

Cálculo 2  
 PURO-UFF - 2017.2  
 P2 - 11/dez/2017 - Eduardo Ochs  
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.  
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

- 1) (**Total: 2.0**) Seja (\*) a seguinte EDO:  $f'' + 3f' - 18f = 0$ .  
 a) (**0.5 pts**) Expresse (\*) na forma  $(D - a)(D - b)f = 0$ .  
 b) (**0.5 pts**) Encontre as soluções básicas de (\*).  
 c) (**1.0 pts**) Encontre uma solução de (\*) que obedeça  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ .

- 2) (**Total: 2.5**) Seja (\*\*) a seguinte EDO:  $f'' - 6f' + 25f = 0$ .  
 a) (**0.5 pts**) Expresse (\*\*) na forma  $(D - \alpha)(D - \bar{\alpha})f = 0$ .  
 b) (**0.5 pts**) Encontre as soluções básicas de (\*\*).  
 c) (**1.0 pts**) Encontre as soluções básicas reais de (\*\*).  
 d) (**0.5 pts**) Teste uma das soluções que você encontrou no item anterior.

- 3) (**Total: 2.0**) Seja (\*\*\*) a seguinte EDO:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{y^4}$ .  
 a) (**0.5 pts**) Encontre a solução geral de (\*\*\*) por variáveis separáveis.  
 b) (**0.5 pts**) Encontre uma solução de (\*\*\*) que passa pelo ponto (6, 7).  
 c) (**1.0 pts**) Teste a sua solução geral.

- 4) (**Total: 2.0**) Seja (\*\*\*\*) a seguinte EDO:  $(2xy^3) dx + 3(x^2 + 3)y^2 dy = 0$ .  
 a) (**0.5 pts**) Verifique que (\*\*\*\*) é exata.  
 b) (**1.0 pts**) Encontre a solução geral de (\*\*\*\*).  
 c) (**0.5 pts**) Encontre uma solução de (\*\*\*\*) que passa pelo ponto (a, b).

- 5) (**Total: 1.5**) Sejam  $C$  e  $\pi_z$  os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4, y^2 + z^2 \leq x \} \\ \pi_z &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \} \end{aligned}$$

- a) (**0.5 pts**) Represente graficamente  $C \cap \pi_z$ .  
 b) (**1.0 pts**) Calcule o volume de  $C$ .

**Mini-gabarito (nãõ revisado)**

1a)  $(D - 3)(D + 6)f = 0$

1b)  $f_1 = e^{3x}, f_2 = e^{-6x},$

1c) Seja  $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ . Entãõ  $f(0) = \alpha + \beta = 1$  e  $f'(0) = 3\alpha - 6\beta = 0$ ;  $\alpha = 2\beta$ ,  
 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}, f = \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-6x}.$

2a)  $(D - (3 + 4i))(D - \overline{(3 + 4i)})f = 0$

2b)  $f_1 = e^{(3+4i)x}, f_2 = e^{(3-4i)x}$

2c)  $f_3 = e^{3x} \cos 4x, f_4 = e^{3x} \sen 4x$

2d) Sejam  $F = e^{3x}, C = \cos 4x, S = \sen 4x.$

Entãõ  $F' = 3F, C' = -4S, S' = 4C, (FC)' = 3FC - 4FS, (FS)' = 3FS + 4FC.$

Seja  $f = FC$ , Entãõ  $f' = 3FC - 4FS,$

$f'' = 3(FC)' - 4(FS)' = 3(3FC - 4FS) - 4(3FS + 4FC) = -7FC - 24FS,$

$f'' - 6f' + 25f = (-7FC - 24FS) - 6(3FC - 4FS) + 25(FC) = 0.$

3a)  $(x^2 + 3)dx = y^4 dy \Rightarrow \int x^2 + 3 dx = \int y^4 dy \Rightarrow \frac{x^3}{3} + 3x = \frac{y^5}{5} + C$   
 $\Rightarrow y^5 = \frac{5}{3}x^3 + 15x + C' \Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{5}{3}x^3 + 15x + C'}$

3b) Queremos  $x = 6, y = 7, 7 = \sqrt[5]{\frac{5}{3}6^3 + 15 \cdot 6 + C'} = \sqrt[5]{72 + 90 + C'}$

$\Rightarrow 7^5 = 72 + 90 + C' \Rightarrow C' = 7^5 - 72 - 90$

$\Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{5}{3}x^3 + 15x + (7^5 - 72 - 90)}.$

3c) Sejam  $g(x) = \frac{5}{3}x^3 + 15x + C', f(x) = \sqrt[5]{g(x)}$ . Entãõ  $g'(x) = 5x^2 + 15,$

$f'(x) = \frac{1}{5}g(x)^{-4/5}g'(x) = \frac{1}{5}(g(x)^{1/5})^{-4}g'(x) = \frac{1}{5}f(x)^{-4}(5x^2 + 15)$

$= f(x)^{-4}(x^2 + 3);$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{y^4}$  corresponde a  $f'(x) = \frac{x^2+3}{f(x)^4}$ , ou seja,  $f(x)^{-4}(x^2 + 3) = \frac{x^2+3}{f(x)^4}$ . Ok!

4) Sejam  $G(x, y) = 2xy^3, H(x, y) = 3(x^2 + 3)y^2$ . A EDO é  $Gdx + Hdy = 0$ .

4a)  $G_y = 6xy^2, H_x = 6xy^2; G_y = H_x$ , a EDO é exata.

4b) Seja  $F = (x^2 + 3)y^3$ . Entãõ  $F_x = 2xy^3 = G, F_y = (x^2 + 3) \cdot 3y^2 = H;$

as soluções são as curvas de nível da  $F$ , i.e.,  $F(x, y) = C$ .

$(x^2 + 3)y^3 = C \Rightarrow y^3 = \frac{C}{x^2+3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{C}{x^2+3}}$

4c) Quando  $x = a$  e  $y = b$  temos  $b = \sqrt[3]{\frac{C}{a^2+3}} \Rightarrow b^3 = \frac{C}{a^2+3}$

$\Rightarrow C = (a^2 + 3)b^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{(a^2+3)b^3}{x^2+3}}.$

5a) Seja  $f(x) = \sqrt{x}; C \cap \pi_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$

5b) Volume =  $\int_{x=0}^{x=4} \pi f(x)^2 dx; \int \pi f(x)^2 dx = \int \pi x dx = \frac{\pi}{2}x^2;$

Volume =  $\int_{x=0}^{x=4} \pi f(x)^2 dx = \frac{\pi}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=4} = 8\pi.$