ELEMENTOS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins

EDITORA UFOP

2014

Sumário

exista. Similarmente, f é derivável à esquerda de $a \in I$ sempre que

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

exista.

Resultado Importante.

Diz-se que f é derivável em a quando existem e são iguais os limites laterais (à esquerda e à direita) de a. Ou seja, f é derivável em $x = a$ se, e, somente se, $f'_+(a) = f'_-(a)$.

4.2 Integral

4.2.1 Primitiva de uma Função

Seja f uma função definida num intervalo I diz-se que F é uma primitiva para a função f dentro do intervalo I quando $F'(x) = f(x)$ para todos os valores de x dentro de I.

4.2.2 Integral Indefinida

Chama-se integral indefinida de uma função f a função $F(x) + c$. Ou seja ,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \Longleftrightarrow F'(x) = f(x).$$

A existência de uma primitiva F para uma função f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ estabelece que f é integrável.

Propriedades

Integral da Soma de Funções e Produto de uma função por escalar

Sejam $h(x) = f(x) + g(x)$ e $k \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis, onde $F(x) + C_1$ e $G(x) + C_2$ são as primitivas de f e g, respectivamente, então

$$\int h(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x)) + C_1 + C_2 = (F(x) + G(x)) + C\,,$$

onde, $C = C_1 + C_2$. Portanto, $F(x)+G(x)+C$ é uma primitiva para $h(x) = f(x) + g(x)$. Assim sendo, vale

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) + C &= \int h(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2) . \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx .$$

Por outro lado, é fácil observar que $F(x)+C_1$ é uma primitiva para $f(x)$, assim como $kF(x) + kC_1$ é uma primitiva para $kf(x)$. Segue então

$$\int kf(x)dx = kF(x) + kC_1 = k(F(x) + C_1) = k\left(\int f(x)dx\right) = k\int f(x)dx .$$

Portanto, h e kf são integráveis. Este resultado é verdadeiro para um número finito de funções.

Exemplo. Seja a função constante $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int f(x)dx = \int kdx = k\int dx = kx + C.$$

Portanto, a primitiva da função constante $f(x) = k$ é a função $F(x) = kx + C$.

4.2.3 Regras Elementares: Integrais Imediatas

Função Polinomial.

Seja $f(x) = x^n$, com $n \neq -1$, então

$$\int f(x)dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Ou seja, a função $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^n$, pois, neste caso, $F'(x) = f(x)$.

Exemplo. Considere $f(x) = x^2$ então encontre a integral de f.

Solução.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

O leitor deve observar que $F'(x) = x^2$. O que significa que $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^2$.

Integral Especial.

Uma integral especial que o leitor terá mais informações nas próximas seções é a seguinte:

$$\text{se} \quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{então} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

A primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é a função $F(x) = \ln x + c$.

4.3 Derivadas e Integrais de Funções Elementares

Exemplo. Encontre a função inversa da função bijetora

$$f(x) = \frac{x}{x+2}.$$

Depois, determine a derivada e a integral indefinida das funções f e f^{-1}.

Solução. Escreve-se inicialmente a função da seguinte forma

$$y = \frac{x}{x+2}$$

agora trocam-se as variáveis x por y e vice versa, isto é,

$$x = \frac{y}{y+2}.$$

Finalmente, isola-se y, o resultado é

$$x(y+2) = y \quad \Rightarrow \quad xy + 2x = y \quad \Rightarrow \quad xy - y = -2x.$$

Portanto,

$$y = \frac{(2x)}{(1-x)}.$$

Logo, se $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ então $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x}$.

Para obter a derivada das funções f e f^{-1} utiliza-se a regra do quociente. O resultado é obtido da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1.(x+2) - x.1}{(x+2)^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow [f^{-1}]'(x) = \frac{2.(1-x) - 2x.(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow [f^{-1}]'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

As integrais indefinidas de f e f^{-1}, são dadas por

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \frac{(x+2-2)}{x+2}dx = \int \frac{x+2}{x+2}dx - 2\int \frac{dx}{x+2} \\
&= \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + c\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)dx &= \int \frac{2x}{1-x}dx = -2\int \frac{x}{x-1}dx = -2\int \frac{(x-1+1)}{x-1}dx \\
&= -2\left[\int \frac{x-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx\right] \\
&= -2\int dx - 2\int \frac{dx}{x-1} = -2x - 2\ln|x-1| + c.
\end{aligned}$$

4.3.1 Função Exponencial

Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se de função exponencial de base a, a função que a cada número real x associa o número real a^x, ou seja,

$$\begin{aligned}
f\ &:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\quad x \to f(x) = a^x.
\end{aligned}$$

O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$ e a imagem $\mathbb{R}_+^*$.

