

Geometria Analítica  
 PURO-UFF - 2017.2  
 P1 - 22/nov/2017 - Eduardo Ochs  
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.  
 Diagramas muito ambíguos serão interpretados errado.  
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 1.0)** Prove que

- a) **(0.2 pts)** se  $\vec{v} \perp \vec{w}$  então  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ ,  
 b) **(0.3 pts)**  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$  é falso em geral.  
 c) **(0.5 pts)** se  $k < 0$  então  $\cos(\text{ang}(k\vec{v}, \vec{w})) = -\cos(\text{ang}(\vec{v}, \vec{w}))$ .  
 Dica:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .

2) **(Total: 2.0)** Sejam

$$\begin{aligned} r_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2\}, \\ r &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1\}, \\ S_0 &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, r_0) = 1\}, \\ S &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, r) = 1\}. \end{aligned}$$

- a) **(0.1 pts)** Represente graficamente  $r_0$  e  $S_0$ .  
 b) **(0.4 pts)** Dê as coordenadas de um ponto de  $S$ .  
 c) **(0.5 pts)** O conjunto  $S$  é a união de duas retas,  $S = r_1 \cup r_2$ .  
 Represente graficamente  $r, r_1, r_2$ .  
 d) **(1.0 pts)** Dê equações — ou parametrizações — para  $r_1$  e  $r_2$ .

3) **(Total: 1.5)** Sejam  $A = (0, 1)$ ,  $B = (3, 1)$  e  $C = (5, 3)$ .  
 Qual é o ângulo mais agudo do triângulo  $\triangle ABC$ ?

4) **(Total: 1.5)** Vamos definir as “coordenadas  $ab$ ” da seguinte forma:  $(a, b)_\Sigma = (0, 2) + a\overrightarrow{(2, -1)} + b\overrightarrow{(0, 1)}$ .

- a) **(0.3 pts)** Represente graficamente  $(0, 0)_\Sigma$ ,  $(1, 0)_\Sigma$ ,  $(2, 0)_\Sigma$ ,  $(0, 1)_\Sigma$ ,  $(1, 1)_\Sigma$ ,  $(2, 1)_\Sigma$ ,  $(0, 2)_\Sigma$ ,  $(1, 2)_\Sigma$  e  $(2, 2)_\Sigma$ .  
 b) **(0.6 pts)** Dê a equação da reta que contém  $(0, 0)_\Sigma$ ,  $(1, 0)_\Sigma$  e  $(2, 0)_\Sigma$ .  
 c) **(0.6 pts)** Dê a equação da reta que contém  $(0, 1)_\Sigma$ ,  $(1, 1)_\Sigma$  e  $(2, 1)_\Sigma$ .

5) **(Total: 2.0)** Sejam  $A = (0, 1)$ ,  $B = (0, 4)$ ,  $C = (2, 0)$ .

- a) **(0.2 pts)** Calcule  $\text{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  (a área de um paralelogramo).  
 b) **(0.3 pts)** Calcule  $\text{área}(\triangle ABC)$  (a área de um triângulo).  
 c) **(1.5 pts)** Encontre uma fórmula para  $\text{área}(\triangle(x, y)BC)$  e teste a sua fórmula em pelo menos três pontos para os quais essa área seja fácil de calcular no olhômetro. Dica: teste-a usando pontos que estão tanto abaixo quanto acima da reta que contém  $B$  e  $C$ .

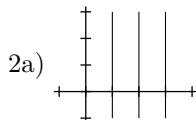
6) **(Total: 2.0)** Sejam  $C$  o círculo de centro  $(0, 0)$  e raio 2 e  $C'$  o círculo de centro  $(2, 2)$  e raio 2. Encontre os dois pontos  $I_1, I_2 \in C \cap C'$  usando o método de subtrair as equações dos dois círculos. Obs: com os círculos nestas posições as contas são bem simples — o importante é você deixar elas claras e nomear os objetos que você construir.

**Mini-gabarito** (não revisado):

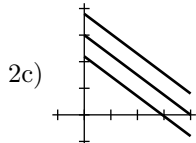
1a) Se  $\vec{v} \perp \vec{w}$  então  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ,  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$   
 $= \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ .

1b)  $\|(\vec{2}, 0) + (\vec{3}, 0)\|^2 = 25$ ,  $\|(\vec{2}, 0)\|^2 + \|(\vec{3}, 0)\|^2 = 4 + 9 = 13$ .

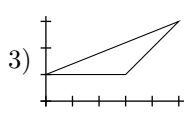
1c)



2b)  $r$  passa por  $(0, 3)$  e tem  $m = -\frac{3}{4}$ ;  $\sqrt{1 + m^2} = \frac{5}{4}$ ; ponto:  $(0, 3 + \frac{4}{5}) = (0, 3.8)$ .



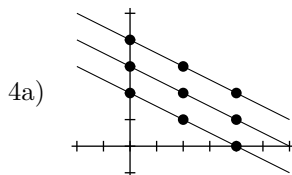
2d)  $y = 3.8 - \frac{3}{4}x$ ,  $y = 2.2 - \frac{3}{4}x$ .



$$\cos \text{ang}(B\hat{A}C) = \frac{(\vec{3}, 0) \cdot (\vec{5}, 2)}{\|(\vec{3}, 0)\| \|(\vec{5}, 2)\|} = \frac{15}{3\sqrt{29}}$$

$$\cos \text{ang}(A\hat{C}B) = \frac{(-5, -2) \cdot (-2, -2)}{\|(-5, -2)\| \|(-2, -2)\|} = \frac{14}{\sqrt{29}\sqrt{8}}$$

$\cos \text{ang}(B\hat{A}C) > \cos \text{ang}(A\hat{C}B)$  portanto  $B\hat{A}C$  é mais agudo que  $A\hat{C}B$ .



4b)  $y = 2 - \frac{x}{2}$

4c)  $y = 3 - \frac{x}{2}$

5a)  $\text{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{área}(\overrightarrow{(0, 3)}, \overrightarrow{(2, -1)}) = |(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})| = |-6| = 6$

5b)  $\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \text{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3$

5c)  $\text{área}(\Delta(x, y)BC) = \frac{1}{2} \text{área}(\overrightarrow{(x, y)B}, \overrightarrow{(x, y)C}) = \frac{1}{2} \text{área}(\overrightarrow{(-x, 4-y)}, \overrightarrow{(2-x, -y)})$   
 $= \frac{1}{2} |(\begin{vmatrix} -x & 4-y \\ 2-x & -y \end{vmatrix})| = \frac{1}{2} |xy - (4-y)(2-x)| = \frac{1}{2} |xy - 8 + 4x + 2y - xy| = \frac{1}{2} |4x + 2y - 8|$   
 $= |2x + y - 4|$

$\text{área}(\Delta(0, 1)BC) = 3$

$\text{área}(\Delta(2, 0)BC) = 0$

$\text{área}(\Delta(0, 4)BC) = 0$

6)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ ,

$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0\}$   
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0\}$

$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 4y = 8\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x\}$

As soluções de  $x^2 + (2-x)^2 - 4 = 0$  são  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ , daí  $(x_1, y_1) = (0, 2)$  e  $(x_2, y_2) = (2, 0)$ .