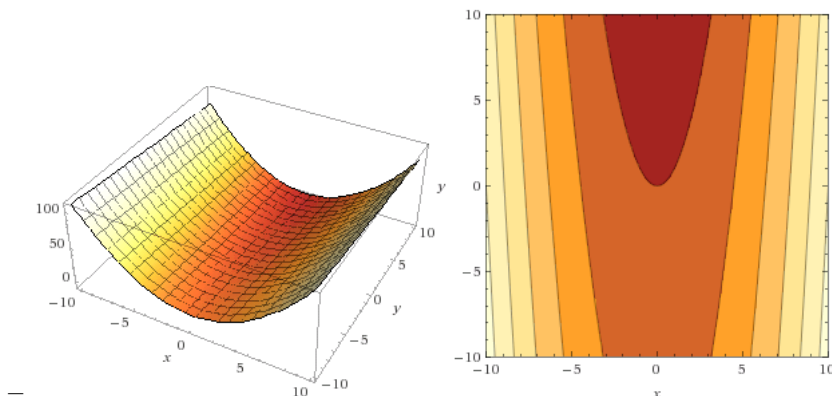
– $f(x, y) = y^2 - x^2$.



N_0 consta de duas retas $y = \pm x$.

Para qualquer outro nível temos hipérbolas.

– $f(x, y) = x^2 - y$. Canaleta, curvas de nível, parábolas.



Exercício 5. (Máximos e mínimos)

Considere a função $f(x, y, z) = z^2 - 4z$ restrita a $E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Os pontos críticos:

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 2(z - 2)) = (0, 0, 0).$$

Os pontos críticos $(x_0, y_0, 2)$ esta fora da região E deve ser excluído.

Estudamos os pontos críticos na borda: $E_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq 1\}$. Parametrizamos $E_1 = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq z \leq 1$.

$$g(\theta, z) := f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = z^2 - 4z.$$

De igual maneira tem ponto crítico fora da região.

$E_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\}$, logo $f|_{E_2} = 0$. Então $\nabla f|_{E_2} = (0, 0, 0)$

De maneira semelhante para $E_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z = 1\}$ temos $f|_{E_3} = -3$ e logo $\nabla f|_{E_3} = (0, 0, 0)$

Temos máximos em E_2 e mínimos em E_3 .

Exercício 6. Determine os máximos e mínimos absolutos de $f(x, y) = x(1 - x^2 - 4y^2)$ restrita ao conjunto $E = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

Pontos críticos:

$$\nabla f(x, y) = (1 - 3x^2 - 4y^2, -8xy) = (0, 0)$$

$$1 - 3x^2 - 4y^2 = 0$$

$$-8xy = 0.$$

Se $x = 0$ então $y = \pm \frac{1}{2}$. Os pontos $(0, \pm \frac{1}{2}) \in E$.

Se $y = 0$ então $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Os pontos $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \in E$.

Pontos críticos na borda: Parametrizamos a elipse $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \sin t)$. Então $g(t) := f(\gamma(t)) = \cos t(0) = 0$. Portanto, temos que os pontos da borda são pontos críticos

Comparação:

$$f|_{\partial E} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3} - 0\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Temos um máximo em $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ e um mínimo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

37. Segunda-feira, 9 de novembro de 2015

Agora abordamos o problema de determinar pontos de máximo o mínimo relativo interiores de uma função real de várias variáveis reais.

Vimos o teorema de Fermat: se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e $\bar{x}$ é ponto interior, é ponto de máximo o mínimo relativo e f possui derivadas parciais em $\bar{x}$ (não precisa ser diferenciável), então $\bar{x}$ é ponto crítico, ou seja, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Neste sentido o teorema de Fermat fornece candidatos:

se $\bar{x}$ é ponto crítico interior, pode ser ponto de máximo o mínimo relativo; se ele é ponto interior e além disso não é crítico, certamente não será de máximo o mínimo relativo.

Analogamente àquilo que acontece em cálculo 1, se f possui derivadas segundas, elas podem dar informações para abordar e resolver o problema.

Como? resumindo o problema: temos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e supomos saber que $\bar{x}$ ponto interior de D e também ponto crítico de f .

Suponhamos (daqui em diante, sempre será assim) que f seja de classe C^2 . Como visto nas aulas anteriores, o teorema de Schwarz implica que a matriz hessiana de f , em $\bar{x}$ como em um ponto qualquer do domínio de f , é simétrica.

À matriz hessiana $H_f(x)$ em um ponto qualquer do domínio é associada a forma quadrática $H_f(x)v \cdot v$, definida para todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Agora precisamos de alguns fatos da álgebra das matrizes.

Seja

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada, simétrica, qualquer, $n \times n$. Dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, seja a forma quadrática associada a M

$$g(v) = Mv \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_j v_i.$$

Definição 86. Dada uma forma quadrática g associada a uma matriz M qualquer, quadrada e simétrica, dizemos que g é

- (1) definida positiva se $g(v) > 0$, para qualquer $v \neq 0$;
- (2) definida negativa se $g(v) < 0$, para qualquer $v \neq 0$;
- (3) semidefinida positiva se $g(v) \geq 0$, para qualquer v ;
- (4) semidefinida negativa se $g(v) \leq 0$, para qualquer v ;
- (5) indefinida se $g(v) > 0$ para alguns v e $g(w) < 0$ para alguns w .

As cinco classes acima podem ser também associadas à matriz M , dizendo que “ M é definida positiva se...”, “ M é definida negativa se...”, etc.

