

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins



EDITORA UFOP

2014

Sumário

Sumário	3
1 Funções Elementares	17
1.1 Introdução	17
1.2 Definição	17
1.3 Gráfico de uma função	18
1.4 Domínio de uma Função	19
1.4.1 Função Polinomial	19
1.4.2 Função Racional	20
1.4.3 Função Irracional	21
1.5 Composição de Funções	23
1.6 Tipos de Funções	24
1.6.1 Função Polinomial do Primeiro Grau	24
1.6.2 Função Polinomial do Segundo Grau	24
1.6.3 Função Modular	25
1.6.4 Funções Periódicas	26
1.6.5 Função Par	26
1.6.6 Função Ímpar	27
1.6.7 Função Injetora	27
1.6.8 Função Sobrejetora	27
1.6.9 Função Bijetora	28
1.6.10 Função Inversa	28
1.6.11 Caso Especial	29
1.6.12 Função Exponencial	31

1.6.13	Função Logarítmica	32
1.7	Funções Trigonométricas	33
1.7.1	Função seno	33
1.7.2	Função Arco Seno	33
1.7.3	Função Cosseno	34
1.7.4	Função Arco Cosseno	35
1.7.5	Funções Tangente	36
1.7.6	Função Arco Tangente	36
1.7.7	Função Cotangente	37
1.7.8	Função Arco Cotangente	38
1.7.9	Função Secante	38
1.7.10	Função Arco Secante	39
1.7.11	Função Co-secante	39
1.7.12	Função Arco Co-secante	40
1.8	Exercícios Resolvidos	41
1.9	Exercícios Propostos	57
2	Limites	61
2.1	Definição	63
2.2	Limites Laterais	64
2.3	Propriedades e Operações com Limites	65
2.4	Indeterminações	66
2.5	Limites no Infinito	67
2.6	Limites Infinitos	67
2.7	Limites Fundamentais	69
2.8	Limites: Exercícios Resolvidos	69
2.9	Exercícios Propostos	92
3	Funções Contínuas	95
3.1	Introdução	95
3.2	Definição	95
3.3	Propriedades	95
3.4	Teorema do Valor Intermediário	96

4	Derivadas e Integrais	103
4.1	Derivada	103
4.1.1	Interpretação Geométrica	103
4.1.2	Derivada de uma Função num ponto	104
4.1.3	Derivada de uma Função	104
4.1.4	Derivada da Função Inversa	104
4.1.5	Regras Elementares: Derivadas Imediatas	105
4.2	Integral	109
4.2.1	Primitiva de uma Função	109
4.2.2	Integral Indefinida	109
4.2.3	Regras Elementares: Integrais Imediatas	110
4.3	Derivadas e Integrais de Funções Elementares	111
4.3.1	Função Exponencial	112
4.3.2	Derivada da Função Exponencial	112
4.3.3	Integral Indefinida da Função Exponencial	112
4.3.4	Função Logarítmica	113
4.3.5	Derivada da Função Logarítmica	113
4.3.6	Integral Indefinida da Função Logarítmica	113
4.4	Derivadas e Integrais de Funções Trigonômicas	113
4.4.1	Função seno	113
4.4.2	Função Arco Seno	114
4.4.3	Derivada da Função Seno	114
4.4.4	Derivada da Função Arco seno	114
4.4.5	Integral da Função Seno	115
4.4.6	Integral da Função Arco Seno	115
4.4.7	Função Cosseno	115
4.4.8	Função Arco Cosseno	116
4.4.9	Derivada da Função Cosseno	116
4.4.10	Derivada da Função Arco Cosseno	116
4.4.11	Integral da Função Cosseno	117
4.4.12	Integral da Função Arco Cosseno	117
4.4.13	Funções Tangente	117

