Geometria Analítica - 2011.2

```
Horários do curso em 2011.2: 4ªs e 6ªs 11-13, sala 19.
Página do curso de 2011.1:
  http://angg.twu.net/2011.1-GA.html
            (find-TH "2011.1-GA")
Arquivo com todas as folhas manuscritas do curso de 2011.1:
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.pdf
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.djvu
Vamos usar principalmente este livro (o do CEDERJ):
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/livros/ga-vol1.pdf
(Pôr links para: ementa e programa; regras; página do reginaldo)
  http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf


Versão para impressão:
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.2.pdf
(Pode estar desatualizada!)
```

O monitor é o Marcos Vinicius <marcos.linak@gmail.com>. Ele ainda não marcou os horários de atendimento dele para 2011.2.

```
Plano de aulas / resumo do que já aconteceu:

1ª aula (10/ago):
  Geometria Analítica é principalmente sobre _subconjuntos_ de R^2 -
  (retas, círculos, etc) e de R^3 (planos, etc). A primeira coisa que
  a gente tem que aprender é a descrever estes conjuntos formalmente
  muito bem, de modo que todo mundo entenda.
  Notações:
    {2, 3, 4}                    (subconjunto explícito, finito, de R)
    {2, 3, ..., 10}              (aqui o "..." é claro o suficiente)
    {x∈{2, 3, 4, 5} | x é par}  (note a ordem: gerador, filtros)
    {x^2 | x∈{1, 2, 3}}          (outra ordem! Isto dá {1^2, 2^2, 3^2})
    [1, 2]                       (intervalo fechado)
    (1, 2)                       (intervalo aberto)
    [1, 2)                       (intervalos abertos de um lado
    (1, 2]                        e fechados do outro)
  Repare que a notação para intervalo aberto é a mesma que pra par
  ordenado - a gente deduz pelo contexto se "(a,b)" quer dizer um par
  ordenado ou um intervalo aberto.
  Passamos a aula toda trabalhando em cima de exercícios. No primeiro
  bloco de exercícios eu dei representações gráficas destes conjuntos
  e pedi pros alunos encontrarem representações "em matematiquês"
  deles:
    A = [-1,0]∪[1,2]
    B = [-2,-1]∪{0,2}∪(4,+∞)
    C = {(1,1), (2,2), (3,3)}
    D = {(x,2)| x∈R}
    E = {(k,2)| k∈Z}
    F = {(x,y)∈R^2 | x=y}
  E o segundo bloco de exercícios era de "represente graficamente":
    A' = [3,4]∪(6,7)
    B' = [3,5]∪(4,6)∪{0,1}
    C' = {(1,2),(1,3),(3,3)}
    D' = {x∈{0,...,5} | 0<=x<=3 e 2<=x<=5}
    E' = {x∈{0,...,5} | 0<=x<=3 ou 2<=x<=5}
    F' = {(x,1) | x∈{0,1,2,3}}
    G' = {(x,y)∈R^2 | x∈{1,2}, y∈{2,3}}
    H' = {(x,y)∈R^2 | x+y=0}
```

```
    I' = {(x,y)∈R^2 | x∈{-2,-1,...,2}, y=x^2}
    J' = {(x,y)∈R^2 | x∈[-2,2], y=x^2}
    K' = {(x,y)∈R^2 | x∈R, y=x^2}
    L' = {-2,-1,...,2}^2
    M' = {(x,y)∈{-2,-1,...,2}^2 | x^2+y^2=4 }
    N' = {(x,y)∈Z^2 | x^2+y^2=25 }
    O' = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=25 }
    P' = {(x,y)∈R^2 | x∈[1,3], y∈[2,3]}
  Ainda não corrigimos as soluções que os alunos encontraram.
2ª aula (12/ago):
  Revimos os dois modos de construir conjuntos usando {...|...} e
  geradores e filtros.
  Pedi pros alunos terminarem os exercícios da aula passada e
  representarem graficamente mais estes:
    A'' = {(t,2t) | t∈{1,2,3}}
    B'' = {(1,2) + (t,2t) | t∈{0,1,2}}
    C'' = {(1,2) + (t,2t) | t∈R}
    D'' = {(1,2) + (-u/2, -u) | u∈R}
    A''' = {(t,2t) | t∈{1, 1.5, 2, 2.5, 3}}
    A'''' = {(t,2t) | t∈{1, 1.1, 1.2, ..., 3}}
    A''''' = {(t,2t) | t∈[1, 3]}
  e pedi pra eles encontrarem representações em "matematiquês formal"
  (em notação de conjuntos) para os conjuntos abaixo (eu desenhei no
  quadro a representação gráfica deles):
    B''' = {(t,2) | t∈[-1,2]}
    C''' = {(x,y)∈R^2 | x+y=2}
    D''' = {(x,y)∈R^2 | x=1, y∈[2,4]} ∪ {(x,y)∈R^2 | x=1, y∈[2,4]}
  Pus o seguinte aviso no quadro (com caveirinha): vocês vão passar o
  curso inteiro tendo que traduzir entre representações formais de
  conjuntos e representações gráficas, então comecem a treinar!!!
  Depois distribuí cópias de metade desta folha:
    *** pôr um link pro scan aqui ***
  para uma metade da turma e cópias da outra metade da folha pra outra
  metade da turma, e pedi pra cada pessoa representar "em
  matematiquês" os conjuntos que recebeu, e dar pra alguma pessoa da
  outra metade da turma essas representações em matematiquês; essa