Observe que, de fato, a classe 1 acima está contida na classe 3, assim como a classe 2 acima está contida na classe 4. A matriz nula é semidefinida positiva e negativa ao mesmo tempo (e é a única).

Exercício 267. Considere as matrizes seguintes e diga a qual das classes acima elas pertencem. (Em geral, se uma matriz não é em forma diagonal, é mais complicado resolver o exercício.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Para saber a qual classe pertence uma matriz M , é oportuno usar o conceito de autovalor.

Definição 87. Um número real λ é dito *autovalor* de M se existe um vetor não nulo v tal que

$$Mv = \lambda v.$$

O vetor v se chama *autovetor* de M , relativo a λ .

Exercício 268. Considere as matrizes diagonais do exercício anterior. Prove que os autovalores delas são os elementos das diagonais principais. Determine os autovetores relativos.

Exercício 269. Observe que um autovetor não pode ser nulo. Porque a definição faz esta escolha? Por outro lado um autovalor pode ser tranquilamente nulo.

Teorema 88. Seja M uma matriz quadrada, simétrica, qualquer $n \times n$. Então, M é

- (1) *definida positiva se e somente se todos os autovalores dela são positivos;*
- (2) *definida negativa se e somente se todos os autovalores dela são negativos;*
- (3) *semidefinida positiva se e somente se todos os autovalores dela são ≥ 0 ;*
- (4) *semidefinida negativa se e somente se todos os autovalores dela são ≤ 0 ;*
- (5) *indefinida se e somente se possui autovalores positivos e autovalores negativos.*

Omitimos, por razões práticas, a demonstração (não complicada, mas que precisa de resultados auxiliares de álgebra linear).

Agora, dada M , como conseguimos determinar o sinal dos seus autovalores? Observe-se que não precisa determinar os autovalores, mas somente o sinal deles.

Seja M dada, e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real fixado. O número λ será autovalor de M se e somente se a equação

$$Mx = \lambda x$$

possui uma solução não nula. De fato, tal equação é um sistema linear de n equações em n incógnitas. O sistema é escrito como

$$Mx - \lambda x = (M - \lambda I)x = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Como sabemos da álgebra linear, o sistema acima possui solução não nula se e somente se o determinante de $M - \lambda I$ é zero. Portanto, λ é autovalor se e somente se

$$\det(M - \lambda I) = 0.$$

Variando λ em $\mathbb{R}$, o determinante de $M - \lambda I$ é um polinômio de grau n (a dimensão da matriz) na variável λ . Tal polinômio, denotado por $P(\lambda)$, se chama *polinômio característico* de M .

O problema será determinar o sinal dos autovalores de M . Voltaremos depois a este problema. Concluímos esta parte com um resultado importante da álgebra linear que enunciamos sem demonstração.

Teorema 89. *Os autovalores de uma matriz real, quadrada, simétrica, qualquer $n \times n$ são todos reais.*

* * * * *

Vamos fazer um rápido resumo da situação, para melhor entender o problema e todos os ingredientes que estamos colocando.

Suponhamos ter uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$. Queremos determinar, se possível, os pontos de máximo ou mínimo relativo de f . Exatamente como em cálculo 1, temos três grupos de candidatos:

- a) os pontos que não são interiores a D (i.e. a fronteira, ou borda),
- b) os pontos onde f não possui gradiente,
- c) os pontos interiores onde o gradiente se anula (críticos).

O trabalho destas últimas aulas concerne a busca dos pontos deste último grupo. Saber se os pontos dos dois primeiros grupo são de máximo ou mínimo relativo de f requer uma investigação mais "artesanal", talvez mais difícil, e geralmente não se submete a um método claro como no terceiro caso.

Em cálculo 1, se f possui derivada segunda, e $\bar{x}$ é ponto crítico interior do domínio de uma g , função de uma variável, temos um resultado bem conhecido:

- se $g''(\bar{x}) > 0$, então $\bar{x}$ é ponto de mínimo relativo,
- se $g''(\bar{x}) < 0$, então $\bar{x}$ é ponto de máximo relativo,
- se $g''(\bar{x}) = 0$, a derivada segunda não responde e precisa uma investigação mais refinada (cuidado: $f''(\bar{x}) = 0$ não significa que $\bar{x}$ é ponto de inflexão; pense em $g(x) = x^4$ que tem derivada segunda nula na origem).

Se f é definida em $D \subseteq \mathbb{R}^2$, queremos fazer algo parecido. Se tiver definida, queremos estudar a matriz hessiana em um ponto crítico interior e obter informações sobre a natureza de $\bar{x}$.

Duas observações:

1) suponhamos f de classe C^2 e não simplesmente dotada de derivadas segundas. Assim podemos aplicar o teorema de Schwarz e saber que a matriz hessiana é simétrica. Esta situação é muito melhor. Uma matriz hessiana eventualmente não simétrica pode ser bem complicada. E preferimos evitar estes casos;

2) todo o trabalho que estamos desenvolvendo encontra sua justificativa no fato de que é impossível ter, em cálculo 2, uma resposta rápida que conecte a matriz hessiana com as propriedades de $\bar{x}$ de ser ponto de máximo ou mínimo relativo. Em outras palavras, iremos determinar condições análogas às a), b) e c) escritas acima. Somente que a própria natureza multidimensional do problema requer uma análise bem mais elaborada das derivadas segundas.

Um primeiro resultado importante é o seguinte.

