Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
9/novembro/2011

(1) Defina, usando notação de conjuntos e matematiquês formal - sem português, ⇐ 1.0 pts

a) o conjunto dos vetores horizontais incluindo o vetor nulo,

b) o conjunto dos vetores ~~verticais~~ horizontais excluindo o vetor nulo,

c) o conjunto dos vetores verticais incluindo o vetor nulo,

d) o conjunto dos vetores verticais excluindo o vetor nulo.

Dê um nome para cada um destes conjuntos.

Obs: quase todo texto de matemática "sério" tem algumas definições que podem parecer ambíguas à primeira vista, mas o critério para resolver as ambiguidades é sempre o mesmo: a definição "correta" é sempre a definição "mais natural", isto é, dentre as definições naturais a mais simples. Por exemplo: o "conjunto dos vetores horizontais" é ou o que você definiu no item a ou o do item b, e "vetor horizontal" quer dizer "elemento do conjunto dos vetores horizontais".

(2) Se $A \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}, \vec{w}$ são vetores de $\mathbb{R}^2$, o <u>paralelogramo gerado por A, $\vec{v}$ e $\vec{w}$</u> é o paralelogramo $A(A+\vec{v})(A+\vec{v}+\vec{w})(A+\vec{w})$.

a) Se a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ deste paralelogramo é horizontal então a diagonal $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ é vertical? (Sim, não, justifique). ⇐ 1.0 pts

b) Se a diagonal $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ é vertical e $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ então a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ é horizontal? (Sim, não, justifique). ⇐ 2.0 pts

(3) Seja ABC um triângulo em $\mathbb{R}^2$. ⇐ 1.5 pts
Descreva o procedimento para calcular a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, nomeando todos os objetos que você precisa construir e descrevendo como obtê-los a partir dos anteriores. Depois teste o seu procedimento no caso $A=(-2,4)$, $B=(-2,1)$, $C=(4,1)$.

(4) Seja ABC um triângulo qualquer no qual:

I) o coeficiente angular da reta AB é $\alpha \neq 0$,

II) o coeficiente angular da reta AC é $-\alpha$,

III) o coeficiente angular da reta BC é β,

IV) a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ corta o lado BC no ponto D.

Correção: (*) ... vertical ou horizontal; daqui por diante suporemos que ele é vertical.

Então:

a) Prove que o segmento AD é vertical, (*) ⇐ 2.0 pts

b) Prove que as componentes horizontais dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DB}$ são iguais, e faça o mesmo para os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DC}$. ⇐ 1.0 pts

c) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$. ⇐ 2.0 pts

(5) Logo depois da P1 vamos ver como "rodar" a demonstração da questão anterior e generalizá-la para casos nos quais a bissetriz AD não precisa ser vertical - e este método vai valer para muitas demonstrações, não só para esta. A "versão geral" da demonstração do 4 vai ser o: ⇐ 2.0 pts

<u>Teorema 5.</u> Em qualquer triângulo ABC, se $D \in BC$ e AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, temos $\dfrac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$.

Esta questão é só pra ver se você sabe aplicar um teorema destes. Digamos que $B=(2,1)$, $C=(5,3)$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 10$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 15$. Se $D \in BC$ e AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, quais são as coordenadas de D?

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
9/NOVEMBRO/2011

GABARITO

1) a) $H = \{\overrightarrow{(x,0)} \mid x \in \mathbb{R}\}$

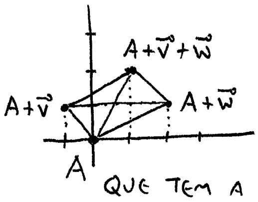
b) $H^* = \{\overrightarrow{(x,0)} \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$

c) $V = \{\overrightarrow{(0,y)} \mid y \in \mathbb{R}\}$

d) $V^* = \{\overrightarrow{(0,y)} \mid y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\}$

2) a) Se $A = (0,0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,1)}$

então o paralelogramo $A(A+\vec{v})(A+\vec{v}+\vec{w})(A+\vec{w})$ é:



que tem a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ horizontal e a diagonal $(A)(A+\vec{v}+\vec{w})$ não-vertical.

b) Se $\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x, w_y)}$

então a diagonal $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ é vertical se e só se $\vec{v}+\vec{w}$ é um vetor vertical; como

$$\vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{(v_x, v_y)} + \overrightarrow{(w_x, w_y)} = \overrightarrow{(v_x+w_x,\ v_y+w_y)},$$

isto acontece se e só se $v_x+w_x = 0$, ou seja, se $w_x = -v_x$.