  pessoa tentaria representar graficamente o que recebeu, e aí
  as duas comparariam essa representação gráfica com a original.

3ª aula (17/ago): aula cancelada (licença-luto)
4ª aula (19/ago): idem

5ª aula (24/ago): segmentos e retas diagonais, semiplanos.
  Sejam:
    A = (1,3),
    B = (4,1),
    r_1 = {(1,3) + t(3,-2) | t∈R}
    r_2 = {(x,y)∈R^2 | y = 11/3 - (2/3)*x}
    r_3 = {(x,y)∈R^2 | (2/3)*x + y = 11/3}
    r_4 = {(x,y)∈R^2 | (2/3)*x + y - 11/3 = 0}
    s_1 = {(1,3) + t(3,-2) | t∈[0,1)}
    s_2 = {(1,3) + u(3/2,-1) | u∈[0,2)}
    s_3 = {(4,1) + w(-3,2) | w∈(0,1]}
    s_4 = {(0,11/3) + x(1,-2/3) | x∈[1,4)}
    s_5 = {(x,y)∈R^2 | ∃t∈[0,1).((1,3)+t(3,-2) = (x,y))}
    z(x,y) = (2/3)*x + y - 11/3
    r_5 = {(x,y)∈R^2 | z(x,y) = 0}
    C_1 = {(x,y)∈R^2 | z(x,y) >= 0}
    (]]])
6ª aula (26/ago):
    (Vimos como fazer "mudanças de variável" nos segmentos e retas da
    aula anterior e como mudar entre várias representações de uma
    reta; passei um problema envolvendo três semiplanos; nos últimos
    15 minutos da aula fizemos esta atividade aqui:)
      (find-TH "2011-4perguntas")
```

```
7ª aula (31/ago): Pra fazer os alunos começarem a se familiarizar com
  objetos matemáticos como "o conjunto de todas as retas", nós
  passamos a aula resolvendo os problemas abaixo:
  (1) Seja H = {{(x,y) | x∈{0,1}} | y∈{0,1}}.
      Calcule H e represente graficamente os elementos de H.
  (2) Seja H = {{(x,y) | x∈{0,1,2}} | y∈{0,1,2}}.
      Represente graficamente os elementos de H.
  (3) Para a,b∈R, seja r_(a,b) = {(x,y}∈R^2 | y=ax+b}.
      (a) Represente graficamente r_(0,1).
      (b) Idem para r_(0,2).
      (c) Idem para r_(1,1).
  (4) (Pra quem teve dificuldade na (1)):
      Seja C_y = {(x,y) | x∈{0,1}}.
      (a) Calcule C_0 e C_1.
      (b) Calcule {C_y | y∈{0,1}}.
  (5) Seja \calR = {r_(a,b) | a,b∈R}.
      Existe um elemento C∈R tal que (0,0)∈C e (2,2)∈C.
      Que elemento é este?
  (6) Para a,b,c∈R, seja s_(a,b,c) = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}.
      Seja \calS = {s_(a,b,c) | a,b,c∈R}.
      (a) Todos os elementos de \calS são retas?
      (b) Todas as retas de \calS pertencem a \calR?
      (c) Existem (a,b,c),(a',b',c')∈R^3, diferentes,
          tais que s_(a,b,c) = s_(a',b',c')?
      (d) (Pra quem estiver com dificuldade nas anteriores):
          represente graficamente s_(0,1,2) e s_(2,1,0).
8ª aula (02/set): Definições:
    r_(a,b)   = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}
    s_(a,b,c) = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}
    \calR     = {r_(a,b)   | a,b∈R}
    \calS     = {s_(a,b,c) | a,b,c∈R}
  Trabalhamos sobre estes problemas:
    (a) Todo elemento de \calR pertence a \calS?
    (b) Todo elemento de \calS pertence a \calR?
    (c) Todo elemento de \calS é uma reta?
    (d) r_(1,2) in \calS? Porque?
    (e) s_(2,1,0) in \calR? Porque?
  Pra casa: tente responder os problemas acima seguindo as regras:
    http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf

9ª aula (07/set): feriado.
10ª aula (09/set): Voltamos aos problemas da aula passada, mas um
  pouco simplificados:
    (a') Mostre que     todo elemento de \calR pertence a \calS.
    (b') Mostre que nem todo elemento de \calS pertence a \calR.
  Os problemas das listas do Reginaldo vão ser parecidos com estes, só
  que bem piores... quase todos vão usar vetores. Links pras listas do
  Reginaldo:
    http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista2_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista3_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista4_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista5_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista6_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista7_1_2011.pdf
  Dá pra representar _segmentos direcionados_ em "matematiquês formal"
  como pares de pontos. Por exemplo, se A=(2,1) e B=(1,3) então o
  segmento direcionado indo de A para B vai ser representado como
  (A,B) = ((2,1),(1,3)). E podemos representar _vetores_ em
  matematiquês formal como conjuntos de segmentos direcionados:
    ---->
    (a,b) = {((x,y),(x+a,y+b)) | (x,y)∈R^2}
  (Obs: o livro do CEDERJ não faz estas definições de modo tão
  explícito).
```