Teorema 90 (condição necessária de segunda ordem). *Seja dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2 . Seja $\bar{x}$ um ponto de máximo ou de mínimo relativo de f , interior a D . Temos as consequências seguintes:*

- i) *se $\bar{x}$ é ponto de mínimo relativo, então $H_f(\bar{x})$ é semidefinida positiva;*
- ii) *se $\bar{x}$ é ponto de máximo relativo, então $H_f(\bar{x})$ é semidefinida negativa.*

Demonstração. Será dada do primeiro dos dois casos. O segundo é análogo. Seja portanto $\bar{x}$ interior e de mínimo relativo. Consideramos a fórmula de Taylor de f de segunda ordem centrada em $\bar{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) - \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0.$$

Sendo $\bar{x}$ de mínimo relativo e interior, pelo teorema de Fermat ele é ponto crítico e a fórmula de Taylor de f se torna

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0.$$

Consideramos um vetor v de $\mathbb{R}^n$ que suponhamos, sem perder em generalidade, de norma 1. Aplicando a proposição 58 sobre o limite de uma composição, temos que o limite acima se mantém nulo ao longo da reta $x = \bar{x} + tv$. Ou seja, sendo $\|v\| = 1$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) - \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(tv) \cdot (tv)}{|t|^2} = 0. \quad (*)$$

Lembrando o exercício 257, temos

$$\frac{H_f(\bar{x})(tv) \cdot (tv)}{|t|^2} = H_f(\bar{x})v \cdot v.$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{H_f(\bar{x})(tv) \cdot (tv)}{2|t|^2} = \frac{1}{2} H_f(\bar{x})v \cdot v.$$

Unendo este fato com o limite (*) anterior, segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{|t|^2} = \frac{1}{2} H_f(\bar{x})v \cdot v.$$

Aplicamos agora o fato de que $\bar{x}$ é ponto de mínimo relativo. Isso implica que, se t é suficientemente pequeno, há $f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) \geq 0$. Portanto, o limite acima, como ele existe, deve necessariamente ser não negativo. Ou seja,

$$H_f(\bar{x})v \cdot v \geq 0.$$

Se agora $w \in \mathbb{R}^n$ tem uma norma qualquer, usando o exercício 257 e o processo acima, aplicado agora a $w/\|w\|$, obtemos

$$H_f(\bar{x})w \cdot w \geq 0.$$

E a prova é completa. □

O resultado seguinte é uma consequência imediata do teorema anterior e a prova é deixada como exercício.

Corolário 91 (condição de segunda ordem – matriz indefinida). *Seja dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2 . Seja $\bar{x}$ um ponto crítico de f interior a D .*

Se $H_f(\bar{x})$ é indefinida, então $\bar{x}$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo.

Exercício 270. Prove o corolário acima.

Exercício 271. Prove o teorema 90, cuidando de todos os detalhes.

Para que serve uma condição necessária como a do teorema 90?

Consideramos $f(x, y) = x^2 + y^4$. É fácil ver que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f e

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz hessiana acima é semidefinida positiva (mas não definida positiva). Observando diretamente f , é imediato ver que $(0, 0)$ é ponto de mínimo absoluto (portanto relativo).

Exercício 272. Verifique os detalhes.

Seja agora $f(x, y) = x^2 - y^4$. Como acima, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f e

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz hessiana acima é semidefinida positiva. De fato, a potência de y é tão alta que a derivada segunda não consegue detectar aquilo que serve para nós. A observação direta de f , deixando do lado a matriz hessiana, diz que $(0, 0)$ é ponto de sela.

Exercício 273. Verifique os detalhes.

Em outras palavras, a condição de $H_f(\bar{x})$ ser semidefinida positiva no ponto crítico $\bar{x}$ é compatível com $\bar{x}$ ser de mínimo relativo ou não ser nem de mínimo nem de máximo. Dirimir a dúvida entre as duas possibilidades é um exercício para o qual a matriz hessiana não serve mais. Aquilo que ela sabe fazer já fez. Agora precisa observar a função e tentar outros caminhos (como nos dois exemplos acima, de fato extremamente simples).

Se f possui matriz hessiana num ponto crítico (interior) semidefinida negativa, a condição é compatível com $\bar{x}$ ser de máximo relativo ou não ser nem de mínimo nem de máximo.

Exercício 274. Procure exemplos para esta situação.

De fato, os dois itens do teorema 90 podem ser enunciados assim:

- i-bis) se $H_f(\bar{x})$ é semidefinida positiva, então $\bar{x}$ não pode ser ponto de máximo relativo;
- ii-bis) se $H_f(\bar{x})$ é semidefinida negativa, então $\bar{x}$ não pode ser ponto de mínimo relativo.

(Excluimos, aqui em cima, o caso em que $H_f(\bar{x})$ é a matriz nula. Neste caso a matriz hessiana não dá nenhuma informação).

Exercício 275. Excluindo o caso em que $H_f(\bar{x})$ é a matriz nula, prove que

- i-bis) vale se e somente se vale i) do teorema;
- ii-bis) vale se e somente se vale ii) do teorema.

38. Sexta-feira, 13 de novembro de 2015

O teorema seguinte se junta aos resultados anteriores como instrumento que usa as derivadas segundas para abordar o problema da busca dos pontos de máximo ou de mínimo relativo de uma função C^2 .

Teorema 92 (condição suficiente de segunda ordem). *Seja dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2 . Seja $\bar{x}$ um ponto crítico de f interior a D . Temos as consequências seguintes:*

- (1) *se $H_f(\bar{x})$ é definida positiva, então $\bar{x}$ é ponto de mínimo relativo;*
- (2) *se $H_f(\bar{x})$ é definida negativa, então $\bar{x}$ é ponto de máximo relativo.*

Demonstração. Apresentamos a prova do primeiro caso. O segundo é análogo.

