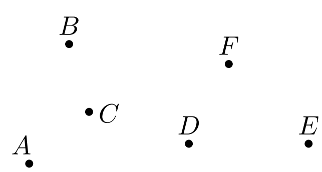
Geometria Analítica
PURO-UFF - 2018.1
P1 - 11/jun/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (1, 4)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 1)$, r uma reta que passa por A e B, s uma reta ortogonal a r que passa por C, r' uma reta paralela a r que passa por C, D a interseção de r e s.
a) **(0.2 pts)** Se $r = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \,\}$, quem são a e b?
b) **(0.4 pts)** Se $s = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x + b' \,\}$, quem são a' e b'?
c) **(0.4 pts)** Se $r' = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a''x + b'' \,\}$, quem são a'' e b''?
d) **(1.0 pts)** Dê as coordenadas do ponto D.

2) **(Total: 2.0)** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 2)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 4)}$.
a) **(0.5 pts)** Represente graficamente os ângulos $\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ e $\mathrm{ang}(-\vec{u}, \vec{v})$.
b) **(0.5 pts)** Calcule $\cos(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v}))$ e $\cos(\mathrm{ang}(-\vec{u}, \vec{v}))$.
c) **(1.0 pts)** Estime os ângulos $\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ e $\mathrm{ang}(-\vec{u}, \vec{v})$ usando olhômetro e comparação com ângulos conhecidos. *Justifique.*

3) **(Total: 2.0)** Sejam A, B, C, D, E, F os pontos abaixo; note que você não tem as coordenadas deles. Represente graficamente:
a) **(0.5 pts)** $P = A + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$
b) **(0.5 pts)** $Q = B + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BA}} \overrightarrow{BC}$
c) **(0.1 pts)** $R = D + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
d) **(0.4 pts)** $S = D - \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE})$
e) **(0.5 pts)** $T = (E + 2\overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{DE})$
Dicas: amplie o desenho em outra folha;
nomeie todos os objetos intermediários.



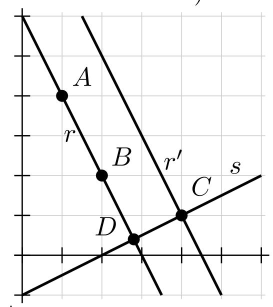
4) **(Total: 2.0)** Seja $C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - 20 = 0 \,\}$.
a) **(1.2 pts)** Reescreva C na forma $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \,\}$.
b) **(0.8 pts)** Dê as coordenadas dos 4 pontos óbvios de C.

5) **(Total: 1.0)** Seja $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não-nulos e ortogonais entre si. Demonstre que para qualquer vetor $\vec{w}$ temos $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} \perp \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}$.

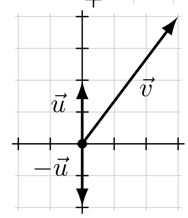
6) **(Total: 1.0)** Sejam $A = (0, 3)$ e $B = (3, 0)$, Encontre um ponto C tal que $\mathsf{Área}(\Delta ABC) = 5$.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

1)
a) $r = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 4\,\}$
b) $s = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x - 1\,\}$
c) $r' = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 9\,\}$
d) $D = (2.8, 0.4)$



2)
a) à direita.
b) $\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{4}{5}$,
$\cos(\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v})) = -\frac{4}{5}$.
c) $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \approx 40°$,
$\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v}) \approx 140°$.

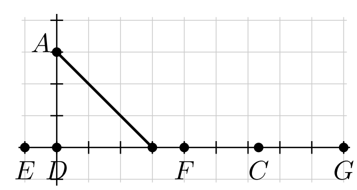


3) (Ainda não deu pra eu fazer os desenhos no computador)

4a)
$$\begin{aligned} C &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - 20 = 0\,\} \\ &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 - 1 + (y-1.5)^2 - 2.25 = 20\,\} \\ &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-1.5)^2 = 23.25\,\} \\ &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-1.5)^2 = \sqrt{23.25}^2\,\} \end{aligned}$$
4b) Centro $(-1, 1.5)$; pontos $(-1 \pm \sqrt{23.25}, 1.5)$, $(-1, 1.5 \pm \sqrt{23.25})$.

5) $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} \cdot \text{Pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} \cdot \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} = (\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}})(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{v}\cdot\vec{v}})(0) = 0$

6) Os livros resolveriam esse problema encontrando uma fórmula, mas deixa eu mostrar como a gente resolveria isso por uma espécie de "chutar e testar"...
Área$(\Delta ABD) = \frac{3\cdot 3}{2} = 4.5$,
Área$(\Delta ABE) = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$,
Área$(\Delta ABF) = \frac{1\cdot 3}{2} = 1.5$,
e se $G = (3 + b, 0)$, $b \geq 0$,
Área$(\Delta ABG) = \frac{b\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}b$.
Solução: $b = \frac{2}{3}5$, $C = (3 + \frac{10}{3})$.



B