4.4.14	Função Arco Tangente	118
4.4.15	Derivada da Função Tangente	118
4.4.16	Derivada da Função Arco Tangente	118
4.4.17	Integral da Função Tangente	118
4.4.18	Integral da Função Arco Tangente	119
4.4.19	Função Cotangente	119
4.4.20	Função Arco Cotangente	119
4.4.21	Derivada da Função Cotangente	119
4.4.22	Derivada da Função Arco Cotangente	119
4.4.23	Integral da Função Cotangente	120
4.4.24	Integral da Função Arco Cotangente	120
4.4.25	Função Secante	120
4.4.26	Função Arco Secante	120
4.4.27	Derivada da Função Secante	120
4.4.28	Derivada da Função Arco Secante	120
4.4.29	Integral da Função Secante	121
4.4.30	Integral da Função Arco Secante	121
4.4.31	Função Co-secante	121
4.4.32	Função Arco Co-secante	121
4.4.33	Derivada da Função Co-secante	121
4.4.34	Derivada da Função Arco Co-secante	121
4.4.35	Integral da Função Co-secante	122
4.4.36	Integral da Função Arco Co-secante	122
4.4.37	Tabela de Derivadas	123
4.4.38	Tabela de Integrais	124
5	Aplicações da Derivada	125
5.1	Aplicações Elementares	125
5.1.1	Taxa de Variação	125
5.1.2	Velocidade e Aceleração	125
5.2	Exercícios Resolvidos: Aplicações	126
5.2.1	Diferencial	134

5.3	Regra de L'Hospital	140
5.3.1	Exercícios Resolvidos: Regra de L'Hospital	140
5.4	Máximos e Mínimos	151
5.4.1	Máximo Relativo	151
5.4.2	Mínimo Relativo	151
5.4.3	Extremo Relativo	151
5.4.4	Extremo Absoluto	152
5.4.5	Monótona Crescente	152
5.4.6	Monótona Decrescente	152
5.4.7	Intervalos de Monotocidade	152
5.4.8	Crítério da Derivada Primeira	152
5.4.9	Crítério da Derivada Segunda	152
5.4.10	Concavidade voltada para Cima	153
5.4.11	Concavidade voltada para Baixo	153
5.4.12	Crítério Geral sobre Concavidade	153
5.4.13	Ponto de Inflexão	153
5.4.14	Assíntotas	153
5.4.15	Assíntota Vertical	154
5.4.16	Assíntota Horizontal	154
5.5	Exercícios Propostos	160
6	Métodos de Integração	165
6.1	Método da Substituição	165
6.1.1	Exercícios Resolvidos: Método da Substituição de Variável	166
6.2	Método de Integração por Partes	176
6.2.1	Exercícios Resolvidos: Método de Integração por Partes	176
6.3	Método das Frações Parciais	187
6.3.1	Exercícios Resolvidos: Método das Frações Parciais	188
6.4	Método de Substituições Trigonométricas	192
6.4.1	Exercícios Resolvidos: Substituições Trigonométricas	192
6.5	Integral Definida	203
6.6	Teorema Fundamental do Cálculo	203

6.7	Propriedades	204
6.8	Aplicações da Integral	204
6.9	Cálculo de Áreas	205
6.10	Exercícios Resolvidos	207
6.11	Exercícios Propostos	220
7	Apêndice: Matemática Elementar	223
7.1	Fórmulas e Identidades Notáveis	223
7.1.1	Leis da Exponenciação e Radiciação	224
7.1.2	Raízes da Equação do 2º Grau	224
7.1.3	Fatoração	224
7.1.4	Exercícios Elementares	224
7.2	CONJUNTOS NUMÉRICOS	228
7.2.1	Introdução	228
7.2.2	Descrições dos Conjuntos Numéricos	228
7.2.3	Propriedades	231
7.2.4	Desigualdades	233
7.2.5	Valor Absoluto	233
7.2.6	Exemplos	234
7.2.7	Exercícios Propostos	241