Suponhamos portanto que $H_f(\bar{x})$ seja definida positiva. Consideramos a fórmula de Taylor de segunda ordem de f centrada em $\bar{x}$, lembrando que o termo de primeira ordem é nulo, sendo $\bar{x}$ crítico por hipótese:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + r(x)$$

onde $r(x)$ o resto, ou erro, de segunda ordem verifica o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0.$$

Para provar que $\bar{x}$ é ponto de mínimo relativo basta mostrar que

$$\frac{1}{2} H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + r(x) \geq 0$$

em uma oportuna região em torno de $\bar{x}$. Ou que é equivalentemente a provar

$$\frac{1}{2} \frac{H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} + \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} \geq 0$$

quando x é próximo de $\bar{x}$ e $x \neq \bar{x}$. Seja $x \neq \bar{x}$ qualquer e seja $v = \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|}$, que é um vetor de norma 1.

Usando ainda uma vez o exercício 257, temos

$$\frac{H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = H_f(\bar{x}) \frac{(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} \cdot \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} = H_f(\bar{x}) v \cdot v.$$

A forma quadrática $g(w) = H_f(\bar{x})w \cdot w$, onde $w \in \mathbb{R}^n$, é definida positiva por hipótese. Se consideramos a restrição dela à esfera $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$, será estritamente positiva. S é um conjunto claramente fechado limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$ e g é contínua (é um polinômio). Portanto, pelo teorema de Weierstrass, possui máximo e mínimo absolutos. Chamo m o mínimo de f em S . Tal m será positivo.

(Exercício 276. Explique porque é positivo.)

Isso implica que, para todo $x \neq \bar{x}$, há

$$\frac{1}{2} \frac{H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} \geq \frac{m}{2}.$$

Usamos agora o fato de que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0.$$

Pegando um valor de ε menor de $m/2$, por exemplo $m/4$, existe, pela definição de limite, $\delta > 0$ tal que, se $\|x - \bar{x}\| < \delta$ e $x \neq \bar{x}$, temos

$$\frac{|r(x)|}{\|x - \bar{x}\|^2} < \frac{m}{4}.$$

Portanto, se $\|x - \bar{x}\| < \delta$ e $x \neq \bar{x}$, segue

$$\frac{1}{2} \frac{H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} + \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} > \frac{m}{4} > 0.$$

Ou seja, $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x - \bar{x}$ de norma menor de δ . Isso é a definição de ponto de mínimo relativo e a demonstração é completa. $\square$

Exercício 277. Faça de novo a demonstração cuidando dos detalhes e prove também o outro caso.

39. Segunda-feira, 16 de novembro de 2015 e

40. Quarta-feira, 18 de novembro de 2015

Estas duas aulas são finalmente dedicadas à aplicação prática do método apresentado até agora para determinação de pontos de máximo e mínimo relativo de uma função de várias variáveis.

Exercício 278. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo de $f(x, y) = x^2 + y^3 - xy$. É importante observar que o domínio de f é $\mathbb{R}^2$ (não sendo explicitamente comunicado um domínio diferente), que têm somente pontos interiores. Além disso, f é um polinômio e portanto é C^2 (é muito mais, possui derivadas de qualquer ordem).

Este argumento acima serve para dizer que os pontos de máximo e mínimo relativo devem ser procurados entre os pontos críticos de f (que serão sempre interiores, neste exercício).

Temos dois pontos críticos, $A = (0, 0)$ e $B = (1/12, 1/6)$. O leitor faça as contas que aqui estamos omitindo.

As matrizes hessianas de f em A e B são:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1/12, 1/6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos agora utilizar o teorema 92, ou o teorema 90 ou o Corolário 91 e portanto precisa saber se as matrizes acima são definidas, semidefinidas ou indefinidas. A resposta a esta pergunta é dada pelo teorema 88: precisa conhecer o sinal dos autovalores.

Consideramos agora $H_f(0, 0)$. O polinômio característico dela é $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$. Este polinômio têm as raízes $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Os autovalores são de sinal contrário; $H_f(0, 0)$ é indefinida (teorema 88, item 5) e portanto $(0, 0)$ é ponto que não é nem de máximo nem de mínimo relativo (corolário 91). O polinômio característico de $H_f(1/12, 1/6)$ é $P_B(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$, e ele tem raízes $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ e $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$. Como elas são positivas, $(1/12, 1/6)$ é ponto de mínimo relativo.

Observação 93 (método prático: caso 2×2). Um fato importante (entre muitos outros) é que não precisa determinar explicitamente os autovalores, basta somente saber o sinal deles. Para este fim a avaliação da matriz hessiana e do polinômio característico se torna simplificada.

Imaginamos um problema genérico, onde temos $f(x, y)$ de classe C^2 e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto crítico interior do domínio. Seja

$$H_f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ é $P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \lambda + \det H_f(\bar{x}, \bar{y})$. Escrevemos ele com uma notação simplificada $\lambda^2 + a\lambda + b$. Sabemos (é bom não esquecer) que as raízes do polinômio são todas reais, sendo a matriz simétrica. Os sinais das raízes do polinômio $\lambda^2 + a\lambda + b$ dependem dos sinais de a e b . Vamos ver os diferentes casos.

