Multiplicação de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{3\times3}\underbrace{\begin{pmatrix}1000\\100\\10\end{pmatrix}}_{3\times1}=\underbrace{\begin{pmatrix}1230\\4560\\7890\end{pmatrix}}_{3\times1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{pmatrix}g&h&i&j\\k&l&m&n\end{pmatrix}}_{2\times4}=\underbrace{\begin{pmatrix}ag+bk&ah+bl&ai+bm&aj+bn\\cg+dk&ch+dl&ci+dm&cj+dn\\eg+fk&eh+fl&ei+fm&ej+fn\end{pmatrix}}_{3\times4}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}g&h&i&j\\k&l&m&n\end{pmatrix}}_{2\times4}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}}_{3\times2}=\text{ erro}\qquad(\text{porque } 4\neq3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100&0\\10&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120&0\\340&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}100&0\\10&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100&200\\10&20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}100\\10\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\10\\1\end{pmatrix}=(234)=234$$

Soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix}10&20&30\\40&50&60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&23&34\\45&56&67\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10&20&30\\40&50&60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}=\text{ erro}$$

Multiplicação de número por matriz:

$$10\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&30&40\\50&60&70\end{pmatrix}$$

Operações lógicas:

"E":	"Ou":	"Implica":	"Não":
$\mathbf{F}\&\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\vee\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\to\mathbf{F}=\mathbf{V}$	$\neg\mathbf{F}=\mathbf{V}$
$\mathbf{F}\&\mathbf{V}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\vee\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{F}\to\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\neg\mathbf{V}=\mathbf{F}$
$\mathbf{V}\&\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{V}\vee\mathbf{F}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\to\mathbf{F}=\mathbf{F}$	
$\mathbf{V}\&\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\vee\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\to\mathbf{V}=\mathbf{V}$	

Se $x=6$,

$$\underbrace{\underbrace{2<\underbrace{x}_{6}}_{\mathbf{V}}\,\&\,\underbrace{\underbrace{x}_{6}<5}_{\mathbf{F}}}_{\mathbf{F}}$$

"Set comprehensions"

Notação explícita, com geradores, filtros
e ";" separando os geradores e filtros da expressão:

$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} = \{10,20,30,40\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\} = \{1,2,3,4\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\} = \{3,4\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} = \{30,40\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{10,20\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a+b}_{\text{expr}}\} = \{13,14,23,24\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{1,2\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{(a,b)}_{\text{expr}}\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

Notações convencionais com "|":

$$\{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} = \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\, a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} = \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\, a \in \{1,2,3,4\} \mid a \geq 3 \,\} =$$
$$\{\, a \mid a \in \{1,2,3,4\}, a \geq 3 \,\} = \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\}, a \geq 3 \,\} = \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{10,20\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a+b}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\underbrace{a \in \{1,2\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{(a,b)}_{\text{expr}}\}$$

Truque:

$$\{\, \text{gerador} \mid \text{filtros} \,\} = \{\text{gerador}, \text{filtros}; \underbrace{\text{variável do gerador}}_{\text{expr}}\}$$
$$\{\, \text{expr} \mid \text{geradores e filtros} \,\} = \{\text{geradores e filtros}; \text{expr}\}$$

Exercícios

1) Represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl} A & := & \{(1,4),(2,4),(1,3)\} \\ B & := & \{(1,3),(1,4),(2,4)\} \\ C & := & \{(1,3),(1,4),(2,4),(2,4)\} \\ D & := & \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \\ E & := & \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\} \end{array}$$

2) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl} A & := & \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\} \\ B & := & \{x \in \{1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\ C & := & \{x \in \{0,1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\ D & := & \{x \in \{0,0.5,1,\ldots,3\}; (x, 3-x)\} \\ E & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}; (x,y)\} \\ F & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,y)\} \\ G & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (y,x)\} \\ H & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,2)\} \\ I & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y<6; (x,y)\} \\ J & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y>4; (x,y)\} \\ K & := & \{x \in \{1,2,3,4\}, y \in \{1,2,3,4\}; (x,y)\} \\ L & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}; (x,y)\} \\ M & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=3; (x,y)\} \\ N & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, x=2; (x,y)\} \\ O & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, x+y=3; (x,y)\} \\ P & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x; (x,y)\} \\ Q & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x+1; (x,y)\} \\ R & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x; (x,y)\} \\ S & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x+1; (x,y)\} \end{array}$$

3) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl} A & := & \{\,(x,0) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ B & := & \{\,(x,x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ C & := & \{\,(x,x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ D & := & \{\,(x,2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ E & := & \{\,(x,1) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ F & := & \{\,(x,1+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ G & := & \{\,(x,1+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ H & := & \{\,(x,1+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ I & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ J & := & \{\,(x,2+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ K & := & \{\,(x,2+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ L & := & \{\,(x,2+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ M & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ N & := & \{\,(x,2-x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ O & := & \{\,(x,2-x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\ P & := & \{\,(x,2-2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \end{array}$$

Produto cartesiano de conjuntos:
$A \times B := \{a \in A, b \in B; (a,b)\}$
Exemplo: $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.

Uma notação: $A^2 = A \times A$.
Exemplo: $\{3,4\}^2 = \{3,4\} \times \{3,4\} = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

Sejam:
$A = \{1,2,4\}$,
$B = \{2,3\}$,
$C = \{2,3,4\}$.

Exercícios

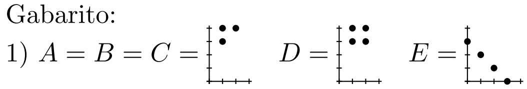
4) Calcule e represente graficamente:

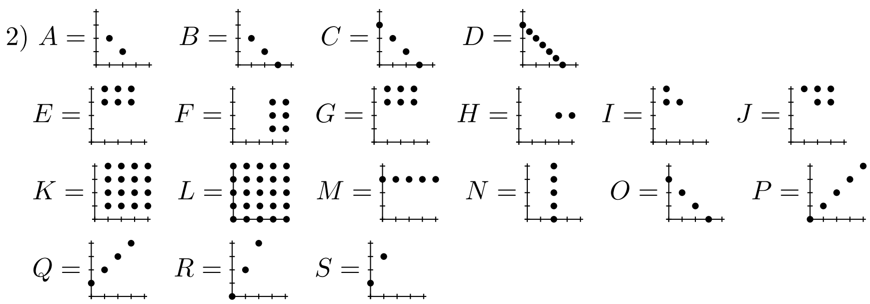
a) $A \times A$	d) $B \times A$	g) $C \times A$
b) $A \times B$	e) $B \times B$	h) $C \times B$
c) $A \times C$	f) $B \times C$	i) $C \times C$

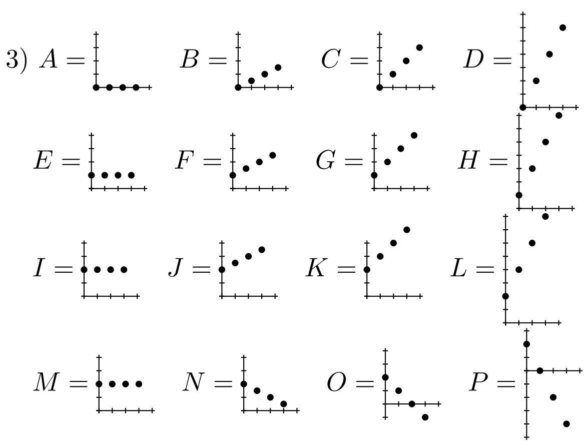
5) Calcule e represente graficamente:

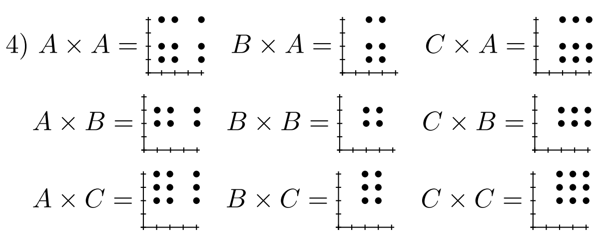
$$
\begin{array}{ccl}
A & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}; (x,y)\} \\
B & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, y=2; (x,y)\} \\
C & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, x=1; (x,y)\} \\
D & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, y=x; (x,y)\} \\
E & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x; (x,y)\} \\
F & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=2x; (x,y)\} \\
G & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x; (x,y)\} \\
H & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x/2; (x,y)\} \\
I & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x/2+1; (x,y)\} \\
J & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=2x\,\} \\
K & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x\,\} \\
L & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x/2\,\} \\
M & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x/2+1\,\} \\
N & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid 0x+0y=0\,\} \\
O & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid 0x+0y=2\,\} \\
P & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\,\}
\end{array}
$$

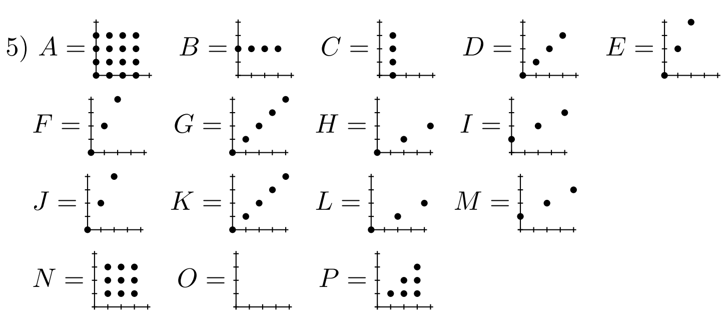
Gabarito:


