Áreas de retângulos e paralelogramos em $\mathbb{R}^3$

Notação: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ então $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Quando $\vec{u}\perp\vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$.

Exercícios

1) Visualize os paralelogramos abaixo e calcule a área de cada um deles. Em alguns casos você vai ter que usar truques pouco óbvios; em outros casos talvez você vá ter que responder "não sei".

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(2,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)})$
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(0,3,0)}, \overrightarrow{(0,0,-4)})$
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(0,5,0)})$
d) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(4,3,0)})$
e) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(3,4,0)})$
f) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}, \overrightarrow{(-3,4,0)})$
g) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}, \overrightarrow{(4,3,0)})$
h) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}, \overrightarrow{(3,4,0)})$
i) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(0,4,3)})$
j) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,4)})$
k) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)}, \overrightarrow{(0,0,5)})$

Podemos calcular áreas de paralelogramos em $\mathbb{R}^3$ usando um truque de "deslizamento" parecido com o que usamos para áreas e determinantes em $\mathbb{R}^2$. Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = \mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ — e repare que $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ é a área de um retângulo e $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ é a área de um paralelogramo.

2) Use o truque acima em cada um dos itens abaixo. Visualize o paralelogramo $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ e o retângulo $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ associado a ele, e calcule as áreas.

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \overrightarrow{(4,0,0)})$
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
d) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \frac{1}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
e) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)})$
f) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}, \overrightarrow{(0,0,1)})$
g) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)} + \overrightarrow{(0,0,1)}, \overrightarrow{(0,0,1)})$
h) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)} + 2\overrightarrow{(0,0,1)}, \overrightarrow{(0,0,1)})$
i) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)} + 3\overrightarrow{(0,0,1)}, \overrightarrow{(0,0,1)})$

3) Faça o mesmo nos casos abaixo, mas agora você vai ter que escolher os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ adequados você mesmo.

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)}, \overrightarrow{(0,3,0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)

4) Demonstre que se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $a, k \in \mathbb{R}$ então:

$$\mathsf{Área}(\vec{u}, a(\vec{v}+k\vec{u})) = |a|\,\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u}).$$

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

Obs: adaptado da aula de 4/jul/2016:
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf

Sejam:
$r_1 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_2 = \{\, (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_3 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
Quais destas retas se interceptam?
Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas?
Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \,\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \,\}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \,\}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$ (x e y variam, $z = 0$)
$\pi_{xz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$ (x e z variam, $y = 0$)
$\pi_{yz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \,\}$ (y e z variam, $x = 0$)
Notação (temporária):
$[\text{equação}] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \,\}$
Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:
$\pi_1 = [x = 1]$, $\quad \pi_8 = [y = x]$,
$\pi_2 = [y = 1]$, $\quad \pi_9 = [y = 2x]$,
$\pi_3 = [z = 1]$, $\quad \pi_{10} = [z = x]$,
$\pi_4 = [z = 4]$, $\quad \pi_{11} = [z = x + 1]$,
$\pi_5 = [z = 2]$,
Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$ (2)

Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...
Sejam

$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\}$,

$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\}$.

Calcule e visualize:
$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,
e resolva:
$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ ("z em função de x e y"),
$[y = ax + bz + c]$ ("y em função de x e z"),
$[x = ay + bz + c]$ ("x em função de y e z").

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de x e y:

$$\begin{array}{c} F(x,y) \\ = x+2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar
$[z = x + y]$,
$[z = x + y + 2]$,
$[z = x - y + 4]$.

Sejam:
$\pi_{12} = [z = x + y]$,
$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$
Exercício: encontre pontos de $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ tais que
a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 3$; depois
d) encontre uma parametrização para r,
e) encontre uma parametrização para r na qual $t = x$.

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em $\mathbb{R}^3$:
$[y = ax + b, z = cx + d]$ ("y e z em função de x"),
$[x = ay + b, z = cy + d]$ ("x e z em função de y"),
$[x = az + b, y = cz + d]$ ("x e y em função de z").
Encontre uma descrição da forma $[y = ax + b, z = cx + d]$ para a r acima.
(Dica: use o "chutar e testar"!)

Determinantes em $\mathbb{R}^3$

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede *áreas* (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ac - bd \qquad \left|\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = bd - ac = -\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):
$[\vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2)}, \overrightarrow{(v_1, v_2)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^2$)
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2, u_3)}, \overrightarrow{(v_1, v_2, v_3)}, \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^3$)
"$[\vec{u}, \vec{v}]$" e "$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$" querem dizer
"empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela".