- (1) $a > 0, b > 0$. As soluções da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ são dadas pela fórmula

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Supondo a positivo, uma solução é negativa com certeza. A outra é $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Agora, observe que b é suposto positivo. Portanto,

$$\sqrt{a^2 - 4b} < \sqrt{a^2} = a$$

(não precisa colocar $|a|$ acima). Então, λ_2 é também negativa. Resumindo, um polinômio $\lambda^2 + a\lambda + b$ que possui raízes reais e tal que $a > 0$ e $b > 0$ têm raízes negativas. Continuando a análise, lembramos que $b = \det H_f(\bar{x}, \bar{y})$. Se estamos supondo que tal determinante seja positivo, sendo a matriz simétrica, deve necessariamente ser $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$. Supondo $a > 0$ e lembrando que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) = -a$, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})$ devem satisfazer os sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) < 0 \end{cases}$$

O sistema anterior implica que as duas derivadas acima são negativas. Em conclusão, temos um critério para a análise do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$:

se $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico interior, o determinante de $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})$ é negativa (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})$, tanto é de fato a mesma coisa), então $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto de máximo relativo de f .

- (2) $a > 0, b < 0$. Das soluções de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$,

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

uma é certamente negativa, $\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, exatamente como no caso anterior, e isso porque estamos supondo $a > 0$. Sobre $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ a situação é agora diversa. Sendo $b < 0$, há

$$\sqrt{a^2 - 4b} > \sqrt{a^2} = a.$$

Portanto λ_2 é agora positiva. Resumindo:

se $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico interior e o determinante de $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ é negativo, então $(\bar{x}, \bar{y})$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f .

- (3) $a < 0, b > 0$. Este caso é avaliado de um jeito parecido ao caso 1, mas com uma conclusão oposta. As duas soluções de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ são positivas. Ou seja:

se $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico interior, o determinante de $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})$ é positiva (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})$, tanto é de fato a mesma coisa), então $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto de mínimo relativo de f .

- (4) $a < 0, b < 0$. Este caso é idêntico ao caso 2. Quando $b < 0$ o sinal de a é irrelevante. A conclusão é a mesma do caso 2:

se $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto crítico interior e o determinante de $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ é negativo, então $(\bar{x}, \bar{y})$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f .

Exercício 279. O leitor faça de novo a demonstração dos casos 1 e 2 acima, explicando todos os detalhes e explique também os casos 3 e 4.

Exercício 280. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes:

$$f(x, y) = x - x^2 - y^2$$

$$f(x, y) = xy(x - 1)$$

$$f(x, y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$$

$$f(x, y) = x(y + 1) - x^2y$$

$$f(x, y) = x(x + y)e^{y-x}$$

$$f(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

Exercício 281. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$. Como no exercício acima observamos que os únicos candidatos possíveis são os pontos críticos de f (o domínio de f é $\mathbb{R}^3$ e todos os pontos são interiores). O único ponto crítico é $(0, 0, 0)$ e

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aqui acho necessário dizer o seguinte: a tentativa de conhecer o sinal dos autovalores da matriz acima (como de qualquer matriz simétrica 3×3) não se faz como no caso 2×2 . Ou seja, não basta fazer uma avaliação direta do sinal do determinante e dos termos da diagonal principal. Precisa fazer uma avaliação um pouco diferente, que é tratada na observação seguinte.

Observação 94 (método prático: caso 3×3). O polinômio característico da matriz acima é $-(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 18\lambda - 10)$. Se pegamos o polinômio com sinal dos coeficientes trocado, $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 18\lambda - 10$, as raízes são obviamente as mesmas.

Consideramos agora um genérico polinômio $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ (e suponhamos que tenha só raízes reais). Os sinais das raízes depende dos sinais de a, b, c segundo o esquema seguinte:

- (1) As soluções de $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ são todas positivas se e somente se $a < 0, b > 0, c < 0$. Ou seja, contando com o fato de que o primeiro coeficiente é $1 > 0$, as são todas positivas se e somente se têm alternância dos sinais dos coeficientes (exatamente como nas equações de grau 2).
- (2) As soluções de $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ são todas negativas se e somente se $a > 0, b > 0, c > 0$. Ou seja, contando com o fato de que o primeiro coeficiente é $1 > 0$, as são todas negativas se e somente se têm manutenção dos sinais dos coeficientes (exatamente como nas equações de grau 2).
- (3) Temos soluções seja positivas seja negativas em todas as outras combinações dos sinais dos coeficientes (exatamente como nas equações de grau 2).

Vamos ver a demonstração do caso 1. Suponhamos que as três soluções de $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sejam positivas (não necessariamente todas distintas). Chamo elas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. O polinômio $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ pode ser escrito como $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, \text{ e portanto } a < 0; \\ b &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \text{ e portanto } b > 0; \\ c &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \text{ e portanto } c < 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $a < 0, b > 0, c < 0$. Consideramos a função polinomial $g(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Observamos primeiramente que $g(0) = c < 0$. Pegamos agora um qualquer número x negativo. Temos $x^3 < 0, ax^2 < 0, bx < 0$ e $c < 0$. Portanto, $g(x) < 0$. Em outras palavras, g nunca se anula se $x < 0$, ou seja, as soluções de $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ são positivas.

Voltando ao começo do exercício, $(0, 0, 0)$ é ponto de mínimo relativo.

Exercício 282. O leitor faça de novo a demonstração dos caso 1 acima, explicando todos os detalhes e prove também os casos 2 e 3.