A condição $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ é equivalente a $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$, ou seja, a $v_x^2+v_y^2 = w_x^2+w_y^2$;

Se as duas condições valem temos

$$v_x^2+v_y^2 = (-v_x)^2 + w_y^2 = v_x^2 + w_y^2,$$ e daí

$v_y^2 = w_y^2$, ou seja, $|v_y| = |w_y|$, ou seja, $v_y = \pm v_y$.

Portanto ou $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x,w_y)} = \overrightarrow{(-v_x,v_y)}$

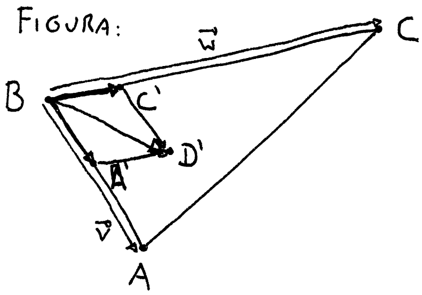
ou $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x,w_y)} = \overrightarrow{(-v_x,-v_y)}$.

No caso $\vec{w} = \overrightarrow{(-v_x,v_y)}$ a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ vai "ser"

$$\vec{w}-\vec{v} = \overrightarrow{(w_x,w_y)} - \overrightarrow{(v_x,v_y)} = \overrightarrow{(-v_x,v_y)} - \overrightarrow{(v_x,v_y)} = \overrightarrow{(-2v_x,0)},$$

que é horizontal, e no caso $\vec{w} = \overrightarrow{(-v_x,-v_y)} = -\vec{v}$ a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ "é" o vetor nulo, que é horizontal. Portanto a afirmação é verdadeira.

3) Figura:



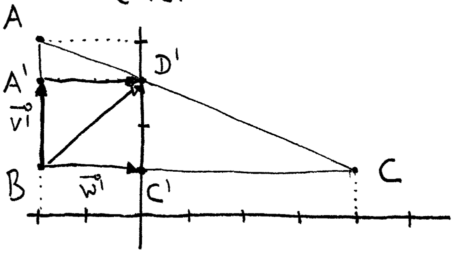
Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$.

Sejam $\vec{v}' = \alpha\vec{v}$ e $\vec{w}' = \beta\vec{w}$ vetores com $\|\vec{v}'\| = \|\vec{w}'\|$, com α, β reais positivos — por exemplo, $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e $\vec{w}' = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

Sejam $A' = B+\vec{v}'$, $C' = B+\vec{w}'$, $D' = B+\vec{v}'+\vec{w}'$.

Então BD' é a bissetriz de $A\hat{B}C$.

Teste:



$\alpha = \frac{2}{3}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{(0,2)}$,

$\beta = \frac{1}{3}$, $\vec{w}' = \overrightarrow{(2,0)}$,

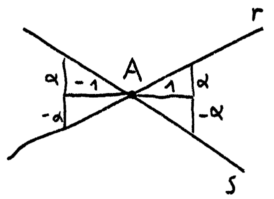
$BD' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+3\}$

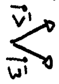
Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
9/novembro/2011

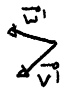
Gabarito - cont...

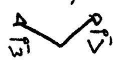
4a) Sejam $r=\{A+t\overrightarrow{(1,\alpha)} \mid t\in\mathbb{R}\}$
a reta que passa por A e B,
e $s=\{A+t\overrightarrow{(1,-\alpha)} \mid t\in\mathbb{R}\}$
a reta que passa por A e C.

