GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
PRIMEIRA PROVA ("P1")
PROF: EDUARDO OCHS
19/MAIO/2011

① MOSTRE QUE TODO CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$ PODE SER REPRESENTADO NA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha x+\beta y+\gamma=0\}$ DE MAIS DE UM MODO. (0,5 PONTOS)

② MOSTRE QUE NEM TODO CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ É UMA RETA. (0,5 PONTOS)

③ MOSTRE QUE NEM TODO CONJUNTO DA FORMA $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ É UMA RETA. (0,5 PONTOS)

④ MOSTRE QUE NEM TODA RETA É UM CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$. (0,5 PONTOS)

⑤ LEMBRE QUE A NOSSA DEFINIÇÃO "ALGÉBRICA" DE CÍRCULO É A SEGUINTE: UM CÍRCULO É UM CONJUNTO DA FORMA (4,0 PONTOS)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\},$$

ONDE O PARÂMETRO R É UM NÚMERO REAL ESTRITAMENTE POSITIVO.
MOSTRE QUE TODO CÍRCULO É UM CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\},$$

MAS NEM TODO CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\}$$

É UM CÍRCULO.
ALÉM DISSO MOSTRE COMO CONVERTER ENTRE AS REPRESENTAÇÕES

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$$

E

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\}$$

(QUANDO POSSÍVEL).

⑥ QUANDO C É UM CÍRCULO CENTRADO NA ORIGEM E r É UMA RETA QUE TANGENCIA O CÍRCULO NO PONTO $A=(a,b)$ TEMOS: (6,0 PONTOS)

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=a^2+b^2\},$$
$$r=\{(a,b)+t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t\in\mathbb{R}\}.$$

UTILIZE UMA MUDANÇA DE COORDENADAS QUE SEJA UMA TRANSLAÇÃO (ISTO É, $x'=x+\alpha$, $y'=y+\beta$) PARA CARACTERIZAR CÍRCULOS E RETAS C' E r' TAIS QUE:

A RETA r' TANGENCIE C' NUM PONTO A' <u>E</u> r' PASSE PELA ORIGEM. <u>DICAS:</u> COMECE REPRESENTANDO GRAFICAMENTE AS CONSTRUÇÕES QUE VOCÊ VAI FAZER E EXPLICANDO-AS EM PORTUGUÊS, DEPOIS TRADUZA CADA PASSO DA CONSTRUÇÃO PARA A SUA VERSÃO "ALGÉBRICA", E SEMPRE QUE NECESSÁRIO TESTE AS SUAS FÓRMULAS COM EXEMPLOS CONCRETOS.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
GABARITO DA P1 DE 19/MAIO/2011, QUE FOI TRANSFORMADA EM LISTA DE EXERCÍCIOS
PROF: EDUARDO OCHS

(1) [O ENUNCIADO DESTA QUESTÃO ESTÁ MEIO INCOMPLETO - EU IRIA EXPLICÁ-LO NO QUADRO LOGO ANTES DA PROVA. A IDÉIA É QUE UM CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$$

É DETERMINADO PELOS PARÂMETROS a E b... DOIS PARES DE PARÂMETROS DIFERENTES, (a,b) E (a',b') COM $(a,b)\neq(a',b')$, QUE GEREM A MESMA RETA SERIAM DUAS "REPRESENTAÇÕES DIFERENTES" PARA MESMA RETA.]

....

A EQUAÇÃO $y=ax+b$ VALE SE E SÓ SE VALER $-ax+y-b=0$, E SE E SÓ SE VALER $200ax-200y+200b=0$. ENTÃO TEMOS:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -ax+y-b=0\} \quad (*)$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 200ax-200y+200b=0\} \quad (**)$$

E COMO O COEFICIENTE DO y (O "β") É DIFERENTE EM $(*)$ E $(**)$ ENTÃO $(*)$ E $(**)$ SÃO DUAS REPRESENTAÇÕES DIFERENTES.

(2) QUANDO $(a,b,c)=(0,0,666)$ TEMOS

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+666=0\} = \emptyset,$$

QUE NÃO É UMA RETA; E QUANDO $(a,b,c)=(0,0,0)$ TEMOS

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+0=0\} = \mathbb{R}^2,$$

QUE TAMBÉM NÃO É UMA RETA.

(3) QUANDO $A=(3,4)$ E $\vec{v}=\overrightarrow{(0,0)}$ TEMOS

$$\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\} =$$
$$=\{(3,4)+t\overrightarrow{(0,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(3+0t,4+0t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(3,4) \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(3,4)\},$$

QUE NÃO É UMA RETA.

(4) A RETA VERTICAL $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=3\}$ NÃO É UM CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$.