Capítulo 6

Métodos de Integração

6.1 Método da Substituição

A ideia deste método consiste em reescrever a expressão do integrando, original de forma equivalente, através de outra expressão, para que o novo integrando produza uma nova integral cuja solução seja conhecida. Em linhas gerais, a técnica consiste essencialmente numa mudança de variável para que seja possível escrever de forma equivalente à expressão original. Este processo é análogo à regra da cadeia para derivação. Isto é, sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponha que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F . Considera-se a função composta $F(g(x))$, então pela regra da cadeia, tem-se

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva para $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Assim sendo,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c. \quad (A)$$

Fazendo

$$u = g(x), \quad du = g'(x)dx \quad \text{e substituindo em } (A)$$

vem que

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c.$$

Na prática, deve-se então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.1.1 Exercícios Resolvidos: Método da Substituição de Variável

(1) Calcule a integral $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$.

Solução. Seja $u = 1 + x^2$ então $\frac{du}{dx} = 2x$, ou seja, $du = 2x dx$, então

$$\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c.$$

Como $u = 1 + x^2$; segue que

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = \ln|1+x^2| + c = \ln(1+x^2) + c.$$

(2) Encontre a solução de $\int \text{sen}^2 x \cos x dx$.

Solução. Seja $u = \text{sen} x$ então $\frac{du}{dx} = \cos x$, isto é, $du = \cos x dx$, então

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c.$$

Como $u = \text{sen} x$ segue que,

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c.$$

(3) Determine o valor de $\int \cos(x+8) dx$.

Solução. Seja $u = x + 8$ então $\frac{du}{dx} = 1$, isto é, $du = dx$ então

$$\int \cos(x+8) dx = \int \cos u du = \text{sen} u + c.$$

Como $u = (x + 8)$ segue que,

$$\int \cos(x+8) dx = \text{sen}(x+8) + c.$$

(4) Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$.

Solução. Observe que

$$x^2 + 6 + 13 = x^2 + 6x + 9 + 4 = (x + 3)^2 + 4.$$

Seja $x + 3 = u$ então $du = dx$, assim sendo,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4} = \int \frac{du}{x^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} + c.$$

Como $u = x + 3$ segue que

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 3}{2} + c.$$

(5) Determine o valor de $\int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1} dx$.

Solução. Considere, $u = \sqrt{x - 2} \Rightarrow u^2 = x - 2 \Rightarrow x = u^2 + 2 \Rightarrow dx = 2udu$.

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1} dx = \int \frac{u}{(u^2 + 2) + 1} 2udu = 2 \int \frac{u^2 du}{u^2 + 3}.$$

Somando-se e subtraindo-se 3 ao numerador, tem-se

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{(u^2 + 3 - 3)du}{u^2 + 3} &= 2 \left[\int \frac{u^2 + 3}{u^2 + 3} - 3 \int \frac{du}{u^2 + 3} \right] \\ &= 2 \left[\int du - 3 \int \frac{du}{u^2 + 3} \right] = 2 \left[u - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{3}} + c \right]. \end{aligned}$$

Substituindo-se, $u = \sqrt{x - 2}$, o resultado é dado por,

$$\int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1} dx = 2 \left[\sqrt{x - 2} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{3}} + c \right].$$

(6) Calcule $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx$.

Solução. Escolhendo-se a substituição $u = (2x^2 + 2x - 3)$ é fácil observar que

$$du = (4x + 2)dx = 2(2x + 1)dx \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (2x + 1)dx.$$

Desta forma, o resultado segue e dada por:

$$\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx = \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c = \frac{1}{22} (2x^2 + 2x - 3)^{11} + c.$$

(7) Determine $\int (e^{2t} + 2)^{\frac{1}{3}} e^{2t} dt$.