Uma solução pro (a'), seguindo todas as regras em
http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf
é: todo elemento de \calR é da forma r_(a,b), para algum a∈R e algum
b∈R (obs: "é da forma" é um jargão matemático; discutimos ele um
bocado). E para quaisquer a,b∈R temos: r_(a,b) = ... = s_(-a,1,b) ∈
\calS.
[Discutimos como fazer substituição; fiquei devendo explicar as
regras pra vetores...]
((2,1),(1,3)) ∈ AB?
((0,0),(-1,2)) ∈ AB?
((0,0),(1,1)) ∈ AB?
((1,3),(2,1)) ∈ AB?
*** fiquei devendo uma folha de explicações sobre substituição ***

11ª aula (14/set): Discutimos algumas questões da lista do Reginaldo
que eram falsas (e pra mostrar que elas eram falsas bastava
encontrar um contra-exemplo) e uma questão que era verdadeira (a do
quadrilátero ABCD). Lembrei pra todo mundo as definições de produto
interno e norma, e pedi pra todo mundo tentar provar que:
Se u,v são vetores então ||u||v e ||v||u são vetores de mesmo
comprimento.
Pedi pras pessoas testarem o caso u=(0,2) e v=(3,4) - aí
||u||v=(6,8) e ||v||u=(0,10), que têm o mesmo comprimento. Avisei
que as contas podiam ficar complicadas, e que era pra todo mundo
tentar fazer em casa.
12ª aula (16/set): como preparação pro problema do
|| ||u||v || = || ||v||u ||
fizemos vários exercícios de V/F/justifique:
a) ( ) Se a∈R então a=sqrt(a^2)
b) ( ) Se a,b∈R então sqrt(a+b) = sqrt(a)+sqrt(b)
c) ( ) Se a,b∈R então sqrt(a^2+b^2) = sqrt(a^2)+sqrt(b^2)
d) ( ) Se a,b∈R então sqrt(ab) = sqrt(a)sqrt(b)
e) ( ) Existem a,b∈R tais que sqrt(a+b) = sqrt(a)+sqrt(b)
f) ( ) Se a∈R e v é vetor, ||av||= a||v||
g) ( ) Existem a,b,x,y∈R tais que ||(a,b)||(x,y) = (ax+bx,ay+by)
h) ( ) Se a∈R e u,v são vetores então (au)·v = a(u·v) = u·(av)
i) ( ) Se u,v são vetores então u·v = v·u
Na aula que vem os últimos 30 minutos vão ser pra vocês resolverem
duas questões da 1ª lista do Reginaldo e me entregarem - a notação
tem que estar certa, tem que seguir todas as regras, etc. ISTO VAI
VALER 1 PONTO EXTRA PRA P1.
Dica: tentem mostrar EM CASA que ||u||v e ||v||u são vetores de
mesmo comprimento de forma que as contas fiquem bem curtas. É
DIFÍCIL ESCREVER ISTO DIREITO!
Links:
http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf

