ELEMENTOS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins

EDITORA UFOP

2014

Sumário

Capítulo 6

Métodos de Integração

6.1 Método da Substituição

A ideia deste método consiste em reescrever a expressão do integrando, original de forma equivalente, através de outra expressão, para que o novo integrando produza uma nova integral cuja solução seja conhecida. Em linhas gerais, a técnica consiste essencialmente numa mudança de variável para que seja possível escrever de forma equivalente à expressão original. Este processo é análogo à regra da cadeia para derivação. Isto é, sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponha que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F. Considera-se a função composta $F(g(x))$, então pela regra da cadeia, tem-se

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)\,,$$

isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva para $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Assim sendo,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c\,. \qquad (A)$$

Fazendo

$$u = g(x), \quad du = g'(x)dx \quad \text{e substituindo em} \quad (A)$$

vem que

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c\,.$$

Na prática, deve-se então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.1.1 Exercícios Resolvidos: Método da Substituição de Variável

(1) Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Solução. Seja $u = 1 + x^2$ então $\dfrac{du}{dx} = 2x$, ou seja, $du = 2xdx$, então

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c\,.$$

Como $u = 1 + x^2$; segue que

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = ln|1+x^2| + c = ln(1+x^2) + c\,.$$

(2) Encontre a solução de $\displaystyle\int \text{sen}^2 x \cos x dx$.

Solução. Seja $u = \text{sen}x$ então $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, isto é, $du = \cos x dx$, então

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c\,.$$

Como $u = \text{sen}x$ segue que,

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c\,.$$

(3) Determine o valor de $\displaystyle\int \cos(x+8)dx$.

Solução. Seja $u = x + 8$ então $\dfrac{du}{dx} = 1$, isto é, $du = dx$ então

$$\int \cos(x+8)dx = \int \cos u du = \text{sen}u + c\,.$$

Como $u = (x+8)$ segue que,

$$\int \cos(x+8)dx = \text{sen}(x+8) + c\,.$$

(4) Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Solução. Observe que

$$x^2 + 6 + 13 = x^2 + 6x + 9 + 4 = (x+3)^2 + 4\,.$$

Seja $x+3=u$ então $du=dx$, assim sendo,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \int \frac{du}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+c\,.$$

Como $u=x+3$ segue que

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+3}{2}+c\,.$$

(5) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx\,.$

Solução. Considere, $u=\sqrt{x-2} \Rightarrow u^2 = x-2 \Rightarrow x = u^2+2 \Rightarrow dx = 2udu\,.$ Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = \int \frac{u}{(u^2+2)+1}2udu = 2\int \frac{u^2du}{u^2+3}\,.$$

Somando-se e subtraindo-se 3 ao numerador, tem-se

$$\begin{aligned} 2\int \frac{(u^2+3-3)du}{u^2+3} &= 2\left[\int \frac{u^2+3}{u^2+3} - 3\int \frac{du}{u^2+3}\right] \\ &= 2\left[\int du - 3\int \frac{du}{u^2+3}\right] = 2\left[u - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}}+c\right]. \end{aligned}$$

Substituindo-se, $u=\sqrt{x-2}$, o resultado é dado por,

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = 2\left[\sqrt{x-2} - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}+c\right].$$

(6) Calcule $\displaystyle\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx\,.$

Solução. Escolhendo-se a substituição $u=(2x^2+2x-3)$ é fácil observar que

$$du = (4x+2)dx = 2(2x+1)dx \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (2x+1)dx\,.$$

Desta forma, o resultado segue e dada por:

$$\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{11}}{11}+c = \frac{1}{22}(2x^2+2x-3)^{11}+c\,.$$

(7) Determine $\displaystyle\int (e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}\,e^{2t}dt\,.$

Solução. A partir da substituição $u=(e^{2t}+2)$ obtém-se,

$$du = (2e^{2t})dt \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (e^{2t})dt\,.$$

Portanto,

$$\int (e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}(e^{2t})dt = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8}(e^{2t}+2)^{\frac{4}{3}} + c\,.$$

(8) Calcule $\displaystyle\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}x}dx\,.$

Solução. Seja $u = (a+b)\text{tg}x$ então $du = (a+b)\sec^2 x dx$.

Como,

$$\frac{2du}{(a+b)} = 2\sec^2 x dx\,,$$

segue que;

$$\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}\,x}dx = \int \frac{1}{u}\frac{2}{(a+b)}du = \frac{2}{(a+b)}\int \frac{du}{u}\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}\,x}dx = \frac{2}{(a+b)}\ln|u| + c = \frac{2}{(a+b)}\ln|(a+b)\text{tg}\,x| + c\,.$$

(9) Encontre $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5}\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição $u = 1+\sqrt{v}$, obtém-se $2du = \dfrac{dv}{\sqrt{v}}\,.$

Portanto,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5} = \int \frac{2du}{u^5} = 2.\int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{2u^4} + c = -\frac{1}{2(1+\sqrt{v})^4} + c\,.$$

(10) Determine $\displaystyle\int x^4 e^{-x^5}dt\,.$

Solução. Seja $u = (-x^5)$ então, segue que $\dfrac{-du}{5} = (x^4)dx\,.$

Portanto,

$$\int x^4 e^{-x^5}dx = -\int \frac{du}{5}e^u = -\frac{1}{5}\int e^u du = -\frac{1}{5}e^u + c = -\frac{1}{5}e^{-x^5} + c\,.$$

(11) Calcule $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$.