Solução. A partir da substituição $u = (e^{2t} + 2)$ obtém-se,

$$du = (2e^{2t})dt \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (e^{2t})dt.$$

Portanto,

$$\int (e^{2t} + 2)^{\frac{1}{3}} (e^{2t}) dt = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8} (e^{2t} + 2)^{\frac{4}{3}} + c.$$

(8) Calcule $\int \frac{2 \sec^2 x}{(a+b) \operatorname{tg} x} dx$.

Solução. Seja $u = (a+b) \operatorname{tg} x$ então $du = (a+b) \sec^2 x dx$.

Como,

$$\frac{2du}{(a+b)} = 2 \sec^2 x dx,$$

segue que;

$$\int \frac{2 \sec^2 x}{(a+b) \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1}{u} \frac{2}{(a+b)} du = \frac{2}{(a+b)} \int \frac{du}{u}.$$

Portanto,

$$\int \frac{2 \sec^2 x}{(a+b) \operatorname{tg} x} dx = \frac{2}{(a+b)} \ln |u| + c = \frac{2}{(a+b)} \ln |(a+b) \operatorname{tg} x| + c.$$

(9) Encontre $\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5}$.

Solução. Efetuando-se a substituição $u = 1 + \sqrt{v}$, obtém-se $2du = \frac{dv}{\sqrt{v}}$.

Portanto,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5} = \int \frac{2du}{u^5} = 2 \cdot \int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{2u^4} + c = -\frac{1}{2(1+\sqrt{v})^4} + c.$$

(10) Determine $\int x^4 e^{-x^5} dx$.

Solução. Seja $u = (-x^5)$ então, segue que $\frac{-du}{5} = (x^4) dx$.

Portanto,

$$\int x^4 e^{-x^5} dx = - \int \frac{du}{5} e^u = -\frac{1}{5} \int e^u du = -\frac{1}{5} e^u + c = -\frac{1}{5} e^{-x^5} + c.$$

(11) Calcule $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$.

Solução. Considere a substituição, $u = \ln x$ então $du = \frac{dx}{x}$.

Portanto,

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c.$$

(12) Determine o valor da $\int \sec^2(5x + 3) dx$.

Solução. Seja $u = 5x + 3$, então $\frac{du}{5} = dx$.

Portanto,

$$\int \sec^2(5x + 3) dx = \int \frac{\sec^2 u du}{5} = \frac{1}{5} \int \sec^2 u du = \frac{1}{5} \operatorname{tg} u + c = \frac{1}{5} \operatorname{tg}(5x + 3) + c.$$

(13) Calcule $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 16} dx$.

Solução. Seja $u = e^x$ então $du = e^x dx$.

Portanto,

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 16} = \int \frac{du}{u^2 + 16} = \int \frac{du}{u^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{4} + c = \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e^x}{4} + c.$$

(14) Calcule $\int \sqrt{3t^4 + t^2} dt$.

Solução. Considere $u = 3t^2 + 1$ então $du = 6t dt$, ou seja, $\frac{du}{6} = t dt$.

Observe que,

$$\int \sqrt{3t^4 + t^2} dt = \int \sqrt{t^2(3t^2 + 1)} dt = \int t(\sqrt{3t^2 + 1}) dt.$$

Portanto,

$$\frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{18} (3t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Assim sendo,

$$\int \sqrt{3t^4 + t^2} dt = \frac{2}{18} (3t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(15) Determine $\int xe^{3x^2} dx$.

Solução. Seja $u = 3x^2$ então tem-se, $du = 6xdx$ isto é, $\frac{du}{6} = xdx$.

Portanto,

$$\int xe^{3x^2} dx = \int \frac{du}{6} e^u = \frac{1}{6} \int e^u du = \frac{1}{6} e^u + c = \frac{1}{6} e^{3x^2} + c.$$

(16) Encontre o valor de $\int (\sen 4x + \cos 2\pi) dx$.