13ª aula (21/set): Discutimos exercícios da lista do Reginaldo; o
teste que seria hoje foi transferido pra 6ª - principalmente porque
a maior parte da turma estava enrolada com os problemas que
envolviam resolver sistemas - por exemplo o antepenúltimo da 1ª
folha daqui:
http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
Escolhendo vetores mais simples pra facilitar as contas, ele vira:
( ) Todo ponto do plano é combinação linear de u=(1,1) e v=(-1,1)
isto é equivalente a:
( ) Todo ponto do plano é da forma au+bv, para a,b∈R e u=(1,1) e
v=(-1,1)
que é equivalente a:
( ) Para todo (x,y)∈R^2 existem a,b∈R tais que (x,y)=au+bv,
onde u=(1,1) e v=(-1,1)
Dica MUITO importante: o melhor modo de provar que existem a,b∈R
obedecendo uma certa condição é "encontrar explicitamente" um a e um
b obedecendo a condição... por exemplo, neste problema, escrevendo

um programa que recebe x e y e calcula a e b.
  Introduzi a idéia de projeção: Pr_v w, a "projeção sobre v de w", é o vetor da forma av tal que o ponto O+av seja o mais próximo possível de O+w.
  No fim da aula passei um problema pra casa, avisando que ele é trabalhoso, mas que quem tentar fazê-lo vai aprender MUITO: sejam v=(1,2) e w=(-1,1); encontre a∈R tal que O+av seja o mais próximo possível de O+w.
  O teste foi transferido para a aula seguinte.

14ª aula (23/set): usando a definição de Pr_v w,

```
  Def: Pr_v w é o vetor da forma av tal que o ponto O+av
       seja o mais próximo possível do ponto O+w
```

nós fizemos as contas para o caso v=(v_1,v_2) e w=(w_1,w_2), e encontramos uma função de a que deveria ser minimizada; no caso que tinha sido deixado pra casa na última aula, v=(1,2) e w=(-1,1),

```
  f(a) = ||av-w||^2
       = (av-w)·(av-w)
       = a^2 v·v - 2a v·w + w·w
       = 5 a^2   - 2a     + 2
```

Queremos f'(a)=0, o que acontece em a=1/5, e aí

```
  Pr_v w = Pr_(1,2) (-1,1)
         = 1/5 (1,2)
         = (1/5, 2/5).
```

Passei três exercícios de "V, F, justifique":

```
  ( ) Se v _|_ w então ||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2
  ( ) Se v _|_ w então Pr_v w = 0
  ( ) Se w = u+av e u _|_ v então Pr_v w = av
```

E um problema, com o aviso de que ele é importante, interessante, etc: Usando a definição de Pr_v w encontre uma fórmula para Pr_v w e explique a sua derivação desta fórmula seguindo todas as "regras".
Fizemos o teste valendo 1 ponto extra na P1:

```
  ( ) Todo vetor do plano é combinação linear dos vetores v=(2,3) e
      w=(-4,5).
  ( ) Se u,v,w são vetores, u != (0,0) e u·v=u·w então v=w.
```

Diga se as duas afirmacoes acima são verdadeiras ou falsas e justifique. SIGA TODAS AS REGRAS.

15ª aula (28/set): Como muita gente fez contas erradas na prova e quase ninguém conferiu as contas eu resolvi dar uma aula sobre obter aproximações para valores...

  (1) Sejam v=(4,-1), w=(1,2), u=(-1,2). Encontre valores para a,b∈R tais que av+bw seja _aproximadamente_ u. Faça isso graficamente, sem contas!
  (2) Sejam v=(1,2) e w=(0,4). Encontre uma aproximação para Pr_v w (também graficamente, sem contas).
  (3) Sejam v=(3,2) e w=(1,1). Encontre uma aproximação para Pr_v w (idem).
  (4) A reta r_ab = {(x,y)∈R^2 | x/a + y/b = 1} passa por exatamente um ponto da forma (alfa,0) e por exatamente um ponto da forma (0,beta). Quais são eles? Resolva esta parte algebricamente, e o resto graficamente...
      Sejam A=(1,1), B=(3,2), e r a reta que passa por A e B. Seja s uma reta perpendicular a r que passa pelo ponto A. Encontre, _sem fazer as contas_, uma reta da forma r_ab que seja parecida com a reta s que você desenhou.

