

### Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

Sejam:

$$r_1 = \{ (2, 2, 0) + t\overrightarrow{(0, -1, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_2 = \{ (2, 2, 1) + t\overrightarrow{(0, -1, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_3 = \{ (2, 2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_4 = \{ (0, 2, 1) + t\overrightarrow{(1, 0, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_4 = \{ (1, 2, 1) + t\overrightarrow{(2, 0, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Quais destas retas se interceptam?

Em que pontos? Em que 't's?

Quais destas retas são paralelas?

Quais destas retas são coincidentes?

A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – “retas reversas”.

As retas acima são *parametrizadas*.

O que é uma *equação de reta* em  $\mathbb{R}^3$ ?

$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \}$  é uma reta em  $\mathbb{R}^2$ ;

$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \}$  é um *plano* em  $\mathbb{R}^3$ ...

Exercício: encontre

três pontos não colineares de  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$ ,

três pontos não colineares de  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \}$ ,

três pontos não colineares de  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \}$ ,

três pontos não colineares de  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \}$ ,

três pontos não colineares de  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \}$ ,

e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:

$$\pi_{xy} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \} \text{ (} x \text{ e } y \text{ variam, } z = 0 \text{)}$$

$$\pi_{xz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \} \text{ (} x \text{ e } z \text{ variam, } y = 0 \text{)}$$

$$\pi_{yz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \} \text{ (} y \text{ e } z \text{ variam, } x = 0 \text{)}$$

Notação (temporária):

$$[\text{equação}] = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \}$$

Obs:  $\pi_{xy} = [z = 0]$ ,  $\pi_{xz} = [y = 0]$ ,  $\pi_{yz} = [x = 0]$ .

Exercício: visualize:

$$\pi_1 = [x = 1], \quad \pi_8 = [y = x],$$

$$\pi_2 = [y = 1], \quad \pi_9 = [y = 2x],$$

$$\pi_3 = [z = 1], \quad \pi_{10} = [z = x],$$

$$\pi_4 = [z = 4], \quad \pi_{11} = [z = x + 1],$$

$$\pi_5 = [z = 2],$$

Quais deles planos são paralelos?

Quais deles planos se cortam? Onde?

**Retas e planos em  $\mathbb{R}^3$  (2)**

Dá pra parametrizar planos em  $\mathbb{R}^3$ ...

Sejam

$$\pi_6 = \{ \underbrace{(2, 2, 0) + a\overrightarrow{(1, 0, 0)} + b\overrightarrow{(0, 1, 0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$\pi_7 = \{ \underbrace{(3, 2, 1) + a\overrightarrow{(1, 0, 0)} + b\overrightarrow{(0, 1, 0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Calcule e visualize:

$$(0, 0)_{\Sigma_6}, (1, 0)_{\Sigma_6}, (0, 1)_{\Sigma_6}, (1, 1)_{\Sigma_6},$$

$$(0, 0)_{\Sigma_7}, (1, 0)_{\Sigma_7}, (0, 1)_{\Sigma_7}, (1, 1)_{\Sigma_7},$$

e resolva:

$$(a, b)_{\Sigma_6} = (0, 3, 0),$$

$$(a, b)_{\Sigma_7} = (2, 4, 1),$$

$$(a, b)_{\Sigma_7} = (2, 4, 0).$$

Nossos três modos preferidos de descrever planos em  $\mathbb{R}^3$  (por equações) são:

$$[z = ax + by + c] \text{ (“}z\text{ em função de }x\text{ e }y\text{”),}$$

$$[y = ax + bz + c] \text{ (“}y\text{ em função de }x\text{ e }z\text{”),}$$

$$[x = ay + bz + c] \text{ (“}x\text{ em função de }y\text{ e }z\text{”).}$$

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de  $x$  e  $y$ :

$$\begin{array}{r} F(x,y) \\ = x+2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar

$$[z = x + y],$$

$$[z = x + y + 2],$$

$$[z = x - y + 4].$$

Sejam:

$$\pi_{12} = [z = x + y],$$

$$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$$

Exercício: encontre pontos de  $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$  tais que

a)  $x = 0$ , b)  $x = 1$ , c)  $x = 3$ ; depois

d) encontre uma parametrização para  $r$ ,

e) encontre uma parametrização para  $r$  na qual  $t = x$ .

