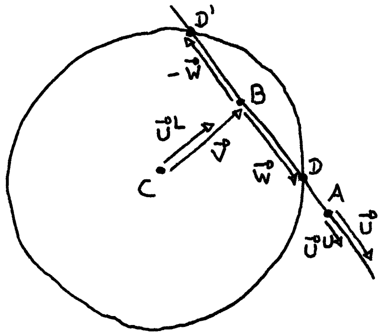
FOLHA 1

Geometria Analítica
PURO-UFF - 2012.2
Primeira Prova (P1)
Prof: Eduardo Ochs
27/fev/2013
(Turma das 9:00 às 11:00)

① O diagrama abaixo mostra um modo de calcular os pontos de interseção entre uma reta e um círculo dados.



A ordem em que os objetos são definidos é a seguinte: começamos com $A, \vec{u}, C$ e R, onde R é o raio do círculo (um número real); com isto definimos a reta r e o círculo c (← minúsculo!) e daí calculamos $\vec{u}^L$, $\vec{v}$, B, $\vec{u}^U$, $\vec{w}$, D, D'.

Vamos usar as seguintes definições (nada padrão!): se $\vec{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$, então $\vec{v}^L$ é $\vec{v}$ rodado 90° para a esquerda, e $\vec{v}^U$ é $\vec{v}$ unitarizado. Formalmente,

Defs: $\overrightarrow{(x,y)}^L = \overrightarrow{(-y,x)}$,

$$\vec{v}^U = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

ⓐ Defina formalmente como calcular $\vec{u}^L$, $\vec{v}$, B, $\vec{u}^U$, $\vec{w}$, D, D'. ⇐ 2.0 pts

ⓑ Teste as suas definições no seguinte caso simples: ⇐ 1.0 pts

$A = (5,3)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$,
$C = (0,0)$,
$R = 5$.

ⓒ Demonstre que se $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$ então $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$. ⇐ 0.5 pts

ⓓ Demonstre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^2$ com $\vec{v} \perp \vec{w}$ então $\|a\vec{v} + b\vec{w}\|^2 = a^2\|\vec{v}\|^2 + b^2\|\vec{w}\|^2$. ⇐ 1,0 pts

ⓔ Encontre uma expressão (isto é, uma definição) para λ que faça com que [illegible] tenha o comprimento certo, i.e., $\|\vec{v} + \vec{w}\| = R$, e demonstre que para quaisquer $A, \vec{u}, C \in R$ tais que $c \cap r \neq \{\}$ temos $D, D' \in r$ e $D, D' \in c$ (ou seja, $\|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{CD'}\| = R$). ⇐ 2,0 pts

Oops, aqui era pra ser $\vec{w} = \lambda \vec{u}^U$

ⓕ Calcule D e D' neste caso: ⇐ 3,0 pts

$A = (5,0)$,
$\vec{u} = (2,-1)$,
$C = (0,1)$,
$R = 3$.

Represente tudo graficamente e teste seus resultados.

Geometria Analítica
PURO-UFF - 2012.2
Primeira Prova (P1)
Prof: Eduardo Ochs
27/fev/2013
(Turma das 9:00 às 11:00)

Folha 2

(2) Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$. Em alguns itens deste problema vamos usar estes valores para $A, \vec{u}, \vec{v}$,

$$A = (1,2) \qquad (\star)$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{(0.8, 0.6)}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{(-0.6, 0.8)}$$

mas em alguns itens você vai ter que lidar com o caso geral.

Vamos definir a seguinte operação que transforma cada ponto de $\mathbb{R}^2$ em outro. Para cada $B = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(B) = F((x,y)) = A + x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Vamos abreviar $F(B)$ como B'.

