Matemática Discreta
PURO-UFF - 2018.2
P1 - 29/out/2018 - Eduardo Ochs
Turma grande (V1, com aulas nas segundas e quartas)
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 4.0)** Seja $(\star)$ a seguinte proposição: todo inteiro ímpar é a soma de um par e um ímpar.
a) **(0.5 pts)** Traduza $(\star)$ para notação matemática.
b) **(3.0 pts)** Demonstre $(\star)$ usando o formato que vimos no curso, com passos numerados começando com "Vamos mostrar que", "Suponha" e "Então".
c) **(0.5 pts)** Traduza a antepenúltima linha começada com "Então" da sua prova do item anterior para a notação com "$\vdash$".

2) **(Total: 1.0)** Mostre que $P \to Q$ é logicamente equivalente a $\neg P \vee Q$ e não é logicamente equivalente a $P \vee \neg Q$.

3) **(Total: 2.0)** Calcule
a) **(0.5 pts)** $\mathcal{P}(\{2, 3, \{2, 3\}\})$,
b) **(1.0 pts)** $\bigcup\{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$,
c) **(0.5 pts)** $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ no caso em que $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$.

4) **(Total: 1.0)** Seja (P, S) o grafo direcionado cuja representação gráfica é $1 \to 2 \to 3 \to 4$. Calcule $\{\, (a, c) \mid a, b, c \in P,\ aSb,\ bSc \,\}$.

5) **(Total: 1.0)** Encontre um contra-exemplo para $a \in Z, b \in Z, a|b \vdash a \leq b$.

6) **(Total: 2.0)** Calcule $\{a \in Z, b \in Z, a|b; a \leq b\}$.

Algumas definições:
x natural $:= x \in \mathbb{N}$
x inteiro $:= x \in \mathbb{Z}$
$\mathsf{par}(x) := \exists a \in \mathbb{Z}. x = 2a$
$\mathsf{impar}(x) := \exists a \in \mathbb{Z}. x = 2a + 1$
$a|b := \exists k \in Z. ka = b$

Algumas dicas:
$x \in A \cup B = x \in A \vee x \in B$
$x \in \mathcal{C} = \{\, a \mid \exists B \in C. a \in B \,\}$

Mini-gabarito

1a) Podemos começar traduzindo essa proposição para português mais próximo de linguagem matemática, em vários passos: "todo inteiro par a pode ser expresso como soma de um inteiro par b e um inteiro ímpar c"; "Para todo inteiro par a existem um inteiro par b e um inteiro ímpar c tais que $a = b + c$". E aí

$\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c))$, ou:

$\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c)))$.

1b) Podemos começar com uma demonstração em português e depois formalizá-la. Seja a um inteiro ímpar. Sejam $b = 0$ e $c = a$; então b é par, c é ímpar, e $a = b + c$. Portanto existem um inteiro par b e um inteiro ímpar c tais que $a = b + c$.

A menos que a gente tenha *muita* prática é quase impossível chegar direto a uma formalização desse demonstração sem trabalhar "de trás pra frente" e "fazendo primeiro as extremidades e depois o meio" como o livro sugere. Os últimos passos com "Então" da demonstração vão ter estas traduções para a notação com '$\vdash$:

$\vdash \forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c)))$

$a \in \mathbb{Z} \vdash \mathsf{impar}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c)))$

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c))$

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \mathsf{par}(0) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = 0 + c))$

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = 0 + c)$

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + a)$

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + a)$

E vão ficar deste jeito no formato passo a passo:

?) Entao $\mathsf{impar}(a)$. (Por ?)
?) Entao $a = 0 + a$. (Por ?)
?) Entao $\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + a)$. (Por ?)
?) Entao $\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + c)$. (Por ?, com $c := a$)
?) Entao $\mathsf{par}(0) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + c))$. (Por ?)
?) Entao $\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por ?, com $b := 0$)
?) Entao $\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por ?)
?) Entao $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por ?)

A demonstração completa é:

1) Queremos ver que $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c)))$.
2) Suponha $a \in \mathbb{Z}$.
3) Suponha $\mathsf{impar}(a)$.
4) Entao $\mathsf{impar}(a)$. (Por 3)
5) Entao $a = 0 + a$. (Por 2)
6) Entao $\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + a)$. (Por 4, 5)
7) Entao $\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + c)$. (Por 6, com $c := a$)
8) Entao $\mathsf{par}(0) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = 0 + c))$. (Por 7)
9) Entao $\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por 8, com $b := 0$)
10) Entao $\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por 9)
11) Entao $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$. (Por 10)

1c) A linha 9 vira:

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{impar}(a) \vdash \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \land (a = b + c))$.