GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
SEGUNDA PROVA ("P2")
9/DEZEMBRO/2011

PARA CADA PONTO $A=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ PODEMOS DEFINIR AS SUAS TRÊS "PROJEÇÕES NA ÉPURA", A_{xy}, A_{xz} E A_{zy}, DA SEGUINTE FORMA:

$$A_{xy}=(x,y,z)_{xy}=(x,y)$$
$$A_{xz}=(x,y,z)_{xz}=(x,-z)$$
$$A_{zy}=(x,y,z)_{zy}=(-z,y)$$

E A PROJEÇÃO NA ÉPURA DE A, A_{EP}, VAI SER FORMADA POR ESTES TRÊS PONTOS:

$$A_{EP}=\{A_{xy},A_{xz},A_{zy}\}$$

E SE $S\subset\mathbb{R}^3$ É UM SUBCONJUNTO DE $\mathbb{R}^3$ NÓS PODEMOS DEFINIR AS PROJEÇÕES S_{xy}, S_{xz}, S_{zy} E S_{EP} DE FORMA CORRESPONDENTE:

$$\begin{aligned}S_{xy}&=\{A_{xy}\mid A\in S\}\\&=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{xz}&=\{A_{xz}\mid A\in S\}\\&=\{(x,-z)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{zy}&=\{A_{zy}\mid A\in S\}\\&=\{(-z,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{EP}&=S_{xy}\cup S_{xz}\cup S_{zy}\\&=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\&\cup\{(x,-z)\mid(x,y,z)\in S\}\\&\cup\{(-z,y)\mid(x,y,z)\in S\}\end{aligned}$$

SE $\vec{v}$ É UM VETOR EM $\mathbb{R}^3$ TAMBÉM PODEMOS DEFINIR $\vec{v}_{xy}$, $\vec{v}_{xz}$ E $\vec{v}_{zy}$ DE FORMA SIMILAR. POR EXEMPLO, SE $\vec{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ ENTÃO $\vec{v}_{xz}=\overrightarrow{(x,-z)}$. NOTE QUE $\vec{v}_{EP}$ É UM OBJETO MATEMÁTICO BEM MAIS ESQUISITO - UM CONJUNTO DE TRÊS VETORES.

AS NOÇÕES DE PRODUTO INTERNO, NORMA E ORTOGONALIDADE EM $\mathbb{R}^3$ SÃO PRATICAMENTE IDÊNTICAS ÀS EM $\mathbb{R}^2$: SE $\vec{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ E $\vec{w}=\overrightarrow{(x',y',z')}$, ENTÃO

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+zz',$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}},$$

E $\vec{v}\perp\vec{w}$ SE E SÓ SE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

(1) SEJAM $A=(2,0,0)$, $B=(0,3,0)$, $C=(0,0,4)$, $D=(1,0,2)$, $E=(4,2,\frac{7}{2})$, E VAMOS USAR AS NOTAÇÕES $\overline{PQ}$ PARA O SEGMENTO $\{P+t\overrightarrow{PQ}\mid t\in[0,1]\}$ E ΔPQR PARA O TRIÂNGULO (OCO) $\overline{PQ}\cup\overline{QR}\cup\overline{RP}$.

SEJAM $T=\Delta ABC$ E $F=T\cup\overline{DE}$
(MNEMÔNICOS: "TRIÂNGULO" E "FIGURA")

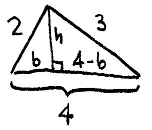
(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE $F_{EP}\subset\mathbb{R}^2$, COM TODOS OS 15 NOMES DE PONTOS - A_{xy}, A_{xz}, A_{zy}, ..., E_{zy}. SEJA BEM CLARO NO SEU DESENHO - ESTA FIGURA VAI AJUDAR MUITO VOCÊ NOS PRÓXIMOS ITENS. ← 1,5 PONTOS

(b) SEJA $\alpha\subset\mathbb{R}^3$ ESTE PLANO: ← 0,5 PONTOS
$\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\}$.
MOSTRE QUE $A,B,C,D\in\alpha$ E QUE $E\notin\alpha$.

