

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins



EDITORA UFOP

2014

Sumário

Sumário	3
1 Funções Elementares	17
1.1 Introdução	17
1.2 Definição	17
1.3 Gráfico de uma função	18
1.4 Domínio de uma Função	19
1.4.1 Função Polinomial	19
1.4.2 Função Racional	20
1.4.3 Função Irracional	21
1.5 Composição de Funções	23
1.6 Tipos de Funções	24
1.6.1 Função Polinomial do Primeiro Grau	24
1.6.2 Função Polinomial do Segundo Grau	24
1.6.3 Função Modular	25
1.6.4 Funções Periódicas	26
1.6.5 Função Par	26
1.6.6 Função Ímpar	27
1.6.7 Função Injetora	27
1.6.8 Função Sobrejetora	27
1.6.9 Função Bijetora	28
1.6.10 Função Inversa	28
1.6.11 Caso Especial	29
1.6.12 Função Exponencial	31

1.6.13	Função Logarítmica	32
1.7	Funções Trigonométricas	33
1.7.1	Função seno	33
1.7.2	Função Arco Seno	33
1.7.3	Função Cosseno	34
1.7.4	Função Arco Cosseno	35
1.7.5	Funções Tangente	36
1.7.6	Função Arco Tangente	36
1.7.7	Função Cotangente	37
1.7.8	Função Arco Cotangente	38
1.7.9	Função Secante	38
1.7.10	Função Arco Secante	39
1.7.11	Função Co-secante	39
1.7.12	Função Arco Co-secante	40
1.8	Exercícios Resolvidos	41
1.9	Exercícios Propostos	57
2	Limites	61
2.1	Definição	63
2.2	Limites Laterais	64
2.3	Propriedades e Operações com Limites	65
2.4	Indeterminações	66
2.5	Limites no Infinito	67
2.6	Limites Infinitos	67
2.7	Limites Fundamentais	69
2.8	Limites: Exercícios Resolvidos	69
2.9	Exercícios Propostos	92
3	Funções Contínuas	95
3.1	Introdução	95
3.2	Definição	95
3.3	Propriedades	95
3.4	Teorema do Valor Intermediário	96

4	Derivadas e Integrais	103
4.1	Derivada	103
4.1.1	Interpretação Geométrica	103
4.1.2	Derivada de uma Função num ponto	104
4.1.3	Derivada de uma Função	104
4.1.4	Derivada da Função Inversa	104
4.1.5	Regras Elementares: Derivadas Imediatas	105
4.2	Integral	109
4.2.1	Primitiva de uma Função	109
4.2.2	Integral Indefinida	109
4.2.3	Regras Elementares: Integrais Imediatas	110
4.3	Derivadas e Integrais de Funções Elementares	111
4.3.1	Função Exponencial	112
4.3.2	Derivada da Função Exponencial	112
4.3.3	Integral Indefinida da Função Exponencial	112
4.3.4	Função Logarítmica	113
4.3.5	Derivada da Função Logarítmica	113
4.3.6	Integral Indefinida da Função Logarítmica	113
4.4	Derivadas e Integrais de Funções Trigonômicas	113
4.4.1	Função seno	113
4.4.2	Função Arco Seno	114
4.4.3	Derivada da Função Seno	114
4.4.4	Derivada da Função Arco seno	114
4.4.5	Integral da Função Seno	115
4.4.6	Integral da Função Arco Seno	115
4.4.7	Função Cosseno	115
4.4.8	Função Arco Cosseno	116
4.4.9	Derivada da Função Cosseno	116
4.4.10	Derivada da Função Arco Cosseno	116
4.4.11	Integral da Função Cosseno	117
4.4.12	Integral da Função Arco Cosseno	117
4.4.13	Funções Tangente	117

