GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
2/JUNHO/2011

① A AFIRMAÇÃO ABAIXO É VERDADEIRA OU FALSA? JUSTIFIQUE. (1.0 PONTOS)

SEJAM $C \subset \mathbb{R}^2$ UM CÍRCULO E $\alpha \in \mathbb{R}$ UM NÚMERO REAL POSITIVO. ENTÃO O CONJUNTO DOS PONTOS CUJA DISTÂNCIA A C É α É UM CÍRCULO.

② SEJAM

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

E $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0\}$.

ⓐ ENCONTRE QUATRO PONTOS DIFERENTES DE C E REPRESENTE GRAFICAMENTE C E r. (1.0 PONTOS)

ⓑ REPRESENTE GRAFICAMENTE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),C) = 1\}$ E $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),r) = 1\}$. (1.0 PONTOS)

ⓒ ENCONTRE CINCO PONTOS DE $\mathbb{R}^2$ QUE SEJAM EQUIDISTANTES DE C E DE r. (1.0 PONTOS)

ⓓ ENCONTRE A EQUAÇÃO DE UMA PARÁBOLA CUJOS PONTOS SEJAM TODOS EQUIDISTANTES DE C E DE r. (3.0 PONTOS)

③ SEJAM

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

E C E C' CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^2$, COM CENTROS C_0 E C_0' E RAIOS R E R' RESPECTIVAMENTE, E QUE OBEDECEM AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

(I) C, C' E r SÃO TANGENTES ENTRE SI,
(II) C_0 ESTÁ SOBRE O EIXO HORIZONTAL,
(III) C_0 E C_0' TÊM COORDENADA x POSITIVA,
(IV) C_0' TEM COORDENADA y POSITIVA.

ⓐ DIGAMOS QUE $R = R' = 2$. ENCONTRE AS COORDENADAS DE C_0' E REPRESENTE r, C, C' GRAFICAMENTE. (0,5 PONTOS)

ⓑ DIGAMOS QUE $R = 2$ E $R' = 3$. ENCONTRE AS COORDENADAS DE C_0' E REPRESENTE r, C, C' GRAFICAMENTE. (0,5 PONTOS)

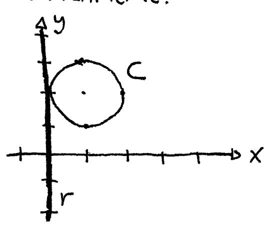
ⓒ GENERALIZE: SE R E R' SÃO REAIS POSITIVOS QUAISQUER, QUAIS SÃO AS COORDENADAS DE C_0 E C_0'? (2,0 PONTOS)

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
2/junho/2011

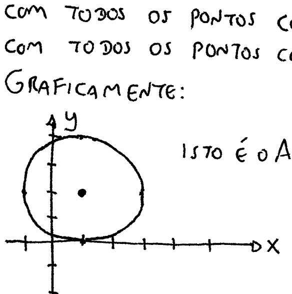
Gabarito

(1) Se C é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2 e $\alpha=1$ então o conjunto dos pontos cuja distância a C é α é a união de dois círculos disjuntos, ambos centrados na origem, um com raio 3 e outro com raio 1. Este conjunto não é um círculo, portanto a afirmação é falsa.

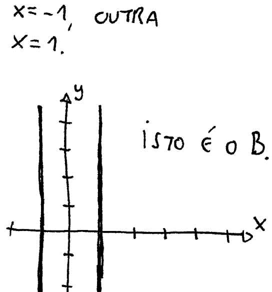
(2a)
$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2-2x)+(y^2-4y+4)=0\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ((x^2-2x+1)-1)+(y-2)^2=0\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-2)^2=1^2\},$$
portanto C é o círculo de raio 1 e centro $(1,2)$.
É fácil verificar (fazendo as contas) que $(0,2)\in C$, $(2,2)\in C$, $(1,3)\in C$, $(1,1)\in C$.
Graficamente:



(2b) Vamos dar nomes para estes conjuntos:
$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),C)=1\},$$
$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),r)=1\}.$$
O conjunto A vai ser um círculo de centro $(1,2)$ e raio 2 e mais um ponto (que podemos ver como um círculo degenerado) em $(1,2)$; o conjunto B vai ser a união de duas retas verticais, uma com todos os pontos com $x=-1$, outra com todos os pontos com $x=1$.
Graficamente:



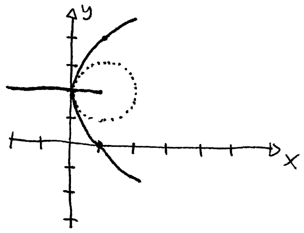
isto é o A,



isto é o B.