(a) Sejam $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3\}$, $s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$. Escolha 3 pontos $C, D, E \in r$ e 3 pontos $G, H, I \in s$. Faça um gráfico com C, D, E, r, e G, H, I, s e outro gráfico com C', D', E', G', H', I'. (0.5 pts)

(b) Quem são as retas r' e s'? Dê definições formais para elas. (0.5 pts)

(c) Demonstre - no caso geral, não no caso $(\star)$ - que para quaisquer pontos $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^2$ temos $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{R'S'}$. (1.0 pts)

(d) Demonstre - com as mesmas condições - que $d(P,Q) = d(P',Q')$. (0.5 pts)

(e) Encontre a fórmula "correta" para transformar vetores: para quaisquer $P, Q \in \mathbb{R}^2$, se $\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ então a sua fórmula deve calcular $\vec{v}'$ só a partir de x e y. (0.5 pts)

(f) Demonstre que a sua fórmula está correta demonstrando que para para qualquer $P \in \mathbb{R}^2$ e qualquer vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\vec{v}' = \overrightarrow{P'(P+\vec{v})'}.$$

(1.5 pts)

Geometria Analítica
PURO-UFF - 2012.2
Primeira Prova (P1)
Prof: Eduardo Ochs
27/fev/2013
(Turma das 9:00 às 11:00)

Gabarito

1) a) Digamos que:

$A = (a_1, a_2)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$,
$C = (c_1, c_2)$.

Então:

$\vec{u}^L = \overrightarrow{(-u_2, u_1)}$,
$\vec{v} = Pr_{\vec{u}^L} \overrightarrow{CA}$,
$B = C + \vec{v}$,
$\vec{u}^U = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$,
$\vec{w} = \sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}\, \vec{u}^U$,
$D = B + \vec{w}$,
$D' = B - \vec{w}$.

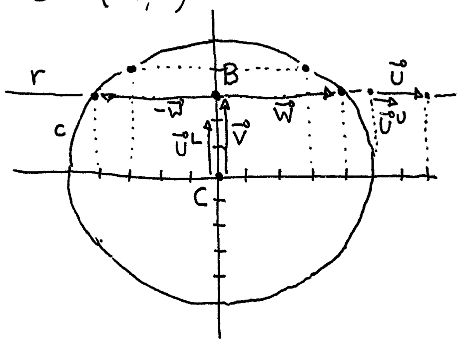
b) Quando

$A = (5,3)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$,
$C = (0,0)$,
$R = 5$,

temos:

$\vec{u}^L = \overrightarrow{(0,2)}$,
$\vec{v} = Pr_{\overrightarrow{(0,2)}} \overrightarrow{(5,3)}$
$= \frac{\overrightarrow{(5,3)} \cdot \overrightarrow{(0,2)}}{\overrightarrow{(0,2)} \cdot \overrightarrow{(0,2)}} \overrightarrow{(0,2)}$
$= \frac{6}{4} \overrightarrow{(0,2)}$
$= \overrightarrow{(0,3)}$

$B = (0,3)$
$\vec{u}^U = \frac{1}{2} \vec{u}$ [redacted]
$= \overrightarrow{(1,0)}$
$\vec{w} = \sqrt{25-9}\, \overrightarrow{(1,0)}$
$= \overrightarrow{(4,0)}$
$D = (4,3)$
$D' = (-4,3)$



c) Se $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$,
então:

$\|k\vec{v}\| = \sqrt{(k\vec{v}) \cdot (k\vec{v})}$
$= \sqrt{k^2 (v_1^2 + v_2^2)}$
$= \sqrt{k^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$= |k|\, \|v\|$

d) $\|a\vec{v} + b\vec{w}\|^2 =$
$= (a\vec{v} + b\vec{w}) \cdot (a\vec{v} + b\vec{w})$
$= (a\vec{v} \cdot a\vec{v}) + (b\vec{w} \cdot a\vec{v}) + (a\vec{v} \cdot b\vec{w}) + (b\vec{w} \cdot b\vec{w})$
$= a^2 (\vec{v} \cdot \vec{v}) + ba(\cancel{\vec{w} \cdot \vec{v}}) + ab(\cancel{\vec{v} \cdot \vec{w}}) + b^2 (\vec{w} \cdot \vec{w})$
$= a^2 \|\vec{v}\|^2 + b^2 \|\vec{w}\|^2$

e) Temos: $A \in \mathbb{R}^2$,
$\vec{u}$ vetor de $\mathbb{R}^2$,
$C \in \mathbb{R}$,
$\vec{u}^L$ e $\vec{u}^U$ definidos
usando as definições de "$\cdot^L$" e "$\cdot^U$",
e $\vec{v} = Pr_{\vec{u}^L} \overrightarrow{CA}$.