4.4.14	Função Arco Tangente	118
4.4.15	Derivada da Função Tangente	118
4.4.16	Derivada da Função Arco Tangente	118
4.4.17	Integral da Função Tangente	118
4.4.18	Integral da Função Arco Tangente	119
4.4.19	Função Cotangente	119
4.4.20	Função Arco Cotangente	119
4.4.21	Derivada da Função Cotangente	119
4.4.22	Derivada da Função Arco Cotangente	119
4.4.23	Integral da Função Cotangente	120
4.4.24	Integral da Função Arco Cotangente	120
4.4.25	Função Secante	120
4.4.26	Função Arco Secante	120
4.4.27	Derivada da Função Secante	120
4.4.28	Derivada da Função Arco Secante	120
4.4.29	Integral da Função Secante	121
4.4.30	Integral da Função Arco Secante	121
4.4.31	Função Co-secante	121
4.4.32	Função Arco Co-secante	121
4.4.33	Derivada da Função Co-secante	121
4.4.34	Derivada da Função Arco Co-secante	121
4.4.35	Integral da Função Co-secante	122
4.4.36	Integral da Função Arco Co-secante	122
4.4.37	Tabela de Derivadas	123
4.4.38	Tabela de Integrais	124

5 Aplicações da Derivada 125

5.1	Aplicações Elementares	125
5.1.1	Taxa de Variação	125
5.1.2	Velocidade e Aceleração	125
5.2	Exercícios Resolvidos: Aplicações	126
5.2.1	Diferencial	134

exista. Similarmente, f é derivável à esquerda de $a \in I$ sempre que

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

exista.

Resultado Importante.

Diz-se que f é derivável em a quando existem e são iguais os limites laterais (à esquerda e à direita) de a . Ou seja, f é derivável em $x = a$ se, e, somente se, $f'_+(a) = f'_-(a)$.

4.2 Integral

4.2.1 Primitiva de uma Função

Seja f uma função definida num intervalo I diz-se que F é uma primitiva para a função f dentro do intervalo I quando $F'(x) = f(x)$ para todos os valores de x dentro de I .

4.2.2 Integral Indefinida

Chama-se integral indefinida de uma função f a função $F(x) + c$. Ou seja ,

$$\int f(x) dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x).$$

A existência de uma primitiva F para uma função f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ estabelece que f é integrável.

Propriedades

Integral da Soma de Funções e Produto de uma função por escalar

Sejam $h(x) = f(x) + g(x)$ e $k \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis, onde $F(x) + C_1$ e $G(x) + C_2$ são as primitivas de f e g , respectivamente, então

$$\int h(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx = (F(x) + G(x)) + C_1 + C_2 = (F(x) + G(x)) + C,$$

onde, $C = C_1 + C_2$. Portanto, $F(x) + G(x) + C$ é uma primitiva para $h(x) = f(x) + g(x)$. Assim sendo, vale

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) + C &= \int h(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Por outro lado, é fácil observar que $F(x) + C_1$ é uma primitiva para $f(x)$, assim como $kF(x) + kC_1$ é uma primitiva para $kf(x)$. Segue então

$$\int kf(x) dx = kF(x) + kC_1 = k(F(x) + C_1) = k \left(\int f(x) dx \right) = k \int f(x) dx.$$

Portanto, h e kf são integráveis. Este resultado é verdadeiro para um número finito de funções.

Exemplo. Seja a função constante $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int f(x) dx = \int k dx = k \int dx = kx + C.$$

Portanto, a primitiva da função constante $f(x) = k$ é a função $F(x) = kx + C$.

4.2.3 Regras Elementares: Integrais Imediatas

Função Polinomial.

Seja $f(x) = x^n$, com $n \neq -1$, então

$$\int f(x) dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Ou seja, a função $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^n$, pois, neste caso, $F'(x) = f(x)$.

Exemplo. Considere $f(x) = x^2$ então encontre a integral de f .

Solução.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

O leitor deve observar que $F'(x) = x^2$. O que significa que $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^2$.

Integral Especial.

Uma integral especial que o leitor terá mais informações nas próximas seções é a seguinte:

$$\text{se } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{então} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

A primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é a função $F(x) = \ln x + c$.

4.3 Derivadas e Integrais de Funções Elementares

Exemplo. Encontre a função inversa da função bijetora

$$f(x) = \frac{x}{x+2}.$$

Depois, determine a derivada e a integral indefinida das funções f e f^{-1} .