4.3.2 Derivada da Função Exponencial

Seja $f(x) = a^x$ com $a \neq 1$ e $a > 0$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

ou seja, se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = a^x \ln a$.

Em particular, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x \ln e = e^x$.

4.3.3 Integral Indefinida da Função Exponencial

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Ou seja, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ é uma primitiva para $f(x) = a^x$. Em particular,

$$\int e^x dx = e^x + c\,.$$

4.3.4 Função Logarítmica

Chama-se de função logarítmica de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$ a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+^*$ o número real $\log_a x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ &x \ \to \ f(x) = \log_a x. \end{aligned}$$

O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem $\mathbb{R}$.

4.3.5 Derivada da Função Logarítmica

Se $f(x) = \log_a x$ então a sua derivada é dada por $f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$

Em particular, se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

4.3.6 Integral Indefinida da Função Logarítmica

$$\int log_a x dx = x \log_a x - x \log_a e + c\,.$$

Ou seja, $F(x) = x - xlog_a e + c$ é uma primitiva para $f(x) = log_a x$. No caso em que a base do logarítmo é $a = e$, tem-se

$$\int \ln x dx = x \ln|x| - x + c\,.$$

4.4 Derivadas e Integrais de Funções Trigonométricas

4.4.1 Função seno

A função seno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $y = \operatorname{sen} x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \ \to \ f(x) = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo real $[-1, 1]$.

4.4.2 Função Arco Seno

Para obter a função inversa da função seno considera-se a função

$$\begin{aligned} f: \quad [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] & \longrightarrow [-1,1] \\ f(x) \quad & = \operatorname{sen} x\,. \end{aligned}$$

Então a inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad [-1,1] \quad & \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x\,. \end{aligned}$$

4.4.3 Derivada da Função Seno

Para encontrar a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ usa-se a conhecida identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}(\frac{p-q}{2}) \cos(\frac{p+q}{2}).$$

De fato, aplicando-se a definição de derivada, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) \quad & = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) \; - \; \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\frac{x+\Delta x - x}{2}) \cos(\frac{x + \Delta x + x}{2})}{\Delta x} \\ & = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} . \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x, \end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Portanto, se $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$.

4.4.4 Derivada da Função Arco seno

A derivada da função $y = \operatorname{arc\,sen} x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) \quad = \quad y = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \operatorname{sen} y$$

logo,

$$y' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\text{sen} y)'}$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \text{arc sen}x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4.4.5 Integral da Função Seno

Neste caso, se $y = \text{sen}\, x$ então

$$\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + c, \quad \text{pois} \quad (-\cos x + c)' = \text{sen}x\,.$$

Uma primitiva de $f(x) = \text{sen}x$ é a função $F(x) = -\cos x + c\,.$

4.4.6 Integral da Função Arco Seno

Se $y = \text{arc sen}x$ então

$$\int \text{arc sen}\, x\, dx = x\,\text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c\,.$$

Pois, $F(x) = x\text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c$ é uma primitiva de $f(x) = \text{arc sen}\, x\,.$ Além disso, é imediato que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + c\,.$$

O leitor encontrará alguns exemplos sobre esta função no capítulo de exercícios resolvidos.

4.4.7 Função Cosseno

A função cosseno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$, isto é,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \cos x.$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1, 1]\,.$

4.4.8 Função Arco Cosseno

A inversa da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma: seja a função bijetora

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad [0,\pi] \to [-1,1] \\ f(x) \quad &= \cos\, x \end{aligned}$$

então a inversa de $f(x) = \cos\, x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad [-1,1] \to [0,\pi] \\ & \quad x \to f^{-1}(x) = \text{arc}\,\cos x. \end{aligned}$$

4.4.9 Derivada da Função Cosseno

Considere $f(x) = \cos x$ e a conhecida identidade trigonométrica

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

A derivada da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(-2\,\text{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x/2)}{2.\frac{\Delta x}{2}} = -2\,.\,\text{sen}x.\frac{1}{2}.1 = -\text{sen}x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \cos x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\text{sen}x.$$