Solução.

$$\int (\sen 4x + \cos 2\pi) dx = \int \sen 4x dx + \int \cos 2\pi dx = \int \sen 4x dx + \cos 2\pi \int dx.$$

Resolvendo-se a primeira integral, isto é, utilizando-se a substituição, $u = 4x$, segue que $du = 4dx$. Portanto,

$$\int \sen 4x dx = \int \sen u \frac{du}{4} = -\frac{1}{4} \cos u + c_1 = -\frac{1}{4} \cos 4x + c_1.$$

Por outro lado,

$$\cos 2\pi \int dx = x \cos 2\pi + c_2 = x + c_2.$$

Assim sendo, escolhendo-se, $c = c_1 + c_2$. O resultado é dado por,

$$\int (\sen 4x + \cos 2\pi) dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + x + c.$$

(17) Calcule $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Solução. Seja $u = \sqrt{x}$ então $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, isto é, $2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Portanto,

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos u du = 2 \sen u + c = 2 \sen \sqrt{x} + c.$$

Logo,

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \sen \sqrt{x} + c.$$

(18) Calcule $\int \frac{3dx}{x^2 - 4x + 1}$.

Solução. Seja $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + (4 - 4) + 1 = (x - 2)^2 - 3$, segue então que,

$$\int \frac{3dx}{x^2 - 4x + 1} = 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 3}.$$

Efetuando-se a substituição $u = x - 2$, tem-se, $du = dx$.

Portanto,

$$3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 3} = 3 \int \frac{du}{(u^2 - 3)} = 3 \int \frac{du}{u^2 - (\sqrt{3})^2}.$$

Assim sendo, aplicando-se a tabela de integrais e voltando-se a variável original, o resultado é dado por;

$$\int \frac{3dx}{x^2 - 4x + 1} = 3 \ln \left| \frac{u + \sqrt{3}}{u - \sqrt{3}} \right| + c = 3 \ln \left| \frac{(x - 2) + \sqrt{3}}{(x - 2) - \sqrt{3}} \right| + c.$$

(19) Determine o valor de $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx$.

Solução. Observe que,

$$\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx = \int (e^{2ax} + 2e^{-ax}e^{ax} + 2e^{-2ax})^2 dx = \int e^{2ax} dx + \int 2dx + \int e^{-2ax} dx.$$

Efetuando-se a substituição, $u = 2ax \Rightarrow du = 2adx \Rightarrow \frac{du}{2a} = dx$, segue que, a primeira, segunda e terceira integrais, podem ser escritas, respectivamente, como;

$$\frac{1}{2a} \int e^u du, \quad 2 \int dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{2a} \int e^{-u} du.$$

Portanto, o resultado é dado por,

$$\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx = \left(\frac{1}{2a} e^{2ax} + 2x - \frac{1}{2a} e^{-2ax} \right) + c.$$

(20) Determine o valor de $\int 2x^2 \sqrt{6x^3 + 1} dx$.

Solução. Considere a substituição

$$u = 6x^3 + 1 \implies du = 18x^2 dx \implies \frac{du}{9} = 2x^2 dx.$$

Portanto,

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{1}{9} \int \sqrt{u}du = \frac{1}{9} \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{9} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} + c.$$

O resultado é dado por

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{2}{27} (6x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(21) Calcule o valor de $\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} dx$.

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \operatorname{sen} x \implies du = \cos x dx,$$

segue que

$$\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{du}{3 - u}.$$

Mas, substituindo-se

$$v = 3 - u \implies dv = -du.$$

O resultado pode ser escrito como

$$\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{du}{3 - u} = - \int \frac{dv}{v} = - \ln v + c = - \ln(3 - u) + c = - \ln(3 - \operatorname{sen} x) + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} dx = \ln(3 - \operatorname{sen} x)^{-1} + c.$$

(22) Determine o valor de $\int \frac{\operatorname{arcsen} \theta}{2\sqrt{1 - \theta^2}} d\theta$.