Solução. Escreve-se inicialmente a função da seguinte forma

$$y = \frac{x}{x+2}$$

agora trocam-se as variáveis x por y e vice versa, isto é,

$$x = \frac{y}{y+2}.$$

Finalmente, isola-se y , o resultado é

$$x(y+2) = y \quad \Rightarrow \quad xy + 2x = y \quad \Rightarrow \quad xy - y = -2x.$$

Portanto,

$$y = \frac{(2x)}{(1-x)}.$$

Logo, se $f(x) = \frac{x}{x+2}$ então $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$.

Para obter a derivada das funções f e f^{-1} utiliza-se a regra do quociente. O resultado é obtido da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}]'(x) = \frac{2 \cdot (1-x) - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}]'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

As integrais indefinidas de f e f^{-1} , são dadas por

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{(x+2-2)}{x+2} dx = \int \frac{x+2}{x+2} dx - 2 \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \int dx - 2 \int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)dx &= \int \frac{2x}{1-x} dx = -2 \int \frac{x}{x-1} dx = -2 \int \frac{(x-1+1)}{x-1} dx \\ &= -2 \left[\int \frac{x-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx \right] \\ &= -2 \int dx - 2 \int \frac{dx}{x-1} = -2x - 2\ln|x-1| + c.\end{aligned}$$

4.3.1 Função Exponencial

Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se de função exponencial de base a , a função que a cada número real x associa o número real a^x , ou seja,

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = a^x.\end{aligned}$$

O domínio da função exponencial é \mathbb{R} e a imagem \mathbb{R}_+^* .

4.3.2 Derivada da Função Exponencial

Seja $f(x) = a^x$ com $a \neq 1$ e $a > 0$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

ou seja, se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = a^x \ln a$.

Em particular, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x \ln e = e^x$.

4.3.3 Integral Indefinida da Função Exponencial

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Ou seja, $F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$ é uma primitiva para $f(x) = a^x$. Em particular,

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

4.3.4 Função Logarítmica

Chama-se de função logarítmica de base a , com $a > 0$ e $a \neq 1$ a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+^*$ o número real $\log_a x$, isto é,

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \log_a x.$$

O domínio da função logarítmica é \mathbb{R}_+^* e a imagem \mathbb{R} .

4.3.5 Derivada da Função Logarítmica

Se $f(x) = \log_a x$ então a sua derivada é dada por $f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
Em particular, se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

4.3.6 Integral Indefinida da Função Logarítmica

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - x \log_a e + c.$$

Ou seja, $F(x) = x - x \log_a e + c$ é uma primitiva para $f(x) = \log_a x$. No caso em que a base do logaritmo é $a = e$, tem-se

$$\int \ln x dx = x \ln |x| - x + c.$$

4.4 Derivadas e Integrais de Funções Trigonométricas

4.4.1 Função seno

A função seno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $y = \text{sen } x$, isto é,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \text{sen } x.$$

O domínio da função seno é \mathbb{R} e a imagem é o intervalo real $[-1, 1]$.

4.4.2 Função Arco Seno

Para obter a função inversa da função seno considera-se a função

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 1] \\ f(x) &= \text{sen } x. \end{aligned}$$

Então a inversa de $f(x) = \text{sen } x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc sen } x. \end{aligned}$$

4.4.3 Derivada da Função Seno

Para encontrar a derivada da função $f(x) = \text{sen } x$ usa-se a conhecida identidade trigonométrica

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{sen} \left(\frac{p-q}{2}\right) \cos \left(\frac{p+q}{2}\right).$$

De fato, aplicando-se a definição de derivada, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen} \left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x, \end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Portanto, se $f(x) = \text{sen } x$ então $f'(x) = \cos x$.