1) A = B = C =
D =
E =


2) A =
B =
C =
D =
E =
F =
G =
H =
I =
J =
K =
L =
M =
N =
O =
P =
Q =
R =
S =


3) A =
B =
C =
D =
E =
F =
G =
H =
I =
J =
K =
L =
M =
N =
O =
P =


4) A × A =
B × A =
C × A =
A × B =
B × B =
C × B =
A × C =
B × C =
C × C =


5) A =
B =
C =
D =
E =
F =
G =
H =
I =
J =
K =
L =
M =
N =
O =
P =

Alguns exemplos de como calcular as “set comprehensions” dos exercícios das páginas 3 e 4 usando tabelas:

2A)
$A := \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\}$
$A = \{(1,2), (2,1)\}$

x	$(x,3-x)$
1	(1,2)
2	(2,1)

2I)
$I := \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y<6; (x,y)\}$
$I = \{(1,3), (1,4), (1,5)\}$

x	y	$x+y<6$	(x,y)
1	3	**V**	(1,3)
1	4	**V**	(1,4)
2	3	**V**	(1,3)
2	4	**F**	|
3	3	**F**	|
3	4	**F**	|

3D)
$D := \{\,(x, 2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\}$
$D = \{x \in \{0,1,2,3\}; (x, 2x)\}$
$D = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6)\}$

x	$(x,2x)$
0	(0,0)
1	(1,2)
2	(2,4)
3	(3,6)

5P)
$P := \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\,\}$
$P = \{(x,y) \in \{1,2,3\}^2, x \geq y; (x,y)\}$
$P = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

(x,y)	x	y	$x \geq y$	(x,y)
(1,1)	1	1	**V**	(1,1)
(1,2)	1	2	**F**	|
(1,3)	1	3	**F**	|
(2,1)	2	1	**V**	(2,1)
(2,2)	2	2	**V**	(2,2)
(2,3)	2	3	**F**	|
(3,1)	3	1	**V**	(3,1)
(3,2)	3	2	**V**	(3,2)
(3,3)	3	3	**V**	(3,3)

Pontos e vetores

Se a, b, c são números então
(a, b) é um ponto de $\mathbb{R}^2$,
$\overrightarrow{(a, b)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$,
(a, b, c) é um ponto de $\mathbb{R}^3$,
$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$.

Por enquanto nós só vamos usar $\mathbb{R}^2$ –
a *terceira parte do curso* vai ser sobre $\mathbb{R}^3$.

Se A é um ponto (de $\mathbb{R}^2$) e $\vec{v}$ é um vetor (em $\mathbb{R}^2$)
então A_1, A_2, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são números e $A = (A_1 A_2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$
(as operações $(\_, \_)$, $\overrightarrow{(\_, \_)}$, $\_{}_1$, $\_{}_2$ "montam" e "desmontam" pontos e vetores).

Operações com pontos e vetores (obs: $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

1) $(a, b) + \overrightarrow{(c, d)} = (a + c, b + d)$
2) $\overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$
3) $(a, b) - (c, d) = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$
4) $(a, b) - \overrightarrow{(c, d)} = (a - c, b - d)$
5) $\overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$
6) $k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$
7) $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd \quad$ (!!!!)

As outras operações dão erro. Por exemplo:
$\overrightarrow{(a, b)} + (c, d) = \text{erro}$
$(a, b) + (c, d) = \text{erro}$
$(a, b) \cdot k = \text{erro}$

Exercícios

6) Calcule:

a) $(2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$
b) $((2, 3) + \overrightarrow{(4, 5)}) + \overrightarrow{(10, 20)}$
c) $4 \cdot ((20, 30) - (5, 10))$
d) $\overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$
e) $\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
f) $(\overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(10, 100)}$
g) $\overrightarrow{(2, 3)} \cdot (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)})$
h) $(\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
i) $(\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
j) $(\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}) \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$

Obs: dois modos de resolvê-los:

a) $\underbrace{(2, 3) + (\underbrace{\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)}}_{\substack{[\text{regra 2}] \\ = \overrightarrow{(14,25)}}})}_{\substack{[\text{regra 1}] \\ = (16,28)}}$

a) $\begin{aligned} &(2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)}) \\ &= (2, 3) + \overrightarrow{(14, 25)} \\ &= (16, 28) \end{aligned}$

Propriedades

Será que $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)} = \overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ "vale sempre"? Isto é, será que $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}$ vale $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$?

Que propriedades as operações sobre pontos e vetores obedecem?

Podemos começar pelas propriedades com nomes famosos...

Comutatividade:	$A \cdot B = B \cdot A$
	$A + B = B + A$
	$A - B = B - A$
Associatividade:	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
	$(A + B) + C = A + (B + C)$
	$(A - B) - C = A - (B - C)$
Distributividade:	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
	$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$
	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
	$(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C$

Exercícios

7) V/F/Justifique:

C1) ( ) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

C2) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(a,b)}$

C3) ( ) $(a,b) - (c,d) = (c,d) - (a,b)$

C4) ( ) $(a,b) - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - (a,b)$

C5) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$

C6) ( ) $k \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(a,b)} \cdot k$

C7) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}$

A11) ( ) $((a,b) + \overrightarrow{(c,d)}) + \overrightarrow{(d,e)} = (a,b) + (\overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(d,e)})$

A12) ( ) $(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}) + \overrightarrow{(d,e)} = \overrightarrow{(a,b)} + (\overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(d,e)})$

D6) ( ) $(a+b) \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} = a \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} + b \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)}$

D62) ( ) $k \cdot (\overrightarrow{(u_1,u_2)} + \overrightarrow{(v_1,v_2)}) = k \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} + k \cdot \overrightarrow{(v_1,v_2)}$

Retas

Exercícios

8) Represente graficamente as retas abaixo.
Dica: encontre dois pontos de cada reta e marque-os no gráfico.
Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.
$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$
$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$
$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$
$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$
$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$
$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$
$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$
$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$
$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$
$r_g = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_h = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_i = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_j = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_k = \{ (2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$s_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0 \}$
$s_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 4 \}$
$s_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 2 \}$
$s_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0 \}$
$s_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 6 \}$
$s_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 3 \}$
$r'_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 1y = 4 \}$
$r'_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1)x + 1y = 4 \}$
$r'_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1y = 4 \}$
$s_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(0, 1)} = 4 \}$
$s_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(-1, 1)} = 4 \}$
$s_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 1)} = 4 \}$

Um bom modo de começar a entender visualmente o comportamento de uma função $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é fazendo diagramas como os abaixo, em que a gente escreve sobre cada ponto (x,y) o valor de $F(x,y)$ naquele ponto... por exemplo, se $F(x,y) = x^2 + y^2$ então $F(3,4) = 9 + 16 = 25$, e a gente escreve "25" no ponto $(3,4)$. Exemplos:

$$
\begin{array}{c} F(x,y) \\ = x \end{array} \Rightarrow
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} F(x,y) \\ = y \end{array} \Rightarrow
\begin{array}{ccccccc}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} F(x,y) \\ = x+y \end{array} \Rightarrow
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
-2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3
\end{array}
$$

Repare que dá pra usar o diagrama de $F(x,y) = x+y$ pra ver onde $x+y=0$, onde $x+y=3$, etc.

Exercícios

9) Faça diagramas como os acima para as funções:
a) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
b) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)}$
c) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)}$
d) $F(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \{-5,-4,\ldots,5\}^2)$
e) $F(x,y) = x^2 - y$
f) $F(x,y) = y^2 - x$
g) $F(x,y) = xy$

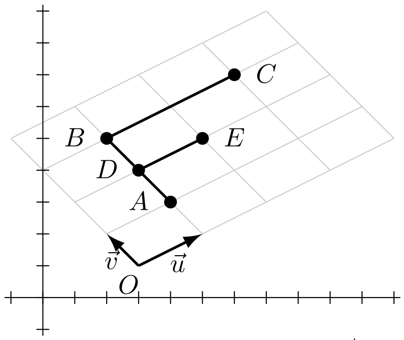
10) Use os diagramas do exercício anterior para esboçar os conjuntos abaixo (que vão ser retas ou curvas):
a0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 0 \,\}$
a2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 2 \,\}$
a4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 4 \,\}$
a-2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = -2 \,\}$
b0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 0 \,\}$
b3) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 3 \,\}$
b6) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 6 \,\}$
c0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 0 \,\}$
c2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 2 \,\}$
c4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 4 \,\}$
d25) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25 \,\}$
d4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \,\}$
d1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$
d0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \,\}$
e0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0 \,\}$
e1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1 \,\}$
f0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 0 \,\}$
f1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1 \,\}$
g0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \,\}$

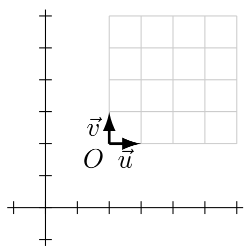
Sistemas de coordenadas

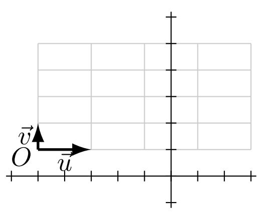
Em cada uma das figuras abaixo vamos definir o sistema de coordenadas Σ por:
$\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$,
$(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.