Agora vamos tentar descobrir
um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que tenhamos
$\|\vec{v} + \vec{w}\| = R$
quando $\vec{w} = \lambda \vec{u}^U$.

Temos:

$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|w\|^2$
$= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\lambda \vec{u}^U\|^2$
$= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \lambda^2 \|\vec{u}^U\|^2$
$= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \lambda^2$

E como $\vec{v}$ é múltiplo de $\vec{u}^L$,
$\vec{w}$ é múltiplo de $\vec{u}$,
e $\vec{u}^L \perp \vec{u}$, então $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
e portanto
$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \lambda^2$;
como
$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = R^2$,
temos
$R^2 = \|\vec{v}\|^2 + \lambda^2$,
$\lambda^2 = R^2 - \|\vec{v}\|^2$,
$\lambda = \pm\sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}$.

GA - PURO-UFF - 2012.2
GABARITO DA P1 DA TURMA DAS 9:00 ÀS 11:00, CONTINUAÇÃO...

1 e (CONT.):

SEJAM $\lambda = \sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}$

(SEM O "$\pm$"),

$B = C + \vec{v}$,

$D = B + \vec{w}$,

$D' = B - \vec{w}$.

COMO $B \in r$ (ALIÁS SABEMOS QUE B É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE C), E $\vec{w}$ É MÚLTIPLO DE $\vec{u}$, ENTÃO

$D = B + \vec{w} \in \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = r$,

$D' = B - \vec{w} \in \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = r$.

AGORA QUEREMOS VER QUE $D, D' \in c$.

COMO $c = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|\overrightarrow{CP}\| = R\}$
$= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|\overrightarrow{CP}\|^2 = R^2\}$,

BASTA VER QUE $\|CD\|^2 = \|CD'\|^2 = R^2$.

TEMOS:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{CD}\|^2 &= \|\overrightarrow{C(B+\vec{w})}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{C(C+\vec{v}+\vec{w})}\|^2 \\
&= \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 + \cancel{2\vec{v}\cdot\vec{w}} + \|\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 + \sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}^{\,2} \\
&= \|\vec{v}\|^2 + R^2 - \|\vec{v}\|^2 \\
&= R^2
\end{aligned}$$

A PROVA DE QUE $\|\overrightarrow{CD'}\|^2 = R^2$ É SIMILAR.

(OBS: NÃO ESCREVI AS JUSTIFICATIVAS DOS "="S — ALGUNS, COMO $\sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}^{\,2} = R^2 - \|\vec{v}\|^2$, NÃO SÃO TRIVIAIS...)

f $A = (5, 0)$,

$\vec{u} = \overrightarrow{(2,-1)}$,

$C = (0, 1)$,

$R = 3$.

DAÍ:

$\vec{u}^{\perp} = \overrightarrow{(1,2)}$,

$\vec{u}^{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{(2,-1)}$,

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= Pr_{\vec{u}^{\perp}} \overrightarrow{CA} \\
&= Pr_{\overrightarrow{(1,2)}} \overrightarrow{(5,-1)} \\
&= \frac{\overrightarrow{(5,-1)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}}{\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}}\overrightarrow{(1,2)} \\
&= \frac{5-2}{5}\overrightarrow{(1,2)} \\
&= \frac{3}{5}\overrightarrow{(1,2)} \\
&= \overrightarrow{(0.6,\ 1.2)}
\end{aligned}$$

$B = (0, 1) + \overrightarrow{(0.6, 1.2)}$
$= (0.6,\ 2.2)$

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\|^2 &= \overrightarrow{(0.6, 1.2)}\cdot\overrightarrow{(0.6, 1.2)} \\
&= 0.36 + 1.44 \\
&= 1.8
\end{aligned}$$

