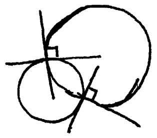
GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
14/JULHO/2011

(1) SEJAM $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-2)^2=3^2\}$ E $r=\{(0,1)+t\overrightarrow{(-3,4)} \mid t\in\mathbb{R}\}$. ENCONTRE UMA RETA PARALELA A r QUE SEJA TANGENTE A C. (2,0 PTS)

(2) A <u>PROJEÇÃO SOBRE $\vec{v}$ DE $\vec{w}$</u>, $Pr_{\vec{v}}\vec{w}$, É O VETOR DA FORMA $\lambda\vec{v}$ TAL QUE $O+\lambda\vec{v}$ É O MAIS PRÓXIMO POSSÍVEL DE $O+\vec{w}$. MOSTRE COMO CALCULAR λ E $\lambda\vec{v}$ NUM CASO ESPECÍFICO E NO CASO GERAL. (3,0 PTS)

(3) ENCONTRE DOIS CÍRCULOS, C E C', COM CENTROS C_0 E C_0' E RAIOS R E R' RESPECTIVAMENTE, QUE SE "CORTEM ORTOGONALMENTE" (VEJA A FIGURA). (3,0 PTS)



SE ELES SE CORTAM NOS PONTOS A E B E D É O PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE AS RETAS C_0C_0' E AB, O QUE VOCÊ PODE DIZER SOBRE O QUADRILÁTERO $C_0AC_0'B$?
USE ISTO PARA DETERMINAR SE OS CÍRCULOS

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4x+5y-2=0\}$$

E $$C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+2y^2+4x-6y-19=0\}$$

SE CORTAM ORTOGONALMENTE.

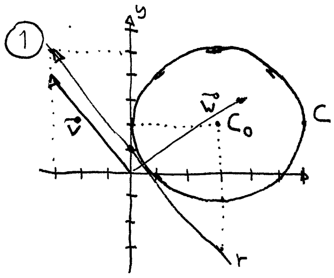
(4) QUAL É O PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE A RETA $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$ E A RETA OA, ONDE $A=(a,b)$? (1,5 PTS)

(5) ENCONTRE A INTERSEÇÃO ENTRE O PLANO $\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=5\}$ E: (1,0 PTS)
- O PLANO xy,
- O PLANO xz,
- O PLANO yz.

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova suplementar ("VS")
14/julho/2011

<u>Gabarito</u>

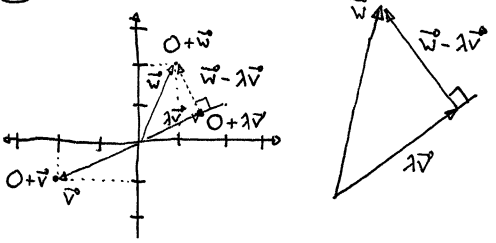
(1)



Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,4)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(4,3)}$.
O círculo C tem raio 3,
e como $\|\vec{w}\| = 5$ o vetor
$\frac{3}{5}\vec{w}$ tem norma igual a 3.
Então $C_0 - \frac{3}{5}\vec{w}$ está sobre o
círculo, e $s = \{C_0 - \frac{3}{5}\vec{w} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
é uma reta paralela a r que
é tangente a C - e o ponto
de tangência é

$$C_0 - \tfrac{3}{5}\vec{w} = (3,2) - \tfrac{3}{5}\overrightarrow{(4,3)}$$
$$= \left(3 - \tfrac{12}{5}, 2 - \tfrac{9}{5}\right)$$
$$= \left(\tfrac{30-24}{10}, \tfrac{20-18}{10}\right)$$
$$= \left(\tfrac{6}{10}, \tfrac{2}{10}\right) = \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}\right)$$

(2) Figura:

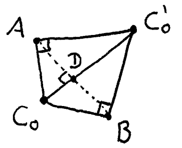


Queremos que a distância de $0+\vec{w}$
a $0+\lambda\vec{v}$ seja a menor possível, ou
seja, que $(0+\vec{w}) - (0+\lambda\vec{v}) = \vec{w} - \lambda\vec{v}$
seja perpendicular a $\lambda\vec{v}$ - ou seja,
queremos $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \lambda\vec{v} = 0$. Isto tem
duas soluções, uma com $\lambda = 0$ e uma
outra; a outra é a que nos interessa,
e é a em que $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.
Como $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v} \cdot \vec{v}$
queremos $\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, ou seja,

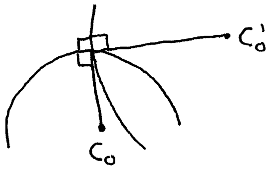
$$\lambda = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

No exemplo da figura acima temos
$\vec{v} = \overrightarrow{(-2,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,2)}$, $\lambda = \frac{-2-2}{5} = -\frac{4}{5}$,
$\lambda\vec{v} = \overrightarrow{\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)}$.

(3) Vamos fazer uma figura só
com os pontos C_0, C_0', A, B e
o quadrilátero formado por eles.



Como $A, B \in C$ temos $d(A, C_0) = d(B, C_0)$, e
como $A, B \in C'$ temos $d(A, C_0') = d(B, C_0')$, e,
por simetria, $\overline{AB} \perp \overline{C_0C_0'}$ e $d(A,D) = d(B,D)$.
Além disso $C_0\hat{A}C_0' = C_0\hat{B}C_0' = 90°$ - veja:



E portanto o triângulo AC_0C_0'
é retângulo (e o triângulo BC_0C_0' também).
Como $d(A, C_0) = d(B, C_0) = R$
e $d(A, C_0') = d(B, C_0') = R'$,
e $R^2 + R'^2 = d(C_0, C_0')^2$ por Pitágoras -
na verdade C e C' vão se cortar ortogonalmente
se e só se $R^2 + R'^2 = d(C_0, C_0')^2$.
Então:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 + 5y - 2 = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 5y + \tfrac{25}{4}) - \tfrac{49}{4} = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y + \tfrac{5}{2})^2 = (\tfrac{7}{2})^2\}$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - \tfrac{19}{2} = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 3y + \tfrac{9}{4}) - \tfrac{51}{4} = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 = (\tfrac{\sqrt{51}}{2})^2\}$$

Daí $C_0 = (2, -\frac{5}{2})$, $R = \frac{7}{2}$,
$C_0' = (-1, \frac{3}{2})$, $R' = \frac{\sqrt{51}}{2}$

$$d(C_0, C_0')^2 = 3^2 + (\tfrac{8}{2})^2 = 5^2,$$
$$R^2 + R'^2 = \tfrac{49}{4} + \tfrac{51}{4} = \tfrac{100}{4} = 25,$$

e C e C' se cortam ortogonalmente.

(4) Se $(x,y) \in OA = \{(ta, tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$
e $(x,y) \in r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$
e $(x,y) = (ta, tb)$ então $ta^2 + tb^2 = c$; daí $t = \frac{c}{a^2+b^2}$
e $(x,y) = \left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$.

(5) $\alpha \cap$ plano xy: $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 5\}$
$\alpha \cap$ plano xz: $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4z = 5\}$
$\alpha \cap$ plano yz: $\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 4z = 5\}$