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em  $\mathbb{R}^3$ :

$$[y = ax + b, z = cx + d] \text{ (“}y\text{ e }z\text{ em função de }x\text{”),}$$

$$[x = ay + b, z = cy + d] \text{ (“}x\text{ e }z\text{ em função de }y\text{”),}$$

$$[x = az + b, y = cz + d] \text{ (“}x\text{ e }y\text{ em função de }z\text{”).}$$

Encontre uma descrição da forma  $[y = ax + b, z = cx + d]$  para a  $r$  acima.

(Dica: use o “chutar e testar”!)

### Áreas de retângulos e paralelogramos em $\mathbb{R}^3$

Notação: se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$  então  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$  é a área do paralelogramo gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Quando  $\vec{u} \perp \vec{v}$  a área pode ser calculada de forma bem fácil:  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ .

#### Exercícios

1) Visualize os paralelogramos abaixo e calcule a área de cada um deles. Em alguns casos você vai ter que usar truques pouco óbvios; em outros casos talvez você vá ter que responder “não sei”.

- |   |  |
|---|--|
| a) $\text{Área}(\overrightarrow{(2, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)})$  | g) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(4, 3, 0)})$ |
| b) $\text{Área}(\overrightarrow{(0, 3, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, -4)})$ | h) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(3, 4, 0)})$ |
| c) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 5, 0)})$  | i) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 4, 3)})$ |
| d) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(4, 3, 0)})$  | j) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 4)})$ |
| e) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(3, 4, 0)})$  | k) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 5)})$ |
| f) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(-3, 4, 0)})$ |  |

Podemos calcular áreas de paralelogramos em  $\mathbb{R}^3$  usando um truque de “deslizamento” parecido com o que usamos para áreas e determinantes em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\vec{u} \perp \vec{v}$  e  $k \in \mathbb{R}$ , então  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$  — e repare que  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$  é a área de um retângulo e  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$  é a área de um paralelogramo.

2) Use o truque acima em cada um dos itens abaixo. Visualize o paralelogramo  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$  e o retângulo  $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$  associado a ele, e calcule as áreas.

- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{1}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + \overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + 2\overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + 3\overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$

3) Faça o mesmo nos casos abaixo, mas agora você vai ter que escolher os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  adequados você mesmo.

- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \overrightarrow{(4, 0, 0)})$  (mudar)
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$  (mudar)
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$  (mudar)

4) Demonstre que se  $\vec{u} \perp \vec{v}$  e  $a, k \in \mathbb{R}$  então:

$$\text{Área}(\vec{u}, a(\vec{v} + k\vec{u})) = |a| \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u}).$$

### Determinantes em $\mathbb{R}^3$

Lembre que o determinante em  $\mathbb{R}^2$  mede áreas (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bd - ac = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):

$$[\vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2)}, \overrightarrow{(v_1, v_2)}] := \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (\text{em } \mathbb{R}^2)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2, u_3)}, \overrightarrow{(v_1, v_2, v_3)}, \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}] := \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (\text{em } \mathbb{R}^3)$$

“ $[\vec{u}, \vec{v}]$ ” e “ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ” querem dizer

“empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela”.