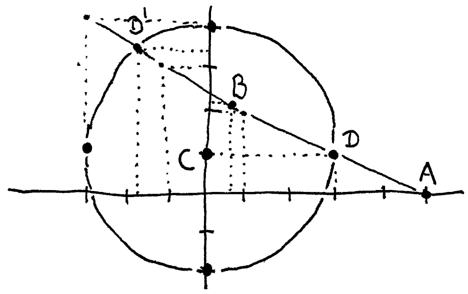
$$\begin{aligned}
\sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2} &= \sqrt{9 - 1.8} \\
&= \sqrt{7.2} \\
&= \sqrt{\tfrac{36}{5}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \sqrt{R^2 - \|\vec{v}\|^2}\,\vec{u}^{U} \\
&= \frac{6}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{(2,-1)} \\
&= \frac{6}{5}\overrightarrow{(2,-1)} \\
&= 1.2\,\overrightarrow{(2,-1)} \\
&= \overrightarrow{(2.4, -1.2)}
\end{aligned}$$

$D = B + \vec{w}$
$= (3, 1)$

$D' = B - \vec{w}$
$= (0.6,\ 2.2) - \overrightarrow{(2.4, -1.2)}$
$= (-1.8,\ 3.4)$

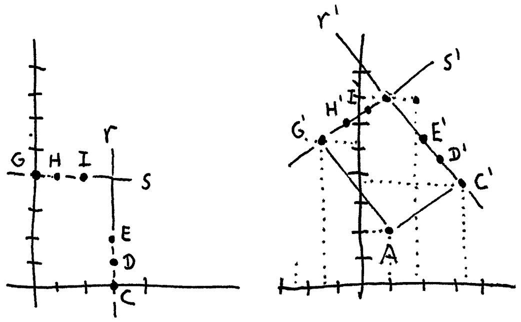
FIGURA:



(VERIFICAÇÃO DE QUE $D, D' \in r$ E $D, D' \in c$: CONTAS SIMPLES)

GA - PURO-UFF - 2012.2
GABARITO DA P1 DA TURMA
DAS 9:00 ÀS 11:00, CONT...

2 (a)



(b) $r' = \{C' + t\overrightarrow{C'D'} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(A + 3\vec{u}) + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$s' = \{G' + t\overrightarrow{G'H'} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{A + 4\vec{v} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$

(c) VAMOS USAR A NOTAÇÃO DE MATRIZES.

$A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}0.8\\0.6\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-0.6\\0.8\end{pmatrix}$,

$x\vec{u} + y\vec{v} = \begin{pmatrix}0.8 & -0.6\\0.6 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$= M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (ONDE $M = \begin{pmatrix}0.8 & -0.6\\0.6 & 0.8\end{pmatrix}$),

$F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = A + M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $P' = F(P) = A + MP$.

COM ISTO,

$\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P' = (\cancel{A} + MQ) - (\cancel{A} + MP)$
$= MQ - MP$
$= M(Q - P)$
$= M\overrightarrow{PQ}$,

E, SIMILARMENTE,

$\overrightarrow{R'S'} = M\overrightarrow{RS}$.

USANDO QUE $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T\vec{w}$
(ONDE O "T" INDICA TRANSPOSIÇÃO),

$\overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{R'S'} = M\overrightarrow{PQ} \cdot M\overrightarrow{RS}$
$= (M\overrightarrow{PQ})^T M\overrightarrow{RS}$
$= (\overrightarrow{PQ}^T M^T) M\overrightarrow{RS}$
$= \overrightarrow{PQ}^T (M^T M)\overrightarrow{RS}$ (PORQUE $M^T M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$)
$= \overrightarrow{PQ}^T\,\overrightarrow{RS}$
$= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$.

(d) $d(P', Q') = \|\overrightarrow{P'Q'}\|$
$= \sqrt{\|\overrightarrow{P'Q'}\|^2}$
$= \sqrt{\overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{P'Q'}}$
$= \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$
$= \|\overrightarrow{PQ}\|$
$= d(P, Q)$.