A definição de determinante em $\mathbb{R}^3$ – como conta – é:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_4 + u_3v_4w_5 \\ -u_3v_2w_1 - u_4v_3w_2 - u_5v_4w_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 \\ -u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 \end{pmatrix}$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{\mathbf{i}} = \overrightarrow{(1,0,0)} \qquad \vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{(0,1,0)} \qquad \vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Exercício: calcule
a) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}]$
b) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}]$
c) $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}]$
d) $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}]$
e) $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}]$
f) $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
g) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
g) $[2\vec{\mathbf{i}}, 3\vec{\mathbf{j}}, 4\vec{\mathbf{k}}]$
h) $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{j}}, c\vec{\mathbf{k}}]$
i) $[a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, d\vec{\mathbf{j}} + e\vec{\mathbf{k}}, f\vec{\mathbf{k}}]$
j) $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{i}} + c\vec{\mathbf{j}}, d\vec{\mathbf{i}} + e\vec{\mathbf{j}} + f\vec{\mathbf{k}}]$

Determinantes em $\mathbb{R}^3$ (2)

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede áreas, que são "base vezes altura", e que a gente pode deslizar um lado ($\vec{v}$) do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ "numa direço paralela a $\vec{u}$", sem alterar nem a "base" nem a "altura"...
Algebricamente: $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u}]$.
E deslizando o $\vec{u}$, temos $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u} + a\vec{v}, \vec{v}]$.

Em $\mathbb{R}^3$ podemos pensar que o determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — vezes a altura.
Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais entre si então a "área da base" é $||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$, e a "altura" é $||\vec{w}||$.

(Obs: em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = ad + be + cf$, $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$,
$\vec{u} \perp \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$.)

Propriedades mais importantes dos determinantes em $\mathbb{R}^3$:
$[a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u} + b\vec{w}, \vec{w}]$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}]$

Quase todas as idéias sobre determinantes em $\mathbb{R}^3$ que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores $\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{v}' = b\vec{v}$, $\vec{w}' = c\vec{w}$ construídos a partir dos anteriores; estes $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ e $\vec{w}'$ são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores $\vec{u}'' = \vec{u}'$, $\vec{v}'' = \vec{v}' + d\vec{u}'$ e $\vec{w}' = \vec{w}' + e\vec{u}' + f\vec{v}'$.

Exercício importantíssimo (encontrar coeficientes):
a) Encontre a, b, c tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 2x + 3y + 4z$
b) Encontre a, b, c, d tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} + d = 2x + 3y + 4z + 5$
c) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$
d) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$
e) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$

O produto cruzado ($\times$) em $\mathbb{R}^3$

O "produto cruzado" (ou "produto vetorial") $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como
se ele fosse "uma parte da conta do determinante": $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
Exercício: verifique que no item (e) acima temos
$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(\vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1)}$.

Idéia importantíssima:

1) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $\vec{u} \times \vec{v} = \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:

Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta "algébrica" dada pela fórmula lá no alto da página.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 0, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 4, 0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$
b) $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 3, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 3, 3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$

Alguns usos do '×'

1) $||\vec{u}\times\vec{v}|| = \mathsf{área}(\vec{u},\vec{v})$
2) $\vec{u}\times\vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
3) $\vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(0,0,0)}$ se e só se $\mathsf{área}(\vec{u},\vec{v}) = 0$, ou seja, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (i.e., paralelos).
4) Digamos que
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então r e r' são reversas se e só se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$.
(Se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ então r e r' são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).
5) Pra testar se quatro pontos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ são coplanares,
encontre $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tais que $A+\vec{u} = B$, $A+\vec{v} = C$, $A+\vec{w} = D$;
temos $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ se e só se A, B, C, D forem coplanares.
6) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então: $d(r,r') = \underbrace{\underbrace{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}_{\text{volume}} / \underbrace{\mathsf{área}(\vec{u},\vec{v})}_{\text{área da base}}}_{\text{altura}}.$
7) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Como a gente encontra uma reta s que corte r e r' e seja ortogonal a ambas?
Sejam $C_t = A + t\vec{u}$ e $D_{t'} = B + t'\vec{v}$.
Queremos que $\overrightarrow{C_tD_{t'}}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_tD_{t'}}$ seja paralelo a $\vec{u}\times\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_tD_{t'}} \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \overrightarrow{AB}) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
o que dá um sistema que nos permite encontrar t e t' com poucas contas...
Sabendo t e t' sabemos C_t e $D_{t'}$, e a reta s passa por C_t e $D_{t'}$.

Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da Ana Isabel! Yaaaaay! =) =) =)