

Cálculo 2 - Prova Suplementar Extra (VS2b)
 PURO-UFF - 2010.1
 29/julho/2010
 Prof: Eduardo Ochs

(1) (Total: 3.0 pontos). Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \leq 0 \\ \text{sen } \pi x & \text{quando } x \in (0, 1] \\ -2 \text{sen } \pi(x-1) & \text{quando } x \in (1, 2] \\ 3 \text{sen } \pi(x-2) & \text{quando } x \in (2, 3] \\ -4 \text{sen } \pi(x-3) & \text{quando } x \in (3, 4] \\ 1 & \text{quando } x \in (4, \infty] \end{cases}$$

Encontre uma primitiva F para a função f , faça o gráfico de f e F e mostre — de um modo que convença a sua tia — que para todos os valores para $a, b \in \mathbb{R}$ temos $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(b) - F(a)$.

(2) (Total: 4.0 pontos). Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer de duas variáveis, contínua. Mostre, de um modo que convença a sua tia, que para quaisquer $\theta_0, \theta_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$, temos:

$$\int_{t=\tan \theta_0}^{t=\tan \theta_1} F(t, \sqrt{1+t^2}) dt = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} F(\tan \theta, \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta$$

Lembre que a sua tia não acredita na fórmula de substituição de variáveis e que a única fórmula trigonométrica na qual ela acredita é $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ (além das definições de secante e tangente, claro).

Dica: provavelmente você vai achar muito difícil provar direto o caso geral... então você pode começar com uma F específica — por exemplo $F(t, z) = t^3 z^2$ — e depois tentar generalizar.

(3) (Total: 3.0 pontos). Seja $f(x) = x^{-2}$.

a) (0.4 pontos) Encontre uma primitiva para $f(x)$ e “prove” que $\int_{x=-1}^{x=1} f(x) dx = -2$.

b) (1.0 pontos) Faça o gráfico de $f(x)$ e prove, de um modo que convença a sua tia, que $\int_{x=-1}^{x=1} f(x) dx > 0$.

c) (1.0 pontos) Seja $g(a) = \int_{x=-1}^{x=-a} f(x) dx + \int_{x=a}^{x=1} f(x) dx$. Calcule, de um modo que convença a sua tia, o valor de $g(a)$ para qualquer $a > 0$.

d) (0.6 pontos) Calcule $\lim_{a \rightarrow 0^+} g(a)$.