(5) AS SEGUINTES EQUAÇÕES SÃO EQUIVALENTES:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$
$$(x^2-2x_0x+x_0^2)+(y^2-2y_0y+y_0^2)-R^2=0$$
$$x^2+(-2x_0)x+y^2+(-2y_0)+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0$$

PORTANTO

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(-2x_0)x+y^2+(-2y_0)+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0\}.$$

QUANDO $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$ TEMOS

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}$$
$$=\{(0,0)\},$$

QUE NÃO É UM CÍRCULO; E QUANDO $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,-1)$ TEMOS

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} =$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=-1\}$$
$$=\emptyset,$$

QUE TAMBÉM NÃO É UM CÍRCULO.

PARA CONVERTER UM CÍRCULO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\} \quad (*)$$

PARA A FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} \quad (**)$$

PODEMOS FAZER

$$\alpha=-2x_0,$$
$$\beta=-2y_0,$$
$$\gamma=x_0^2+y_0^2-R^2,$$

COMO VIMOS ACIMA; E PARA CONVERTER DA FORMA $(**)$ PARA $(*)$ PODEMOS FAZER O SEGUINTE: AS EQUAÇÕES ABAIXO SÃO EQUIVALENTES,

$$(x^2+\alpha x)+(y^2+\beta y)+\gamma=0$$
$$\left(\left(x+\tfrac{\alpha}{2}\right)^2-\tfrac{\alpha^2}{4}\right)+\left(\left(y+\tfrac{\beta}{2}\right)^2-\tfrac{\beta^2}{4}\right)+\gamma=0$$
$$\left(x+\tfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{\beta}{2}\right)^2=\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma$$

PORTANTO DEVEMOS TOMAR

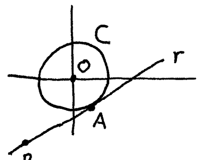
$$x_0=-\tfrac{\alpha}{2},$$
$$y_0=-\tfrac{\beta}{2},$$
$$R^2=\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma$$
$$R=\sqrt{\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma},$$

MAS ISTO SÓ FUNCIONA QUANDO $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma>0$.

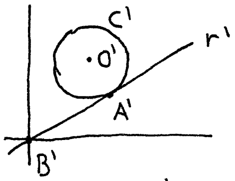
[CONTINUA...]

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
GABARITO DA P1 DE
19/MAIO/2011, QUE FOI
TRANSFORMADA EM LISTA DE
EXERCÍCIOS
PROF: EDUARDO OCHS

(6) GRAFICAMENTE, A SITUAÇÃO DO PROBLEMA ANTES DA TRANSLAÇÃO É ESTA AQUI:



DIGAMOS QUE O PONTO $B \in r$, $B = A + u\overrightarrow{(b,-a)}$, SEJA O QUE É LEVADO NA ORIGEM PELA TRANSLAÇÃO. ENTÃO TEMOS ISTO AQUI:



ONDE $O' = (0+\alpha, 0+\beta)$
$= (\alpha, \beta)$,
$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2+b^2\}$,
$A' = (a+\alpha, b+\beta)$,
$r' = \{A' + t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$B' = A' + u\overrightarrow{(b,-a)}$
$= (a+\alpha, b+\beta) + \overrightarrow{(ub,-ua)}$
$= (a+\alpha+ub, b+\beta-ua)$.

COMO SABEMOS QUE $B' = (0,0)$
TEMOS QUE TER $\alpha = -a-ub$
E $\beta = -b+ua$;

ENTÃO $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+a+ub)^2 + (y+b-ua)^2 = a^2+b^2\}$,
$A' = (a-a-ub, b-b+ua)$
$= (-ub, ua)$,
$r' = \{(-ub,ua) + t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t \in \mathbb{R}\}$, ⇦ PENSE SOBRE ESTE PASSO!
$B' = (0,0)$.

AGORA QUE FIZEMOS TODAS AS CONTAS PODEMOS RESOLVER O PROBLEMA ORIGINAL. DIGAMOS QUE r' SEJA UMA RETA QUALQUER QUE PASSE PELA ORIGEM E C' SEJA UM CÍRCULO TANGENTE A r'. SEJAM A' O PONTO DE TANGÊNCIA ENTRE C' E r', E SEJA O' O CENTRO DO CÍRCULO C'. ENTÃO O', C', A' E r' SÃO DA FORMA:

$O' = (-a-ub, -b+ua)$,
$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+a+ub)^2 + (y+b-ua)^2 = a^2+b^2\}$,
$A' = (-ub, ua)$,
$r' = \{t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

PARA $a,b,u \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$.