(c) MOSTRE QUE $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{CA}$ E $(\overrightarrow{DE})_{xz}\perp(\overrightarrow{CA})_{xz}$, MAS $(\overrightarrow{DE})_{xy}\perp(\overrightarrow{CA})_{xy}$ É FALSO. ← 0,5 PONTOS

(d) CALCULE A ÁREA DE T_{xy}, A ÁREA DE T_{xz} E A ÁREA DE T_{zy}. ← 0,5 PONTOS

(2) UM MODO DE CALCULAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO DE LADOS 2, 3 E 4 É O SEGUINTE. TRAÇAMOS A SUA ALTURA, h, E ELA DIVIDE A BASE EM DOIS SEGMENTOS,



UM DE COMPRIMENTO b E OUTRO DE COMPRIMENTO $4-b$. POR PITÁGORAS, TEMOS

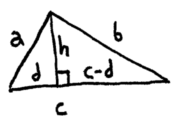
$$b^2+h^2=2^2=4$$
$$(4-b)^2+h^2=3^2=9$$

E SUBTRAINDO ESTAS EQUAÇÕES UMA DA OUTRA OBTEMOS $9-4=(4-b)^2-b^2$, QUE NOS PERMITE CALCULAR b FACILMENTE; E DEPOIS DE OBTERMOS b PODEMOS CALCULAR h POR $b^2+h^2=4$, E AÍ A ÁREA DO TRIÂNGULO GRANDE É $\frac{4\cdot h}{2}$.

CONTINUA ⇒

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
SEGUNDA PROVA ("P2")
9/DEZEMBRO/2011
[CONTINUAÇÃO...]

2a) GENERALIZE O MÉTODO QUE VOCÊ ACABOU DE VER, PARA UM TRIÂNGULO QUALQUER DE LADOS a, b E c. MAIS PRECISAMENTE, ENCONTRE FÓRMULAS PARA d, h E PARA A ÁREA DO TRIÂNGULO DA FIGURA ABAIXO: (2,0 PONTOS)



b) CALCULE A ÁREA DO TRIÂNGULO ΔABC DA QUESTÃO 1. (1,0 PONTOS)

3) SEJAM: $O' = (0,1)$, $O^* = (-1, -\frac{1}{2})$,
$\vec{v}' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{v}^* = (1, -\frac{1}{2})$,
$\vec{w}' = (-1, 1)$, $\vec{w}^* = (1, \frac{1}{2})$,

E PARA CADA PONTO $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ DEFINIMOS:

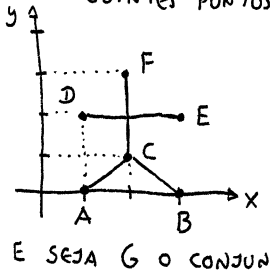
$$P' = (x,y)' = O' + x\vec{v}' + y\vec{w}',$$
$$P^* = (x,y)^* = O^* + x\vec{v}^* + y\vec{w}^*.$$

a) MOSTRE QUE PARA QUALQUER PONTO $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ TEMOS (1,0 PONTOS)

$$(a,b)'^* = (a,b)$$

E $(a,b)^{*\prime} = (a,b)$.

b) SEJAM A, B, C, D, E, F OS SEGUINTES PONTOS: (1,0 PONTOS)



E SEJA G O CONJUNTO
$G = \overline{AC} \cup \overline{BC} \cup \overline{CF} \cup \overline{DE}$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE O CONJUNTO $G' = \overline{A'C'} \cup \overline{B'C'} \cup \overline{C'F'} \cup \overline{D'E'}$.

c) FAÇA O MESMO PARA O CONJUNTO (1,0 PONTOS)
$G^* = \overline{A^*C^*} \cup \overline{B^*C^*} \cup \overline{C^*F^*} \cup \overline{D^*E^*}$.

d) SEJA H A HIPÉRBOLE CANÔNICA, (0,5 PONTOS)
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,
E $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t, \frac{1}{t})$

DÊ AS COORDENADAS DE 6 PONTOS DA HIPÉRBOLE H (SUGESTÃO: $f(-2), f(-1), f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}), f(1), f(2)$) E REPRESENTE H GRAFICAMENTE.

e) COMO A HIPÉRBOLE H DO ITEM ANTERIOR É (0,5 PONTOS)
$$H = \{(t, \tfrac{1}{t}) \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$
PODEMOS DEFINIR A SUA IMAGEM PELA TRANSFORMAÇÃO "$'$" DESTA FORMA:
$$H' = \{(t, \tfrac{1}{t})' \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$
$$= \{O' + t\vec{v}' + \tfrac{1}{t}\vec{w}' \mid t \in \mathbb{R}^*\}.$$
REPRESENTE GRAFICAMENTE A HIPÉRBOLE H'.

4) MUITAS PESSOAS TENTARAM RESOLVER O PROBLEMA 5 DA P1 ENCONTRANDO ALGEBRICAMENTE OS DOIS PONTOS DE INTERSEÇÃO ENTRE DOIS CÍRCULOS, E PARA ISTO ELAS USARAM UM MÉTODO QUE NÃO FUNCIONAVA. NESTE PROBLEMA VAMOS ENTENDER ONDE É QUE ELE DAVA ERRADO.