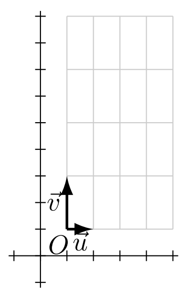
Exercício

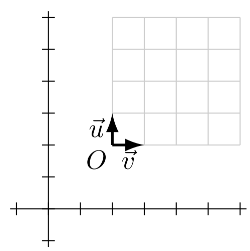
11) Sejam:
$B = (1, 3)_\Sigma$, $C = (3, 3)_\Sigma$,
$D = (1, 2)_\Sigma$, $E = (2, 2)_\Sigma$,
$A = (1, 1)_\Sigma$.
Em cada um dos casos abaixo desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.
(O item (a) já está feito.)

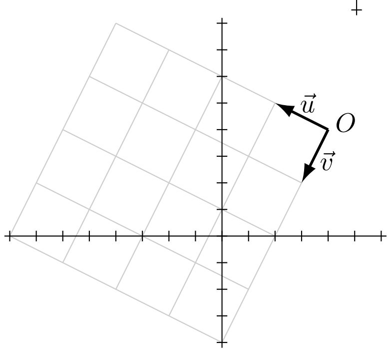
a)


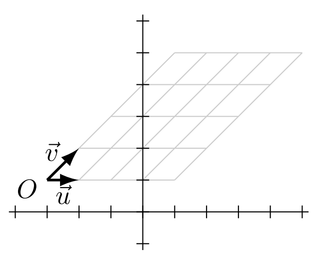
b)


c)


d)


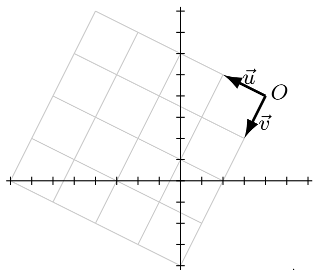
e)


f)


g)


Sistemas de equações e sistemas de coordenadas

No item (f) da página anterior temos:



$O = (4,4)$
$\vec{u} = \overrightarrow{(-2,1)}$
$\vec{v} = \overrightarrow{(-1,-2)}$

$(a,b)_\Sigma = (4,4) + a\overrightarrow{(-2,1)} + b\overrightarrow{(-1,-2)}$
$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) \qquad (*)$

$(a,b)_\Sigma$	$=$	(x,y)
$(0,0)_\Sigma$	$=$	$(4,4)$
$(1,0)_\Sigma$	$=$	$(2,5)$
$(0,1)_\Sigma$	$=$	$(3,2)$
$A = (1,1)_\Sigma$	$=$	$?_a$
$B = (1,3)_\Sigma$	$=$	$?_b$
$C = (3,3)_\Sigma$	$=$	$?_c$
$D = (1,2)_\Sigma$	$=$	$?_d$
$E = (2,2)_\Sigma$	$=$	$?_e$
$?_f$	$=$	$(0,6)$
$?_g$	$=$	$(-1,4)$
$?_h$	$=$	$(5,1)$
$?_i$	$=$	$(1,2)$
$?_j$	$=$	$(1,1)$
$?_k$	$=$	$(2,1)$

Os itens (a) até (h) acima ("$?_a$" a "$?_h$") são fáceis de resolver "no olhômetro" usando o gráfico, e é fácil conferir os resultados algebricamente usando a fórmula $(*)$.

No item (i) dá pra ver pelo gráfico que os valores de a e b em $(a,b)_\Sigma = (1,2)$ vão ser fracionários e difíceis de chutar – mas podemos obtê-los *algebricamente*, resolvendo um *sistema de equações*.

Solução do "$?_i$":

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_\Sigma &=& (1,2) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) &=& (1,2) \\
4-2a-b &=& 1 \\
4+a-2b &=& 2 \\
-2a-b &=& -3 \\
a-2b &=& -2 \\
-2a+3 &=& b \\
a &=& -2+2b \\
-2(-2+2b)+3 &=& b \\
4-4b+3 &=& b \\
7 &=& 5b \\
b &=& \frac{7}{5} \\
a &=& -2+2\frac{7}{5} \\
&=& \frac{-10}{5} + \frac{14}{5} \\
&=& \frac{4}{5} \\
(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})_\Sigma &=& (1,2)
\end{array}$$

Uma generalização:

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_\Sigma &=& (x,y) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) &=& (x,y) \\
4-2a-b &=& x \\
4+a-2b &=& y \\
4-2a-x &=& b
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
a &=& y+2b-4 \\
&=& y+2(4-2a-x)-4 \\
&=& y+8-4a-2x-4 \\
&=& y-2x+4-4a \\
5a &=& y-2x+4 \\
a &=& (y-2x+4)/5 \\
&=& \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \\
&=& \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\
b &=& 4 - 2(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y) - x \\
&=& \frac{20}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{5}{5}x \\
&=& \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y
\end{array}$$

$(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y)_\Sigma = (x,y)$

Vamos chamar a fórmula acima de $(**)$.

Exercícios

12a) Resolva "$?_j$" pelo sistema.
12b) Resolva "$?_k$" pelo sistema.
12c) Verifique que as suas soluções de "$?_a$" até "$?_k$" obedecem $(*)$ e $(**)$.
12d) Resolva "$?_j$" e "$?_k$" por $(**)$.

Sistemas de equações e
sistemas de coordenadas (2)

Um outro modo de organizar os problemas da página anterior é o seguinte.
Temos as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ abaixo,

$$\begin{array}{lrcl} [x] & x & = & 4-2a-b \\ [y] & y & = & 4+a-2b \\ [a] & a & = & \frac{4}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \\ [b] & b & = & \frac{12}{5}-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y \end{array}$$

e queremos preencher a tabela abaixo de tal forma que em cada linha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ sejam obedecidas:

a	b	x	y
0	0	4	4
1	0	2	5
0	1	3	2
1	1	·	·
1	3	·	·
3	3	·	·
1	2	·	·
2	2	·	·
·	·	0	6
·	·	-1	4
·	·	5	1
·	·	1	2
·	·	1	1
·	·	2	1

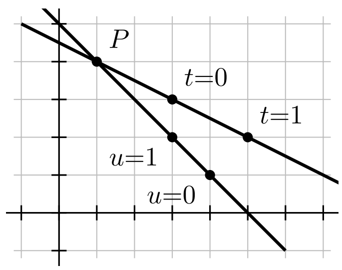
Note que:
1) quando as lacunas são em x e y é mais rápido usar as equações $[x]$ e $[y]$,
2) quando as lacunas são em a e b é mais rápido usar as equações $[a]$ e $[b]$,
3) as equações $[a]$ e $[b]$ são *consequências* das $[x]$ e $[y]$,
4) $[x]$ e $[y]$ são consequências de $(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) = (x,y)$,
5) $\binom{x}{y} = \binom{4-2a-b}{4+a-2b} = \binom{4}{4} + \binom{-2a-b}{a-2b} = \binom{4}{4} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$
6) $\binom{x}{y} = \binom{O_1+au_1+bv_1}{O_2+au_2+bv_2} = \binom{O_1}{O_2} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$

Exercícios

13a) No item (g) duas páginas atrás temos $O = (-3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $(a,b)_\Sigma = (-3+a+b, 1+b)$. Obtenha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ para este caso.
13b) Faça o mesmo para o item (a), onde $O = (3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Interseções de retas parametrizadas

Se $r = \{\, (3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
e $s = \{\, (4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$,
então r e s se intersectam no ponto $P = (1,4)$,
que está associado a $t = -1$ (em r) e a $u = 3$ (em s).
Graficamente,



Algebricamente, podemos convencer alguém do nosso resultado assim:
$(1,4) = (3,3) + (-1)\overrightarrow{(2,-1)} \in r$,
$(1,4) = (4,1) + 3\overrightarrow{(-1,1)} \in s$,
$(1,4) \in r \cap s$.

Repare que poderíamos ter encontrado $(x,y) = P \in r \cap s$ usando um sistema:
$(x,y) = (3+2t, 3-t)$
$(x,y) = (4-u, 1+u)$
Primeiro encontramos t e u tais que $(3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$,
depois encontramos $(x,y) = (3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$.

Exercício

14) Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s,
encontre $P \in r \cap s$, e verifique algebricamente que o seu P está certo.
a) $r = \{\, (1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (0,4) + u\overrightarrow{(2,0)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
b) $r = \{\, (1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (0,2) + u\overrightarrow{(2,3)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
c) $r = \{\, (1+3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (2u, 2+3u) \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
d) $r = \{\, (0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (1,0) + u\overrightarrow{(1,3)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
Obs: no (d) o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema.

Sistemas de corrdenadas (3)

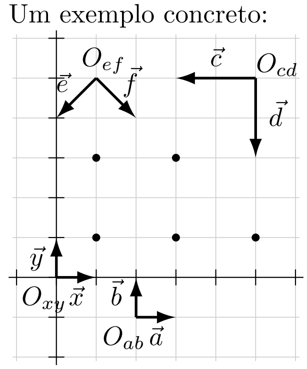
Há muitas notações possíveis para lidar com situações em que temos vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo – vamos ver *uma* delas.