Solução. Considere a substituição, $u = \ln x$ então $du = \dfrac{dx}{x}$.

Portanto,

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c.$$

(12) Determine o valor da $\displaystyle\int \sec^2(5x+3)dx$.

Solução. Seja $u = 5x + 3$, então $\dfrac{du}{5} = dx$.

Portanto,

$$\int \sec^2(5x+3)dx = \int \frac{\sec^2 u\, du}{5} = \frac{1}{5}\int \sec^2 u du = \frac{1}{5}\mathrm{tg} u + c = \frac{1}{5}\mathrm{tg}(5x+3) + c.$$

(13) Calcule $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+16} dx$.

Solução. Seja $u = e^x$ então $du = e^x dx$.

Portanto,

$$\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+16} = \int \frac{du}{u^2+16} = \int \frac{du}{u^2+4^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{4} + c = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{4} + c.$$

(14) Calcule $\displaystyle\int \sqrt{3t^4+t^2}dt$.

Solução. Considere $u = 3t^2 + 1$ então $du = 6tdt$, ou seja, $\dfrac{du}{6} = tdt$.

Observe que,

$$\int \sqrt{3t^4+t^2}dt = \int \sqrt{t^2(3t^2+1)}dt = \int t(\sqrt{3t^2+1})dt.$$

Portanto,

$$\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{18}(3t^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Assim sendo,

$$\int \sqrt{3t^4+t^2}dt = \frac{2}{18}(3t^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(15) Determine $\displaystyle\int xe^{3x^2}\,dx\,.$

Solução. Seja $u = 3x^2$ então tem-se, $du = 6xdx$ isto é, $\dfrac{du}{6} = xdx\,.$
Portanto,

$$\int xe^{3x^2}dx = \int \frac{du}{6}e^u = \frac{1}{6}\int e^u\,du = \frac{1}{6}e^u + c = \frac{1}{6}e^{3x^2} + c\,.$$

(16) Encontre o valor de $\displaystyle\int(\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx\,.$

Solução.

$$\int(\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx = \int \text{sen}4xdx + \int \cos 2\pi dx = \int \text{sen}4xdx + \cos 2\pi \int dx\,.$$

Resolvendo-se a primeira integral, isto é, utilizando-se a substituição, $u = 4x\,,$ segue que $du = 4dx$. Portanto,

$$\int \text{sen}4xdx = \int \text{sen}u\frac{du}{4} = -\frac{1}{4}\cos u + c_1 = -\frac{1}{4}\cos 4x + c_1\,.$$

Por outro lado,

$$\cos 2\pi \int dx = x\cos 2\pi + c_2 = x + c_2\,.$$

Assim sendo, escolhendo-se, $c = c_1 + c_2\,.$ O resultado é dado por,

$$\int(\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx == -\frac{1}{4}\cos 4x + x + c\,.$$

(17) Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx\,.$

Solução. Seja $u = \sqrt{x}$ então $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}\,,$ isto é, $2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\,.$
Portanto,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos udu = 2\text{sen}u + c = 2\text{sen}\sqrt{x} + c\,.$$

Logo,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\text{sen}\sqrt{x} + c\,.$$

(18) Calcule $\displaystyle\int \frac{3dx}{x^2-4x+1}$.

Solução. Seja $x^2-4x+1 = x^2-4x+(4-4)+1 = (x-3)^2-3$, segue então que,

$$\int \frac{3dx}{x^2-4x+1} = 3\int \frac{dx}{(x-2)^2-3}.$$

Efetuando-se a substituição $u = x-2$, tem-se, $du = dx$.

Portanto,

$$3\int \frac{dx}{(x-2)^2-3} = 3\int \frac{du}{(u^2-3)} = 3\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^2}.$$

Assim sendo, aplicando-se a tabela de integrais e voltando-se a variável original, o resultado é dado por;

$$\int \frac{3dx}{x^2-4x+1} = = 3\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right| + c = 3\ln\left|\frac{(x-2)+\sqrt{3}}{(x-2)-\sqrt{3}}\right| + c.$$

(19) Determine o valor de $\displaystyle\int (e^{ax}+e^{-ax})^2 dx$.

Solução. Observe que,

$$\int (e^{ax}+e^{-ax})^2 dx = \int (e^{2ax}+2e^{-ax}e^{ax}+2e^{-2ax})^2 dx = \int e^{2ax}dx + \int 2dx + \int e^{-2ax}dx.$$

Efetuando-se a substituição, $u = 2ax \Rightarrow du = 2adx \Rightarrow \dfrac{du}{2a} = dx$, segue que, a primeira, segunda e terceira integrais, podem ser escritas, respectivamente, como;

$$\frac{1}{2a}\int e^u du, \quad 2\int dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{2a}\int e^{-u}du.$$

Portanto, o resultado é dado por,

$$\int (e^{ax}+e^{-ax})^2 dx = \left(\frac{1}{2a}e^{2ax} + 2x - \frac{1}{2a}e^{-2ax}\right) + c.$$

(20) Determine o valor de $\displaystyle\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx$.