4.4.4 Derivada da Função Arco seno

A derivada da função $y = \text{arc sen } x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) = y = \text{arc sen } x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \text{sen } y$$

logo,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\text{sen}y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se } f(x) = \text{arc sen}x \text{ então } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.4.5 Integral da Função Seno

Neste caso, se $y = \text{sen}x$ então

$$\int \text{sen}x \, dx = -\cos x + c, \quad \text{pois } (-\cos x + c)' = \text{sen}x.$$

Uma primitiva de $f(x) = \text{sen}x$ é a função $F(x) = -\cos x + c$.

4.4.6 Integral da Função Arco Seno

Se $y = \text{arc sen}x$ então

$$\int \text{arc sen}x \, dx = x \text{arc sen}x + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Pois, $F(x) = x \text{arc sen}x + \sqrt{1 - x^2} + c$ é uma primitiva de $f(x) = \text{arc sen}x$. Além disso, é imediato que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sen}x + c.$$

O leitor encontrará alguns exemplos sobre esta função no capítulo de exercícios resolvidos.

4.4.7 Função Cosseno

A função cosseno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$, isto é,

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \cos x.\end{aligned}$$

O domínio da função cosseno é \mathbb{R} e a imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

4.4.8 Função Arco Cosseno

A inversa da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma: seja a função bijetora

$$\begin{aligned} f & : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ f(x) & = \cos x \end{aligned}$$

então a inversa de $f(x) = \cos x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} & : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x & \rightarrow f^{-1}(x) = \arccos x. \end{aligned}$$

4.4.9 Derivada da Função Cosseno

Considere $f(x) = \cos x$ e a conhecida identidade trigonométrica

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

A derivada da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f'(x) & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right)}{\Delta x} \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-2 \operatorname{sen} \frac{2x + \Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se } f(x) = \cos x \text{ então } f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

4.4.10 Derivada da Função Arco Cosseno

A derivada da função $f(x) = \arccos x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) = y = \arccos x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \cos y$$

logo,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\cos y)'} \\ &= \frac{-1}{\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se } f(x) = \arccos x \text{ então } f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.4.11 Integral da Função Cosseno

Neste caso, se $f(x) = \cos x$ então

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c.$$

Pois, $F(x) = \operatorname{sen} x + c$ é uma primitiva para a função $f(x) = \cos x$.

4.4.12 Integral da Função Arco Cosseno

Se $f(x) = \arccos x$ então

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Além disso, é fácil observar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + c.$$

O leitor encontrará alguns exercícios resolvidos sobre esta função nos capítulos sobre derivadas e integrais.

4.4.13 Funções Tangente

A função tangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é definida para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função tangente é dada por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.14 Função Arco Tangente

Considere a função bijetora

$$f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

A inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é a função definida por

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$
$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

4.4.15 Derivada da Função Tangente

A derivada da função tangente é obtida utilizando-se a regra do quociente para derivadas. O resultado é dado por

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \implies f'(x) = \frac{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x}.$$

Portanto,

$$\text{se } f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{então} \quad f'(x) = \sec^2 x.$$

4.4.16 Derivada da Função Arco Tangente

A derivada desta função é obtida utilizando-se o resultado (4.1), isto é,

$$\text{se } f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.4.17 Integral da Função Tangente

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln |\sec x| + c.$$

Este resultado será melhor detalhado nos exercícios resolvidos, a seguir.

4.4.18 Integral da Função Arco Tangente

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Ou seja, $F(x) = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$ é uma primitiva para $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.
É imediato que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + c.$$

4.4.19 Função Cotangente

A função cotangente é definida por

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.20 Função Arco Cotangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f:]0, \pi[&\longrightarrow [-1, 1] \\ f(x) &= \operatorname{cotg} x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: [-1, 1] &\longrightarrow]0, \pi[\\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,cotg} x. \end{aligned}$$

4.4.21 Derivada da Função Cotangente

O uso da regra do quociente para derivadas permite a seguinte conclusão:

$$\text{se } f(x) = \operatorname{cotg} x \text{ então } f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

4.4.22 Derivada da Função Arco Cotangente

A utilização da identidade (4.1) permite escrever que

$$\text{se } f(x) = \operatorname{arc\,cotg} x \text{ então } f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4.4.23 Integral da Função Cotangente

$$\int \cotg x \, dx = \ln |\sen x| + c.$$

4.4.24 Integral da Função Arco Cotangente

$$\int \text{arc cotg } x \, dx = x \text{ arc cotg } x + \frac{1}{2} \ln(1 + 2x^2) + c.$$

É imediato também que

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\text{arc cotg } x + c.$$

4.4.25 Função Secante

Define-se a função secante como sendo

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

onde o domínio desta função é o mesmo da tangente definido acima.