16ª aula (30/set): comecei com este exercício:

```
  Sejam C = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=4},
         r = {(0,y) | y∈R},
         s = {(1,1) + t(-1,2) | t∈R}.
  Encontre (graficamente) C∩r e C∩s.
  Dê aproximações para as coordenadas dos pontos
  se não for fácil calculá-los explicitamente.
  Dica: comece encontrando 4 pontos de C e 2 pontos de s.
```

Obtiveramos:

```
  A = (A_1, A_2) ~ (0.9, 1.9)
```

B = (B_1, B_2) ~ (1.9, -0.9)
C = {A, B}.
Com isto podemos fazer um desenho com C, s, A e B!
Repare que se dizemos simplesmente "seja A um ponto que pertence a C
e a s" temos uma ambiguidade - temos duas escolhas possíveis para A!
Vetores vão nos ajudar a nos livrar de algumas destas ambiguidades.
Podemos resolver o problema 4 da aula passada desta forma:
Sejam A = (1,1),
B = (3,2),
v = AB = (2,1),
r = {A + tv | t∈R},
w = (1,-2) um vetor perpendicular a v,
s = {a + tw | t∈R}.
Outro problema da aula passada:
*** transcrever depois ***
(find-QUADROfile "" "2011-09-30-GA")

17ª aula (05/out): Algumas construções de aulas de geometria de ensino
médio (<- que todo mundo deveria ter tido, mas sabe como é).
Sejam A=(0,0), B=(0,2), C=(4,4).
1) Sejam A' o ponto médio de BC,
B' o ponto médio de AC,
C' o ponto médio de AB.
Encontre o ponto de interseção das retas AA', BB', CC'.
(Faça o desenho e encontre ele aproximadamente, no olhômetro).
2) Seja m_AB a _mediatriz_ do segmento AB - ou seja, a reta
perpendicular a AB que passa pelo ponto médio de AB -, m_AC a
mediatriz de AC, m_BC a mediatriz de BC.
Encontre o ponto de interseção das retas m_AB, m_AC, m_BC.
3) Seja CC_H a _altura_ do lado AB do triângulo ABC; C_H é o ponto
de interseção entre a reta AB e a reta perpendicular a AB que
passa por C.
Encontre o ponto de interseção de AA_H, BB_H, CC_H.
Resolvemos o (1) em sala; como os alunos não lembravam de
coeficiente angular e coeficiente linear fizemos uma revisão. Aí
encontramos as equações das retas AA', BB', CC', o ponto de
interseção de AA' e BB' (exato, algebricamente) e verificamos que
ele pertencia a CC'. Obs: como o enunciado dizia "encontre _o_ ponto
de interseção" estava implícito que as três retas se encontram num
único ponto - não é óbvio que as três se encontramos num ponto só,
tivemos que conferir.
4) Sejam A=(0,0), B=(0,3), C=(4,3).
Neste caso, pras contas não ficarem difíceis demais, o ângulo
ABC é reto (90°).
A _bissetriz_ do ângulo ABC de um triângulo é a reta que passa
por B e que "divide o ângulo ABC ao meio".
Seja B'' a interseção da bissetriz de ABC com a reta AC.
Seja A'' a interseção da bissetriz de BAC com a reta BC.
Seja C'' a interseção da bissetriz de ACB com a reta AC.
4a) Calcule, no olhômetro, aproximações para A'', B'' e C'', e
confira com as dos seus colegas.
4b) Calcule, no olhômetro, uma aproximação para o ponto de
interseção das retas AA'', BB'' e CC''.
4c) Calcule exatamente A'', B'', C'' e o ponto de interseção de
AA'', BB'' e CC''.
No ensino médio a gente poderia encontrar essas bissetrizes usando
compasso... por exemplo, traçamos um círculo de centro A e raio 2, e
chamamos de A_B e A_C os pontos de interseção deste círculo com os
lados AB e AC; traçando outros círculos de raio 2 com centros A_B e
A_C encontramos um ponto auxiliar, A''', tal que os pontos A, A_B,
A''', A_C formam um losango; prolongando a diagonal desse losango,
AA''', obtemos a bissetriz do ângulo BAC.
Em GA dá trabalho usar círculos mas podemos obter estes losangos
de outros modos. Pedi pros alunos calcularem e desenharem os vetores
AB, AC, AB/||AB||, AC/||AC||, e pra calcularem em casa o ponto A''',

a reta AA''' e o ponto A'', pra fazerem o mesmo para os outros dois ângulos, e pra encontrarem o ponto de interseção das três bissetrizes.