Vamos ter:

- as coordenadas x, y e os eixos x e y,
- as coordenadas a, b e os eixos a e b,
- as coordenadas c, d e os eixos d e d,
- as coordenadas e, f e os eixos e e f,

e além disso vamos ter as origens O_{xy}, O_{ab}, O_{cd}, O_{ef} de cada um dos sistemas de coordenadas e os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$.

Um exemplo concreto:



$$\begin{array}{lll}
O_{xy} = (0,0) & \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{ab} = (2,-1) & \vec{a} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{b} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{cd} = (5,5) & \vec{c} = \overrightarrow{(-2,0)} & \vec{d} = \overrightarrow{(0,-2)} \\
O_{ef} = (1,5) & \vec{c} = \overrightarrow{(-1,-1)} & \vec{d} = \overrightarrow{(1,-1)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
(x,y)_{xy} & = & O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} & = & (x,y) \\
(a,b)_{ab} & = & O_{ab} + a\vec{a} + b\vec{b} & = & (a+2, b-1) \\
(c,d)_{cd} & = & O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d} & & \\
(e,f)_{ef} & = & O_{ef} + e\vec{e} + f\vec{f} & &
\end{array}$$

Um ponto P do plano tem coordenadas P_x e P_y no sistema x, y, coordenadas P_a e P_b no sistema a, b, e assim por diante, e em situações em que estamos falando das coordenadas de um ponto só – como nos problemas das páginas 13 e 14 – nós vamos nos referir às coordenadas deste ponto como x, y, ..., e, f.

Usando as definições de $(\_,\_)_{xy}$, $(\_,\_)_{ab}$, $(\_,\_)_{cd}$, $(\_,\_)_{ef}$ acima temos:

$$(P_x, P_y)_{xy} = (P_a, P_b)_{ab} = (P_c, P_d)_{cd} = (P_e, P_f)_{ef}$$
$$(x,y)_{xy} = (a,b)_{ab} = (c,d)_{cd} = (e,f)_{ef}$$

Exercícios

15a) Complete, usando o diagrama acima e olhômetro:

ponto	$(\_,\_)_{xy}$	$(\_,\_)_{ab}$	$(\_,\_)_{cd}$	$(\_,\_)_{ef}$
P	$(1,1)_{xy}$	$(-1,2)_{ab}$	$(2,2)_{cd}$	
Q	$(3,1)_{xy}$	$(1,2)_{ab}$	$(1,2)_{cd}$	$(1,3)_{ef}$
R	$(5,1)_{xy}$			
S	$(1,3)_{xy}$			
T	$(3,3)_{xy}$			

15b) Calcule as seguintes distâncias *em cada sistema de coordenadas:* $d(P,Q)$, $d(P,R)$, $d(P,S)$, $d(S,T)$, $d(P,T)$. Dica: $d_{ef}(Q,R) = \sqrt{(R_e - Q_e)^2 + (R_f - Q_f)^2}$.

15c) Calcule os seguintes vetores em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{PP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PT}$. Dica: $(\overrightarrow{PQ})_{ef} = \overrightarrow{(Q_e - P_e, Q_f - P_f)}_{ef}$.

(Exercícios, cont.)

15d) Calcule os seguintes produtos escalares em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS}$ e $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PT}$. Dica: $\overrightarrow{(\alpha, \beta)_{ef}} \cdot_{ef} \overrightarrow{(\gamma, \delta)_{ef}} = \alpha\gamma + \beta\delta$.

15e) Verifique em cada um dos sistemas de coordenadas se estas afirmações são verdadeiras: $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PT}$. Dica: $\vec{u}_{ef} \perp_{ef} \vec{v}_{ef}$ se e só se $\vec{u}_{ef} \cdot_{ef} \vec{v}_{ef} = 0$.

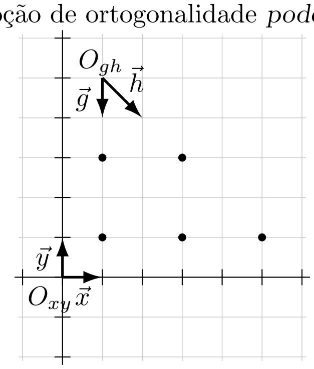
15f) Leia as páginas 9-14 e 16-19 do livro do CEDERJ. Note que ele não começa usando coordenadas desde o início como a gente fez... ele começa supondo que os pontos já estão desenhados num papel, e só quando se estabelece um sistema de coordenadas esses pontos passam a ter coordenadas.

15g) Leia as páginas 16-17 do Reis/Silva.

Coordenadas "tortas"

Em todos os sistemas de coordenadas da página anterior os dois vetores da "base" têm o mesmo comprimento e são (geometricamente) ortogonais um ao outro... mas quando definimos precisamente "ortogonalidade" no curso nós usamos uma definição *algébrica*, isto é, uma *conta*: $\vec{u} \perp \vec{v}$ é verdade se e só se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ – e nós vimos no exercício 15d que o resultado de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ depende do sistema de coordenadas...

Quando usamos coordenadas "tortas", como no sistema O_{gh}, $\vec{g}$, $\vec{h}$ abaixo, a noção de ortogonalidade *pode* mudar.



$$O_{xy} = (0,0) \quad \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} \quad \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)}$$
$$O_{gh} = (1,5) \quad \vec{g} = \overrightarrow{(0,-1)} \quad \vec{h} = \overrightarrow{(1,-1)}$$

$$\begin{array}{rcccl} (x,y)_{xy} & = & O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} & = & (x,y) \\ (g,h)_{gh} & = & O_{gh} + g\vec{g} + h\vec{h} & & \end{array}$$

Exercícios

16a) Encontre as coordenadas $(\_,\_)_{gh}$ dos pontos P, Q, R, S, T.
16b) Calcule $d_{gh}(S,P)$, $d_{gh}(S,Q)$, $d_{gh}(S,T)$.
16c) Calcule $d_{gh}(S,P)$, $d_{gh}(S,Q)$, $d_{gh}(S,T)$.
16d) Calcule $\overrightarrow{SP} \cdot_{gh} \overrightarrow{SQ}$ e $\overrightarrow{SP} \cdot_{gh} \overrightarrow{ST}$.
16e) Calcule $\overrightarrow{SP} \perp_{gh} \overrightarrow{SQ}$ e $\overrightarrow{SP} \perp_{gh} \overrightarrow{ST}$.

Aviso importante: nós vamos usar "coordenadas tortas" <u>*pouquíssimo*</u> *em GA!!!*

Projeções

Até agora nós só vimos “decomposições” da seguinte forma: tínhamos O, $\vec{u}$, $\vec{v}$, P, e queríamos a e b tais que $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ – note que isto é equivalente a encontrar a e b tais que $a\vec{u} + b\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, ou seja vimos como decompor o vetor $\overrightarrow{OP}$ em um múltiplo do vetor $\vec{u}$ e um do vetor $\vec{v}$...

Agora vamos partir de vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e ver como decompor o vetor $\vec{w}$ em $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ tais que isto forme um triângulo retângulo. Mais precisamente: se $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ então $\vec{v} = -\lambda\vec{u} + \vec{w}$, e queremos que estes $\lambda\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonaisa, aliás, que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais: $\vec{u} \perp \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} \perp (-\lambda\vec{u} + \vec{w})$.

Definição: a *projeção sobre $\vec{u}$ de $\vec{w}$*, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$, é o vetor $\lambda\vec{u}$ tal que $\vec{u} \perp (-\lambda\vec{u} + \vec{w})$.

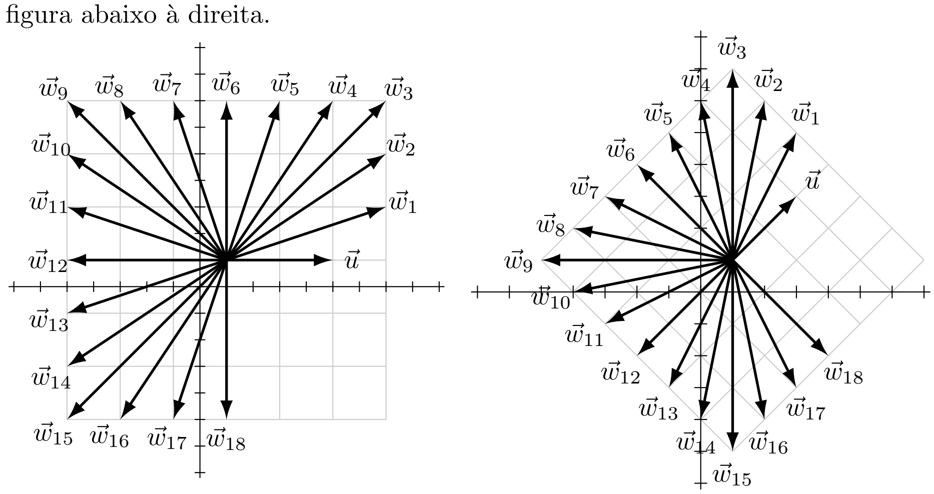
Exercícios

17a) Sejam $\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1)}$, $A = (2,0)$, $B = A + \vec{w}$. Represente graficamente A, B, $\vec{u}$, $\vec{w}$, e para cada $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$ desenhe no seu gráfico o triângulo $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ correspondente e calcule $\vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Qual o λ que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$?