SEJAM
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2^2,$$
$$g(x,y) = (x-4)^2 + y^2 - 3^2,$$
$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{2} + \frac{g(x,y)}{2},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\},$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\},$$
$$C'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}.$$

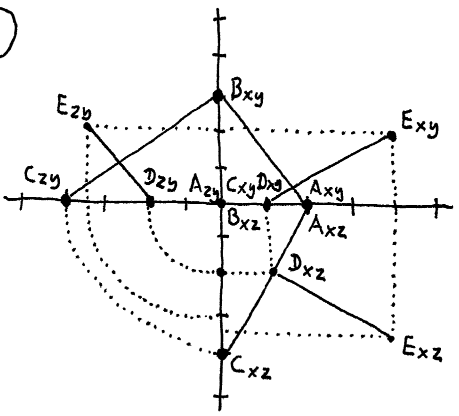
a) ENCONTRE 4 PONTOS PERTENCENTES A C E 4 PONTOS PERTENCENTES A C'. ALÉM DISSO REPRESENTE GRAFICAMENTE C E C'. (0,5 PONTOS)

b) O CONJUNTO C'' É UM CÍRCULO CENTRADO NO PONTO $(2,0)$. DESCUBRA O SEU RAIO E ENCONTRE 4 PONTOS DE C''. (0,5 PONTOS)

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
9/DEZEMBRO/2011
SEGUNDA PROVA ("P2")

GABARITO

(1a)



(b) $A=(2,0,0)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\}$

SE E SÓ SE $\frac{2}{2}+\frac{0}{3}+\frac{0}{4}=1$,

O QUE É VERDADE,

$B=(0,3,0)\in\alpha$

SE E SÓ SE $\frac{0}{2}+\frac{3}{3}+\frac{0}{4}=1$,

QUE É VERDADE,

IDEM PARA C E D.

$E=(4,2,\frac{7}{2})\in\alpha$

SE E SÓ SE $\frac{4}{2}+\frac{2}{3}+\frac{7/2}{4}=1$,

MAS $\frac{4}{2}+\frac{2}{3}+\frac{7/2}{4}>1$.

(c) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,0)$,

$\overrightarrow{BC}=(0,-3,4)$,

$\overrightarrow{CA}=(2,0,-4)$,

$\overrightarrow{DE}=(3,2,1.5)$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-6+6+0=0$,

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}=0-6+6=0$,

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DE}=6+0-6=0$,

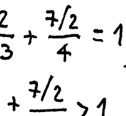
$\overrightarrow{DE}_{xz}=\overrightarrow{(3,-1.5)}$,

$\overrightarrow{CA}_{xz}=\overrightarrow{(2,4)}$, $\quad \overrightarrow{DE}_{xz}\cdot\overrightarrow{CA}_{xz}=6-6=0$,

$\overrightarrow{DE}_{xy}=\overrightarrow{(3,2)}$

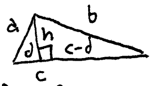
$\overrightarrow{CA}_{xy}=\overrightarrow{(2,0)}$ $\quad \overrightarrow{DE}_{xy}\cdot\overrightarrow{CA}_{xy}=6+0=6$.

(d) PELA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ITEM 1a,

ÁREA (T_{xy}) = ÁREA () $=\frac{2\cdot3}{2}=3$,

ÁREA $(T_{xz})=\frac{4\cdot3}{2}=6$,

ÁREA $(T_{zy})=\frac{2\cdot4}{2}=4$.

(2a) NA FIGURA 

TEMOS $d^2+h^2=a^2$,

$(c-d)^2+h^2=b^2$,

$(c-d)^2-d^2=b^2-a^2$,

$c^2-2cd=b^2-a^2$,

$-2cd=b^2-a^2-c^2$,

$d=\dfrac{b^2-a^2-c^2}{-2c}$,

$h^2=a^2-d^2$,

$h=\sqrt{a^2-d^2}$,

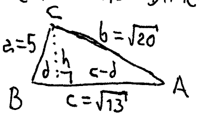
ÁREA $(\triangle)=\dfrac{ch}{2}$.