4.4.10 Derivada da Função Arco Cosseno

A derivada da função $f(x) = \text{arc}\,\cos x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) \quad = \quad y = \text{arc}\,\cos x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \cos y$$

logo,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\cos y)'} \\ &= \frac{-1}{\text{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \text{arc} \cos x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4.4.11 Integral da Função Cosseno

Neste caso, se $f(x) = \cos x$ então

$$\int \cos x\, dx = \text{sen} x + c\,.$$

Pois, $F(x) = \text{sen}\, x + c$ é uma primitiva para a função $f(x) = \cos x$.

4.4.12 Integral da Função Arco Cosseno

Se $f(x) = \text{arc} \cos x$ então

$$\int \text{arc} \cos x\, dx = x \,\text{arc} \cos x - \sqrt{1-x^2} + c\,.$$

Além disso, é fácil observar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{-arc} \cos x + c\,.$$

O leitor encontrará alguns exercícios resolvidos sobre esta função nos capítulos sobre derivadas e integrais.

4.4.13 Funções Tangente

A função tangente

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

é definida para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função tangente é dada por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.14 Função Arco Tangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f:\ \left]-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) \quad &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\\ x \ &\to f^{-1}(x) = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

4.4.15 Derivada da Função Tangente

A derivada da função tangente é obtida utilizando-se a regra do quociente para derivadas. O resultado é dado por

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos x.\cos x \,-\, \operatorname{sen} x.(\text{-}\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \sec^2 x.$$

4.4.16 Derivada da Função Arco Tangente

A derivada desta função é obtida utilizando-se o resultado (4.1), isto é,

$$\text{se} \qquad f(x) = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.4.17 Integral da Função Tangente

$$\int \operatorname{tg} x\, dx \,=\, \ln|\sec x| \,+\, c.$$

Este resultado será melhor detalhado nos exercícios resolvidos, a seguir.

4.4.18 Integral da Função Arco Tangente

$$\int \text{arc tg}\, x\, dx \;=\; x \,\text{arc tg}\, x \;-\; \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \;+\; c\,.$$

Ou seja, $F(x) = x\,\text{arc tg}\,x \;-\; \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \;+\; c$ é uma primitiva para $f(x) = \text{arc tg}\,x\,.$
É imediato que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg}\,x \;+\; c\,.$$

4.4.19 Função Cotangente

A função cotangente é definida por

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\text{sen}\,x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x \neq k\pi,\; k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.20 Função Arco Cotangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f :\;\;]0\,,\,\pi[\;\; &\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) \;\; &= \text{cotg}\,x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} :\;\; [-1,1] \;\; &\longrightarrow]0\,,\,\pi[\\ x \;\; &\longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc cotg}\,x. \end{aligned}$$

4.4.21 Derivada da Função Cotangente

O uso da regra do quociente para derivadas permite a seguinte conclusão:

$$\text{se} \qquad f(x) = \text{cotg}\,x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\text{cosec}^2\,x\,.$$

4.4.22 Derivada da Função Arco Cotangente

A utilização da identidade (4.1) permite escrever que

$$\text{se} \qquad f(x) = \text{arc cotg}\,x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

4.4.23 Integral da Função Cotangente

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx \;=\; \ln|\operatorname{sen} x| \;+\; c\,.$$

4.4.24 Integral da Função Arco Cotangente

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x\, dx \;=\; x \operatorname{arc\,cotg} x \;+\; \frac{1}{2}\ln\left(1+2x^2\right) + c\,.$$

É imediato também que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arc\,cotg} x \;+\; c.$$

4.4.25 Função Secante

Define-se a função secante como sendo

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

onde o domínio desta função é o mesmo da tangente definido acima.