Solução. Considere a substituição

$$u = 6x^3+1 \Longrightarrow du = 18x^2dx \Longrightarrow \frac{du}{9} = 2x^2dx.$$

Portanto,

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{1}{9}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{9}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

O resultado é dado por

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{2}{27}\left(6x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(21) Calcule o valor de $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = sen\,x \Longrightarrow du = \cos x dx\,,$$

segue que

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \int \frac{du}{3-u}\,.$$

Mas, substituindo-se

$$v = 3 - u \Longrightarrow dv = -du\,.$$

O resultado pode ser escrito como

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \int \frac{du}{3-u} = -\int \frac{dv}{v} = -\ln v + c = -\ln(3-u) + c = -\ln(3-sen\,x) + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \ln(3 - sen\,x)^{-1} + c\,.$$

(22) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{\text{arc}sen\,\theta}{2\sqrt{1-\theta^2}}d\theta\,.$

Solução. Neste caso, considere a substituição,

$$u = \text{arc}sen\,\theta \Longrightarrow du = \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{\text{arc}sen\,\theta}{2\sqrt{1-\theta^2}}d\theta = \frac{1}{2}\int u du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + c = \frac{(\text{arc}sen\,\theta)^2}{4} + c\,.$$

(23) Encontre o valor de $\displaystyle\int \frac{2sen\,x - 5\cos x}{\cos x}dx\,.$

Solução. Observe o seguinte,

$$\int \frac{2sen\,x - 5\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx - 5\int \frac{\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx - 5\int dx\,.$$

A solução da primeira integral é obtida mediante a substituição

$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\,xdx\,,$ ou seja,

$$\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln(\cos x)\,.$$

Assim sendo

$$\int \frac{2sen\,x - 5\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx - 5\int dx = -2\ln(\cos x) - 5x + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{2sen\,x - 5\cos x}{\cos x}dx = -2\ln(\cos x) - 5x + c = 2\ln(sec\,x) - 5x + c\,.$$

(24) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{x\ln^2 5x}\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \ln 5x \Longrightarrow du = \frac{5}{5x}dx = \frac{dx}{x}\,,$$

tem-se

$$\int \frac{5\,dx}{x\ln^2 5x} = 5\int \frac{dx}{x\ln^2 5x} = 5\int \frac{du}{u^2} = 5\int u^{-2}du = 5\frac{u^{-1}}{-1} + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{5\,dx}{x\ln^2 5x} = -\frac{5}{\ln 5x} + c\,.$$

(25) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx\,.$

Solução. Considere a substituição,

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow \frac{du}{4} = \frac{x}{2}dx\,,$$

tem-se

$$\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx = \int \cos u\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}senu + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx = \frac{sen\, x^2}{4} + c\ .$$

(26) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{sen\, x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\, x\, dx$$

tem-se

$$\int \frac{sen\, x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx = -\int \frac{du}{u^{\frac{3}{5}}} = -\int u^{-\frac{3}{5}} du = -\frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = -\frac{5(\cos x)^{\frac{2}{5}}}{2} + c\,.$$

(27) Calcule o valor de $\displaystyle\int (x^4-1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx\,.$

Solução. Considere

$$u = x^4 - 1 \Longrightarrow du = 4x^3 dx \Longrightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx\,,$$

logo,

$$\int (x^4-1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{24}(x^4-1)^{\frac{6}{5}} + c\,.$$

Portanto,

$$\int (x^4-1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx = \frac{5}{24}(x^4-1)^{\frac{6}{5}} + c\,.$$

(28) Calcule o valor de $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\, dx\,.$

Solução. Com efeito, seja

$$u = 2x - 3 \Longrightarrow du = 2dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = dx\,,$$

então

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x-3}\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{6}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \sqrt{2x-3}dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(29) Determine o valor de $\displaystyle\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = sen\,2\theta \Longrightarrow du = 2\cos 2\theta d\theta \Longrightarrow \frac{du}{2} = \cos 2\theta d\theta\,,$$

tem-se

$$\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5}(sen\,2\theta)^{\frac{5}{2}} + c\,.$$

Portanto,

$$\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{5}\, sen^{\frac{5}{2}}\, 2\theta\; + c\,.$$

(30) Calcule o valor de $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int \frac{dx}{x\ln x}\right).$

Solução. A solução da integral é dada efetuando-se a substituição

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}\,,$$

segue que,

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln[\ln x] + c\,.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{dx}{x\ln x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln[\ln x] + c\right)\,.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\ln[\ln x] + c\right) = \left(\ln[\ln x] + c\right)' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}\,.$$

Deixa-se ao leitor a análise deste problema, no que se refere a primitiva de uma função.