17b) Faça a mesma coisa que no 17a, mas mudando o $\vec{u}$ para $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$.

17c) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à esquerda.

17d) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à direita.



17e) Leia a p.55 do livro do CEDERJ.
17f) Leia as págs 35 a 38 do Reis/Silva.

Notação com ':'

Em vários lugares – por exemplo, nas páginas 35-41 do livro do CEDERJ, e na lista 3 da Ana Isabel – a notação preferida para retas e outros conjuntos usa ':':

$$\begin{array}{rcl} r_a & : & 2x+3y=4 \\ r_b & : & \left\{ \begin{array}{l} x=2+3t \\ y=4+5t \end{array} \right. \\ r_c & : & (2+3t, 4+5t) \\ r_d & : & (2,4)+u\overrightarrow{(3,5)} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} r_a & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=4\,\} \\ r_b & = & \{\,(2+3t,4+5t) \mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ r_c & = & \{\,(2+3t,4+5t) \mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ r_d & = & \{\,(2,4)+u\overrightarrow{(3,5)} \mid u\in\mathbb{R}\,\} \end{array}$$

Essas notações com ':' são bem compactas mas elas deixam implícito quais são os geradores.

Exercícios

Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s e os pontos de r e s que correspondem a $t=0$, $t=1$, $u=0$, $u=1$.

18a) $r:(2,4)+t\overrightarrow{(1,0)}$, $s:(2,4)+u(2\cdot\overrightarrow{(1,0)})$

18b) $r:(2,2)+t\overrightarrow{(2,1)}$, $s:(2,4)+u(2\cdot\overrightarrow{(2,1)})$

18c) $r:(2,4)+t\overrightarrow{(1,0)}$, $s:((2,4)+2\cdot\overrightarrow{(1,0)})+u\overrightarrow{(1,0)}$

18d) $r:(2,2)+t\overrightarrow{(2,1)}$, $s:((2,2)+2\cdot\overrightarrow{(2,1)})+u\overrightarrow{(2,1)}$

Importante: muitas pessoas da sala já sabem desenhar cada uma das retas acima em segundos e quase sem fazer contas. Se você ainda não sabe como fazer isso descubra quem são essas pessoas e aprenda com elas!

18e) Traduza cada uma das retas r_a, ..., r_k da p.9 para a notação com ':'.

Às vezes o nome das retas é suprimido e dizemos só "a reta com equação $2x+3y=4$" ou "a reta $2x+3y=4$", e quando precisamos escrever o nome dessa reta no gráfico nós escrevemos "$2x+3y=4$" do lado da reta ao invés de escrevermos 'r' ou 's'.

Na p.14 nós encontramos a interseção de duas retas $r:(3+2t,3-t)$ e $s:(4-u,1+u)$ da seguinte forma: primeiro encontramos os valores de t e u que resolviam $(3+2t,3-t)=(4-u,1+u)$, depois fizemos $(x,y)=(3+2t,3-t)$.

18f) Se $s':(4-t,1+t)$ então $s=s'$, e este método deveria funcionar para encontrarmos $r\cap s'$: primeiro encontramos o valor de t que resolve $(3+2t,3-t)=(4-t,1+t)$, depois fazemos $(x,y)=(3+2t,3-t)$. O que dá errado?

18g) Se $r:(2t,t)$ e $s:(2u,u+3)$ então r e s são paralelas. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t,t)=(2u,u+3)$?

18h) Se $r:(2t,t)$ e $s:(2u+2,u+1)$ então r e s são coincidentes. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t,t)=(2u+2,u+1)$?

18i) Represente graficamente as retas $r:y=4-2x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $y=2$ e encontre a interseção de r como cada uma das outras retas algebricamente e no gráfico.

18j) Sejam $r:y=4-2x$, A a interseção de r com $x=0$, B a interseção de r com $x=1$, $s:A+t\overrightarrow{AB}$. Expresse r na forma $r:(\_+\_t,\_+\_t)$ e compare o resultado com $s:(x,4-2x)$.

Construções

Você deve se lembrar que na Geometria do ensino médio tudo era feito com "construções" com régua, compasso, esquadro, etc, e nessas construções cada objeto novo era feito apoiado nos mais antigos... agora vamos fazer algo parecido, mas "construindo" (definindo) novos pontos, vetores, conjuntos, números, etc, a partir dos anteriores.

Exemplos:

a) Sejam r uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Sejam B e C dois pontos diferentes de r.
Seja $D = B + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$.
Então D é o ponto de r mais próximo de A.

b) Sejam r uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Sejam B e C dois pontos diferentes de r.
Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.
Sejam $D = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DA}$, $s : D + t\vec{w}$, $r' : D + t\vec{u}$.
Então $r \perp s$, $r = r'$, e
o ponto de r' mais próximo de A é o que tem $t = 0$.

c) Sejam $r : B + t\vec{u}$ uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Seja $\vec{w}$ um vetor não-nulo ortogonal a $\vec{u}$.
Seja $s : A + t\vec{w}$.
Seja $D \in r \cap s$.
Então $r \perp s$ e D é o ponto de r mais próximo de A.

Você vai precisar se familiarizar com a linguagem dessas construções.
A coisa mais básica é aprender a aplicá-las em casos particulares.

Exercícios

19a) Sejam $A = (2, 0)$, $r : y = 2 + x$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, 2)$ na construção (a). Represente todos os objetos graficamente.

19b) Faça o mesmo na (b), mas agora $r : y = 2 + \frac{x}{2}$, $A = (3, 1)$, e você escolhe B e C. Verifique se as afirmações do "Então $r \perp s$, $r = r'$..." são verdade neste caso. Repare que ainda não sabemos ver se elas serão verdadeiras *sempre!*

A construção (c) tem um passo, o "seja $D \in r \cap s$", que é bem curto em português e bem simples graficamente, mas que é trabalhoso matematicamente. Faça o mesmo que no item anterior, mas em três casos:

19c) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, e escolha A, B, $\vec{w}$, etc.

19c') idem, mas com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$.

19c") idem, ainda com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$, mas agora escolha A, B, $\vec{w}$, etc para que as contas sejam simples e todos os números sejam inteiros.

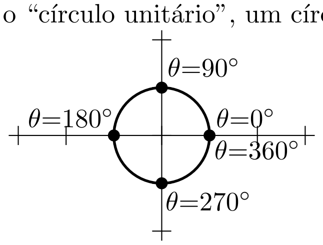
Ângulos

Ângulos aparecem em várias situações em GA – as principais por enquanto vão ser a fórmula que relaciona produto escalar e cossenos (livro do CEDERJ, p.55) e parametrização de círculos.

Lembre que se fizermos o conjunto

$$C = \{\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\,\}$$

isto dá o "círculo unitário", um círculo de raio 1 centrado na origem:



Compare com as retas parametrizadas da p.14 – lá na reta r tínhamos $x = 3 + 2t$, $y = 3 - t$, $y = 4.5 - \frac{x}{2}$, e em C temos $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, $x^2 + y^2 = 1$.

O ângulo θ pode ser dado tanto em graus quanto em radianos, e temos $180° = \pi$, $1° = \frac{\pi}{180}$, $234° = 234\frac{\pi}{180}$, etc... além disso $(\cos 360°, \operatorname{sen} 360°) = (\cos 0°, \operatorname{sen} 0°) = (1, 0)$, e $\theta = 360°$ e $\theta = 0°$ correspondem ao mesmo ponto do círculo.

Para alguns valores de θ é fácil calcular os valores exatos de $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$...

$\theta = 45° \;\Rightarrow\; x = y,\ x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 60° \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercício

20) Complete a tabela abaixo.

θ	$x = \cos\theta$	$y = \operatorname{sen}\theta$
$0° = 0$	1	0
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$45° =$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$60° =$	$1/2$	
$90° = \frac{\pi}{2}$	0	1
$120° =$		
$135° =$		
$150° =$		
$180° = \pi$	-1	0
$210° =$		
$225° =$		
$240° =$		
$270° =$		
$300° =$		
$315° =$		
$330° =$		
$360° = 2\pi$	1	0

Arcsen e arccos

Sejam $r(x) = \sqrt{x}$ e $q(x) = x^2$. Então $r(q(x)) = x$ para alguns valores de x, mas não para todos: $r(q(3)) = 3$, mas $r(q(-5)) = 5$... mais precisamente,

$r(q(x)) = x$ para $x \in [0, +\infty)$ e

$q(r(x)) = x$ para $x \in [0, +\infty)$.

As funções arcsen e arccos são "inversas parciais" do sen e do cos, como r e q são "inversas parciais" uma da outra.

Exercícios

Sejam $A = \{-1, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{2}/2, -1/2, 0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1\}$,
$B = \{-90°, -60°, -45°, -30°, 0°, 30°, 45°, 60°, 90°\}$,
$C = \{0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°\}$.