(e) $\vec{v}' = M\vec{v}$

(f) $\overrightarrow{P'(P+\vec{v})'} = \overrightarrow{(A+MP)(A+M(P+\vec{v}))}$
$= (A + M(P+\vec{v})) - (A + MP)$
$= (\cancel{A} + \cancel{MP} + M\vec{v}) - (\cancel{A} + \cancel{MP})$
$= M\vec{v}$

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2012.2
Primeira Prova (P1)
(Turma das 11:00 às 13:00)
1º de Março, 2013

1) É comum em Matemática resolvermos problemas complicados reduzindo-os a problemas mais simples praticamente equivalentes aos originais.

O último problema da lista de exercícios começava com:

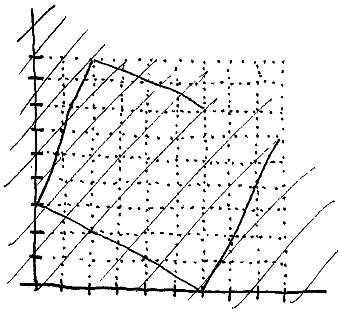
Sejam r, r' e r'' retas paralelas, s_A, s_B, s_C retas não paralelas a r, e sejam $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$ as interseções de r, r' e r'' com s_A, s_B, s_C.

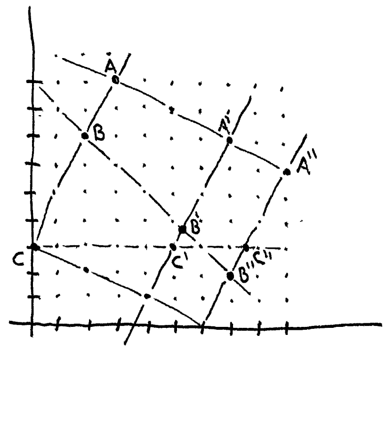
Vamos introduzir uma condição extra: s_A vai ser perpendicular a r.

Agora sejam $\bar{A}, \bar{A}', \bar{A}'', \bar{B}, \bar{B}', \bar{B}'', \bar{C}, \bar{C}', \bar{C}''$ 9 pontos de $\mathbb{R}^2$ definidos pelas seguintes equações:

$$\bar{A} = \bar{B} = \bar{C} = O$$
$$\overrightarrow{\bar{A}'\bar{A}''} = \overrightarrow{A'A''}, \quad \overrightarrow{\bar{B}'\bar{B}''} = \overrightarrow{B'B''}$$
$$\overrightarrow{\bar{A}\bar{A}'} = \overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{\bar{B}\bar{B}'} = \overrightarrow{BB'}.$$

a) Considere este caso:





Calcule $\bar{A}, \bar{A}', \bar{A}'', \bar{B}, \bar{B}', \bar{B}'', \bar{C}, \bar{C}', \bar{C}''$ e represente graficamente a figura formada por eles. 1.0 pts

b) Prove - no caso geral! - que a reta que passa por [redacted] é paralela a que passa por [redacted], e que a que passa por $\bar{A}'$ e $\bar{C}'$ é paralela à que passa por $\bar{A}''$ e $\bar{C}''$. 2.0 pts
oops! $\bar{A}'$ e $\bar{B}'$, $\bar{A}''$ e $\bar{B}''$

c) Prove - no caso geral! - que $\bar{A}', \bar{B}'$ e $\bar{C}'$ são colineares. Idem para $\bar{A}'', \bar{B}''$ e $\bar{C}''$. 2.0 pts

2) Prove que se $Pr_{\vec{u}}\vec{v} + \vec{w} = \vec{v}$ então $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $Pr_{\vec{u}}\vec{v} \perp \vec{w}$. 2.0 pts

3) Prove que se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então o ponto de $r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ mais próximo de $A + \vec{u}$ é A. 2.0 pts

4) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esta função:

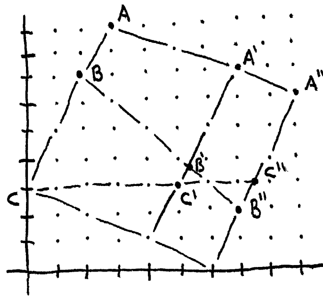
$$\cancel{F((x,y)) = O + x\binom{\alpha}{\beta} + y\binom{-\beta}{\alpha} = O + x\overrightarrow{(\alpha,\beta)} + y\overrightarrow{(-\beta,\alpha)}}$$

$$F((x,y)) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x).$$

Prove que para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ temos $||\overrightarrow{OP}||^2 = ||\overrightarrow{OF(P)}||^2$ e $||\overrightarrow{PQ}||^2 = ||\overrightarrow{F(P)F(Q)}||^2$. 2,0 pts

GA - PURO/UFF - 2012.2
GABARITO DA 1ª PROVA (P1)
(TURMA DAS 11:00 ÀS 13:00)
1º DE MARÇO, 2013

(1a) OLHANDO PRO DESENHO



E PROLONGANDO AS RETAS NO OLHO PRA DESCOBRIR SEUS COEFICIENTES LINEARES (OS COEFICIENTES ANGULARES SÃO EVIDENTES PELO GRÁFICO) TEMOS:

$r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x+3\}$

$r' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x-7\}$

$r'' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x-12\}$

$s_A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 11.5\}$

$s_B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = -x+9\}$

$s_C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$

AS COORDENADAS DE A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'' SÃO TODAS FÁCEIS DE VER PELO GRÁFICO, EXCETO PELAS DO PONTO B', QUE PODEMOS CALCULAR RESOLVENDO UM SISTEMA:

$$y = 2x-7$$
$$y = 9-x$$
$$9-x = 2x-7$$
$$-3x = -16$$
$$x = \frac{16}{3}$$
$$y = 9 - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}$$

ENTÃO:

$A = (3,9)$ $A' = (7,7)$ $A'' = (9,6)$

$B = (2,7)$ $B' = (\frac{16}{3}, \frac{11}{3})$ $B'' = (7,2)$

$C = (0,3)$ $C' = (5,3)$ $C'' = (7.5, 3)$

E SABEMOS QUE:

$\bar{A} = 0$ $\bar{A}' = \bar{A} + \overrightarrow{AA'} = 0 + \overrightarrow{AA'}$ $\bar{A}'' = \bar{A}' + \overrightarrow{A'A''} = 0 + \overrightarrow{AA''}$

$\bar{B} = 0$ $\bar{B}' = 0 + \overrightarrow{BB'}$ $\bar{B}'' = 0 + \overrightarrow{BB''}$

$\bar{C} = 0$ $\bar{C}' = 0 + \overrightarrow{CC'}$ $\bar{C}'' = 0 + \overrightarrow{CC''}$

(ISTO VALE NO CASO GERAL!)

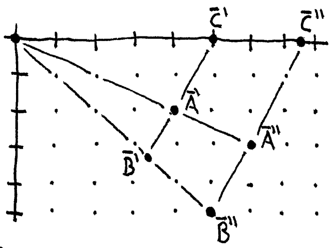
PORTANTO, NO CASO DO ITEM (a), TEMOS:

$\bar{A} = (0,0)$ $\bar{A}' = (4,-2)$ $\bar{A}'' = (6,-3)$

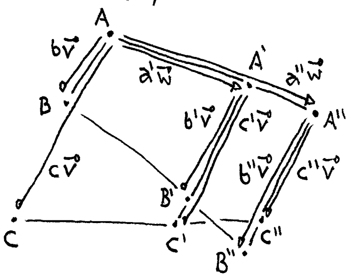
$\bar{B} = (0,0)$ $\bar{B}' = (\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ $\bar{B}'' = (5,-5)$

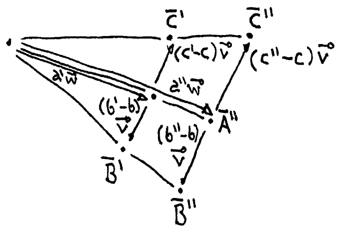
$\bar{C} = (0,0)$ $\bar{C}' = (5,0)$ $\bar{C}'' = (7.5, 0)$