Solução. Neste caso, considere a substituição,

$$u = \operatorname{arcsen} \theta \implies du = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} \theta}{2\sqrt{1 - \theta^2}} d\theta = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\operatorname{arcsen} \theta)^2}{4} + c.$$

(23) Encontre o valor de $\int \frac{2\operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} dx$.

Solução. Observe o seguinte,

$$\int \frac{2\operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx - 5 \int \frac{\cos x}{\cos x} dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx - 5 \int dx.$$

A solução da primeira integral é obtida mediante a substituição

$u = \cos x \implies du = -\operatorname{sen} x dx$, ou seja,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln(\cos x).$$

Assim sendo

$$\int \frac{2\operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx - 5 \int dx = -2 \ln(\cos x) - 5x + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{2\operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} dx = -2 \ln(\cos x) - 5x + c = 2 \ln(\sec x) - 5x + c.$$

(24) Determine o valor de $\int \frac{5 dx}{x \ln^2 5x}$.

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \ln 5x \implies du = \frac{5}{5x} dx = \frac{dx}{x},$$

tem-se

$$\int \frac{5 dx}{x \ln^2 5x} = 5 \int \frac{dx}{x \ln^2 5x} = 5 \int \frac{du}{u^2} = 5 \int u^{-2} du = 5 \frac{u^{-1}}{-1} + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{5 dx}{x \ln^2 5x} = -\frac{5}{\ln 5x} + c.$$

(25) Determine o valor de $\int \frac{x}{2} \cos x^2 dx$.

Solução. Considere a substituição,

$$u = x^2 \implies du = 2x dx \implies \frac{du}{4} = \frac{x}{2} dx,$$

tem-se

$$\int \frac{x}{2} \cos x^2 dx = \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{2} \cos x^2 dx = \frac{\operatorname{sen} x^2}{4} + c.$$

(26) Determine o valor de $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx$.

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \cos x \implies du = -\operatorname{sen} x dx$$

tem-se

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx = - \int \frac{du}{u^{\frac{3}{5}}} = - \int u^{-\frac{3}{5}} du = -\frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = -\frac{5(\cos x)^{\frac{2}{5}}}{2} + c.$$

(27) Calcule o valor de $\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}} x^3 dx$.

Solução. Considere

$$u = x^4 - 1 \implies du = 4x^3 dx \implies \frac{du}{4} = x^3 dx,$$

logo,

$$\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}} x^3 dx = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{1}{4} \frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{24} (x^4 - 1)^{\frac{6}{5}} + c.$$

Portanto,

$$\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}} x^3 dx = \frac{5}{24} (x^4 - 1)^{\frac{6}{5}} + c.$$

(28) Calcule o valor de $\int \sqrt{2x - 3} dx$.

Solução. Com efeito, seja

$$u = 2x - 3 \implies du = 2dx \implies \frac{du}{2} = dx,$$

então

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 3} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{6} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (2x - 3)^{\frac{3}{2}} + c. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \sqrt{2x-3} dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(29) Determine o valor de $\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta$.

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \operatorname{sen} 2\theta \implies du = 2 \cos 2\theta d\theta \implies \frac{du}{2} = \cos 2\theta d\theta,$$

tem-se

$$\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5} (\operatorname{sen} 2\theta)^{\frac{5}{2}} + c.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{5} \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} 2\theta + c.$$

(30) Calcule o valor de $\frac{d}{dx} \left(\int \frac{dx}{x \ln x} \right)$.

Solução. A solução da integral é dada efetuando-se a substituição

$$u = \ln x \implies du = \frac{dx}{x},$$

segue que,

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln[\ln x] + c.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx} \left(\int \frac{dx}{x \ln x} \right) = \frac{d}{dx} (\ln[\ln x] + c).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx} (\ln[\ln x] + c) = (\ln[\ln x] + c)' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

Deixa-se ao leitor a análise deste problema, no que se refere a primitiva de uma função.