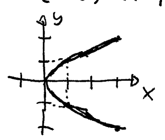
(2c) A interseção dos conjuntos A e B do item anterior,
$$A\cap B = \{(-1,2),(1,4),(1,2),(1,0)\}$$
nos dá todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão à distância 1 tanto de C quanto de r, e o conjunto
$$C\cap r = \{(0,2)\}$$
tem todos os pontos que estão à distância 0 tanto de C quanto de r.

(2d) Dá pra ver, por argumentos geométricos que não vou detalhar aqui no gabarito, que o conjunto dos pontos equidistantes de C e r deve ter esta forma:

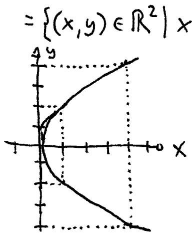


ou seja, ele é a união da semi-reta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 1,\ y=2\}$ com uma curva que parece ser uma parábola... Pra verificar que ela é realmente uma parábola nós vamos encontrar a equação da parábola que passa pelos pontos $(0,2)$, $(1,4)$, $(1,0)$ e testar se os pontos dela são equidistantes de r e de C.

$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2\}$ é:



$$P' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=(\tfrac{y}{2})^2\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2/4\}\ \text{é:}$$

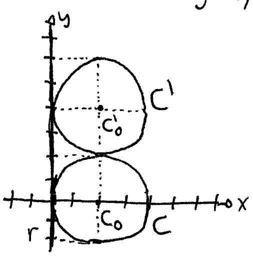


e $P'' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=(y-2)^2/4\}$ é P' deslocado duas unidades para cima.
É fácil conferir que $(0,2),(1,4),(1,0)\in P''$, e que para cada ponto de
$$P'' = \{((y-2)^2/4,\ y) \mid y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(t^2/4,\ t+2) \mid t\in\mathbb{R}\}$$
temos $d((t^2/4,t+2),r) = t^2/4$,
$$d((t^2/4,t+2),C) = d((t^2/4,t),(1,0))-1$$
$$= d((\tfrac{t^2}{4}-1,t),(0,0))-1$$
$$= t^2/4.$$

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
2/JUNHO/2011

GABARITO (CONT.)

(3a) SE $R=2$ ENTÃO $C_0=(2,0)$,
E SE $R'=2$ ENTÃO $C_0'=(2,y')$;
COMO C E C' SÃO TANGENTES
TEMOS $d(C_0,C_0') = R+R' = 4$
E PELA CONDIÇÃO (IV) TEMOS
$y'>0$. ENTÃO $y'=4$, E A FIGURA É:

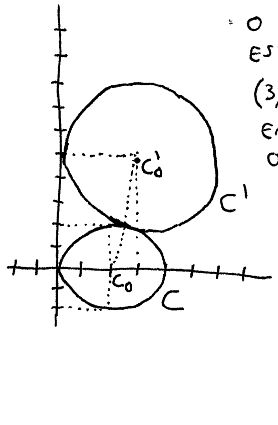


(3b) SE $R=2$ E $R'=3$ ENTÃO
$C_0=(2,0)$ E $C_0'=(3,y')$;
DEVEMOS TER $d(C_0,C_0')=R+R'=5$,
MAS:

$$d(C_0,C_0') = d((2,0),(3,y'))$$
$$= \sqrt{(2-3)^2+(0-y')^2}$$
$$= \sqrt{1+y'^2}$$

ENTÃO:
$$5 = \sqrt{1+y'^2}$$
$$5^2 = 1+y'^2$$
$$y'^2 = 25-1 = 24$$
$$y' = \sqrt{24}.$$

GRAFICAMENTE:



O PONTO $C_0'=(3,\sqrt{24})$
ESTÁ UM POUCO ABAIXO DO PONTO
$(3,5)$, E O PONTO DE TANGÊNCIA
ENTRE C E C' ESTÁ SOBRE
O SEGMENTO $\overline{C_0C_0'}$. :

(3c) NO CASO GERAL VAMOS TER:

$C_0=(R,0)$,
$C_0'=(R',y')$,
$d(C_0,C_0')=R+R'$ E
$d(C_0,C_0')=\sqrt{(R-R')^2+y'^2}$,

PORTANTO:

$$(R+R')^2=(R-R')^2+y'^2$$
$$\cancel{R^2}+2RR'+\cancel{R'^2}=\cancel{R^2}-2RR'+\cancel{R'^2}+y'^2$$
$$4RR'=y'^2$$
$$y'=\sqrt{4RR'}=2\sqrt{RR'}$$

OU SEJA, AS COORDENADAS DE C_0 E C_0' SÃO:

$C_0=(R,0)$
$C_0'=(R',2\sqrt{RR'})$.