21a) Complete as tabelas abaixo:

x	$\theta = \operatorname{arccos} x$
-1	$180° = \pi$
$-\sqrt{3}/2$	
$-\sqrt{2}/2$	
$-1/2$	
0	$90° = \pi/4$
$1/2$	
$\sqrt{2}/2$	
$\sqrt{3}/2$	
1	$0° = 0$

y	$\theta = \operatorname{arcsen} y$
-1	$-90° = -\pi/2$
$-\sqrt{3}/2$	
$-\sqrt{2}/2$	
$-1/2$	
0	$0° = 0$
$1/2$	
$\sqrt{2}/2$	
$\sqrt{3}/2$	
1	$90° = \pi/2$

21b) Calcule sen(arccos(x)) para cada x em A.
21c) Calcule cos(arcsen(y)) para cada y em A.

x	$y = \operatorname{sen}(\operatorname{arccos} x)$
-1	
$-\sqrt{3}/2$	
$-\sqrt{2}/2$	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
$\sqrt{2}/2$	
$\sqrt{3}/2$	
1	

y	$x = \cos(\operatorname{arcsen} y)$
-1	
$-\sqrt{3}/2$	
$-\sqrt{2}/2$	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
$\sqrt{2}/2$	
$\sqrt{3}/2$	
1	

Círculos

Um conjunto como

$$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \,\}$$

é um círculo com centro $C_0 = (3,4)$ e raio $R = 5$. O modo mais legal da gente entender isso é aprendendo a encontrar os quatro pontos "mais óbvios" de C, e aí desenhando-os a gente consegue descobrir o centro ("C_0") de C e o raio ("R") de C.

Truque: dos quatro pontos mais óbvios de C dois têm $(x-3)^2 = 0$ e portanto $(y-4)^2 = 5^2$, e os outros dois têm $(y-4)^2 = 0$ e portanto $(x-3)^2 = 5^2$.

Temos:

$$\begin{array}{llllllll}
(x-3)^2 = 0 & \Rightarrow & x = 3 & & & & & \\
 & \text{e} & (y-4)^2 = 5^2 & \Rightarrow & y - 4 = \pm 5 & & & \\
 & & & \Rightarrow & y = 4 \pm 5 & & & \\
 & & & \Rightarrow & y = 9 & \text{e} & (x,y) = (3,9) & \\
 & & & \text{ou} & y = -1 & \text{e} & (x,y) = (3,-1) & \\
(y-4)^2 = 0 & \Rightarrow & y = 4 & & & & & \\
 & \text{e} & (x-3)^2 = 5^2 & \Rightarrow & x - 3 = \pm 5 & & & \\
 & & & \Rightarrow & x = 3 \pm 5 & & & \\
 & & & \Rightarrow & x = 8 & \text{e} & (x,y) = (8,4) & \\
 & & & \text{ou} & x = -2 & \text{e} & (x,y) = (-2,4) &
\end{array}$$

ou, mais visualmente:

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{3} -3}_{0})^2}_{0} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{4\pm5} -4}_{\pm5})^2}_{5^2} = 5^2 \qquad \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{3\pm5} -3}_{\pm5})^2}_{5^2} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{4} -4}_{0})^2}_{0} = 5^2$$

O caso geral é:

$$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \,\}$$

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{x_0} -x_0}_{0})^2}_{0} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{y_0\pm R} -y_0}_{\pm R})^2}_{R^2} = R^2 \qquad \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{x_0\pm R} -x_0}_{\pm R})^2}_{R^2} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{y_0} -y_0}_{0})^2}_{0} = R^2$$

$$\{(x_0, y_0+R), (x_0, y_0-R), (x_0+R, y_0), (x_0, y_0+R)\} \subset C$$

Exercícios

23a) Seja $C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \,\}$. Temos $(3+5,4), (3-5,4), (3,4+5), (3,4-5) \in C$. Destes pontos um está acima, outro abaixo, outro à esquerda, outro à direita do centro $C_0 = (3,4)$ de C. Qual é qual?

23b) Seja $C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \,\}$. Temos $(x_0 + R, y_0), (x_0 - R, y_0), (x_0, y_0 + R), (x_0, y_0 - R) \in C$. Destes pontos um está acima, outro abaixo, outro à esquerda, outro à direita do centro $C_0 = (x_0, y_0)$ de C. Qual é qual?

23c) Encontre quatro pontos diferentes, P_1, P_2, P_3, P_4, tais que $d(P_1, (4,3)) = 2$, ..., $d(P_4, (4,3)) = 2$.

23d) Decifre =) e entenda:

$$
\begin{aligned}
\{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(4,3)) = 2 \,\} &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(4,3)) = 2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x,y) - (4,3)|| = 2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||\overrightarrow{(x-4, y-3)}|| = 2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 2 \,\} \\
&= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \,\}
\end{aligned}
$$

23e) Discuta com seus colegas como "pronunciar em português" cada um dos conjuntos do item anterior. Dicas: "o conjunto dos pontos à distância ___ de ___", "o conjunto dos pontos P tais que ___", "o conjunto dos pontos (x,y) que obedecem ___",

23f) Use um método parecido com os da página anterior para encontrar as quatro soluções mais óbvias de $((x+6)/3)^2 + (2x+5)^2 = 1$.

Interseção de círculo e reta

Sejam
$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-6)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \}$ e
$r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x/3 \}$,
$s = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x/6 \}$.

24a) Represente graficamente C e r.

24b) O círculo C tem 12 pontos com coordenadas inteiras – os 4 pontos óbvios e mais oito. Dê as coordenadas destes 8 "pontos menos óbvios" de C.

24c) Sejam I e I' os dois pontos da interseção entre C e r; mais formalmente, $C \cap r = \{I, I'\}$. Encontre no olhômetro as coordenadas de I e I'.

24d) Teste as suas respostas do item anterior verificando que I e I' obedecem tanto a equação de r quanto a de C.

24e) Sejam $M = \frac{I+I'}{2}$ e r' a reta que passa por C_0 e M. Verifique que $r \perp r'$.

24f) Represente graficamente C e s e tente obter no olhômetro as coordenadas de $\{J, J'\} = C \cap s$. Verifique que um destes pontos (J, digamos) tem coordenadas inteiras e J' não – é praticamente impossível encontrar as coordenadas exatas de J' no olhômetro, vamos precisar de um método algébrico.

24g) Se $(x,y) \in C \cap s$ então $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 5^2$, $y = 1 - x/6$ e

$$(x-6)^2 + ((\underbrace{1 - x/6}_{y}) - 5)^2 = 5^2 \qquad (*).$$

Expanda $(*)$ para obter uma equação de segundo grau em x e resolva-a. Chame as duas soluções de x_1 e x_2; mais formalmente,

$$\{x_1, x_2\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-6)^2 + ((1 - x/6) - 5)^2 = 5^2 \}.$$

24h) Sejam:

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& 1 - x_1/6 \\ y_2 &=& 1 - x_2/6 \\ J &=& (x_1, y_1) \\ J' &=& (x_2, y_2) \end{array}$$

Verifique que J e J' obedecem as equações de C e de s.

Vetores unitários

Um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $||\vec{v}|| = 1$.

Para cada vetor $\vec{w}$ não-nulo podemos obter um vetor $\vec{u}$ com a mesma direção e sentido que $\vec{w}$, mas tal que $\vec{u}$ seja unitário – por exemplo, se $\vec{w} = \overrightarrow{(4,0)}$ então $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$. O truque é este: $\vec{u} = \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}$.

Vamos usar (temporariamente!) a seguinte notação para a "unitarização" de um vetor:

$$\vec{v}' := \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$$

Exercícios

25a) calcule $\overrightarrow{(3,0)}'$, $\overrightarrow{(2,0)}'$, $\overrightarrow{(0,2)}'$, $\overrightarrow{(0,1)}'$, $\overrightarrow{(0,-2)}'$, $\overrightarrow{(3,4)}'$, $\overrightarrow{(1,1)}'$, $\overrightarrow{(\frac{1}{10},0)}'$, $\overrightarrow{(\frac{1}{100},0)}'$, $\overrightarrow{(0,0)}'$.

25b) Se $||\vec{v}|| = 234$ então $||5\vec{v}|| = 5 \cdot 234$, e, como regra geral, esperaríamos que $||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||$ fosse verdade para todo $k \in \mathbb{R}$ e todo vetor $\vec{v}$... mas isso *não é verdade!* Verifique que $||(-2)\overrightarrow{(3,0)}|| \neq (-2)||\overrightarrow{(3,0)}||$.

25c) A "demonstração" abaixo está errada – se ela estiver certa então, por exemplo, $||(-2) \cdot \overrightarrow{(3,0)}|| = (-2) \cdot ||\overrightarrow{(3,0)}||$. Descubra qual é o passo dela que está errado. Dica: faça $k = -2$, $a = 3$, $b = 0$ e calcule cada uma das expressões entre '='s.

$$\begin{array}{rcl}
||k \cdot \overrightarrow{(a,b)}|| & = & ||\overrightarrow{(ka,kb)}|| \\
& = & \sqrt{\overrightarrow{(ka,kb)} \cdot \overrightarrow{(ka,kb)}} \\
& = & \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\
& = & \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\
& = & \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} \\
& = & k\sqrt{a^2 + b^2} \\
& = & k\sqrt{\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}} \\
& = & k \cdot ||\overrightarrow{(a,b)}||
\end{array}$$

25d) Demonstre que $||k \cdot \overrightarrow{(a,b)}|| = |k| \cdot ||\overrightarrow{(a,b)}||$ $(\forall k,a,b \in \mathbb{R})$.