4.4.26 Função Arco Secante

$$\begin{aligned} f^{-1}:\;\;]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\;\; &\longrightarrow]0,\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ x \qquad\qquad &\rightarrow\; f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sec} x. \end{aligned}$$

4.4.27 Derivada da Função Secante

O uso da regra do quociente para derivadas resulta no seguinte:

$$\text{se} \qquad f(x) = \sec x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x.$$

4.4.28 Derivada da Função Arco Secante

$$\text{Se} \qquad f(x) = \operatorname{arc\,sec} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| \;>\; 1.$$

4.4.29 Integral da Função Secante

$$\int \sec x \, dx \;=\; \ln|\sec x \,+\, \operatorname{tg} x| \,+\, c.$$

Observe

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec}\, x \,+\, c\,.$$

4.4.30 Integral da Função Arco Secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco secante.

4.4.31 Função Co-secante

Define-se função Co-secante por

$$\begin{aligned} f: \; \left]\tfrac{\pi}{2},\pi\right[\,\cup\, \left]\pi,\tfrac{3\pi}{2}\right[\; &\longrightarrow \,]-\infty,-1] \,\cup\, [1,+\infty[\\ x \; &\longrightarrow \; f(x) = \operatorname{cosec} x\,. \end{aligned}$$

4.4.32 Função Arco Co-secante

A inversa da função arco co-secante é definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \;]-\infty,-1] \,\cup\, [1,+\infty[\; &\longrightarrow \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\,\cup\, \left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[\\ x \; &\longrightarrow \; f^{-1}(x) = \text{arc cosec}\, x \end{aligned}$$

4.4.33 Derivada da Função Co-secante

$$\text{Se} \qquad f(x) = \operatorname{cosec} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,.$$

4.4.34 Derivada da Função Arco Co-secante

$$\text{Se} \qquad f(x) = \text{arc cosec}\, x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| \,>\, 1\,.$$

4.4.35 Integral da Função Co-secante

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx \,=\, \ln |\text{co sec}\, x \,-\, \operatorname{cotg} x| \,+\, c\,.$$

É fácil concluir que

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\text{arc cosec}\, x \,+\, c\,.$$

4.4.36 Integral da Função Arco Co-secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco co-secante.

4.4.37 Tabela de Derivadas

Função	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y = \frac{u'.v - uv'}{v^2}$
$y = u^a \quad a \in \mathbb{Q}^*$	$y' = au^{a-1}.u'$
$y = a^u \quad a > 0 \ a \neq 1$	$y' = a^u \ln a \, u'$
$y = e^u$	$y' = e^u.u'$
$y = \log_a u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
$y = \ln u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = u^v \quad u > 0$	$y' = v.u^{v-1}.u' + v'u^v \ln u$
$y = sen\, u$	$y' = u'. \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' sen\, u$
$y = tg\, u$	$y' = u' sec^2\, u$
$y = cotg\, u$	$y' = -u' cosec^2\, u$
$y = sec\, u$	$y' = u' tg\, u \, . \, sec\, u$
$y = cosec\, u$	$y' = -u' cotg\, u \, . \, cosec\, u$
$y = arc\, sen\, u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc\, \cos\, u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc\, tg\, u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$
$y = arc\, cotg\, u$	$y' = -\frac{u'}{1 + u^2}$
$y = arc\, sec\, u$	$y' = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}} \quad \lvert u \rvert > 1$
$y = arc\, cosec\, u$	$y' = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}} \quad \lvert u \rvert > 1$

onde u e v são duas funções de x e k uma constante.

4.4.38 Tabela de Integrais

Função	Integral
$y = k$	$\int k dx = kx + c$
$y = ku$	$k \int u du = k\frac{u^2}{2} + c$
$y = u^a$	$\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + c \quad a \neq -1$
$y = \dfrac{1}{u}$	$\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c$
$y = a^u$	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$
$y = e^u$	$\int e^u du = e^u + c$
$y = sen\, u$	$\int sen\, u du = -\cos u + c$
$y = \cos u$	$\int \cos u du = sen\, u + c$
$y = tg\, u$	$\int tg\, u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$
$y = cotg\, u$	$\int cotg\, u du = \ln\lvert sen\, u\rvert + c$
$y = sec^2 u$	$\int sec^2 u du = tg\, u + c$
$y = cosec^2 u$	$\int cosec^2 u du = -cotg\, u + c$
$y = sec\, u\, tg\, u$	$\int sec\, u\, tg\, u du = sec\, u + c$
$y = cosec\, u\, cotg\, u$	$\int cosec\, u\, cotg\, u du = -cosec\, u + c$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\, sen\, u + c$
$y = \dfrac{1}{u^2+1}$	$\int \dfrac{du}{u^2+1} = arc\, tg\, u + c$
$y = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$	$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc\, sec\, u + c$