*** Este problema (o 4c) é importante e as contas são mais ou menos grandes - vocês vão levar pelo menos uns 20 minutos. Não deixem de fazê-lo em casa! ***

18ª aula (07/out): propriedades do produto interno (e seus porquês).
Digamos que A=(x,y) e v=(x,y)=OA.
A norma de v, pela nossa definição algébrica de norma, é uma conta:
||v|| = sqrt(v·v) = sqrt(x^2+y^2).

Primeira propriedade nada óbvia do produto interno: a norma de ||OA|| é o comprimento do segmento OA - ou seja, o comprimento de OA pode ser calculado pela fórmula sqrt(x^2+y^2). Isto é o Teorema de Pitágoras, e todo mundo tem que ver alguma demonstração dele pelo menos uma vez na vida.
Fizemos esta figura:

```
     B--B'------C
     |  |       |
     |  B''--C''C'
     |  |    |  |
     |  |    |  |
  +--A'-A''--D''|
  |  |       |  |
  +--A-------D'-D
     |       |
     |       |
     |       |
     |       |
     +-------+
```

com diagonais A'B', B'C', C'D', D'A', que não dá pra desenhar em ascii. Supusemos que A=(0,0), D'=(alfa,0), A'(0,beta), C=(alfa+beta,alfa+beta), etc, e pedi pros alunos calcularem as coordenadas de todos os pontos.

Sabemos calcular a área de um retângulo qualquer em R^2 que tenha dois lados horizontais e dois verticais (base·altura) e a área de um triângulo retângulo qualquer de R^2 que tenha um lado horizontal e um vertical (base·altura/2).

Aí calculamos a área do quadradão, Area(ABCD), do quadradinho, Area(A''B''C''D''), dos 8 triângulos retângulos, e a área do quadrado inclinado, Area(A'B'C'D') (de pelo menos três modos).

PRA CASA: escrever direito a demonstração de que Area(A'B'C'D') = alfa^2 + beta^2 (e que portanto A'D' = sqrt(alfa^2 + beta^2)).

A segunda propriedade nada óbvia do produto interno é a "regra do cosseno". A versão complicada dela é a seguinte: se v=(v_1,v_2)=OA w=(w_1,w_2)=OB, então v·w = ||v||·||w||·cos θ, onde θ é o ângulo entre OA e OB. A versão simples é a seguinte: se v=(v_1,v_2)=OA, w=(w_1,w_2)=OB, e além disto ||v||=||w||=1, então v·w = cos θ, onde θ é o ângulo entre OA e OB. Vamos provar a versão simples.

Pra fazer uma figura com coordenadas explícitas usamos A=(3/5,4/5) e B=(4/5,3/5). Aí: seja r uma reta perpendicular a OB que passa pelo ponto A; seja C o ponto de interseção das retas r e OB.

PRA CASA: calcule as coordenadas de C (fizemos só o início das contas em sala).

PRA CASA: mostre como calcular as coordenadas de C no caso geral, em que v_1, v_2, w_1, w_2 são reais quaisquer com v_1^2+v_2^2=1 e w_1^2+w_2^2=1.

Vimos que OAC é um triângulo retângulo com hipotenusa OA, e ||OA||=1. Então, pela definição de coseno, cos θ = ||OC||.

PRA CASA: calcule ||OC|| no caso geral (com ||v||=||w||=1) e verifique que ||OC|| = v_1·w_1 + v_2·w_2.

19ª aula (12/out): feriado (dia das crianças e dia nacional da luta contra a corrupção).

20ª aula (14/out):

[21ª aula] (19/out): semana acadêmica
[22ª aula] (21/out): semana acadêmica

[23ª aula] (26/out):
[24ª aula] (28/out): P1.

[25ª aula] (02/nov):
[26ª aula] (04/nov):

[27ª aula] (09/nov):
[28ª aula] (11/nov):

[29ª aula] (16/nov):
[30ª aula] (18/nov):

[31ª aula] (23/nov):
[32ª aula] (25/nov):

[33ª aula] (30/nov):
[34ª aula] (02/dez):

[35ª aula] (07/dez):
[36ª aula] (09/dez):