25e) Demonstre que $\vec{v} = ||\vec{v}||\vec{v}'$ (para $\vec{v}$ não-nulo).

25f) Demonstre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot (\vec{u}' \cdot \vec{v}')$ (para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos).

25g) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários ortogonais entre si, e $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Demonstre que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u}) = a\vec{u}$ e que $||\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}|| = a$.

25h) (Re)leia a páginas 54 e 55 do livro do CEDERJ, e dê uma olhada nas páginas seguintes até a 58. Agora você já deve ser capaz de entender tudo ou quase tudo da "regra do cosseno",

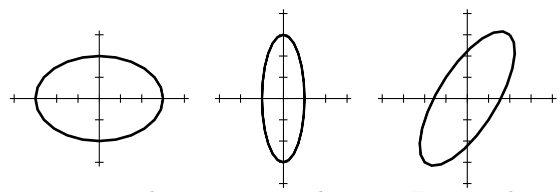
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v}))$$

que pra gente é um *teorema* e pra ele é uma *definição*. Vamos ver a demonstração completa em sala em breve, mas ela é complicada e quem estiver mais preparado vai entendê-la melhor.

Elipses

Elipses são "círculos amassados".

Círculos "amassados na horizontal" e "amassados na vertical" são bem mais simples matematicamente que os "amassados na diagonal", e só vamos estudar *a sério* os "amassados na diagonal" depois da P1, exceto pelo exercício abaixo...



Horizontal: fácil   Vertical: fácil   Diagonal: difícil

Os "pontos mais óbvios" de uma elipse parametrizada são os que têm $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, $\theta = 180°$, $\theta = 270°$.

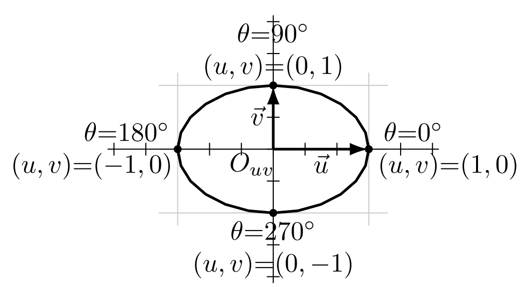
Os "pontos mais óbvios" de uma elipse com equação $u^2 + v^2 = 1$ são os que têm $(u,v) = (0,1)$, $(u,v) = (-1,0)$, $(u,v) = (1,0)$, $(u,v) = (0,-1)$.

Por exemplo:

$$E = \{\ \underbrace{(0,0)}_{E_0=O_{uv}} + \cos\theta\,\underbrace{\overrightarrow{(3,0)}}_{\vec{u}} + \operatorname{sen}\theta\,\underbrace{\overrightarrow{(0,2)}}_{\vec{v}} \mid \theta \in \mathbb{R}\ \}$$

$$E' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\underbrace{x/3}_{u})^2 + (\underbrace{y/2}_{v})^2 = 1\,\}$$

As elipses E e E' acima têm os mesmos pontos mais óbvios:



Elipses e sistemas de coordenadas

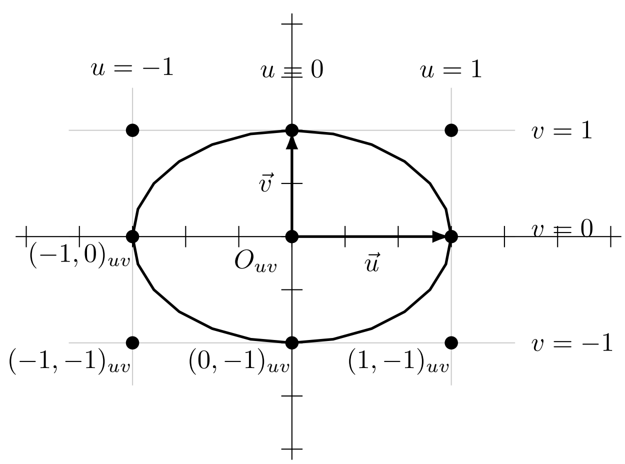
A “caixa” de uma elipse com equação $u^2+v^2=1$ é a figura – um paralelogramo – delimitada pelas retas $u=-1$, $u=1$, $v=1$, $v=-1$.

Os “nove pontos óbvios” da caixa de uma elipse são os que têm $u \in \{-1,0,1\}$ e $v \in \{-1,0,1\}$, ou seja, $(-1,1)_{uv}$, $(0,1)_{uv}$, $(1,1)_{uv}$, $(-1,0)_{uv}$, ... $(1,-1)_{uv}$. Um deles é o “centro”, quatro são “vértices” e quatro são “pontos médios dos lados”.

Um bom truque para desenhar uma elipse é começar desenhando sua caixa. A elipse está toda dentro da caixa, e tangencia a caixa exatamente nos pontos médios dos lados.

Repare que a elipse que acabamos de desenhar “vem” de um sistema de coordenadas (ou, em terminologia mais formal, a elipse “é induzida” pelo sistema de coordenadas):

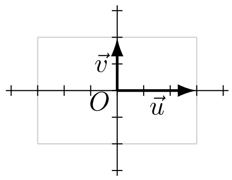
$$
\begin{array}{l}
O_{uv}=(0,0) \quad \vec{u}=\overrightarrow{(3,0)} \quad \vec{v}=\overrightarrow{(0,2)} \\
\begin{array}{rcl}
(u,v)_{uv} &=& O_{uv}+u\vec{u}+v\vec{u} \\
&=& (0,0)+u\overrightarrow{(3,0)}+v\overrightarrow{(0,2)} \\
&=& (3u,2v) \\
(x,y) &=& (3u,2v) \\
(u,v) &=& (x/3,y/2)
\end{array} \\
E=\{\,O_{uv}+\cos\theta\,\vec{u}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{v} \mid \theta\in\mathbb{R}\,\} \\
E'=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\,\}
\end{array}
$$



Exercícios

Sejam Σ_1, ..., Σ_6 os seguintes sistemas de coordenadas (obs: $(u,v)_{uv} = O_{uv} + u\vec{u} + v\vec{v}$):

Σ_1)



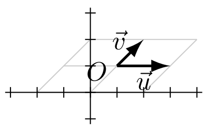
Σ_2) $O_{uv} = (0,2)$ $\vec{u} = \overrightarrow{(3,0)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(0,2)}$

Σ_3) $O_{uv} = (0,2)$ $\vec{u} = \overrightarrow{(0,2)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,0)}$

Σ_4) $O_{uv} = (1,2)$ $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(0,2)}$

Σ_5) $O_{uv} = (0,0)$ $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,2)}$

Σ_6)



26a) Em cada um dos casos Σ_1, ..., Σ_6 acima represente graficamente:

- O_{uv}, $\vec{u}$, $\vec{v}$
- as retas $u = 0$, $v = 0$, $u = 1$, $v = 1$, $u = -1$, $v = -1$
- os pontos $(0,0)_{uv}$, $(0,1)_{uv}$, $(-1,0)_{uv}$, $(1,0)_{uv}$, $(0,-1)_{uv}$
- a caixa da elipse
- a elipse induzida pelo sistema de coordenadas
- os pontos $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, $\theta = 180°$, $\theta = 270°$ da elipse $E' = \{\, O_{uv} + \cos\theta\,\vec{u} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v} \mid \theta \in \mathbb{R}\,\}$

26b) Em cada um dos casos Σ_1, ..., Σ_6 acima encontre as coordenadas x, y, u, v dos pontos $(0,0)_{uv}$, $(0,1)_{uv}$, $(-1,0)_{uv}$, $(1,0)_{uv}$, $(0,-1)_{uv}$ (faça uma tabela como a da p.13).

26c) Em cada um dos casos Σ_1, ..., Σ_6 acima encontre as equações

$$\begin{array}{rcl} x &=& \_\_u + \_\_v + \_\_ \\ y &=& \_\_u + \_\_v + \_\_ \\ u &=& \_\_x + \_\_y + \_\_ \\ v &=& \_\_x + \_\_y + \_\_ \end{array}$$

que relacionam as coordenadas x, y, u, v (dica: veja a p.13).

26d) Para cada um dos casos Σ_1, ..., Σ_6 encontre uma expressão da forma

$$E' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\underbrace{\_\_x + \_\_y + \_\_}_{u})^2 + (\underbrace{\_\_x + \_\_y + \_\_}_{v})^2 = 1 \,\}$$

que descreva a elipse induzida pelo sistema de coordenadas. Dicas: em Σ_1 temos $E' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\underbrace{x/2}_{u})^2 + (\underbrace{y/3}_{v})^2 = 1 \,\}$, e os pontos mais óbvios de cada E' devem ser os mesmos que os do E correspondente.