E A FIGURA É:



(b), (c): HÁ MILHARES DE MODOS DE ESTRUTURAR ESTAS DEMONSTRAÇÕES; ACHO QUE OS MAIS ELEGANTES PASSAM POR ANOTAR CERTOS VETORES NAS FIGURAS, E MOSTRAR QUE TEMOS:





(2) VAMOS SUPOR QUE

$$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} + \vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \vec{w} = \vec{v},$$

OU SEJA,

$$\vec{w} = \vec{v} - \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}.$$

ENTÃO $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\left(\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right)$

$$= \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}}\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

$$= 0.$$

E COMO $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$,

$$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}(\vec{u}\cdot\vec{w})$$

$$= 0.$$

GA - PURO/UFF - 2012.2
GABARITO DA 1ª PROVA (P1)
(TURMA DAS 11:00 ÀS 13:00)
1º DE MARÇO, 2013

(3) SEJA $P(t) = A + t\vec{v}$.

E
$$
\begin{aligned}
F(t) &= \cancel{d(P(t), A)^2} \\
&= \cancel{\overrightarrow{AP(t)} \cdot \overrightarrow{AP(t)}} \\
&= d(P(t), A+\vec{u})^2 \\
&= \overrightarrow{(A+\vec{u})P(t)} \cdot \overrightarrow{(A+\vec{u})P(t)} \\
&= (t\vec{v} - \vec{u}) \cdot (t\vec{v} - \vec{u}) \\
&= t^2\|\vec{v}\|^2 - 2t\vec{v}\cdot\vec{u} + \|\vec{u}\|^2;
\end{aligned}
$$

QUEREMOS MOSTRAR QUE $F(t)$ É MÍNIMA EM $t=0$. COMO ESTAMOS SUPONDO QUE $\vec{u} \perp \vec{v}$, TEMOS

$$F(t) = t^2\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2,$$

ONDE $\|\vec{v}\|^2$ E $\|\vec{u}\|^2$ SÃO REAIS NÃO-NEGATIVOS.

(4) SEJAM $P = (P_x, P_y)$,
$Q = (Q_x, Q_y)$.

ENTÃO
$$
\begin{aligned}
F(P) &= (\alpha P_x - \beta P_y, \alpha P_y + \beta P_x), \\
F(Q) &= (\alpha Q_x - \beta Q_y, \alpha Q_y + \beta Q_x), \\
F(0) &= (\alpha 0 + \beta 0, \alpha 0 + \beta 0) \\
&= (0, 0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

SEJA $\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(P_x - Q_x, P_y - Q_y)}$.

É FÁCIL VER QUE $\overrightarrow{F(P)F(Q)} =$
$$\overrightarrow{(\alpha(Q_x - P_x) - \beta(Q_y - P_y), \alpha(Q_y - P_y) + \beta(Q_x - P_x))} = \overrightarrow{(\alpha v_x - \beta v_y, \alpha v_y + \beta v_x)},$$

E PORTANTO
$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{F(P)F(Q)}\|^2 &= (\alpha v_x - \beta v_y)^2 + (\alpha v_y + \beta v_x)^2 \\
&= (\alpha^2 v_x^2 \cancel{- 2\alpha\beta v_x v_y} + \beta^2 v_y^2) + (\alpha^2 v_y^2 \cancel{+ 2\alpha\beta v_x v_y} + \beta^2 v_x^2) \\
&= (\alpha^2 + \beta^2)(v_x^2 + v_y^2) \\
&= 1\,\|\vec{v}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{PQ}\|^2.
\end{aligned}
$$

A DEMONSTRAÇÃO DE QUE $\|\overrightarrow{OF(P)}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2$ É UM CASO PARTICULAR DESTA - BASTA FAZERMOS AS SUBSTITUIÇÕES
$$P := O,$$
$$Q := P.$$