Exercício 283. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz \\ f(x, y, z, w) &= x^2 + 2y^2 + z^2 + 2w^2 + yz - 2xw \\ f(x, y) &= xye^{-x^2-y^2} \\ f(x, y) &= xy^2e^{-x^4-y^2} \\ f(x, y) &= x^4 + y^4 - 3(x - y)^2 \\ f(x, y) &= \log(1 + x^2) - x^2 = xy^2 + y^3 + 2 \\ f(x, y, z) &= xyz e^{-x^2-2y^2-3z^2} \end{aligned}$$

41. Segunda-feira, 23 de novembro de 2015

Em algumas aulas anteriores estudamos problemas de máximo e mínimo absolutos em conjuntos limitados e fechados de $\mathbb{R}^n$. Se por exemplo o domínio onde investigamos os extremos de uma função for uma trajetória, uma abordagem clássica consiste em parametrizar a trajetória transformando assim o problema em um problema em uma variável.

Algumas vezes tal conjunto se apresenta dado através dos pontos de anulamento de uma outra função. Por exemplo, podemos tentar determinar o máximo e mínimo absolutos de $f(x, y)$ restrita ao conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2/9 = 1\}$. C é uma elipse que pode ser facilmente parametrizada. Porém, se por exemplo o domínio de investigação do máximo e mínimo absolutos for $= D\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - xy = 1\}$, já é mais difícil parametrizá-lo (e, em princípio, nem fica tão óbvio se D é uma trajetória ou não).

Vamos agora apresentar um método alternativo à parametrização do conjunto onde se investigam os problemas de máximo ou mínimo: o *método dos multiplicadores de Lagrange*.

Este método se apresenta em formas um pouco diferentes dependendo da dimensão do espaço onde a função investigada é definida. Vamos primeiramente ver aquilo que acontece em dimensão 2.

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Seja $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma outra função. (Suponhamos por simplicidade que os domínios de f e g coincidam e que A seja aberto em $\mathbb{R}^2$) Suponhamos que f e g sejam C^1 . Seja $C = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$.

Sabemos que C é um conjunto fechado (em A). Isso porque seu complementar é a união de $C_+ = \{(x, y) \in A : g(x, y) > 0\}$ e $C_- = \{(x, y) \in A : g(x, y) < 0\}$; e pelo teorema da conservação do sinal para funções de várias variáveis é fácil provar que C_+ e C_- são abertos.

Um teorema importante permite dizer se C é de fato uma trajetória: se trata do teorema da função implícita, parte do curso de cálculo 3: vamos aqui usar o enunciado deste teorema em uma versão simplificada:

se $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in C$, então C é uma trajetória regular, ou seja admite uma parametrização por uma curva $\phi(t)$, definida em um oportuno intervalo I , C^1 e regular.

Lembre que "regular" significa que $\phi'(t)$ não se anula para nenhum $t \in I$.

Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Se fala neste caso de um problema de máximo ou mínimo vinculado (C é o vínculo). Seja $\bar{t} \in I$ tal que $\phi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$. Pelos detalhes do teorema da função implícita (que não podem ser analisados aqui) a parametrização ϕ de C pode ser escolhida tal que $\bar{t}$ seja interior ao seu domínio: neste caso existe um intervalo $(\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta)$ contido em I .

Sendo $(\bar{x}, \bar{y})$ ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C , então $\bar{t}$ se torna ponto de máximo ou de mínimo relativo de $f \circ \phi$, e, como $\bar{t}$ é interior a I , pode ser aplicado o teorema de Fermat de cálculo 1, obtendo

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0.$$

Sendo f de classe C^1 , podemos aplicar a regra de derivação da função composta (regra da cadeia):

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0 = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \phi'(\bar{t}).$$

Consideramos agora a composição $g \circ \phi$. Pela definição de C , tal composição é a função nula. Portanto

$$(g \circ \phi)'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

g é C^1 e podemos aplicar a regra da cadeia;

$$(g \circ \phi)'(t) = 0 = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \phi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Os vetores de $\mathbb{R}^2$ $\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$ são ortogonais ao mesmo vetor $\phi'(\bar{t})$ e, sendo $\phi'(\bar{t})$ não nulo, são paralelos. Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

(Exercício 284. Porque não podemos escrever $\lambda \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$? Explique o que poderia acontecer se o vetor tangente $\phi'(\bar{t})$ fosse nulo.)

Acabamos de provar o resultado que vamos enunciar aqui.

Teorema 95 (dos multiplicadores de Lagrange: caso em dimensão 2). *Sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, aberto. Suponhamos que f e g sejam C^1 . Seja $C = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Suponhamos $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in C$. Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Em outras palavras, se $(\bar{x}, \bar{y})$ é ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C , existe λ tal que $(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ é ponto crítico da função lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Exercício 285. Determine os pontos candidatos a serem pontos de máximo ou mínimo relativo das funções seguintes relativas aos vínculos escritos ao lado

$$\begin{array}{ll} 2x^3 + 3y, & x^2 + y^2 = 1; \\ x + y, & \arctg(x - y) = x; \end{array}$$

$$x^2 - y, \quad \log(x^2 + y) = y.$$

Os três conjuntos acima são fechados em $\mathbb{R}^2$. O leitor explique, sem entrar nos detalhes de cálculo prático, porque. O leitor verifique quais conjuntos acima são limitados. Neste caso, o problema admite máximo e mínimo absolutos. Determine tais valores e os pontos onde são atingidos.

O teorema dos multiplicadores de Lagrange dá uma condição necessária para um ponto se de máximo ou mínimo relativo vinculado. Neste caso, para determinar se um ponto candidato é de fato de máximo ou mínimo relativo vinculado, precisaria de condições de segunda ordem, do tipo análogo àquelas estudadas para pontos críticos interiores aos domínios de funções C^2 . Tais condições são mais complicadas e não serão tratadas. O leitor tente, nos exercícios acima, estudar os pontos candidatos.