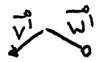
Figura:



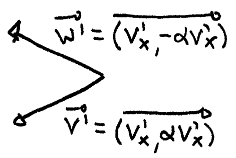
Se escolhermos $\vec{v'}$ e $\vec{w'}$
assim: 

ou assim: 

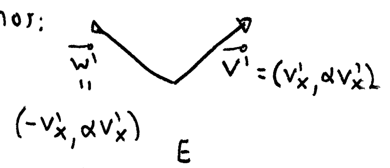
obteremos uma reta bissetriz horizontal, e se os escolhermos assim 

ou assim 

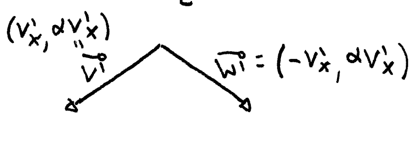
obteremos uma bissetriz vertical. As contas ficam fáceis se escrevemos tudo em função de v'_x - por exemplo:



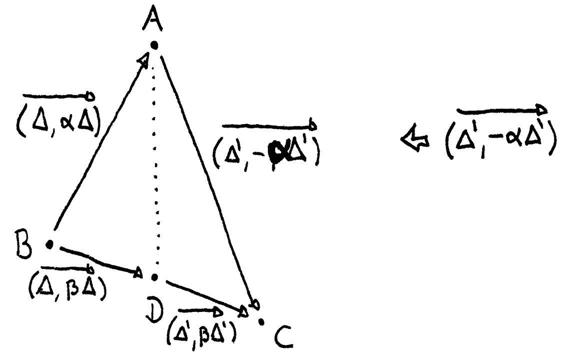
Nos dois casos que nos interessam temos:



E



4b) Sejam $A=(A_x,A_y)$, $B=(B_x,B_y)$,
$C=(C_x,C_y)$, $D=(D_x,D_y)$,
$\Delta=A_x-B_x$,
$\Delta'=C_x-B_x$.
Então não é difícil ver que a figura é:



Daí $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(-\Delta,-\alpha\Delta)}$,
$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{(-\Delta,-\beta\Delta)}$,
e as coordenadas horizontais destes dois vetores são iguais;
da mesma forma,
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{(\Delta',-\alpha\Delta')}$,
$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{(\Delta',\beta\Delta)}$,
e as componentes horizontais destes dois vetores são ambas iguais a Δ', e portanto iguais.

4c) $$\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\|\overrightarrow{(\Delta,\beta\Delta)}\|}{\|\overrightarrow{(-\Delta,-\alpha\Delta)}\|}=\frac{|\Delta|\,\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{|\Delta|\,\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|}=\frac{\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{\|\overrightarrow{(-\Delta',-\beta\Delta')}\|}{\|\overrightarrow{(\Delta',-\alpha\Delta')}\|}=\frac{|\Delta'|\,\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{|\Delta'|\,\|\overrightarrow{(1,-\alpha)}\|}=\frac{\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|}$$

5) Como D pertence ao segmento BC
sabemos que $\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{BC}$
e $\overrightarrow{DC}=\beta\overrightarrow{BC}$,
para algum $\alpha\in\mathbb{R}$ e algum $\beta\in\mathbb{R}$, e, mais ainda,
$\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, e $\alpha+\beta=1$.
Vamos escrever só AB para $\|\overrightarrow{AB}\|$,
CD para $\|\overrightarrow{CD}\|$, etc.
Sabemos que $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$ e que $AB=10$ e $AC=15$.
Então $\frac{BD}{10}=\frac{CD}{15}$, $\frac{\alpha BC}{10}=\frac{\beta BC}{15}$, $\frac{\alpha}{10}=\frac{\beta}{15}$, ..., $\alpha=\frac{2}{5}$ e $\beta=\frac{3}{5}$.
Como $\overrightarrow{BC}=(5-2,3-1)=\overrightarrow{(3,2)}$ e $\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{(3,2)}=\overrightarrow{(1.2,0.8)}$,
então $D=B+\overrightarrow{BD}=(2,1)+\overrightarrow{(1.2,0.8)}=(3.2,1.8)$.