A definição de determinante em  $\mathbb{R}^3$  – como conta – é:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_4 v_3 w_2 - u_5 v_4 w_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 \end{pmatrix}$$

O determinante  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  em  $\mathbb{R}^3$  mede o volume do “paralelepído torto” (ou, pra encurtar: do “cubo torto”) gerado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , mas às vezes ele responde números negativos... esta fórmula é importantíssima:

$$\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{i} = \overrightarrow{(1, 0, 0)} \quad \vec{j} = \overrightarrow{(0, 1, 0)} \quad \vec{k} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$$

Muita gente aprende a calcular o ‘ $\times$ ’ por essa fórmula aqui:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} \\ = \overrightarrow{(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)}$$

Repare que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

**Exercício:** calcule

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| a) $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ | g) $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}]$                                     |
| b) $[\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}]$ | h) $[2\vec{i}, 3\vec{j}, 4\vec{k}]$                                  |
| c) $[\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}]$ | i) $[a\vec{i}, b\vec{j}, c\vec{k}]$                                  |
| d) $[\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}]$ | j) $[a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, d\vec{j} + e\vec{k}, f\vec{k}]$ |
| e) $[\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}]$ | k) $[a\vec{i}, b\vec{i} + c\vec{j}, d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}]$ |
| f) $[\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}]$ |  |

### Determinantes em $\mathbb{R}^3$ (2)

Lembre que o determinante em  $\mathbb{R}^2$  mede áreas, que são “base vezes altura”, e que a gente pode deslizar um lado ( $\vec{v}$ ) do paralelogramo gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  “numa direção paralela a  $\vec{u}$ ”, sem alterar nem a “base” nem a “altura”...

Algebricamente, deslizar o  $\vec{v}$  correspondia a  $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u}]$ , e o  $\vec{u}$  ao invés do  $\vec{v}$ , temos  $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u} + a\vec{v}, \vec{v}]$ .

Em  $\mathbb{R}^3$  podemos pensar que o determinante  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  — vezes a altura (mas com sinal). Isso é fácil de entender em três passos. Fixe  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Comece escolhendo um  $\vec{w}$  ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com  $\|\vec{w}\| = 1$ ; nesse caso é bem fácil ver que  $\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ . Agora escolha um  $\vec{w}'$  tal que  $\vec{w}' = k\vec{w}$ ; temos  $\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}') = \text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, k\vec{w}) = |k|\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ . Terceiro passo: escolha um  $\vec{w}''$  que seja o  $\vec{w}'$  anterior deslizado nas direções  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ; temos  $\vec{w}'' = \vec{w}' + a\vec{u} + b\vec{v}$  mas  $\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'') = \text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}') = |k|\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ . Quarto passo: refaça tudo ao contrário — comece com um  $\vec{w}'''$  qualquer, e deslize-o nas direções  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  até você obter um  $\vec{w}'$  ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e encontre um  $k$  (dica:  $k = \|\vec{w}'\|$ ) e um  $\vec{w}$  ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com  $\|\vec{w}\| = 1$  tais que  $\vec{w}' = k\vec{w}$ ...

Note que se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são todos ortogonais entre si então a “área da base” é  $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ , e a “altura” é  $\|\vec{w}\|$ .

(Obs: em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(d, e, f)} = ad + be + cf$ ,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$ ,  $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$ .)

Propriedades mais importantes dos determinantes em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} [a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] &= abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

Quase todas as idéias sobre determinantes em  $\mathbb{R}^3$  que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores  $\vec{u}' = a\vec{u}$ ,  $\vec{v}' = b\vec{v}$ ,  $\vec{w}' = c\vec{w}$  construídos a partir dos anteriores; estes  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  e  $\vec{w}'$  são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores  $\vec{u}'' = \vec{u}'$ ,  $\vec{v}'' = \vec{v}' + d\vec{u}'$  e  $\vec{w}'' = \vec{w}' + e\vec{u}' + f\vec{v}'$ .