Exercício 286. Verifique, usando o teorema da função implícita, se os três vínculos acima são de fato trajetórias. Tente ver se uma parametrização é fácil a ser encontrada (certamente é no caso 1) e aborde os exercícios com as duas técnicas (multiplicadores de Lagrange e parametrização do vínculo). Os resultados devem coincidir.

Exercício 287. Determine com as duas técnicas (multiplicadores de Lagrange e parametrização do vínculo) o máximo e o mínimo absoluto (e os pontos onde são atingidos) das funções seguintes sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

$$x + 2y, \quad |x|^a + |y|^a \quad (a > 0), \quad e^{x+y}, \quad e^x + e^y, \quad x^k y^n$$

k, n inteiros e positivos.

Exercício 288. Determine o máximo e o mínimo das funções seguintes sobre o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$x^2 - y^2 + xy, \quad x + y^2x - x^2y, \quad 2xy - x^2 - y^4, \quad 2x - 3\log(1 + x + 3y).$$

42. Quarta-feira, 25 de novembro de 2015

Exercício 289. O leitor reconstitua nos detalhes e nas demonstrações o método dos multiplicadores de Lagrange visto na aula do dia 23.

Exercício 290. Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x^2 + 3y$ em relação ao vínculo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2/9 = 1\}$. Use as duas técnicas (multiplicadores de Lagrange e parametrização do vínculo). Verifique todos os detalhes, em particular prove que as condições que permitem a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange são satisfeitas.

Exercício 291. Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y) = ay + \frac{1}{2}b((x-1)^2 + y^2)$ restrita à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Suponhamos agora que o problema seja calcular pontos de máximo o mínimo relativo o absoluto de $f(x, y, z)$ restrita a um vínculo que é o conjunto das soluções de $g(x, y, z) = 0$. Ou seja, o problema é colocado em dimensão 3. Podemos aplicar aqui também o método dos multiplicadores de Lagrange. Vamos ver como e vamos somente dar uma ideia da justificativa. A prova completa requer conceitos de cálculo 3 (estudo das superfícies em $\mathbb{R}^3$) e não pode ser explicada aqui em detalhes. Mas, tal ideia é muito parecida com o caso bidimensional acima.

Sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, aberto. Suponhamos que f e g sejam C^1 . Seja $C = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0\}$. Suponhamos $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in C$. Neste caso, uma versão do teorema da função implícita diz que C é uma superfície regular.

Em particular, pelo menos localmente, os pontos de C têm entre eles uma relação tal que uma variável é função das duas outras.

Exercício 292. Pegue por exemplo um elipsóide, um parabolóide ou um hiperbolóide (escolha as equações relativas) e mostre como tais superfícies podem ser escritas como gráficos, pelo menos localmente.

Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Seja $\phi(t)$ uma curva qualquer, C^1 e regular com imagem em C (existe; não entramos aqui em detalhes) e seja $\bar{t}$ tal que $\phi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, com $\bar{t}$ interior ao domínio de ϕ .

Sendo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C , então $\bar{t}$ se torna ponto de máximo ou de mínimo relativo de $f \circ \phi$, e, como $\bar{t}$ é interior a I , pode ser aplicado o teorema de Fermat de cálculo 1, obtendo

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0.$$

Sendo f de classe C^1 , podemos aplicar a regra de derivação da função composta (regra da cadeia):

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0 = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \phi'(\bar{t}).$$

Consideramos agora a composição $g \circ \phi$. Pela definição de C , tal composição é a função nula. Portanto

$$(g \circ \phi)'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

g é C^1 e podemos aplicar a regra da cadeia;

$$(g \circ \phi)'(t) = 0 = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \phi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Os vetores de $\mathbb{R}^3$ $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são ortogonais ao mesmo vetor $\phi'(\bar{t})$, que é não nulo. Sendo tudo este argumento em $\mathbb{R}^3$, não podemos concluir que $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são paralelos. A situação é mais variada. Somente que o processo acima pode ser replicado para qualquer outra curva $\psi(t)$ com imagem em C . Os dois vetores $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se tornam de fato ortogonais a todos os vetores tangentes à superfície C em $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, ou seja ao plano tangente em $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Agora sim: sendo $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ortogonais a um plano, eles são paralelos. Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

O teorema seguinte é o análogo do acima em dimensão 3, no caso de 1 vínculo.

Teorema 96 (dos multiplicadores de Lagrange: caso em dimensão 3 com vínculo único). *Sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, aberto. Suponhamos que f e g sejam C^1 . Seja $C = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0\}$. Suponhamos $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in C$. Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Como acima, existe λ tal que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \lambda)$ é ponto crítico da função lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Exercício 293. Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = x + y - \sqrt{6}$ sobre a esfera centrada na origem de $\mathbb{R}^3$ com raio 1.

Exercício 294. Determine as arestas de uma caixa C com forma de paralelepípedo, sem tampa, tais que o volume de C seja máximo e a área seja 12.

43. Sexta-feira, 27 de novembro de 2015

O último caso de problemas de extremos vinculados que abordamos neste curso é o estudo de uma função de três variáveis sujeita a dois vínculos.