4.4.26 Função Arco Secante

$$\begin{aligned} f^{-1} :] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[&\longrightarrow]0, \pi[- \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc sec } x. \end{aligned}$$

4.4.27 Derivada da Função Secante

O uso da regra do quociente para derivadas resulta no seguinte:

$$\text{se } f(x) = \sec x \quad \text{então } f'(x) = \sec x \, \text{tg } x.$$

4.4.28 Derivada da Função Arco Secante

$$\text{Se } f(x) = \text{arc sec } x \quad \text{então } f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \quad |x| > 1.$$

4.4.29 Integral da Função Secante

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

Observe

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x + c.$$

4.4.30 Integral da Função Arco Secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco secante.

4.4.31 Função Co-secante

Define-se função Co-secante por

$$\begin{aligned} f : \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\cup \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[&\longrightarrow] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x &\longrightarrow f(x) = \operatorname{cosec} x. \end{aligned}$$

4.4.32 Função Arco Co-secante

A inversa da função arco co-secante é definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} :] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[&\longrightarrow \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\cup \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[\\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

4.4.33 Derivada da Função Co-secante

$$\text{Se } f(x) = \operatorname{cosec} x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cotg x.$$

4.4.34 Derivada da Função Arco Co-secante

$$\text{Se } f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1.$$

4.4.35 Integral da Função Co-secante

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{co} \sec x - \operatorname{cotg} x| + c.$$

É fácil concluir que

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x + c.$$

4.4.36 Integral da Função Arco Co-secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco co-secante.

4.4.37 Tabela de Derivadas

Função	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - uv'}{v^2}$
$y = u^a \quad a \in \mathbb{Q}^*$	$y' = au^{a-1}.u'$
$y = a^u \quad a > 0 \quad a \neq 1$	$y' = a^u \ln a u'$
$y = e^u$	$y' = e^u.u'$
$y = \log_a u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
$y = \ln u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = u^v \quad u > 0$	$y' = v.u^{v-1}.u' + v'u^v \ln u$
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u'. \cos u$
$y = \operatorname{cos} u$	$y' = -u' \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \operatorname{sec}^2 u$
$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$y = \operatorname{sec} u$	$y' = u' \operatorname{tg} u . \operatorname{sec} u$
$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \operatorname{cotg} u . \operatorname{cosec} u$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sec} u$	$y' = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}} \quad u > 1$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u$	$y' = -\frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}} \quad u > 1$

onde u e v são duas funções de x e k uma constante.

4.4.38 Tabela de Integrais

Função	Integral
$y = k$	$\int k dx = kx + c$
$y = ku$	$k \int u du = k \frac{u^2}{2} + c$
$y = u^a$	$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c \quad a \neq -1$
$y = \frac{1}{u}$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
$y = a^u$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
$y = e^u$	$\int e^u du = e^u + c$
$y = \operatorname{sen} u$	$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$
$y = \cos u$	$\int \cos u du = \operatorname{sen} u + c$
$y = \operatorname{tg} u$	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + c$
$y = \operatorname{cotg} u$	$\int \operatorname{cotg} u du = \ln \operatorname{sen} u + c$
$y = \sec^2 u$	$\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + c$
$y = \operatorname{cosec}^2 u$	$\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{cotg} u + c$
$y = \sec u \operatorname{tg} u$	$\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + c$
$y = \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u du = -\operatorname{cosec} u + c$
$y = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + c$
$y = \frac{1}{u^2+1}$	$\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + c$
$y = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc} \sec u + c$