**Exercício importantíssimo** (encontrar coeficientes):

- Encontre  $a, b, c$  tais que  $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)} = 2x + 3y + 4z$
- Encontre  $a, b, c, d$  tais que  $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)} + d = 2x + 3y + 4z + 5$
- Encontre  $a, b, c$  tais que  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)}$
- Encontre  $a, b, c$  tais que  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)}$
- Encontre  $a, b, c$  tais que  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}$

### O produto cruzado ( $\times$ ) em $\mathbb{R}^3$

O “produto cruzado” (ou “produto vetorial”)  $\vec{u} \times \vec{v}$  é definido como se ele fosse “uma parte da conta do determinante”:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

Exercício: verifique que no item (e) acima temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(\vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1)}.$$

*Idéia importantíssima:*

1) para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $\|\vec{w}\| = 1$ , então o volume  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  é exatamente a área do paralelogramo gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $\|\vec{w}\| = 1$ , então o volume  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$  é exatamente a área do paralelogramo gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $\|\vec{w}\| = 1$ , então o volume  $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$  é  $c \cdot \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$  (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $\|\vec{w}\| = 1$ , então  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$  é  $c \cdot \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$  (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e  $\|\vec{w}\| = 1$ , então  $\vec{u} \times \vec{v} = \text{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$  (exceto talvez pelo sinal).

#### Exercício:

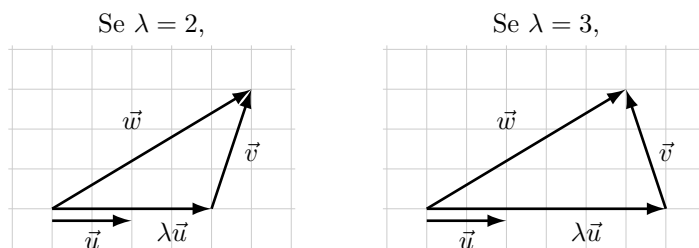
Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para  $\vec{u} \times \vec{v}$  nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta “algébrica” dada pela fórmula lá no alto da página.

a)  $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 0, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, 4, 0)}, \vec{w} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$

b)  $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 3, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, 3, 3)}, \vec{w} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$

### Alguns usos do ‘ $\times$ ’

- 1)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$
- 2)  $\vec{u} \times \vec{v}$  sempre dá um vetor ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$
- 3)  $\vec{u} \times \vec{v} = \langle 0, 0, 0 \rangle$  se e só se  $\text{área}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , ou seja, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares (i.e., paralelos). Note que  $\vec{u} \perp \vec{0}$  e  $\vec{v} \perp \vec{0}$ .



4) Digamos que

$$\begin{aligned} r &= \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}, \\ r' &= \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \}, \\ B &= A + \vec{w}. \end{aligned}$$

Então  $r$  e  $r'$  são reversas se e só se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ .

(Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  então  $r$  e  $r'$  são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).

5) Pra testar se quatro pontos  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$  são coplanares, encontre  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  tais que  $A + \vec{u} = B$ ,  $A + \vec{v} = C$ ,  $A + \vec{w} = D$ ; temos  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  se e só se  $A, B, C, D$  forem coplanares.

6) (Difícil!) Sejam

$$\begin{aligned} r &= \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}, \\ r' &= \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \}, \\ B &= A + \vec{w}. \end{aligned}$$

$$\text{Então: } d(r, r') = \underbrace{\frac{\underbrace{|\underbrace{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}_{\text{volume}}}}{\underbrace{\text{área da base}}_{\text{altura}}}}_{\text{altura}}.$$

7) (Difícil!) Sejam

$$\begin{aligned} r &= \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}, \\ r' &= \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \}, \\ B &= A + \vec{w}. \end{aligned}$$

Como a gente encontra uma reta  $s$  que corte  $r$  e  $r'$  e seja ortogonal a ambas?

Sejam  $C_t = A + t\vec{u}$  e  $D_{t'} = B + t'\vec{v}$ .

Queremos que  $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$  seja ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,

ou seja, que  $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \cdot \vec{u} = 0$  e  $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \cdot \vec{v} = 0$ ,

ou seja, que  $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ,

ou seja, que  $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ,

ou seja, que  $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ,

ou seja, que  $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ,

o que dá um sistema que nos permite encontrar  $t$  e  $t'$  com poucas contas...  
Sabendo  $t$  e  $t'$  sabemos  $C_t$  e  $D_{t'}$ , e a reta  $s$  passa por  $C_t$  e  $D_{t'}$ .

*Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da  
Ana Isabel! Yaaaaay! =) =) =)*