Assim como no problema da aula anterior, podemos dar somente uma ideia da demonstração que leva a construir o método, sendo necessária para uma demonstração completa a teoria das superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Queremos calcular pontos de máximo o mínimo relativo o absoluto de $f(x, y, z)$ restrita a um vínculo que é o conjunto das soluções de um sistema

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Suponhamos $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, aberto. Suponhamos que as funções sejam C^1 . Seja C o conjunto das soluções do sistema anterior. Suponhamos que $\nabla g(x, y, z)$ e $\nabla h(x, y, z)$ não sejam paralelos para todo $(x, y, z) \in C$. Neste caso, uma outra versão do teorema da função implícita diz que C é uma trajetória regular.

Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Seja $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de C e $\bar{t} \in I$ tal que $\phi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Suponhamos como acima que $\bar{t}$ seja interior ao seu domínio: neste caso existe um intervalo $(\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta)$ contido em I .

Sendo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C , então $\bar{t}$ se torna ponto de máximo ou de mínimo relativo de $f \circ \phi$, e, como $\bar{t}$ é interior a I , pode ser aplicado o teorema de Fermat de cálculo 1, obtendo

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0.$$

Sendo f de classe C^1 , podemos aplicar a regra de derivação da função composta (regra da cadeia):

$$(f \circ \phi)'(\bar{t}) = 0 = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \phi'(\bar{t}).$$

Consideramos agora a composição $g \circ \phi$. Pela definição de C , tal composição é a função nula. Portanto

$$(g \circ \phi)'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

g é C^1 e podemos aplicar a regra da cadeia;

$$(g \circ \phi)'(t) = 0 = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \phi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Os vetores de $\mathbb{R}^2$ $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são ortogonais ao mesmo vetor $\phi'(\bar{t})$ que é não nulo. Diversamente do primeiro caso, tratado na aula 41, temos dois vetores de $\mathbb{R}^3$ que, mesmo sendo ortogonais ao mesmo vetor, não necessariamente são paralelos (porque estão em $\mathbb{R}^3$). Vamos todavia considerar a função h e a composição $h \circ \phi$. Pela definição de C , tal composição é a função nula. Portanto

$$(h \circ \phi)'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

h é C^1 e podemos aplicar a regra da cadeia;

$$(h \circ \phi)'(t) = 0 = \nabla h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \phi'(t), \quad \forall t \in I.$$

A hipótese que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ não são paralelos, permite dizer que eles geram um plano. O vetor $\phi'(t)$ é ortogonal a este plano e $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é ortogonal a este vetor. Portanto $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pertence a este plano.

(Exercício 295. Onde estamos usando o fato de que $\phi'(\bar{t})$ é não nulo?)

Resumindo, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \mu \nabla h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

O teorema pode ser enunciado.

Teorema 97 (dos multiplicadores de Lagrange: caso em dimensão 3 com dois vínculos). *Sejam $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, aberto. Suponhamos que as funções sejam C^1 . Seja $C = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$. Suponhamos que $\nabla g(x, y, z)$ e $\nabla h(x, y, z)$ não sejam paralelos para todo $(x, y, z) \in C$. Suponhamos agora que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja ponto de máximo ou de mínimo relativo de f restrita a C . Então, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \mu \nabla h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Ou seja, existem λ, μ tais que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \lambda, \mu)$ é ponto crítico da função lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

Exercício 296. Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = x + 3y - z$ no conjunto C definido pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ z = 2x + 4y. \end{cases}$$

O problema pode ser abordado seja parametrizando o vínculo, seja usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Tentem os dois métodos verificando se as soluções coincidem (devem coincidir).

Exercício 297. Determine o máximo e o mínimo das funções seguintes nos conjuntos definidos ao lado

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x + 3y - 2z = 4$$

$$3x^2 + 2y^2 + 4z^2, \quad 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y - 3z - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad x + y - z + 2t = 2 \quad \text{e} \quad 2x - y + z + 3t = 3$$

$$2x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 y z = 1$$

Exercício 298. Queremos construir um objeto A que tem a forma de um cilindro com base circular e tal que na base superior se apoia um cone circular com o mesmo disco de base. Se a base do cilindro tem diâmetro 10 e a superfície total é 100, determine a altura H do cilindro e a altura h do cone tais que o volume seja máximo.

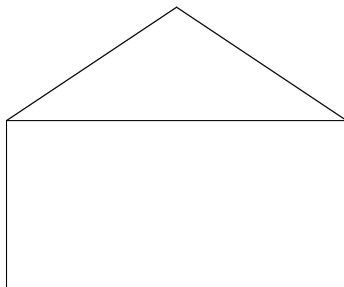
Exercício 299. Seja $a = (a_1, \dots, a_n)$ um vetor de $\mathbb{R}^n$. Determine o máximo do produto escalar $a \cdot x$ definido para os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ de norma 1.

Exercício 300. Para os vetores do mesmo conjunto do exercício acima, determine o máximo e o mínimo da função $x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$.

Exercício 301. Determine o ponto (ou os pontos) da trajetória de equação $x^4 + y^4 + 3xy = 2$ mais longe da origem e aquele mais próximo.

Exercício 302. Um trapézio isósceles T é construído a partir de uma vara de medida 54 cm. Quais são as dimensões dos lados de T se a vara é entortada para obter a base menor e os dois lados oblíquos (e um outro segmento é colocado como base maior)?

Exercício 303. Um pentágono é composto por um retângulo com em cima um triângulo isósceles



Se o pentágono tem perímetro fixado P , determine as medidas dos lados que produzem a área máxima.

Exercício 304. Determine um ponto sobre a parábola $y = x^2$ tal que a soma dos quadrados das distâncias dele dos pontos $(-3, 0)$, $(0, 7/2)$ e $(1, 0)$ seja mínima.