(b) $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{9+16}=5$,

$\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$,

PORTANTO O TRIÂNGULO $\triangle ABC$
TEM ESTAS DIMENSÕES:



E APLICANDO AS FÓRMULAS DO ITEM 2a
TEMOS: $d=\dfrac{20-25-13}{-2\sqrt{13}}=\dfrac{-18}{-2\sqrt{13}}=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$,

$h=\sqrt{25-\frac{81}{13}}=\sqrt{\dfrac{25\cdot13-81}{13}}$,

ÁREA$(ABC)=\dfrac{\sqrt{13}\sqrt{\dfrac{25\cdot13-81}{13}}}{2}=\dfrac{\sqrt{25\cdot13-81}}{2}$.

(3a) $(a,b)'=(0,1)+a\overrightarrow{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})}+b\overrightarrow{(-1,1)}$

$=\left(\frac{a-2b}{2},\frac{2+a+2b}{2}\right)$

$(a,b)'^{*}=(-1,-\frac{1}{2})+\frac{a-2b}{2}\overrightarrow{(1,-\tfrac{1}{2})}+\frac{2+a+2b}{2}\overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2})}$

$=\left(\cancel{-1}+\frac{a-\cancel{2b}}{2}+\frac{\cancel{2}+a+\cancel{2b}}{2},\ -\cancel{\tfrac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{\cancel{a}-2b}{2}+\cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{\cancel{2}+\cancel{a}+2b}{2}\right)$

$=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2},\ -\frac{-2b}{4}+\frac{2b}{4}\right)=(a,b)$

$(a,b)^{*}=(-1,-\frac{1}{2})+a\overrightarrow{(1,-\tfrac{1}{2})}+b\overrightarrow{(1,\tfrac{1}{2})}$

$=\left(-1+a+b,\frac{-1-a+b}{2}\right)$

$(a,b)^{*\prime}=(0,1)+(-1+a+b)(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})+\frac{-1-a+b}{2}(-1,1)$

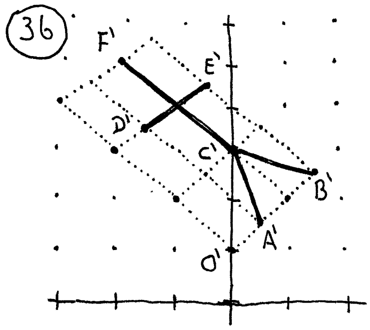
$=\left(\frac{\cancel{-1}+a+\cancel{b}}{2}-\frac{\cancel{-1}-a+\cancel{b}}{2},\ \cancel{1}+\frac{\cancel{-1}+\cancel{a}+b}{2}+\frac{\cancel{-1}-\cancel{a}+b}{2}\right)$

$=(a,b)$

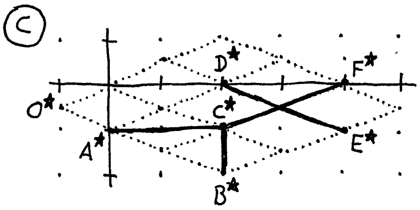
GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
SEGUNDA PROVA ("P2")
9/DEZEMBRO/2011

GABARITO (CONT.)

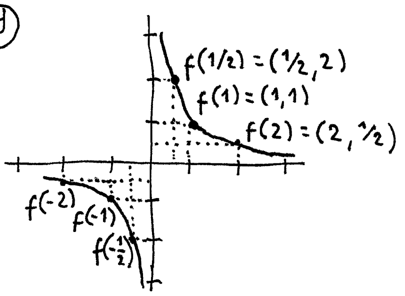
3b



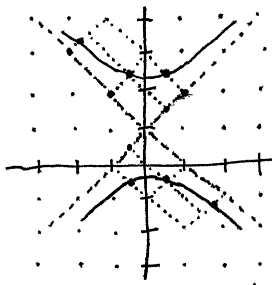
c



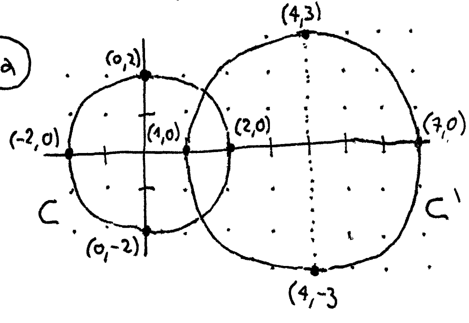
d



e



4a



b

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$
$$g(x,y) = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 9$$
$$h(x,y) = x^2 - 4x + 8 + y^2 - \frac{13}{2}$$
$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - \frac{13}{2} + 4$$
$$= (x-2)^2 + y^2 - \frac{5}{2}$$
$$= (x-2)^2 + y^2 - \sqrt{\tfrac{5}{2}}^2$$

DAÍ O RAIO DE C'' É $\sqrt{\frac{5}{2}}$,
E AQUI ESTÃO 4 PONTOS DE C'':