Geometria Analítica
PURO-UFF - 2017.2
VS - 18/dez/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Lembre que uma equação de cônica é uma equação da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; $4 + (x + y)(x - y) = 5y$ não é uma equação de cônica mas é equivalente a uma: $x^2 - y^2 - 5y + 4 = 0$. E o truque pra gente se livrar das duas raízes quadradas em $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$ ou $\sqrt{A} - \sqrt{B} = C$ é:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{A} + \sqrt{B} = C & \Rightarrow & C^2(C^2 - 2(A + B)) + (A - B)^2 = 0 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} = C & \Rightarrow & C^2(C^2 - 2(A + B)) + (A - B)^2 = 0 \end{array}$$

1) **(Total: 3.5)** Sejam $A = (0, 2, 2)$, $B = (3, 3, 0)$, $C = (4, 0, 4)$, $D = (0, 4, 2)$.
a) **(0.5 pts)** Seja π o plano que contém A, B e C. Dê a equação de π.
b) **(0.5 pts)** Seja E o ponto de π mais próximo de D. Dê as coordenadas de E.
c) **(0.5 pts)** Seja r uma reta ortogonal a π que contém A. Dê uma parametrização para r.
d) **(0.5 pts)** Seja F o ponto de r mais próximo de D. Dê as coordenadas de F.
e) **(0.5 pts)** Teste se o seu ponto E está correto. Dica: inclua uma explicação em português.
f) **(0.5 pts)** Teste se o seu ponto F está correto. Dica: inclua uma explicação em português.
g) **(0.5 pts)** Calcule $d(E, \pi)$.

2) **(Total: 1.0)** Sejam $P_1 = (6, 6)$, $P_2 = (3, 4)$, $P_3 = (9, 4)$, $P_4 = (6, 2)$. Dê a equação da elipse que contém P_1, P_2, P_3, P_4.

3) **(Total: 4.0)** Sejam $F(x, y) = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(1,3)}} \overrightarrow{(x, y)}$, $A = (0, 2)$, $B = (4, 0)$, r a reta que passa por A e B, e $G(x, y)$ o ponto de r mais próximo do ponto (x, y).
a) **(1.0 pts)** Encontre $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ para os quais isto valha para todo $x, y \in \mathbb{R}$: $F(x, y) = \overrightarrow{(ax + by + c, dx + ey + f)}$.
b) **(3.0 pts)** Encontre $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ para os quais isto valha para todo $x, y \in \mathbb{R}$: $G(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$.
Dica: se você não souber encontrar as soluções direto use o método do chutar-e-testar.

4) **(Total: 1.5)** Sejam $A = (0, 1)$ e $B = (3, 0)$.
a) **(0.5 pts)** Encontre três pontos C_1, C_2, C_3 diferentes tais que $\text{área}(\Delta ABC_1) = \text{área}(\Delta ABC_2) = \text{área}(\Delta ABC_3) = 10$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto $\{\, C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{área}(\Delta ABC_3) = 10 \,\}$.

Mini-gabarito (não revisado):

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3,1,-2)}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(4,-2,2)}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-2,-14,-10)}$; seja $\vec{n} = \overrightarrow{(1,7,5)}$.
1a) $\pi = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1x + 7y + 5z = 24 \,\}$
1b) Sejam $r' = \{\, D + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ e $E \in \pi \cap r'$; $E = (-14/75, 202/75, 48/75)$.
1c) $r = \{\, A + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \,\} = \{\, (0,2,2) + t\overrightarrow{(1,7,5)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
1d) $F = A + \mathrm{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{AD} = (0,4,2)$
1e) $E \in \pi \Rightarrow$ sim; $\overrightarrow{ED} \perp \pi \Rightarrow$ sim (basta checar $\overrightarrow{ED} // \vec{n}$, i.e., $\overrightarrow{ED} \times \vec{n} = \overrightarrow{0}$)
1f) $F \in r \Rightarrow$ sim; $\overrightarrow{FD} \perp r \Rightarrow$ sim.
1g) $E \in \pi \Rightarrow d(E, \pi) = 0$.

2) Centro $(6,4)$, equação $(\frac{x-6}{3})^2 + (\frac{y-4}{2})^2 = 1$.

3a) $F(x,y) = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(1,3)}} \overrightarrow{(x,y)} = \frac{\overrightarrow{(1,3)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}}{\overrightarrow{(1,3)} \cdot \overrightarrow{(1,3)}} \overrightarrow{(1,3)} = \frac{x+3y}{10} \overrightarrow{(1,3)} = (x+3y)\overrightarrow{(\frac{1}{10}, \frac{3}{10})} = \overrightarrow{(\frac{x+3y}{10}, \frac{3x+9y}{10})} = \overrightarrow{(\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y + 0, \frac{3}{10}x + \frac{9}{10}y + 0)}$
3b) $G(x,y) = A + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{A(x,y)} = (0,2) + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(4,-2)}} \overrightarrow{(x, y-2)}$
$= (0,2) + \frac{\overrightarrow{(4,-2)} \cdot \overrightarrow{(x,y-2)}}{\overrightarrow{(4,-2)} \cdot \overrightarrow{(4,-2)}} \overrightarrow{(4,-2)} = (0,2) + (4x + 4 - 2y)\overrightarrow{(\frac{4}{20}, \frac{-2}{20})}$
$= (\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + 2 - \frac{2}{5})$

4) Alguns pontos: $(1,4)$, $(4,3)$, $(-1,-2)$, $(2,-3)$.