Distância entre ponto e reta em $\mathbb{R}^2$

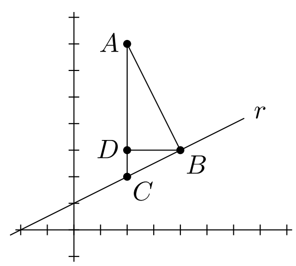
Sejam A e r um ponto e uma reta em $\mathbb{R}^2$.
Seja B o ponto de r mais próximo de A. Então $d(A,r) = d(A,B)$.

Nós sabemos calcular B usando projeção:
se $r = \{\, P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ então $B := P + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{PA}$, e

$$\begin{array}{rcl} d(A,r) & = & d(A,B) \\ & = & d(A, P + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{PA}) \end{array}$$

mas as contas ficam grandes – vamos ver um método mais rápido.

Sejam $A = (A_x, A_y)$ e $r : y = mx + b$ um ponto e uma reta em $\mathbb{R}^2$.
Seja $B = (B_x, B_y)$ o ponto de r mais próximo de A.
Seja $v = \{\, (A_x, y) \mid y \in \mathbb{R} \,\}$ uma reta vertical passando por A.
Seja $h = \{\, (x, B_y) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ uma reta horizontal passando por B.
Seja $C = (C_x, C_y) \in r \cap v$. Note que $C_x = A_x$.
Seja $D = (D_x, D_y) \in h \cap v$. Note que $D_x = A_x = C_x$ e $D_y = B_y$.
A figura – no caso em que $r : y = 2x + 1$ e $A = (2, 7)$ – é:



O truque – que vamos demonstrar em breve – é que $C = (A_x, mA_x + b)$ e:

$$\begin{array}{rcl} d(A,r) & = & d(A,B) \\ & = & d(A,C)/\sqrt{1+m^2} \\ & = & |C_y - A_y|/\sqrt{1+m^2} \\ & = & |mA_x + b - A_y|/\sqrt{1+m^2}. \end{array}$$

Exercício

Em cada um dos casos abaixo represente r, A, B, C, D graficamente, descubra as coordenadas de B, C e D, calcule $d(A,C)$ e $d(A,B)$ e verifique que $d(A,B) = d(A,C)/\sqrt{1+m^2}$.

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

Obs: adaptado da aula de 4/jul/2016:
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf

Sejam:
$r_1 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_2 = \{\, (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_3 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
Quais destas retas se interceptam?
Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas?
Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \,\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \,\}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \,\}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$ (x e y variam, $z = 0$)
$\pi_{xz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$ (x e z variam, $y = 0$)
$\pi_{yz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \,\}$ (y e z variam, $x = 0$)
Notação (temporária):
[equação] $= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ equação $\}$
Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:
$\pi_1 = [x = 1]$, $\quad \pi_8 = [y = x]$,
$\pi_2 = [y = 1]$, $\quad \pi_9 = [y = 2x]$,
$\pi_3 = [z = 1]$, $\quad \pi_{10} = [z = x]$,
$\pi_4 = [z = 4]$, $\quad \pi_{11} = [z = x + 1]$,
$\pi_5 = [z = 2]$,
Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$ (2)

Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...
Sejam

$$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\},$$

$$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\}.$$

Calcule e visualize:
$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,
e resolva:
$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ ("z em função de x e y"),
$[y = ax + bz + c]$ ("y em função de x e z"),
$[x = ay + bz + c]$ ("x em função de y e z").

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de x e y:

$$\begin{array}{c}F(x,y)\\=x+2y\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 3&4&5&6&7&8&9\\ 1&2&3&4&5&6&7\\ -1&0&1&2&3&4&5\\ -3&-2&-1&0&1&2&3\\ -5&-4&-3&-2&-1&0&1 \end{array}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar
$[z = x + y]$,
$[z = x + y + 2]$,
$[z = x - y + 4]$.

Sejam:
$\pi_{12} = [z = x + y]$,
$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$
Exercício: encontre pontos de $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ tais que
a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 3$; depois
d) encontre uma parametrização para r,
e) encontre uma parametrização para r na qual $t = x$.

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em $\mathbb{R}^3$:
$[y = ax + b, z = cx + d]$ ("y e z em função de x"),
$[x = ay + b, z = cy + d]$ ("x e z em função de y"),
$[x = az + b, y = cz + d]$ ("x e y em função de z").
Encontre uma descrição da forma $[y = ax + b, z = cx + d]$ para a r acima.
(Dica: use o "chutar e testar"!)

Determinantes em $\mathbb{R}^3$

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede *áreas* (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ac - bd \qquad \left|\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = bd - ac = -\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):
$[\vec{u},\vec{v}] = [\overrightarrow{(u_1,u_2)}, \overrightarrow{(v_1,v_2)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^2$)
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)}, \overrightarrow{(v_1,v_2,v_3)}, \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^3$)
"$[\vec{u},\vec{v}]$" e "$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$" querem dizer
"empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela".

A definição de determinante em $\mathbb{R}^3$ – como conta – é:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_4 + u_3v_4w_5 \\ -u_3v_2w_1 - u_4v_3w_2 - u_5v_4w_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 \\ -u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 \end{pmatrix}$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{\mathbf{i}} = \overrightarrow{(1,0,0)} \qquad \vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{(0,1,0)} \qquad \vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Exercício: calcule
a) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}]$
b) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{j}}]$
c) $[\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{k}}]$
d) $[\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{i}}]$
e) $[\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}]$
f) $[\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}}]$
g) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}}]$
g) $[2\vec{\mathbf{i}},3\vec{\mathbf{j}},4\vec{\mathbf{k}}]$
h) $[a\vec{\mathbf{i}},b\vec{\mathbf{j}},c\vec{\mathbf{k}}]$
i) $[a\vec{\mathbf{i}}+b\vec{\mathbf{j}}+c\vec{\mathbf{k}}, d\vec{\mathbf{j}}+e\vec{\mathbf{k}}, f\vec{\mathbf{k}}]$
j) $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{i}}+c\vec{\mathbf{j}}, d\vec{\mathbf{i}}+e\vec{\mathbf{j}}+f\vec{\mathbf{k}}]$

Determinantes em $\mathbb{R}^3$ (2)

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede áreas, que são "base vezes altura", e que a gente pode deslizar um lado ($\vec{v}$) do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ "numa direço paralela a $\vec{u}$", sem alterar nem a "base" nem a "altura"...
Algebricamente: $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u}]$.
E deslizando o $\vec{u}$, temos $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u} + a\vec{v}, \vec{v}]$.

Em $\mathbb{R}^3$ podemos pensar que o determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — vezes a altura.
Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais entre si então a "área da base" é $||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$, e a "altura" é $||\vec{w}||$.

(Obs: em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = ad + be + cf$, $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$,
$\vec{u} \perp \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$.)

Propriedades mais importantes dos determinantes em $\mathbb{R}^3$:
$[a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u} + b\vec{w}, \vec{w}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}]$

Quase todas as idéias sobre determinantes em $\mathbb{R}^3$ que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores $\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{v}' = b\vec{v}$, $\vec{w}' = c\vec{w}$ construídos a partir dos anteriores; estes $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ e $\vec{w}'$ são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores $\vec{u}'' = \vec{u}'$, $\vec{v}'' = \vec{v}' + d\vec{u}'$ e $\vec{w}' = \vec{w}' + e\vec{u}' + f\vec{v}'$.

Exercício importantíssimo (encontrar coeficientes):

a) Encontre a, b, c tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 2x + 3y + 4z$

b) Encontre a, b, c, d tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} + d = 2x + 3y + 4z + 5$

c) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$

d) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$

e) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$

O produto cruzado ($\times$) em $\mathbb{R}^3$

O "produto cruzado" (ou "produto vetorial") $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como se ele fosse "uma parte da conta do determinante": $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
Exercício: verifique que no item (e) acima temos
$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(\vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1)}$.

Idéia importantíssima:

1) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $\vec{u} \times \vec{v} = \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:

Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta "algébrica" dada pela fórmula lá no alto da página.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3,0,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,4,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{(0,3,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3,3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,0,0)}$

Alguns usos do '×'

1) $||\vec{u} \times \vec{v}|| = \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$
2) $\vec{u} \times \vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
3) $\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(0,0,0)}$ se e só se $\mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, ou seja, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (i.e., paralelos).
4) Digamos que
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então r e r' são reversas se e só se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.
(Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ então r e r' são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).
5) Pra testar se quatro pontos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ são coplanares,
encontre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tais que $A + \vec{u} = B$, $A + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = D$;
temos $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se e só se A, B, C, D forem coplanares.
6) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então: $d(r, r') = \underbrace{\underbrace{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}_{\text{volume}} \,/\, \underbrace{\mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{área da base}}}_{\text{altura}}$.
7) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Como a gente encontra uma reta s que corte r e r' e seja ortogonal a ambas?
Sejam $C_t = A + t\vec{u}$ e $D_{t'} = B + t'\vec{v}$.
Queremos que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \overrightarrow{AB}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
o que dá um sistema que nos permite encontrar t e t' com poucas contas...
Sabendo t e t' sabemos C_t e $D_{t'}$, e a reta s passa por C_t e $D_{t'}$.

Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da Ana Isabel! Yaaaaay! =) =) =)